

نکته ۵: دو مثلث با رئوس  $Z_1, Z_2, Z_3$  و همچنین  $W_1, W_2, W_3$  متشابه هستند، اگر و فقط اگر، دترمینان زیر صفر شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال ۱۵: مثلثی به رئوس  $Z_1 = 0, Z_2 = \beta + i, Z_3 = \alpha + 1$  و مثلث دیگری با رئوس  $W_1 = -1, W_2 = 1 + i, W_3 = 1 - i$  داریم. اگر بخواهیم این دو مثلث متشابه باشند، چه رابطه‌ای بین  $\alpha$  و  $\beta$  برقرار است؟ ( $\alpha$  و  $\beta$  اعداد حقیقی و مخالف صفر هستند)

$$\alpha = -3\beta \quad (۴) \qquad \alpha = 3\beta \quad (۳) \qquad \beta = -3\alpha \quad (۲) \qquad \beta = 3\alpha \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته‌ی فوق لازم است دترمینان رئوس دو مثلث برابر با صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta + i & \alpha + 1 \\ -1 & 1 + i & 1 - i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow [(\beta + i)(1 - i) - (1 + i)(\alpha + 1)] - [0 - (-1)(\alpha + 1)] + [0 - (-1)(\beta + i)] = 0$$

$$\Rightarrow \beta - \beta i + i - i^2 - i\alpha - i - \alpha - 1 - \alpha - 1 + \beta + i = 0 \Rightarrow (2\beta - 2\alpha - 1) + (1 - \beta - \alpha)i = 0$$

$$\begin{cases} 2\beta - 2\alpha - 1 = 0 \\ 1 - \beta - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 - 2\alpha - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

بنابراین داریم:

نکته ۶: شرط آن که سه نقطه متمایز  $Z_1, Z_2, Z_3$  بر یک خط راست واقع باشند، این است که  $\frac{Z_3 - Z_2}{Z_2 - Z_1}$  عددی حقیقی و مخالف صفر باشد.

### ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط (یا دو بردار)  $Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$  مفروضند، ضرب داخلی  $Z_1$  و  $Z_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 \cdot Z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

و ضرب خارجی  $Z_1$  و  $Z_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 \times Z_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

زاویه بین دو عدد (بردار) مختلط: زاویه بین دو عدد مختلط  $Z_1, Z_2$  را می‌توان از یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\cos \theta = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{|Z_1| |Z_2|}$$

$$\sin \theta = \frac{Z_1 \times Z_2}{|Z_1| |Z_2|}$$

مثال ۱۶: اگر  $Z_1 = 3 - 4i, Z_2 = 2i - 4$  آنگاه حاصل  $A = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 \times Z_2}$  کدام است؟

$$\frac{24}{7} \quad (۴)$$

$$-\frac{24}{7} \quad (۳)$$

$$-\frac{7}{24} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{24} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} Z_1 \cdot Z_2 = (3)(-4) + (-4)(2) = -24 \\ Z_1 \times Z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 \times Z_2} = \frac{24}{7}$$

پاسخ: گزینه «۴»

### شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط  $Z = x + iy$  را می‌توان به شکل  $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند.  $\theta$  را آرگومان یا آوند یا زاویه فاز عدد مختلط  $Z$  و  $r$  را قدر مطلق، مدول و یا اندازه عدد مختلط  $Z$  می‌گویند. و تساوی‌های مقابل را داریم:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

### محاسبه‌ی اندازه و آرگومان اعداد مختلط

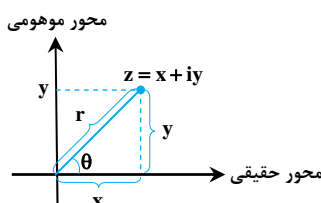
عدد مختلط غیر صفر  $Z = x + iy$  را در نظر بگیرید. مطابق شکل فاصله‌ی نقطه‌ی  $Z$  تا مبدأ مختصات را با  $r$  نشان می‌دهیم و همان‌طور که گفتیم؛ به آن اندازه  $r$  گفته می‌شود و به صورت زیر حساب می‌شود:

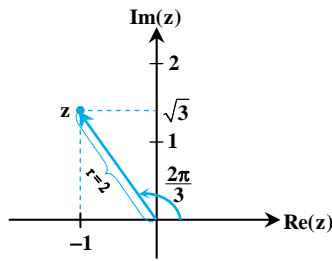
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$r$  عددی مثبت است.

از طرفی مطابق شکل، منظور از یک آرگومان  $Z$ ، زاویه‌ای مانند  $\theta$  است. چون  $\frac{y}{x} = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}} = \text{tg} \theta$ ، لذا داریم:

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$



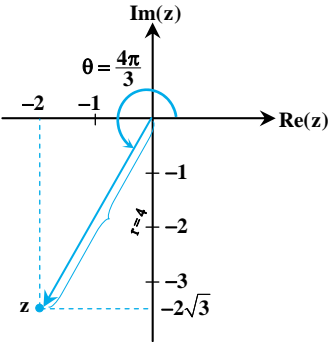


$$z = -1 + \sqrt{3}i \quad (۳)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\text{Arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

چون نقطه در ربع دوم قرار دارد، باید به  $-\frac{\pi}{3}$ ، عدد  $\pi$  را اضافه کنیم، لذا  $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

و بنابراین  $z = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$  است.



$$z = -2 - 2\sqrt{3}i \quad (۴)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4 \\ \text{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right) = \text{Arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

چون نقطه در ربع سوم است، پس باید به  $\frac{\pi}{3}$ ، عدد  $\pi$  اضافه شود، بنابراین  $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$  جواب مورد نظر است

و بنابراین  $z = \left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$  است.

**تذکره ۲:** آرگومان  $z = ki$  برابر با  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و  $z = -ki$  برابر با  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  است (k عددی حقیقی و بزرگتر از صفر است).

$$z = ki \Rightarrow \theta = \text{Arctg}\frac{k}{0} = \text{Arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad z = -ki \Rightarrow \theta = \text{Arctg}\left(\frac{-k}{0}\right) = -\text{Arctg}\infty = -\frac{\pi}{2}$$

**کلمه مثال ۱۷:** اگر  $z = i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$ ، آن گاه فرم قطبی z کدام است؟

(۴)  $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$

(۳)  $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

(۲)  $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(۱)  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا عبارت ساده شود:

$$z = (i - i^2\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = (i + \sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = (\sqrt{3} + i)^2 = (\sqrt{3})^2 + i^2 + 2\sqrt{3}i = 3 - 1 + 2\sqrt{3}i = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$$

ابتدا اندازه‌ی z را حساب می‌کنیم:

$$\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

حالا باید آرگومان z را حساب کنیم و لذا داریم:

چون  $\theta$  در ربع اول قرار دارد، بنابراین همان  $\theta = \frac{\pi}{3}$  مورد قبول است، پس  $z = \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ ، فرم قطبی مطلوب است.

### شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، هر عدد مختلط به شکل قطبی  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  را می‌توان به فرم  $z = re^{i\theta}$  نوشت که به آن فرم نمایی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد  $z = re^{i\theta}$  را به شکل  $z = r \angle \theta$  نیز می‌توان نمایش داد، که البته نمایش آخری در ریاضیات کمتر به چشم می‌خورد.

**کلمه مثال ۱۸:** عدد مختلط  $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$  را به فرم دکارتی بنویسید.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

پاسخ: با توجه به این  $r = 2$  و  $\theta = \frac{\pi}{3}$  می‌باشد، داریم:

### ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

معمولاً برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  و  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۱) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{و} \quad ۲) z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

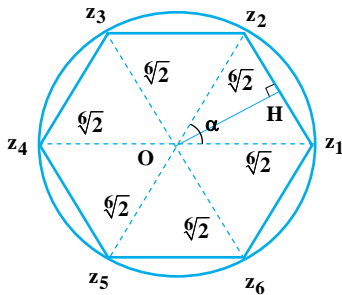
**کج مثال ۱۱ (سخت):** ریشه‌های ششم عدد ۲ رنوس یک شش ضلعی منتظم را تشکیل داده‌اند. اگر مساحت این شش ضلعی را S بنامیم، مقدار S برابر با کدام گزینه است؟

(۴)  $۹\sqrt{3} \times \sqrt{2}$

(۳)  $۳\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{۲}\right)$

(۲)  $۳\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{۲}$

(۱)  $۳\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{۲}\right)$



پاسخ: گزینه «۳» طبق مطالب گفته شده؛ این ریشه‌ها بر روی دایره‌ای به شعاع  $\sqrt{2}$  قرار می‌گیرند که فاصله آن‌ها بر روی دایره  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  می‌باشد. مثلاً طول کمان  $Z_1Z_2$  برابر با  $\frac{\pi}{3}$  است، چون این کمان رو به روی زاویه‌ی مرکزی  $\alpha$  است، لذا  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  می‌باشد. در مثلث  $OZ_1Z_2$  زاویه‌ی رأس برابر با  $\frac{\pi}{3}$  است و چون اندازه‌ی دو ساق برابر  $\sqrt{2}$  می‌باشد، بنابراین دو زاویه‌ی دیگر مثلث با هم برابر و اجباراً مساوی  $\frac{\pi}{3}$  هستند و این یعنی

مثلث  $OZ_1Z_2$  متساوی‌الاضلاع است. اگر ارتفاع OH را رسم کنیم در مثلث  $OZ_1Z_2$  داریم:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{OH}{OZ_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta OZ_1Z_2} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4}$$

بنابراین مساحت مثلث  $OZ_1Z_2$  به صورت مقابل است:

$$S = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

چون ۶ مثلث به این شکل داریم، بنابراین مساحت ۶ ضلعی برابر مساحت مثلث  $OZ_1Z_2$  است:

### معادلات مختلط

بخش قابل توجهی از سؤالات اعداد مختلط به «معادلات مختلط» اختصاص دارد. معمولاً این نوع سؤالات به روش‌های مختلفی حل می‌شوند که سعی شده در این قسمت تا حد ممکن آن‌ها را دسته‌بندی کنیم. قبل از دسته‌بندی معادلات با یک مثال که بر اساس قانون «ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند» بحث را شروع می‌کنیم:

**کج مثال ۱۲:** اگر نقطه‌ی  $z = -1 + i$ ، یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $z^3 + az^2 + 2b = 0$  باشد، آن‌گاه  $a + b$  کدام است؟

(۴) -۱۲

(۳) ۲

(۲) -۴

(۱) ۴

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند، با قرار دادن  $z = -1 + i$  در معادله داده شده، داریم:

$$\begin{aligned} z^3 + az^2 + 2b = 0 &\Rightarrow (-1+i)^3 + a(-1+i)^2 + 2b = 0 \\ ((-1+i)^2)^2(-1+i) + a(-1+i)^2(-1+i) + 2b = 0 &\Rightarrow (1+i^2-2i)^2(-1+i) + a(1+i^2-2i)(-1+i) + 2b = 0 \Rightarrow \\ -\lambda(i^2)(-1+i) + a(2i-2i^2) + 2b = 0 &\Rightarrow -\lambda i + \lambda i^2 + 2ai + 2a + 2b = 0 \\ -\lambda + 2a + 2b + i(2a - \lambda) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} -\lambda + 2a + 2b = 0 \\ 2a - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow -\lambda + \lambda + 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = 4 \end{aligned}$$

روش دیگر: البته با توجه به اینکه توان  $z$ ، ۷ و ۳ می‌باشد و راه‌حل فوق می‌تواند توأم با خطا باشد، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید که چون نقطه در ربع دوم قرار دارد لذا  $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} z^7 &= (\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^7 = 2^3 \times \sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{4}} = 8\sqrt{2}[\cos(\frac{21\pi}{4}) + i\sin(\frac{21\pi}{4})] = 8\sqrt{2}[\cos(\Delta\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\Delta\pi + \frac{\pi}{4})] \Rightarrow \\ z^7 &= -8\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - i8\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = -8 - 8i \\ z^3 &= (\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = 2\sqrt{2}[\cos(\frac{9\pi}{4}) + i\sin(\frac{9\pi}{4})] = 2\sqrt{2}[\cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(2\pi + \frac{\pi}{4})] \Rightarrow \\ z^3 &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + i2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 2i \end{aligned}$$

حالا مقادیر فوق را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$z^7 + az^3 + 2b = 0 \Rightarrow -8 - 8i + 2a + (2a)i + 2b = 0 \Rightarrow (2a + 2b - 8) + (2a - 8)i = 0 \Rightarrow a = 4, b = 0$$



حالا سراغ دسته‌بندی‌های مختلف معادلات مختلط می‌رویم:

الف) معادلاتی که فرم معادله‌ی درجه (۲) عادی را دارند یا می‌توان آن‌ها را به شکل معادله‌ی درجه (۲) بازنویسی کرد:

از قبل می‌دانیم معادلات درجه (۲) به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  در مجموعه اعداد حقیقی چگونه حل می‌شدند، (در آنجا  $a, b, c$  اعدادی حقیقی بودند) قواعد برای اعداد مختلط نیز عیناً اجرا می‌شوند، یعنی در معادلاتی به فرم  $az^2 + bz + c = 0$  که البته  $a, b, c$  می‌توانند اعداد مختلط باشند، ریشه‌ها به صورت زیر حساب می‌شوند:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال ۱۳: یکی از ریشه‌های معادله  $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$  کدام است؟

(۱)  $-1 - i$       (۲)  $2 + 3i$       (۳)  $2 - 3i$       (۴)  $-1 - i$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید دلتای معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(1)(5 - i)} = \sqrt{4i^2 + 9 - 12i - 20 + 4i} = \sqrt{-15 - 8i} = \sqrt{(1 - 4i)^2} = 1 - 4i$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i - 3) \pm (1 - 4i)}{2 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-2i + 3 + 1 - 4i}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \\ z_2 = \frac{-2i + 3 - 1 + 4i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

مثال ۱۴: در معادله  $z^2 - 4z + 7 + 4i = 0$  که در آن  $i = \sqrt{-1}$ ، تفاضل دو ریشه به صورت  $a + ib$  است. مقدار  $ab$  کدام است؟

(۱)  $-8$       (۲)  $-4$       (۳)  $4$       (۴)  $8$

پاسخ: گزینه «۱» ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta' = \sqrt{b'^2 - ac} = \sqrt{(4)^2 - 1 \times (7 + 4i)} = \sqrt{16 - 7 - 4i} = \sqrt{9 - 4i} = \sqrt{(2i - 1)^2} = 2i - 1$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm (2i - 1)}{1} = 2 \pm (2i - 1) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + 2i - 1 = 1 + 2i \\ z_2 = 2 - (2i - 1) = 3 - 2i \end{cases}$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 - 2i) = -2 + 4i = a + ib \Rightarrow a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = (-2)(4) = -8$$

مثال ۱۵: اگر  $z_1$  و  $z_2$  ریشه‌های معادله‌ی  $z^2 - 2z + 4 = 0$  باشند، حاصل  $z_1^2 + z_2^2 - 3z_1z_2$  کدام است؟

(۱)  $64$       (۲)  $-128$       (۳)  $-64$       (۴)  $128$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله‌ی داده شده، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با  $\frac{4}{1} = 4$  است، بنابراین  $z_1z_2 = 4$  می‌شود. پس فقط کفایت  $z_1^2 + z_2^2$  حساب

شود. برای این منظور لازم است ریشه‌های معادله حساب شود:

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 2^2 e^{i\pi/3} + 2^2 e^{-i\pi/3} = 2^2 \cos(2\pi) + i2^2 \sin 2\pi + 2^2 \cos(-2\pi) - i2^2 \sin 2\pi = 2^2 \times 1 + 2^2 \times 1 = 2 \times 2^2 = 2^3 = 128$$

$$z_1^2 + z_2^2 - 3z_1z_2 = 128 - 3(4)^2 = 128 - 192 = -64$$

بنابراین داریم:

مثال ۱۶: کدام یک از گزینه‌های زیر از ریشه‌های معادله‌ی  $z^4 + z^2 + 1 = 0$  نیست؟

(۱)  $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$       (۲)  $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$       (۳)  $\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$       (۴)  $\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله داده شده را به یک معادله درجه ۲ تبدیل می‌کنیم و سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم و بنابراین داریم:

$$(z^2)^2 + z^2 + 1 = 0 \xrightarrow{z^2 = x} x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z = \sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}, \quad r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \text{tg} \theta = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = \sqrt[4]{\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{پس گزینه (۲) ریشه‌ی معادله است} \\ k = 1 \Rightarrow z = \cos \left(\frac{\Delta\pi}{6}\right) + i \sin \left(\frac{\Delta\pi}{6}\right) \Rightarrow \text{پس گزینه (۱) ریشه‌ی معادله است} \\ k = 2 \Rightarrow z = \cos \left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow \text{پس گزینه (۳) ریشه‌ی معادله است} \end{cases}$$

مثال ۱۷: اگر  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$  آن گاه حاصل  $z^n + \frac{1}{z^n}$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $2 \sin n\theta$  (۲)  $2 \cos n\theta$  (۳)  $(2 \cos \theta)^n$  (۴)  $(2 \sin \theta)^n$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار  $z$  را حساب می‌کنیم:

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}}{1} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta}$$

$$z = \cos \theta \pm i \sqrt{\sin^2 \theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$$

اگر  $z = e^{i\theta}$ ، آن گاه  $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ ، لذا داریم:  $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 2 \cos n\theta$

اگر  $z = e^{-i\theta}$ ، آن گاه  $\frac{1}{z} = e^{i\theta}$ ، لذا داریم:  $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} + e^{in\theta} = (\cos n\theta - i \sin n\theta) + (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 2 \cos n\theta$

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر  $2 \cos n\theta$  به دست آمد.

مثال ۱۸: یکی از ریشه‌های معادله  $(z-i)^n + \frac{1}{(z-i)^n} + 1 = 0$ ، کدام است؟ ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ )

(۱)  $\cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right)$  (۲)  $\cos\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right) + i \left[1 + \sin\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right)\right]$

(۳)  $\cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right) - i \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right)\right]$  (۴)  $\cos\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right) + i \sin\left[\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right]$

پاسخ: گزینه «۲» برای راحتی در محاسبات فرض کنید:  $w = z - i$ ، و لذا داریم:  $w^n + \frac{1}{w^n} + 1 = 0 \Rightarrow w^{2n} + w^n + 1 = 0$

حالا فرض می‌کنیم  $A = w^n$  باشد، لذا داریم:

$$A^2 + A + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ A_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4}}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

اما چون  $w^n = A$ ، بنابراین کفایت ریشه‌های  $n$  ام دو عدد مختلط  $A_1$  و  $A_2$  حساب شوند:

$$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi + 2k\pi}{n}\right), \quad w_2 = \cos\left(\frac{4\pi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi + 2k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

چون  $w = z - i$ ، لذا ریشه‌های معادله به صورت زیر است:

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right) + i \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right)\right], \quad z_2 = \cos\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right) + i \left[1 + \sin\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3n}\right)\right], \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

مثال ۱۹: اگر  $\alpha$  عددی حقیقی باشد که مضرب  $\frac{\pi}{3}$  نیست و  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + x \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$  باشند، آن گاه حاصل  $x_1^2 + x_2^2$  کدام است؟

(۱)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  (۲)  $\cot^2 \alpha$  (۳)  $2 \operatorname{tg}^2 \alpha$  (۴)  $2 \cot^2 \alpha$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال اصلاً سخت نیست! با استفاده از تشکیل  $\Delta$ ، ابتدا ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را به

توان ۶ می‌رسانیم.  $x^2 \tan^2 \alpha + x \tan \alpha + 1 = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \tan^2 \alpha - 4 \tan^2 \alpha = -3 \tan^2 \alpha$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{-3 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha \pm i \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \pm \frac{i \sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

با توجه به اینکه لازم است توان  $\frac{2}{3}$  ریشه‌های فوق حساب شود، بهتر است عبارت را به شکل قطبی بنویسیم، اندازه‌ی  $x_1$  و  $x_2$  برابر است با  $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

و آرگومان  $x_1$  چون در ربع دوم قرار دارد برابر با  $\theta_1 = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \operatorname{Arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$  و آرگومان  $x_2$  چون در ربع سوم قرار دارد برابر با  $\frac{4\pi}{3}$  است و لذا داریم:

$$x_1 = \frac{1 \times e^{i \frac{2\pi}{3}}}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad x_2 = \frac{1 \times e^{i \frac{4\pi}{3}}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{e^{i \frac{4\pi}{3}}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



$$x_r = \frac{1 \times e^{\frac{i4\pi}{3}}}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow x_r^6 = \frac{e^{i6 \times \frac{4\pi}{3}}}{\operatorname{tg}^6 \alpha} = \frac{\cos 8\pi + i \sin 8\pi}{\operatorname{tg}^6 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^6 \alpha}$$

$$\text{بنابراین داریم: } x_1^6 + x_2^6 = \frac{1}{\operatorname{tg}^6 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^6 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg}^6 \alpha} = 2 \cot^6 \alpha$$

(ب) در برخی سؤالات معادله‌هایی داده می‌شوند که معمولاً به راحتی می‌توان با یک نگاه ریشه‌های آن را حدس زد. (که معمولاً  $\pm 1$ ،  $\pm i$ ،  $\pm 2$  و  $\pm 2i$  هستند) اگر این ریشه  $Z_0$  باشد، معادله را می‌توان بر  $Z - Z_0$  تقسیم و معادله را ساده‌تر کرد، مثال زیر موضوع را بهتر روشن می‌کند:

**مثال ۲۰:** یکی از ریشه‌های معادله  $z^3 - 7z^2 + 25z - 39 = 0$  برابر با  $\sqrt{3}$  است. دو ریشه دیگر کدامند؟

(۱)  $-1$  و  $13$       (۲)  $-1$  و  $5$       (۳)  $2 - 3i$  و  $2 + 3i$       (۴)  $3 - 2i$  و  $3 + 2i$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که یک ریشه  $Z = 3$  است لذا معادله را بر  $(Z - 3)$  تقسیم می‌کنیم. تقسیم را از دبیرستان بلدیم!

$$\begin{array}{r} z^3 - 7z^2 + 25z - 39 \quad | \quad z - 3 \\ -(z^3 - 3z^2) \\ \hline -4z^2 + 25z - 39 \\ -(-4z^2 + 12z) \\ \hline 13z - 39 \\ -(13z - 39) \\ \hline 0 \end{array}$$

با توجه به تقسیم مقابل، معادله به شکل زیر است:

$$(z - 3)(z^2 - 4z + 13) = 0$$

همان‌طور که می‌بینید با یک معادله‌ی درجه‌ی دوم راحت برخورد کرده‌ایم، لذا داریم:

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

(ج) برای حل برخی معادلات باید از اطلاعات قبلی خودمان در مورد تصاعد هندسی استفاده کنیم، برای این منظور فرمول زیر را مجدداً یادآوری می‌کنیم:

اگر  $t_1$  جمله اول تصاعد، تعداد جملات آن  $n$  و قدرنسبت تصاعد  $q$  باشد، مجموع  $n$  جمله اول این تصاعد از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$S_n = \frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

**مثال ۲۱:** یکی از جوابهای معادله  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$  کدام است؟

(۱)  $\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$       (۲)  $\cos \frac{4\pi}{5} - i \sin \frac{4\pi}{5}$       (۳)  $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$       (۴)  $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت داده شده در سمت چپ، یک تصاعد هندسی با جمله اول  $t_1 = 1$ ، قدرنسبت  $q = z$  و تعداد جملات  $n = 5$  است، لذا داریم:

$$\frac{1(1 - z^5)}{1 - z} = 0 \Rightarrow 1 - z^5 = 0 \Rightarrow z^5 = 1$$

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \xrightarrow{n=5} z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$$

باید ریشه‌های پنجم عدد یک را به دست بیاوریم:

به ازای  $k = 1$  یکی از جوابها به صورت زیر است:

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

**مثال ۲۲:** ریشه‌های معادله  $z^3 + z^2 + 1 = 0$  به صورت  $\pm a \pm ib$  هستند.  $b^2 - a^2$  کدام است؟

(۱)  $-1$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $1$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی واضح است یک تصاعد هندسی با جمله اول  $t_1 = 1$ ، قدرنسبت  $q = z$ ، و تعداد جملات  $n = 3$ ، را داریم:

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z = 1e^{\frac{2k\pi i}{3}} = e^{\frac{2k\pi i}{3}} \quad (k = 0, 1, \dots, 2) \quad \text{است.} \quad \frac{1 - z^3}{1 - z} = A \quad \text{و بنابراین سمت چپ برابر با } \frac{1 - z^3}{1 - z} \text{ است.}$$

که به ازای  $k = 0$  و  $k = 3$ ، آن‌گاه  $Z = \pm 1$  می‌شود و لذا غیر قابل قبول هستند. (چون  $1 - Z^3 \neq 0$ ) و لذا داریم:

$$z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = e^{\frac{6\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = e^{\frac{8\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^2 - a^2 = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین  $a = \pm \frac{1}{2}$  و  $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  و لذا داریم:

**کله مثال ۷:** معادله‌ی پارامتری  $\begin{cases} x = 1 + 2 \cosh t \\ y = 3 \sinh t \end{cases}$ ، معرف دقیق کدام منحنی است؟

- (۱) شاخه راست یک هذلولی (۲) هذلولی (۳) سهمی (۴) بیضی
- پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ، لذا باید  $\cosh t$  را برحسب  $x$  و  $\sinh t$  را برحسب  $y$  بنویسیم:

$$\cosh t = \frac{x-1}{2}, \sinh t = \frac{y}{3} \quad \text{و} \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

معادله‌ی فوق نمایانگر یک هذلولی است و چون  $\cosh t \geq 1$ ، در نتیجه  $\frac{x-1}{2} \geq 1$  و به عبارت دیگر  $x \geq 3$ ، پس نیمه راست یک هذلولی است.

**کله مثال ۸:** مکان هندسی همه نقاطی از صفحه که در رابطه‌ی  $|z-1| - |1+\text{Re}z| = 0$  صدق می‌کنند، کدام است؟

- (۱) سهمی (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) دایره
- پاسخ: گزینه «۱» با فرض اینکه  $z = x + iy$ ، در این صورت  $\text{Re}z = x$  و لذا داریم:

$$|x+iy-1| - |1+x| = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - (1+x)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 - 1 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 = 4x$$

که معادله‌ی یک سهمی است.

**کله مثال ۹:** مکان هندسی نقطه‌ی  $M(x,y)$  متناظر با عدد مختلط و غیر حقیقی  $z$  که در رابطه‌ی  $z^2 + z^2 - 2z = \bar{z}^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{z}$  صدق کند، کدام است؟

- (۱) نیم‌دایره (۲) هذلولی (۳) سهمی (۴) بیضی
- پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید توجه کنید سمت راست تساوی مزدوج سمت چپ تساوی است، چرا که همواره داریم:
- و بنابراین داریم:

$$\bar{z}^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{z} = \overline{z^2 + z^2 - 2z}$$

در واقع اگر سمت چپ  $w$  باشد، سمت راست  $\bar{w}$  است، پس تساوی  $w = \bar{w}$  را داریم و این یعنی  $\text{Im}(w) = 0$  است. پس کافی است قسمت موهومی سمت چپ را حساب کرده و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 + (x+iy)^2 - 2(x+iy) &= x^2 + (iy)^2 + 2x(iy) + 2x(iy) + x^2 + (iy)^2 + i2xy - 2x - 2iy \\ &= x^2 - iy^2 + i2xy - 2x - 2iy \\ \Rightarrow \text{Im}(w) &= -y^2 + 2x^2y + 2xy - 2y \\ \Rightarrow \text{Im}(w) &= y(-y^2 + 2x^2 + 2x - 2) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

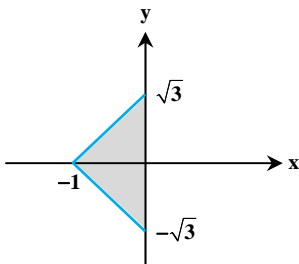
معادله‌ی فوق، نمایانگر یک هذلولی است. البته اگر بخواهید از نکات فوق استفاده نکنید، می‌توانید فرض کنید  $z = x + iy$  و  $\bar{z} = x - iy$  و محاسبات را در طرفین انجام دهید و در نهایت به نتیجه‌ی فوق برسید.

**کله مثال ۱۰:** مساحت ناحیه‌ی بین خط  $\text{Re}(z) = 0$  و نموداری که با معادله‌ی  $z^3 + 3z^2 + 3z = (\bar{z})^3 + 3(\bar{z})^2 + 3\bar{z}$  مشخص می‌شود، کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» اگر قرار دهیم  $w = z^3 + 3z^2 + 3z$ ، آن‌گاه معادله داده شده به صورت  $w = \bar{w}$  خواهد شد و این یعنی  $\text{Im}(w) = 0$  است. حالا لازم است  $\text{Im}(w)$  را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Im}(w) &= \text{Im}(z^3 + 3z^2 + 3z) = \text{Im}[(x+iy)^3 + 3(x+iy)^2 + 3(x+iy)] = \text{Im}[x^3 - iy^3 + i3x^2y - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + i(6xy) + 3x + 3iy] \\ \Rightarrow \text{Im}(w) &= -y^3 + 3x^2y + 6xy + 3y = y[-y^2 + 3(x^2 + 2x + 1)] \Rightarrow \text{Im}(w) = 0 \Rightarrow y = 0, 3(x+1)^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}(x+1), y = 0 \end{aligned}$$



نمودار این منحنی به صورت مقابل است:

که مساحت بین آن و  $\text{Re}(z) = 0$  و به عبارت دیگر مساحت محصور بین آن و محور  $y$ ها، که با سایه نشان داده شده است، مثلثی به طول قاعده‌ی  $2\sqrt{3}$  و ارتفاع ۱ است.

$$S = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \times 1) = \sqrt{3}$$



## آزمون (۳)

سطح آزمون: A

مدت زمان پاسخگویی: ۴۰ دقیقه

تعداد سوالات: ۱۵

۱- مقدار  $z$  از معادله  $1 + \frac{z+i}{z-i} + \frac{z+i}{z-i} + \frac{z+i}{z-i} + \frac{z+i}{z-i} = 0$  کدام است؟

(۱)  $-i \cot g\left(\frac{k\pi}{\delta}\right)$  (۲)  $\cot g\left(\frac{k\pi}{\delta}\right)$  (۳)  $\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{\delta}\right)$  (۴)  $-i \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{\delta}\right)$

۲- اگر  $z$  یک ریشه‌ی معادله  $az^2 + bz + c = 0$  باشد و  $|z| = 1$ ، آن‌گاه کدام رابطه‌ی زیر حتماً برقرار است؟

(۱)  $|c\bar{c} - b\bar{b}| = |\bar{a}b - \bar{b}a|$  (۲)  $|\bar{a}b - b\bar{a}| = |\bar{a}a - \bar{c}c|$  (۳)  $|\bar{a}b - b\bar{c}| = |\bar{a}a - \bar{b}b|$  (۴)  $|\bar{a}b - \bar{b}c| = |\bar{a}a - \bar{c}c|$

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) اگر  $|z_1| = 1$  و  $|z_2| = 1$  و  $z_1 z_2 \neq -1$ ، آن‌گاه عدد  $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$  حقیقی است.

(۲) اگر  $|z| = a$ ، آن‌گاه  $\frac{z}{(z-a)(1-\bar{a}z)}$  نمایش یک عدد حقیقی مثبت است.

(۳) حاصل  $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$  با شرط  $|w| = |z|$  برابر با ۱ است ( $\bar{z}w \neq 1$ )

(۴) اگر  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  و  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ، آن‌گاه  $z_1, z_2$  و  $z_3$  رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند که درون دایره واحد محاط شده‌اند.

۴- اگر  $i^{a+ib} = a + ib$ ، آن‌گاه مقدار  $a^2 + b^2$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $e^{-b(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$  (۲)  $e^{-b(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$  (۳)  $e^{b(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$  (۴)  $e^{b(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$

۵- ریشه‌های معادله  $z^n - \bar{z} = 0$  برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $e^{\frac{k\pi}{n+1}}$  (۲)  $e^{\frac{2k\pi}{n+1}}$  (۳)  $e^{\frac{2k\pi}{n}}$  (۴)  $e^{\frac{k\pi}{n}}$

۶- حاصل  $\sin[i \operatorname{Ln}\left(\frac{1+ie^{\frac{-\pi}{\lambda}}}{1-ie^{\frac{\pi}{\lambda}}}\right)]$  برابر کدام گزینه است؟ (مقدار اصلی  $\operatorname{Ln}$  مورد نظر می‌باشد).

(۱)  $-\cos\frac{\pi}{\lambda}$  (۲)  $\cos\frac{\pi}{\lambda}$  (۳)  $-\sin\frac{\pi}{\lambda}$  (۴)  $\sin\frac{\pi}{\lambda}$

۷- با استفاده از  $(\cos\theta + i\sin\theta)^\delta$ ، مقدار  $\operatorname{tg}\delta\theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\delta \operatorname{tg}\theta + 10 \operatorname{tg}^3\theta - 9 \operatorname{tg}\theta}{1 + \delta \operatorname{tg}^2\theta - 2 \operatorname{tg}^3\theta}$  (۲)  $\frac{-\delta \operatorname{tg}\theta + 10 \operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}\theta}{\delta - 10 \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}^4\theta}$  (۳)  $\frac{-\delta \operatorname{tg}\theta + 10 \operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}\theta}{\delta - 2 \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}^4\theta}$  (۴)  $\frac{\delta \operatorname{tg}\theta - 10 \operatorname{tg}^3\theta + \operatorname{tg}\theta}{1 - 10 \operatorname{tg}^2\theta + \delta \operatorname{tg}^4\theta}$

۸- حاصل  $S = \cos\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{\nu}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{\nu}\right)$  کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲)  $-\frac{3}{\lambda}$  (۳)  $0$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

۹- حاصل  $A = \sin\frac{\pi}{\delta} \sin\frac{2\pi}{\delta} \sin\frac{3\pi}{\delta} \sin\frac{4\pi}{\delta}$  کدام است؟ (راهنمایی: از حل معادله  $1 = (1-z)^n$  کمک بگیرید).

(۱)  $\frac{5}{24}$  (۲)  $\frac{5}{12}$  (۳)  $\frac{5}{32}$  (۴)  $\frac{5}{16}$

۱۰- مجموع قسمت‌های حقیقی دو ریشه از معادله  $9z^2 - 6z + 10 = 0$  کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

(۱)  $-6$  (۲)  $-3$  (۳)  $2$  (۴)  $-8$

۱۱- اگر اعداد مختلط  $z_1, z_2$  و  $z_3$  در معادله  $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$  صدق کنند، آن‌گاه  $z_1, z_2$  و  $z_3$  رئوس یک مثلث ..... .

(۱) متساوی‌الاضلاع هستند. (۲) قائم‌الزاویه هستند.

(۳) متساوی‌الساقین با زاویه رأس قائمه هستند. (۴) متساوی‌الساقین با یک زاویه منفرجه هستند.

۱۲- فرض کنید  $z = \cos\left(\frac{\pi}{1392}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{1392}\right)$ ، در این صورت حاصل  $\sum_{n=0}^{1392} (z^n + \frac{1}{z^n})$  کدام است؟

(۱)  $1$  (۲)  $\frac{1}{\sqrt{1392}}$  (۳)  $\frac{1}{\sqrt{1391}}$  (۴)  $0$