نکته۵: دو مثلث با رئوس $z_۱, z_۲$ و $z_۳$ و همچنین $w_۱, w_۲$ و $w_۳$ متشابه هستند، اگر و فقط اگر، دترمینان زیر صفر شود:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ \\ w_۱ & w_۲ & w_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

مثال۱۵: مثلثی به رئوس $z_۱=۰$, $z_۲=\beta+i$ و $z_۳=\alpha+۱$ و مثلث دیگری با رئوس $w_۱=-۱$ ، $w_۲=۱+i$ و $w_۳=۱-i$ داریم. اگر بخواهیم ایـن دو مثلث متشابه باشند، چه رابطه‌ای بین β و α برقرار است؟ (α و β اعداد حقیقی و مخالف صفر هستند)

۱) $\beta=۳\alpha$ ۲) $\beta=-۳\alpha$ ۳) $\alpha=۳\beta$ ۴) $\alpha=-۳\beta$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته‌ی فوق لازم است دترمینان رئوس دو مثلث برابر با صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & \beta+i & \alpha+۱ \\ -۱ & ۱+i & ۱-i \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow [(\beta+i)(۱-i)-(۱+i)(\alpha+۱)]-[۰-(-۱)(\alpha+۱)]+[۰-(-۱)(\beta+i)]=۰$$

$$\Rightarrow \beta-\beta i+i-i^۲-i\alpha-i-\alpha-۱-\alpha-۱+\beta+i=۰ \Rightarrow (۲\beta-۲\alpha-۱)+(۱-\beta-\alpha)i=۰$$

بنابراین داریم:

$$۲\begin{cases} ۲\beta-۲\alpha-۱=۰ \\ ۱-\beta-\alpha=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲-۲\alpha-۲\alpha-۱=۰ \Rightarrow ۴\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \beta=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \beta=۳\alpha$$

نکته۶: شرط آن که سه نقطه متمایز $z_۱$ ، $z_۲$ و $z_۳$ بر یک خط راست واقع باشند، این است که $\frac{z_۳-z_۲}{z_۲-z_۱}$ عددی حقیقی و مخالف صفر باشد.

ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $z_۱=x_۱+iy_۱$, $z_۲=x_۲+iy_۲$ مفروضند، **ضرب داخلی** $z_۱$ و $z_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z_۱.z_۲=x_۱x_۲+y_۱y_۲}$$

و **ضرب خارجی** $z_۱$ و $z_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{z_۱\times z_۲=x_۱y_۲-y_۱x_۲}$$

زاویه بین دو عدد (بردار) مختلط: زاویه بین دو عدد مختلط $z_۱, z_۲$ را می‌توان از یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود :

$$\boxed{\sin\theta=\frac{z_۱\times z_۲}{|z_۱||z_۲|}} \quad , \quad \boxed{\cos\theta=\frac{z_۱.z_۲}{|z_۱||z_۲|}}$$

مثال۱۶: اگر $z_۱=۳-۴i$, $z_۲=۳i-۴$ آن‌گاه حاصل $A=\frac{z_۱.z_۲}{z_۱\times z_۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۷}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_۱.z_۲=(۳)(-۴)+(-۴)(۳)=-۲۴ \\ z_۱\times z_۲=(۳)(۳)-(-۴)(-۴)=-۷ \end{cases} \Rightarrow A=\frac{z_۱.z_۲}{z_۱\times z_۲}=\frac{۲۴}{۷}$$

شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z=x+iy$ را می‌توان به شکل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. θ را **آرگومان یا آونـد** یـا زاویه فاز عدد مختلط z و r را **قدر مطلق، مدول و یا اندازه** عدد مختلط z می‌گویند. و تساوی‌های مقابل را داریم: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

محاسبه‌ی اندازه و آرگومانِ اعداد مختلط

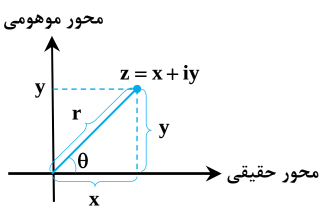
عدد مختلط غیر صفر $z=x+iy$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل فاصله‌ی نقطه‌ی z تا مبدأ مختصات را با r نشان می‌دهیم و همان‌طور که گفتیم؛ بـه آن انـدازه z گفته می‌شود و به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{r=|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

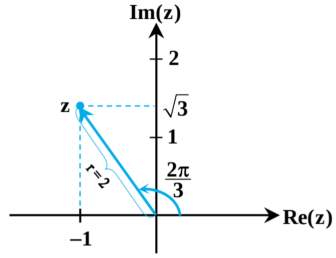
r عددی مثبت است.

از طرفی مطابق شکل، منظور از یک آرگومان z ، زاویه‌ای مانند θ است. چون $\frac{y}{x}=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}}=tg\theta$ ، لذا داریم:

$$\boxed{\theta=Arctg(\frac{y}{x})}$$



۳) $z=-۱+\sqrt{۳}i$

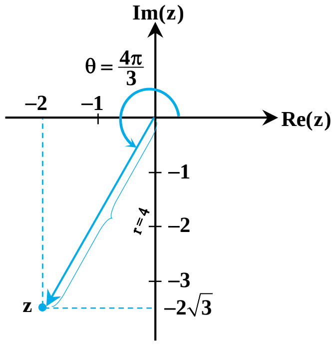


$$\begin{cases} r=\sqrt{(-۱)^۲+(\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲ \\ \text{Arctg}(\frac{\sqrt{۳}}{-۱})=-\text{Arctg}\sqrt{۳}=-\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

چون نقطه در ربع **دوم** قرار دارد، باید به $-\frac{\pi}{۳}$، عدد π را اضافه کنیم، لذا $\theta=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$

و بنابراین $z=(۲,\frac{۲\pi}{۳})$ است.

۴) $z=-۲-۲\sqrt{۳}i$



$$\begin{cases} r=\sqrt{(-۲)^۲+(-۲\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۴+۱۲}=۴ \\ \text{Arctg}(\frac{-۲\sqrt{۳}}{-۲})=\text{Arctg}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

چون نقطه در ربع **سوم** است، پس باید به $\frac{\pi}{۳}$، عدد π اضافه شود، بنابراین $\theta=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$ جواب موردنظر است

و بنابراین $z=(۴,\frac{۴\pi}{۳})$ است.

تذکر ۲: آرگومان $z=ki$ برابر با $\theta=\frac{\pi}{۲}$ و $z=-ki$ برابر با $\theta=-\frac{\pi}{۲}$ است (k عددی حقیقی و بزرگتر از صفر است.)

$$z=ki \Rightarrow \theta=\text{Arctg}\frac{k}{۰}=\text{Arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad z=-ki \Rightarrow \theta=\text{Arctg}(\frac{-k}{۰})=-\text{Arctg}\infty=-\frac{\pi}{۲}$$

مثال ۱۷: اگر $z=i(۱-i\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+i)$، آن‌گاه فرم قطبی z کدام است؟

۱) $(۲,\frac{\pi}{۶})$ ‏ ۲) $(۲,\frac{\pi}{۳})$ ‏ ۳) $(۴,\frac{\pi}{۶})$ ‏ ۴) $(۴,\frac{\pi}{۳})$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا عبارت ساده شود:

$$z=(i-i^۲\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+i)=(i+\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+i)=(\sqrt{۳}+i)^۲=(\sqrt{۳})^۲+i^۲+۲\sqrt{۳}i=۳-۱+۲\sqrt{۳}i=۲+۲\sqrt{۳}i$$

ابتدا اندازه‌ی z را حساب می‌کنیم:

$$r=|z|=\sqrt{۲^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۴+۴\times ۳}=\sqrt{۱۶}=۴$$

حالا باید آرگومان z را حساب کنیم و لذا داریم:

$$\text{Arctg}(\frac{y}{x})=\text{Arctg}(\frac{۲\sqrt{۳}}{۲})=\text{Arctg}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

چون θ در ربع اول قرار دارد، بنابراین همان $\theta=\frac{\pi}{۳}$ مورد قبول است، پس $z=(۴,\frac{\pi}{۳})$، فرم قطبی مطلوب است.

شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ را می‌توان به فرم $z=re^{i\theta}$ نوشت که به آن فرم نمائی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z=re^{i\theta}$ را به شکل $z=r\measuredangle\theta$ نیز می‌توان نمایش داد، که البته نمایش آخری در ریاضیات کمتر به چشم می‌خورد.

مثال ۱۸: عدد مختلط $z=۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

پاسخ : با توجه به این $r=۲$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد، داریم:

$$z=۲(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳})=۲(\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۱+i\sqrt{۳}$$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

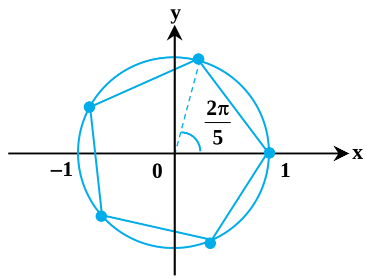
معمولاً برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم‌نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_۱=r_۱e^{i\theta_۱}$ و $z_۲=r_۲e^{i\theta_۲}$ آن‌گاه خواهیم داشت:

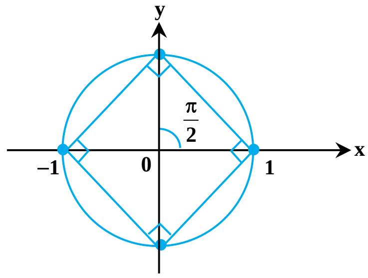
$$۲)\ z_۱z_۲=r_۱r_۲e^{i(\theta_۱+\theta_۲)} \quad \text{و} \quad ۱)\ \frac{z_۱}{z_۲}=\frac{r_۱}{r_۲}e^{i(\theta_۱-\theta_۲)}$$

نکته۱: از نظر هندسی، ریشه‌های «nام» متمایز عدد مختلط و غیرصفر z، با قدرمطلق r، رأس‌های n ضلعی منتظمی محاط در دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به مرکز مبدأ مختصات در صفحه‌ی مختلط هستند و فاصله‌ی این رئوس بر روی دایره از هم $(\frac{2\pi}{n})$ است. (طبیعی است برای $n \geq 3$ این شرط برقرار است، چون در غیر این صورت، n ضلعی تشکیل نمی‌شود!) بنابراین اندازه‌ی تمام ریشه‌های nام با یکدیگر مساوی و برابر با $\sqrt[n]{r}$ خواهد بود و در واقع تفاوت این ریشه‌ها در زاویه (آرگومان) آن‌ها است.

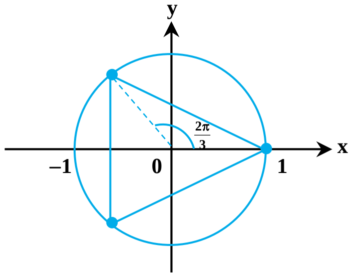
برای مثال برای ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم عدد «یک» اشکال زیر را داریم که فاصله‌ی ریشه‌ها بر روی دایره‌ها مطابق زوایای نشان داده شده است:



$(\sqrt[5]{1})$



$(\sqrt[4]{1})$

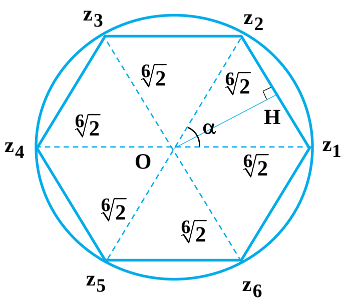


$(\sqrt[3]{1})$

مثال ۱۲ (سخت): ریشه‌های ششم عدد ۲ رئوس یک شش ضلعی منتظم را تشکیل داده‌اند. اگر مساحت این شش ضلعی را S بنامیم، مقدار S برابر با کدام گزینه است؟

۱) $3\sqrt{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ۲) $3\sqrt{3}\times\sqrt[6]{2}$ ۳) $3\sqrt{3}(\frac{\sqrt[3]{2}}{2})$ ۴) $9\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق مطالب گفته شده؛ این ریشه‌ها بر روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[6]{2}$ قرار می‌گیرند که فاصله آن‌ها بر روی دایره $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$ می‌باشد. مثلاً طول کمان $\overset{\frown}{z_1 z_2}$ برابر با $\frac{\pi}{3}$ است، چون این کمان رو به‌روی زاویه‌ی مرکزی α است، لذا $\alpha = \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. در مثلث oz_1z_2 زاویه‌ی رأس برابر با $\frac{\pi}{3}$ است و چون اندازه‌ی دو ساق برابر با $\sqrt[6]{2}$ می‌باشد، بنابراین دو زاویه‌ی دیگر مثلث با هم برابر و اجباراً مساوی $\frac{\pi}{3}$ هستند و این یعنی مثلث $\overset{\Delta}{oz_1z_2}$ متساوی‌الاضلاع است. اگر ارتفاع OH را رسم کنیم در مثلث $\overset{\Delta}{OHz_1}$ داریم:



$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{OH}{Oz_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{\sqrt[6]{2}} \Rightarrow OH = \sqrt[6]{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین مساحت مثلث $\overset{\Delta}{oz_1z_2}$ به‌صورت مقابل است:

$$\overset{\Delta}{oz_1z_2} = \frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{2} = \frac{\sqrt[6]{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt[6]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}}{4}$$

چون ۶ مثلث به این شکل داریم، بنابراین مساحت ۶ ضلعی ۶ برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{oz_1z_2}$ است:

$$S = 6\times(\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}}{4}) = \frac{3}{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}(\frac{\sqrt[3]{2}}{2})}$$

معادلات مختلط

بخش قابل توجهی از سؤالات اعداد مختلط به «معادلات مختلط» اختصاص دارد. معمولاً این نوع سؤالات به روش‌های مختلفی حل می‌شوند که سعی شده در این قسمت تا حد ممکن آن‌ها را دسته‌بندی کنیم. قبل از دسته‌بندی معادلات با یک مثال که بر اساس قانون «ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند» بحث را شروع می‌کنیم:

مثال ۱۳: اگر نقطه‌ی $z = -1 + i$، یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^7 + az^3 + 2b = 0$ باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند، با قرار دادن $z = -1 + i$ در معادله داده شده، داریم:

$$z^7 + az^3 + 2b = 0 \Rightarrow (-1+i)^7 + a(-1+i)^3 + 2b = 0$$

$$((-1+i)^2)^3(-1+i) + a(-1+i)^2(-1+i) + 2b = 0 \Rightarrow (1+i^2-2i)^3(-1+i) + a(1+i^2-2i)(-1+i) + 2b = 0 \Rightarrow$$

$$-8(i^2)i(-1+i) + a(2i-2i^2) + 2b = 0 \Rightarrow -8i + 8i^2 + 2ai + 2a + 2b = 0$$

$$-8 + 2a + 2b + i(2a-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -8 + 2a + 2b = 0 \\ 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \end{cases} \Rightarrow -8 + 8 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \mathbf{a + b = 4}$$

روش دیگر: البته با توجه به اینکه توان z، ۷ و ۳ می‌باشد و راه‌حل فوق می‌تواند توأم با خطا باشد، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید که چون نقطه در ربع دوم قرار دارد لذا $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، بنابراین داریم:

$$z^7=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^7=2^3\times\sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{4}}=8\sqrt{2}[\cos(\frac{21\pi}{4})+i\sin(\frac{21\pi}{4})]=8\sqrt{2}[\cos(5\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(5\pi+\frac{\pi}{4})]\Rightarrow$$

$$z^7=-8\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-i8\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-8-8\times i=-8-8i$$

$$z^3=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^3=2\times\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=2\sqrt{2}[\cos(\frac{9\pi}{4})+i\sin(\frac{9\pi}{4})]=2\sqrt{2}[\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})]\Rightarrow$$

$$z^3=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+i2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+i2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+2i$$

حالا مقادیر فوق را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$z^7+az^3+2b=0\Rightarrow -8-8i+2a+(2a)i+2b=0\Rightarrow(2a+2b-8)+(2a-8)i=0\Rightarrow a=4,b=0$$

حالا سراغ دسته‌بندی‌های مختلف معادلات مختلط می‌رویم:

الف) معادلاتی که فرم معادله‌ی درجه (۲) عادی را دارند یا می‌توان آن‌ها را به شکل معادله‌ی درجه (۲) بازنویسی کرد:

از قبل می‌دانیم معادلات درجه (۲) به شکل $ax^2+bx+c=0$ در مجموعه اعداد حقیقی چگونه حل می‌شدند، (در آنجا a، b و c اعدادی حقیقی بودند) قواعد برای اعداد مختلط نیز عیناً اجرا می‌شوند، یعنی در معادلاتی به فرم $az^2+bz+c=0$ که البته a، b و c می‌توانند اعداد مختلط باشند، ریشه‌ها به‌صورت زیر حساب می‌شوند:

$$\boxed{z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

مثال ۱۴: یکی از ریشه‌های معادله $z^2+(2i-3)z+5-i=0$ کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $2+3i$ ۳) $2-3i$ ۴) $-1-i$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید دلتای معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}=\sqrt{4i^2+9-12i-20+4i}=\sqrt{-15-8i}=\sqrt{(1-4i)^2}=1-4i$$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2i-3)\pm(1-4i)}{2\times1}\Rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{-2i+3+1-4i}{2}=\dfrac{4-6i}{2}=2-3i\\ z_2=\dfrac{-2i+3-1+4i}{2}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i\end{cases}$$

مثال ۱۵: در معادله $z^2-4z+7+4i=0$ که در آن $i=\sqrt{-1}$، تفاضل دو ریشه به‌صورت $a+ib$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ : گزینه «۱» ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta'=\sqrt{b'^2-ac}=\sqrt{(2)^2-1\times(7+4i)}=\sqrt{4-7-4i}=\sqrt{-3-4i}=\sqrt{(2i-1)^2}=2i-1$$

$$z_{1,2}=\frac{2\pm(2i-1)}{1}=2\pm(2i-1)\Rightarrow\begin{cases}z_1=2+2i-1=1+2i\\ z_2=2-(2i-1)=3-2i\end{cases}$$

$$z_1-z_2=(1+2i)-(3-2i)=-2+4i=a+ib\Rightarrow a=-2\,,\,b=4\Rightarrow ab=(-2)(4)=-8$$

مثال ۱۶: اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله‌ی $z^2-2z+4=0$ باشند، حاصل $A=z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) -۱۲۸ ۳) -۶۴ ۴) ۱۲۸

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله‌ی داده شده، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{4}{1}=4$ است، بنابراین $z_1z_2=4$ می‌شود. پس فقط کافیست $z_1^6+z_2^6$ حساب شود. برای این منظور لازم است ریشه‌های معادله حساب شود:

$$z^2-2z+4=0\Rightarrow z_{1,2}=1\pm\sqrt{-3}=1\pm i\sqrt{3}\Rightarrow z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}\,,\,z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_1^6+z_2^6=2^6e^{6i\times\frac{\pi}{3}}+2^6e^{-i6\times\frac{\pi}{3}}=2^6\cos(2\pi)+i2^6\sin2\pi+2^6\cos(-2\pi)-i2^6\sin2\pi=2^6\times1+2^6\times1=2\times2^6=2^7=128$$

بنابراین داریم:

$$z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3=128-3(4)^3=128-192=-64$$

مثال ۱۷: کدام‌یک از گزینه‌های زیر از ریشه‌های معادله‌ی $z^8+z^4+1=0$ **نیست**؟

۱) $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ۳) $\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به یک معادله درجه ۲ تبدیل می‌کنیم و سپس ریشه‌های این معادله را به‌دست می‌آوریم و بنابراین داریم:

$$(z^4)^2+z^4+1=0 \xrightarrow{z^4=x} x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4=-3 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z=\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} \quad , \quad r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \quad , \quad tg\theta=\sqrt{3} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$z=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4})\begin{cases} k=0\Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \Rightarrow \text{پس گزینه (۲) ریشه‌ی معادله است} \\ k=1\Rightarrow z=\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}) & \Rightarrow \text{پس گزینه (۱) ریشه‌ی معادله است} \\ k=2\Rightarrow z=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3}) & \Rightarrow \text{پس گزینه (۳) ریشه‌ی معادله است}\end{cases}$$

مثال ۱۸: اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ آن‌گاه حاصل $z^n+\frac{1}{z^n}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $2\sin n\theta$ ۲) $2\cos n\theta$ ۳) $(2\cos\theta)^n$ ۴) $(2\sin\theta)^n$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار z را حساب می‌کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z^2-2z\cos\theta+1=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}}{1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$z=\cos\theta\pm i\sqrt{\sin^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$$

اگر $z=e^{i\theta}$، آن‌گاه $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

اگر $z=e^{-i\theta}$ آن‌گاه $\frac{1}{z}=e^{i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{-in\theta}+e^{in\theta}=(\cos n\theta-i\sin n\theta)+(\cos n\theta+i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر $2\cos n\theta$ به‌دست آمد.

مثال ۱۹: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(z-i)^n+\frac{1}{(z-i)^n}+1=0$، کدام است؟ $(k=0,1,...,n-1)$

۱) $\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})-i\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})$ ۲) $\cos(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})]$

۳) $\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})-i[1+\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})]$ ۴) $\cos(\frac{4\pi+6\pi}{3n})+i\sin[\frac{4\pi+6k\pi}{3n}]$

پاسخ: گزینه «۲» برای راحتی در محاسبات فرض کنید؛ $w=z-i$، و لذا داریم:

$$w^n+\frac{1}{w^n}+1=0\Rightarrow w^{2n}+w^n+1=0$$

حالا فرض می‌کنیم $A=w^n$ باشد، لذا داریم:

$$A^2+A+1=0\Rightarrow\begin{cases} A_1=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ A_2=\frac{-1-\sqrt{1-4}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin(\frac{4\pi}{3})\end{cases}$$

اما چون $w^n=A$، بنابراین کافیست ریشه‌های n ام دو عدد مختلط A_1 و A_2 حساب شوند:

$$w_1=\cos(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{n}) \quad , \quad w_2=\cos(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{n}) \quad , \ (k=0,...,n-1)$$

چون $w=z-i$، لذا ریشه‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$z_1=\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})] \quad , \quad z_2=\cos(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})] \ , \ (k=0,...,n-1)$$

مثال ۲۰: اگر α عددی حقیقی باشد که مضرب $\frac{\pi}{2}$ نیست و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 tg^2\alpha + xtg\alpha + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل $x_1^6 + x_2^6$ کدام است؟

۱) $tg^6\alpha$ ۲) $\cot g^6\alpha$ ۳) $2tg^6\alpha$ ۴) $2\cot g^6\alpha$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال اصلاً سخت نیست! با استفاده از تشکیل Δ، ابتدا ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به‌دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را به توان ۶ می‌رسانیم.

$$x^2\tan^2\alpha + x\tan\alpha + 1 = 0 \quad , \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \tan^2\alpha - 4\tan^2\alpha = -3\tan^2\alpha$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-tg\alpha \pm\sqrt{-3tg^2\alpha}}{2tg^2\alpha} = \frac{-tg\alpha \pm i\sqrt{3}tg\alpha}{2tg^2\alpha} = -\frac{1}{2tg\alpha} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2tg\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{tg\alpha}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x_2 = \frac{1}{tg\alpha}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

با توجه به اینکه لازم است توان ۶ ریشه‌های فوق حساب شود، بهتر است عبارت را به شکل قطبی بنویسیم، اندازه‌ی x_1 و x_2 برابراست با $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$،

و آرگومان x_1 چون در ربع دوم قرار دارد برابر با $\theta_1 = Arctg\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = Arctg(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ و آرگومان x_2 چون در ربع سوم قرار دارد برابر با $\frac{4\pi}{3}$ است و لذا داریم:

$$x_1 = \frac{1\times e^{i\frac{2\pi}{3}}}{tg\alpha} \quad , \quad x_1^6 = \frac{e^{i6\times\frac{2\pi}{3}}}{tg^6\alpha} = \frac{e^{i4\pi}}{tg^6\alpha} = \frac{\cos 4\pi + i\sin 4\pi}{tg^6\alpha} = \frac{1}{tg^6\alpha}$$

$$x_2 = \frac{1\times e^{i\frac{4\pi}{3}}}{tg\alpha} \Rightarrow x_2^6 = \frac{e^{i6\times\frac{4\pi}{3}}}{tg^6\alpha} = \frac{\cos 8\pi + i\sin 8\pi}{tg^6\alpha} = \frac{1}{tg^6\alpha}$$

بنابراین داریم: $x_1^6 + x_2^6 = \frac{1}{tg^6\alpha} + \frac{1}{tg^6\alpha} = \frac{2}{tg^6\alpha} = \mathbf{2cotg^6\alpha}$

ب) در برخی سؤالات معادله‌هایی داده می‌شوند که معمولاً به راحتی می‌توان با یک نگاه ریشه‌های آن را حدس زد. (که معمولاً ±1، $\pm i$، ±2 و $\pm2i$ هستند) اگر این ریشه z_0 باشد، معادله را می‌توان بر $z - z_0$ تقسیم و معادله را ساده‌تر کرد، مثال زیر موضوع را بهتر روشن می‌کند:

مثال ۲۱: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^3 - 7z^2 + 25z - 39 = 0$ برابر با ۳ است. دو ریشه‌ی دیگر کدامند؟

۱) ۱- و ۱۳ ۲) ۱- و ۵ ۳) $2-3i$ و $2+3i$ ۴) $3-2i$ و $3+2i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که یک ریشه $z = 3$ است لذا معادله را بر $(z-3)$ تقسیم می‌کنیم.
تقسیم را از دبیرستان بلدیم!

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 7z^2 + 25z - 39 & z-3 \\ \cline{2-2} -(z^3 - 3z^2) & z^2 - 4z + 13 \\ \hline -4z^2 + 25z - 39 & \\ -(-4z^2 + 12z) & \\ \hline 13z - 39 & \\ -(13z - 39) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

با توجه به تقسیم مقابل، معادله به شکل زیر است:

$$(z-3)(z^2 - 4z + 13) = 0$$

همان‌طور که می‌بینید با یک معادله‌ی درجه‌ی دوم راحت برخورد کرده‌ایم، لذا داریم:

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

ج) برای حل برخی معادلات باید از اطلاعات قبلی خودمان در مورد تصاعد هندسی استفاده کنیم، برای این منظور فرمول زیر را مجدداً یادآوری می‌کنیم:
اگر t_1 جمله‌ی اول تصاعد، تعداد جملات آن n و قدرنسبت تصاعد q باشد، مجموع n جمله‌ی اول این تصاعد از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}}$$

مثال ۲۲: یکی از جوابهای معادله $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ کدام است؟

۱) $\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$ ۲) $\cos\frac{4\pi}{7} - i\sin\frac{4\pi}{7}$ ۳) $\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$ ۴) $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت داده شده در سمت چپ، یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_1 = 1$، قدرنسبت $q = z$ و تعداد جملات $n = 5$ است، لذا داریم:

$$\frac{1(1-z^5)}{1-z} = 0 \Rightarrow 1 - z^5 = 0 \Rightarrow z^5 = 1$$

باید ریشه‌های پنجم عدد یک را به‌دست بیاوریم:

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \xrightarrow{n=5} z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$$

به ازای $k = 1$ یکی از جواب‌ها به‌صورت زیر است:

$$z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

مثال ۲۳: ریشه‌های معادله $z^4+z^2+1=0$ به‌صورت $\pm a\pm ib$ هستند، b^2-a^2 کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی واضح است یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_1=1$، قدر نسبت $q=z^2$، و تعداد جملات $n=3$، را داریم: پس می‌توان نوشت: $A=\frac{1(1-(z^2)^3)}{1-z^2}$ و بنابراین سمت چپ برابر با $\frac{1-z^6}{1-z^2}$ است.

$$z^6-1=0\Rightarrow z^6=1\Rightarrow z=1e^{\frac{2k\pi+0}{6}}=e^{\frac{k\pi}{3}}\qquad (k=0,1,\cdots,5)$$

که به ازای $k=0$ و $k=3$، آن‌گاه $z=\pm1$ می‌شود و لذا غیر قابل قبول هستند. (چون $1-z^2\neq0$) و لذا داریم:

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad z_4=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $a=\pm\frac{1}{2}$ و $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ و لذا داریم:

$$b^2-a^2=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\pm\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۴: ریشه‌های معادله‌ی $1-iz-z^2+iz^3+z^4-iz^5=0$ به‌صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ هستند، بیشترین مقدار α در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{17\pi}{10}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{11\pi}{6}$ ۴) $\frac{9\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» سمت چپ معادله‌ی فوق یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_1=1$ و قدر نسبت $q=-iz$ و تعداد جملات $n=6$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{1[1-(-iz)^6]}{1-(-iz)}=0\Rightarrow\frac{1-i^6z^6}{1+iz}=0\Rightarrow\frac{1+z^6}{1+iz}=0\Rightarrow z^6+1=0\Rightarrow z^6=-1$$

بنابراین باید ریشه‌های ششم عدد -1 را حساب کنیم، چون $-1=e^{i\pi}$، لذا داریم:

$$z=1\times e^{i\frac{2k\pi+\pi}{6}}=e^{i(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}\qquad k=0,1,\ldots,5$$

به ازای $k=5$، داریم:

$$\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{10\pi+\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین بیشترین مقدار α برابر با $\frac{11\pi}{6}$ است.

$$z=\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6})$$

مثال ۲۵: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^4+z^2+1=z^5+z^3+z$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۱) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{5\pi}{3}i}$ ۳) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ۴) $e^{\frac{\pi}{6}i}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تمام عبارات سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5=0$$

واضح است سمت چپ یک تصاعد هندسی با جمله اول $t_1=1$، قدر نسبت $q=-z$ و تعداد جملات $n=6$ است، لذا داریم:

$$\frac{1(1-z^6)}{1-(-z)}=0\Rightarrow\frac{1-z^6}{1+z}=0\Rightarrow1-z^6=0\Rightarrow z^6=1\quad,\quad(z\neq-1)$$

بنابراین باید ریشه‌های ششم عدد ۱ را حساب کنیم:

$$z=\sqrt[6]{1}e^{i\frac{2k\pi}{6}}=e^{i\frac{k\pi}{3}}\xrightarrow{k=5}z=e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

مثال ۲۶: تمام ریشه‌های معادله‌ی $z^n+3z^{n-1}+3z^{n-2}+\cdots+3z+2=0$، کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی‌شریف)

۱) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=0,1,\ldots,n-1$

۲) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=1,\ldots,n-1$

۳) $z=-2\ ,z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=0,\ldots,n-1$

۴) $z=-2\ ,z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\ k=1,\ldots,n-1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله را به‌صورت مقابل مرتب می‌کنیم:

$$z^n+z^{n-1}+\cdots+z+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)=0$$

$$\Rightarrow z(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)=0\Rightarrow(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)(z+2)=0$$

یکی از جواب‌ها برابر با $z=-2$ است و «$n-1$» ریشه‌ی دیگر، از حل معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1=0\xrightarrow{\text{تصاعد هندسی است}}\frac{z^n-1}{z-1}=0\xrightarrow{z\neq1}z^n-1=0\Rightarrow z^n=1$$

بنابراین داریم:

$$z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})\ ,\quad(z\neq1)\ ,\ k=1,\ldots,n-1$$

k نمی‌تواند مساوی صفر باشد، چون $z=1$ جزو ریشه‌ها نیست.

مثال ۷: معادله‌ی پارامتری $\begin{cases} x = 1 + 2\cosh t \\ y = 3\sinh t \end{cases}$، معرف دقیق کدام منحنی است؟

۱) شاخه راست یک هذلولی ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) بیضی

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$، لذا باید $\cosh t$ را برحسب x و $\sinh t$ را برحسب y بنویسیم:

$$\cosh t = \frac{x-1}{2}, \sinh t = \frac{y}{3} \quad \text{و} \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2 = 1$$

معادله‌ی فوق نمایانگر یک هذلولی است و چون $\cosh t \geq 1$، در نتیجه $\frac{x-1}{2} \geq 1$ و به عبارت دیگر $x \geq 3$، پس **نیمه راست یک هذلولی** است.

مثال ۸: مکان هندسی همه نقاطی از صفحه که در رابطه‌ی $|z-1| - |1 + \mathrm{Re}\,z| = 0$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) دایره

پاسخ: گزینه «۱» با فرض اینکه $z = x + iy$، در این صورت $\mathrm{Re}\,z = x$ و لذا داریم:

$$|x + iy - 1| - |1 + x| = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - (1+x)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 - 1 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 = 4x$$

که **معادله‌ی یک سهمی** است.

مثال ۹: مکان هندسی نقطه‌ی $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط و غیرحقیقی z که در رابطه‌ی $z^3 + z^2 - 2z = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 2\bar{z}$ صدق کند، کدام است؟

۱) نیم‌دایره ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) بیضی

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید توجه کنید سمت راست تساوی مزدوج سمت چپ تساوی است، چرا که همواره داریم: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3}$

و بنابراین داریم:

$$\bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 2\bar{z} = \overline{z^3 + z^2 - 2z}$$

در واقع اگر سمت چپ w باشد، سمت راست $\bar{w}$ است، پس تساوی $w = \bar{w}$ را داریم و این یعنی $\mathrm{Im}(w) = 0$ است. پس کافی است قسمت موهومی سمت چپ را حساب کرده و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$(x+iy)^3 + (x+iy)^2 - 2(x+iy) = x^3 + (iy)^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + x^2 + (iy)^2 + i2xy - 2x - 2iy$$

$$= x^3 - iy^3 + i3x^2y - 3xy^2 + x^2 - y^2 + i2xy - 2x - (2y)i \Rightarrow \mathrm{Im}(w) = -y^3 + 3x^2y + 2xy - 2y$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(w) = y(-y^2 + 3x^2 + 2x - 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0$$

معادله‌ی فوق، نمایانگر یک **هذلولی** است. البته اگر بخواهید از نکات فوق استفاده نکنید، می‌توانید فرض کنید $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ و محاسبات را در طرفین انجام دهید و در نهایت به نتیجه‌ی فوق برسید.

مثال ۱۰: مساحت ناحیه‌ی بین خط $\mathrm{Re}(z) = 0$ و نموداری که با معادله‌ی $z^3 + 3z^2 + 3z = (\bar{z})^3 + 3(\bar{z})^2 + 3\bar{z}$ مشخص می‌شود، کدام است؟

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) 3

پاسخ: گزینه «۲» اگر قرار دهیم $w = z^3 + 3z^2 + 3z$، آن‌گاه معادله داده شده به صورت $w = \bar{w}$ خواهد شد و این یعنی $\mathrm{Im}(w) = 0$ است. حالا لازم است $\mathrm{Im}(w)$ را حساب کنیم:

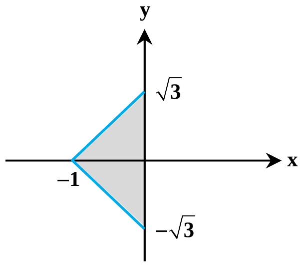
$$\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(z^3 + 3z^2 + 3z) = \mathrm{Im}[(x+iy)^3 + 3(x+iy)^2 + 3(x+iy)] = \mathrm{Im}[x^3 - iy^3 + i3x^2y - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + i(6xy) + 3x + 3iy]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(w) = -y^3 + 3x^2y + 6xy + 3y = y[-y^2 + 3(x^2 + 2x + 1)] \Rightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Rightarrow y = 0 \ , \ 3(x+1)^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}(x+1) \ , \ y = 0$$

نمودار این منحنی به صورت مقابل است:

که مساحت بین آن و $\mathrm{Re}(z) = 0$ و به عبارت دیگر مساحت محصور بین آن و محور y ها، که با سایه نشان داده شده است، مثلثی به طول قاعده‌ی $2\sqrt{3}$ و ارتفاع ۱ است.

$$S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \times 1) = \sqrt{3}$$



آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۱۵ — **مدت زمان پاسخگویی: ۴۰ دقیقه** — **سطح آزمون : A**

۱ـ مقدار z از معادلهی $(\frac{z+i}{z-i})^4+(\frac{z+i}{z-i})^3+(\frac{z+i}{z-i})^2+(\frac{z+i}{z-i})+1=0$ کدام است؟

۱) $-i\cot g(\frac{k\pi}{5})$ ۲) $\cot g(\frac{k\pi}{5})$ ۳) $tg(\frac{k\pi}{5})$ ۴) $-itg(\frac{k\pi}{5})$

۲ـ اگر z یک ریشهی معادلهی $az^2+bz+c=0$ باشد و $|z|=1$، آنگاه کدام رابطهی زیر حتماً برقرار است؟

۱) $|c\bar{c}-b\bar{b}|=|\bar{a}b-\bar{b}a|$ ۲) $|a\bar{b}-b\bar{a}|=|a\bar{a}-\bar{c}c|$ ۳) $|a\bar{b}-b\bar{c}|=|\bar{a}a-b\bar{b}|$ ۴) $|\bar{a}b-\bar{b}c|=|a\bar{a}-c\bar{c}|$

۳ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر $|z_1|=1$ و $|z_2|=1$ و $z_1z_2\neq -1$، آنگاه عدد $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ حقیقی است.

۲) اگر $|z|=|a|=1$، آنگاه $\frac{z}{(z-a)(1-\bar{a}z)}$، نمایش یک عدد حقیقی مثبت است.

۳) حاصل $|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}|$ با شرط $|z|=|w|$ برابر با ۱ است ($\bar{z}w\neq 1$)

۴) اگر $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ و $z_1+z_2+z_3=0$، آنگاه z_1 و z_2 و z_3 رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند که درون دایره واحد محاط شده‌اند.

۴ـ اگر $i^{a+ib}=a+ib$، آنگاه مقدار a^2+b^2 برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{-b(4k+1)\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{-b(4k+1)\pi}$ ۳) $e^{b(4k+1)\frac{\pi}{2}}$ ۴) $e^{b(4k+1)\pi}$

۵ـ ریشه‌های معادله $z^n-\bar{z}=0$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{i\frac{k\pi}{n+1}}$ ۲) $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ ۳) $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ۴) $e^{i\frac{k\pi}{n}}$

۶ـ حاصل $\sin[iLn(\frac{1+ie^{-i\frac{\pi}{8}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{8}}})]$ برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی Ln موردنظر می‌باشد.)

۱) $-\cos\frac{\pi}{8}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{8}$ ۳) $-\sin\frac{\pi}{8}$ ۴) $\sin\frac{\pi}{8}$

۷ـ با استفاده از $(\cos\theta+i\sin\theta)^5$، مقدار $tg5\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{5tg\theta+10tg^3\theta-9tg\theta}{1+5tg^2\theta-2tg^3\theta}$ ۲) $\frac{-5tg\theta+10tg^3\theta-tg\theta}{5-10tg^2\theta+tg^4\theta}$ ۳) $\frac{-5tg\theta+10tg^3\theta-tg\theta}{5-2tg^2\theta+tg^4\theta}$ ۴) $\frac{5tg\theta-10tg^3\theta+tg^5\theta}{1-10tg^2\theta+5tg^4\theta}$

۸ـ حاصل $S=\cos(\frac{2\pi}{7})+\cos(\frac{4\pi}{7})+\cos(\frac{6\pi}{7})$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{2}$

۹ـ حاصل $A=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$ کدام است؟ (راهنمایی: از حل معادله‌ی $(1-z)^n=1$ کمک بگیرید.)

۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{5}{16}$

۱۰ـ مجموع قسمت‌های حقیقی دو ریشه از معادله‌ی مختلط $z^4+100+9z^2=-6z^3$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) 2 ۴) -8

۱۱ـ اگر اعداد مختلط z_1، z_2 و z_3 در معادله $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ صدق کنند، آنگاه z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث ....

۱) متساوی‌الاضلاع هستند. ۲) قائم‌الزاویه هستند.

۳) متساوی‌الساقین با زاویه رأس قائمه هستند. ۴) متساوی‌الساقین با یک زاویه‌ی منفرجه هستند.

۱۲ـ فرض کنید $z=\cos(\frac{\pi}{1392})+i\sin(\frac{\pi}{1392})$، در این صورت حاصل $\sum_{n=0}^{1392}(z^n+\frac{1}{z^n})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2^{1392}}$ ۳) $\frac{1}{2^{1391}}$ ۴) ۰