# درسنامه: فرمول‌های انتگرال‌گیری و استفاده از تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

در فصل مشتق، داستان از این قرار بود که تابعی به ما داده می‌شد و از ما می‌خواستند مشتق آن را حساب کنیم. در این فصل برعکس این کار را از ما می‌خواهند، یعنی عبارتی به ما داده می‌شود و از ما می‌خواهند که معلوم کنیم؛ عبارت داده شده، مشتق چه تابعی است؟ مثلاً اگر تابع $f(x)=۲x$ را به شما بدهند و سؤال کنند؛ «$۲x$» مشتق چه تابعی است؟ جواب شما چیه؟ واضح است؛ اولین جوابی که به ذهن شما می‌رسد، $F(x)=x^{۲}$ است. به $x^{۲}$ اصطلاحاً تابع اولیه ۲x هم گفته می‌شود. این فعل و انفعالات را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم و می‌گوییم انتگرال ۲x، برابر با $x^{۲}+c$ است:

$$\int (۲x)dx = x^{۲}+c$$

اما c از کجا اومد؟ خب همان‌طور که گفتیم؛ وقتی از ۲x انتگرال می‌گیریم، در واقع به زبان دیگر داریم می‌پرسیم؛ مشتق چه تابعی، برابر با ۲x است؟ یکی از جواب‌ها $x^{۲}$ است، ولی توجه کنید؛ مشتق $x^{۲}+۱۰$، یا $x^{۲}-\sqrt{۲}$ و یا مثلاً $x^{۲}+\pi$ و به عبارت دیگه؛ مشتق هر عبارتی به‌صورت $x^{۲}+c$، ۲x میشه، برای همین باید عدد ثابت c نوشته شود. بدیهی است؛ اگر از سمت راست تساوی فوق، مشتق بگیریم، باید به تابع زیر انتگرال برسیم:

$$\int (۲x)dx = x^{۲}+c \Rightarrow (x^{۲}+c)' = ۲x+۰=۲x$$

برای این که بحث کمی جدی‌تر بشه! به تعریف زیر توجه کنید:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $F(x)$، تابع اولیه $f(x)$ باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

## فرمول‌های مهم انتگرال

خُب، حالا باید فرمول‌هایی را یاد بگیریم که ارتباط صددرصدی با فرمول‌های مشتق دارند. در فرمول‌های زیر u تابعی از x می‌باشد:

۱) $\int u^{n}\,du = \frac{u^{n+۱}}{n+۱}+c \qquad (n\neq -۱)$

۲) $\int \frac{du}{u} = \mathrm{Ln}|u|+c$

۳) $\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\mathrm{Ln}a}+c \qquad (a>۰, a\neq ۱)$

۴) $\int e^{u}\,du = e^{u}+c$

۵) $\int \sin u\,du = -\cos u+c$

۶) $\int \cos u\,du = \sin u+c$

۷) $\int (۱+\mathrm{tg}^{۲}u)du = \int \frac{du}{\cos^{۲}u} = \mathrm{tg}u+c$

۸) $\int (۱+\cot g^{۲}u)du = \int \frac{du}{\sin^{۲}u} = -\cot gu+c$

۹) $\int \mathrm{tg}u\,du = -\mathrm{Ln}|\cos u|+c$

۱۰) $\int \cot gu\,du = \mathrm{Ln}|\sin u|+c$

۱۱) $\int \frac{du}{a^{۲}+u^{۲}} = \frac{۱}{a}\mathrm{Arctg}\frac{u}{a}+c = -\frac{۱}{a}\mathrm{Arc}\cot g(\frac{u}{a})+c \quad , \quad a\neq ۰$

۱۲) $\int \frac{du}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}} = \mathrm{Arcsin}(\frac{u}{a})+c = -\mathrm{Arc}\cos(\frac{u}{a})+c \quad , \quad a\neq ۰$

۱۳) $\int \frac{du}{\cos u} = \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(\frac{u}{۲}+\frac{\pi}{۴})|+c = \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}u+\sec u|+c$

۱۴) $\int \frac{du}{\sin u} = \mathrm{Ln}|\mathrm{tg}\frac{u}{۲}|+c = \mathrm{Ln}|\csc u-\cot gu|+c$

۱۵) $\int \cosh u\,du = \sinh u+c$

۱۶) $\int \sinh u\,du = \cosh u+c$

۱۷) $\int \cot ghu\,du = \mathrm{Ln}|\sinh u|+c$

۱۸) $\int \mathrm{tgh}u\,du = \mathrm{Ln}(\cosh u)+c$

۱۹) $\int \frac{du}{\sqrt{u^{۲}-a^{۲}}} = \mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^{۲}-a^{۲}})+c = \cosh^{-۱}(\frac{u}{a})+c$

۲۰) $\int \frac{du}{\sqrt{u^{۲}+a^{۲}}} = \mathrm{Ln}|u+\sqrt{u^{۲}+a^{۲}}|+c = \sinh^{-۱}(\frac{u}{a})+c \, , \, a>۰$

۲۱) $\int \frac{du}{u^{۲}-a^{۲}} = \frac{۱}{۲a}\mathrm{Ln}\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c = \begin{cases} -\frac{۱}{a}\mathrm{tgh}^{-۱}(\frac{u}{a}) & ; \quad |u|<|a| \\ -\frac{۱}{a}\cot gh^{-۱}(\frac{u}{a}) & ; \quad |u|>|a| \end{cases}$

۲۲) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^{۲}-a^{۲}}} = \frac{۱}{a}\sec^{-۱}|\frac{u}{a}|+c \, , \, a>۰$

۲۳) $\int \sqrt{u^{۲}\pm a^{۲}}\,du = \frac{۱}{۲}[u\sqrt{u^{۲}\pm a^{۲}} \pm a^{۲}\mathrm{Ln}|u+\sqrt{u^{۲}\pm a^{۲}}|]+c$

۲۴) $\int \sqrt{a^{۲}-u^{۲}}\,du = \frac{۱}{۲}[u\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}+a^{۲}\sin^{-۱}\frac{u}{|a|}]+c$

اکثر روابط فوق با توجه به فرمول‌های مشتق قابل درک هستند و برخی دیگر نیز با توجه به قواعد انتگرال‌گیری که بعداً آموزش داده خواهد شد، قابل محاسبه هستند، ولی بهتر است این فرمول‌ها حفظ شوند. البته فرمول‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۴ از اهمیت کمتری برخوردار هستند و سه فرمول ۱۹، ۲۰ و ۲۱ بهتر است حفظ شوند، اما اگر حاصل آن‌ها یادتان نباشد با استفاده از تکنیک‌هایی که در آینده خواهیم گفت، قابل محاسبه هستند.

## خواص انتگرال نامعین

از خواص مهم انتگرال نامعین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) $\int [f(u)+g(u)]du = \int f(u)du+\int g(u)du$

۲) اگر k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\int kf(u)du = k\int f(u)du$

۳) هیچ وقت **نمی‌توان نوشت:**

$$\int f(u)g(u)du = \int f(u)du \times \int g(u)du \quad , \quad \int \frac{f(u)}{g(u)}du = \frac{\int f(u)du}{\int g(u)du}$$

**۴)** انتگرال یک تابع فرد، همواره تابعی زوج است. ولی انتگرال یک تابع زوج، تابعی نه زوج و نه فرد است. البته صرف‌نظر از ثابت c می‌توان گفت، انتگرال یک تابع زوج، یک تابع فرد می‌شود:

$$\int \underbrace{\cos x}_{\text{تابع زوج}} dx = \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}} + c \quad , \quad \int \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}} dx = \underbrace{-\cos x}_{\text{تابع زوج}} + c$$

قبل از ورود به بحث اصلی انتگرال، در این قسمت سعی کرده‌ام کمی تمرین ابتدایی را با هم انجام دهیم:

$$۱)\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c = ۲x^{\frac{۱}{۲}} + c = ۲\sqrt{x} + c \quad ، \quad ۲)\int \frac{dx}{x+۲} = \text{Ln}\,|x+۲| + c$$

$$۳)\int ۳^x dx = \frac{۳^x}{\text{Ln}۳} + c \quad ، \quad ۴)\int ۵e^x dx = ۵\int e^x dx = ۵e^x + c$$

$$۵)\int \sin ۳x\,dx = \int (\frac{۳}{۳})\sin ۳x dx = \frac{۱}{۳}\int (\sin ۳x)۳dx = -\frac{۱}{۳}\cos ۳x + c$$

$$۶)\int \cos ۷x\,dx = \int \frac{۷}{۷}\cos ۷x\,dx = \frac{۱}{۷}\int (\cos ۷x)۷dx = \frac{۱}{۷}\sin ۷x + c$$

$$۷)\int (۲+\text{tg}^۲x)dx = \int [۱+(۱+\text{tg}^۲x)]dx = \int dx + \int (۱+\text{tg}^۲x)dx = x + \text{tg}x + c$$

$$۸)\int \pi(۱+\cot g^۲x)dx = -\pi \cot gx + c \quad ، \quad ۹)\int \text{tg}\pi x\,dx = \frac{۱}{\pi}\int \pi \text{tg}\pi x\,dx = -\frac{۱}{\pi}\int \frac{-\pi \sin \pi x}{\cos \pi x}dx = -\frac{۱}{\pi}\text{Ln}\,|\cos \pi x| + c$$

$$۱۰)\int (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x})dx = \int \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x + \text{Ln}\,|\sin x| + c$$

در این سؤال در انتگرال دوم با فرض $u = \sin x$، آن‌گاه $du = \cos x dx$ و لذا با انتگرال $\int \frac{du}{u}$ روبه‌رو هستیم.

$$۱۱)\int \frac{dx}{۹+x^۲} = \frac{۱}{۳}\text{Arctg}(\frac{x}{۳}) + c \quad ، \quad ۱۲)\int \frac{dx}{\sqrt{۳-x^۲}} = \text{Arc}\sin(\frac{x}{\sqrt{۳}}) + c$$

$$۱۳)\int \frac{dx}{x^۲-۴} = \frac{۱}{۴}\text{Ln}\,|\frac{x-۲}{x+۲}| + c \quad ، \quad ۱۴)\int \frac{dx}{\sqrt{(x-۲)^۲+۹}} = \text{Ln}\left|(x-۲)+\sqrt{(x-۲)^۲+۹}\right| + c$$

$$۱۵)\int \frac{۳dx}{\sin ۳x} = \text{Ln}\left|\text{tg}\frac{۳x}{۲}\right| + c = \text{Ln}\,|\csc ۳x - \cot g۳x| + c \quad ، \quad ۱۶)\int \frac{۲dx}{\cos ۲x} = \text{Ln}\left|\text{tg}(x+\frac{\pi}{۴})\right| + c = \text{Ln}\,|\text{tg}۲x + \sec ۲x| + c$$

$$۱۷)\int \cosh ۸x\,dx = \frac{۱}{۸}\sinh ۸x + c \quad ، \quad ۱۸)\int \frac{۱}{۹}\sinh ۹x\,dx = \frac{۱}{۸۱}\cosh ۹x + c$$

**تذکر۱:** همان‌طور که در فرمول‌های مهم انتگرال ملاحظه می‌کنید؛ وقتی عبارتی بر حسب u داریم، du نیز کنار آن وجود دارد. در بعضی از مثال‌های فوق، مانند مثال شماره ۵، عبارت $\sin ۳x$ داخل انتگرال موجود است، ولی ۳dx کنار آن وجود ندارد. لذا با تغییری که مشاهده کردید، ۳dx را ایجاد کردیم تا بتوانیم از فرمول‌های ذکر شده استفاده کنیم، چون اگر $u = ۳x$، آن‌گاه $du = ۳dx$ می‌شود. این تغییر در مثال‌های ۶، ۹، ۱۷و ۱۸ نیز انجام شده است، تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع **تغییر متغیر** می‌باشد که با توجه به مثال‌های زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم «تغییر متغیر» داشت:

**مثال۱: حاصل انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید.**

$$۱)\ I = \int (۳x+۵)^{۱۷}dx \Rightarrow u = ۳x+۵ \to du = ۳dx \to \boxed{dx = \frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I = \int u^{۱۷}(\frac{du}{۳}) = \frac{۱}{۳}\int u^{۱۷}du = \frac{۱}{۳}(\frac{u^{۱۸}}{۱۸}) + c = \frac{(۳x+۵)^{۱۸}}{۵۴} + c$$

$$۲)\ I = \int \cos(۱+\pi x)dx \Rightarrow u = \pi x + ۱ \to du = \pi dx \to \boxed{dx = \frac{du}{\pi}}$$

$$\Rightarrow I = \int (\cos u)\frac{du}{\pi} = \frac{۱}{\pi}\int \cos u\,du = \frac{۱}{\pi}\sin u + c = \frac{۱}{\pi}\sin(۱+\pi x) + c$$

$$۳)I = \int \frac{dx}{(\text{Arc}\cos x)^۵\sqrt{۱-x^۲}} \Rightarrow u = \text{Arc}\cos x \Rightarrow \boxed{du = -\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-du}{u^۵} = -\int u^{-۵}du = \frac{۱}{۴}u^{-۴} + c = \frac{۱}{۴(\text{Arc}\cos x)^۴} + c$$

$$۴)I=\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int(\sin\sqrt{t})\frac{dt}{\sqrt{t}}\Rightarrow\sqrt{t}=u\to\frac{dt}{۲\sqrt{t}}=du\to\boxed{\frac{dt}{\sqrt{t}}=۲du}$$

$$\Rightarrow I=\int ۲\sin u\,du=-۲\cos u+c=-۲\cos\sqrt{t}+c$$

$$۵)I=\int\frac{۲x+۳}{۲x+۱}dx\xrightarrow{\text{صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم}}\int(۱+\frac{۲}{۲x+۱})dx=\int dx+\underbrace{\int\frac{۲dx}{۲x+۱}}_{I_۱}$$

یادتان باشد در انتگرال‌هایی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند و درجه صورت و مخرج یکی است، اولین کاری که می‌کنیم، تقسیم صورت بر مخرج است. خب به ادامه‌ی حل بپردازیم، حاصل انتگرال اول برابر با x می‌باشد، برای حل انتگرال دوم داریم:

$$۲x+۱=u\to ۲dx=du\to I_۱=\int\frac{۲dx}{۲x+۱}=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|۲x+۱|+c\Rightarrow I=x+Ln|۲x+۱|+c$$

$$۶)I=\int\frac{Arc\sin x+x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx=\underbrace{\int\frac{Arc\sin x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx}_{I_۱}+\underbrace{\int\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx}_{I_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_۱: Arc\sin x=u\Rightarrow\boxed{\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=du}\quad\Rightarrow I_۱=\int udu=\frac{u^۲}{۲}+c_۱=\frac{(Arc\sin x)^۲}{۲}+c_۱ \\ I_۲:۱-x^۲=t\Rightarrow -۲x\,dx=dt\Rightarrow\boxed{x\,dx=-\frac{dt}{۲}}\Rightarrow I_۲=-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{۱}{۲}\int t^{-\frac{۱}{۲}}dt=-t^{\frac{۱}{۲}}+c_۲=-\sqrt{۱-x^۲}+c_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=I_۱+I_۲=\frac{(Arc\sin x)^۲}{۲}-\sqrt{۱-x^۲}+c_۱+c_۲$$

البته می‌توانیم به جای $c_۱+c_۲$ ، $c$ را قرار دهیم.

$$۷)I=\int\frac{Ln\sqrt{z}}{z}dz=\int\frac{Ln z^{\frac{۱}{۲}}}{z}dz=\frac{۱}{۲}\int\frac{Lnz}{z}dz\Rightarrow Lnz=u\Rightarrow\boxed{\frac{dz}{z}=du}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}\int u\,du=\frac{۱}{۲}(\frac{u^۲}{۲})+c=\frac{۱}{۴}(Lnz)^۲+c$$

$$۸)I=\int\frac{dx}{۱+\cos^۲x}=\int\frac{dx}{۱+\frac{۱}{۱+tg^۲x}}=\int\frac{(۱+tg^۲x)}{۲+tg^۲x}dx\to tgx=u\to\boxed{(۱+tg^۲x)dx=du}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{۲+u^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}Arctg(\frac{u}{\sqrt{۲}})+c=\frac{۱}{\sqrt{۲}}Arc\,tg(\frac{tgx}{\sqrt{۲}})+c$$

$$۹)I=\int x^۲\cos(x^۳+۳)dx\Rightarrow x^۳+۳=u\Rightarrow ۳x^۲dx=du\to\boxed{x^۲dx=\frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۳}\int\cos u\,du=\frac{\sin u}{۳}+c=\frac{\sin(x^۳+۳)}{۳}+c$$

$$۱۰)\ I=\int x(۲x+۵)^{۱۰}dx\Rightarrow ۲x+۵=u\to\left|\begin{array}{l}۲x=u-۵\to\boxed{dx=\frac{du}{۲}}\\ x=\frac{u-۵}{۲}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int(\frac{u-۵}{۲})(u)^{۱۰}(\frac{du}{۲})=\frac{۱}{۴}\int(u-۵)u^{۱۰}du=\frac{۱}{۴}\int(u^{۱۱}-۵u^{۱۰})du=\frac{۱}{۴}[\frac{u^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵}{۱۱}u^{۱۱}]+c=\frac{۱}{۴}[\frac{(۲x+۵)^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵(۲x+۵)^{۱۱}}{۱۱}]+c$$

$$۱۱)I=\int\frac{e^x}{e^x-۱}dx\Rightarrow e^x-۱=u\to e^xdx=du\to I=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|e^x-۱|+c$$

$$۱۲)I=\int\frac{a^xdx}{۱+a^{۲x}}=\int\frac{۱}{۱+(a^x)^۲}(a^xdx)\ ,\ a^x=u\Rightarrow a^xLna\,dx=du\Rightarrow a^xdx=\frac{du}{Lna}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{a^xdx}{۱+(a^x)^۲}=\frac{۱}{Lna}\int\frac{du}{۱+u^۲}=\frac{۱}{Lna}[Arc\,tgu]+c=\frac{Arctg(a^x)}{Lna}+c$$

**مثال ۲:** حاصل $I=\int \frac{dx}{\cos^{۲}x\sqrt{۱+tgx}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos x}+tgx+c$

۲) $\frac{۱}{\cos x}+\cot gx+c$

۳) $۲\sqrt{۱+tgx}+c$

۴) $۲(۱+tgx)+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$۱+tgx=u\ \Rightarrow (۱+tg^{۲}x)dx=du\ \Rightarrow \frac{dx}{\cos^{۲}x}=du\ \Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{۱+tgx}+c$$

**مثال ۳:** حاصل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{Lnx}}+c$

۲) $\frac{\sqrt{Lnx}}{x}+c$

۳) $۲\sqrt{Lnx}+c$

۴) $Ln(Ln\sqrt{x})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» عبارت داخل رادیکال را مساوی u فرض می‌کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}=\int(\underbrace{Lnx}_{u})^{-\frac{۱}{۲}}(\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du})=۲\sqrt{u}+c=۲\sqrt{Lnx}+c$$

**مثال ۴:** حاصل $I=\int\frac{e^{Arctgx}}{۱+x^{۲}}dx$ کدام است؟

۱) $e^{Arctgx}+c$

۲) $۲e^{Arctgx}+c$

۳) $\frac{۱}{۲}e^{Arctgx}+c$

۴) $Arctg(e^{x}+۱)+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» عبارت قرار گرفته در توان e را برابر با u فرض می‌کنیم:

$$Arctgx=u\Rightarrow\frac{dx}{۱+x^{۲}}=du\Rightarrow I=\int e^{u}du=e^{u}+c=e^{Arctgx}+c$$

**مثال ۵:** حاصل $I=\int\frac{dx}{\sinh^{۲}x+\cosh^{۲}x}$ کدام است؟

۱) $Arctg(\cot ghx)+c$

۲) $Arctg(tghx)+c$

۳) $Arctg(\cosh x)+c$

۴) $Arctg(\sinh x)+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یک سؤال نسبتاً ساده که کافی است از فرمول‌هایی که بلدیم، استفاده کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{\cos h^{۲}x(۱+tgh^{۲}x)}\quad,\quad tghx=u\ \to\frac{۱}{\cosh^{۲}x}dx=du$$

$$I=\int\frac{\cosh^{۲}x}{\cosh^{۲}x(۱+u^{۲})}du=Arctgu+c=Arctg(tghx)+c$$

**مثال ۶:** حاصل $I=\int\frac{dx}{\sinh^{۲}x\cosh^{۲}x}$، کدام است؟

۱) $-۲\cot gh۲x+c$

۲) $۲\cot gh۲x+c$

۳) $۲tghx+c$

۴) $-۲tghx+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا انتگرال را توسط روابط مربوط به توابع هیپربولیک ساده می‌کنیم.

$$\sinh^{۲}x\cosh^{۲}x=(\sinh x\cosh x)^{۲}=(\frac{۱}{۲}\sinh ۲x)^{۲}\ \Rightarrow I=\int\frac{۴}{\sinh^{۲}۲x}dx$$

$$\frac{۱}{\sinh^{۲}۲x}=\cot gh^{۲}۲x-۱\ \Rightarrow I=۴\int(\cot gh^{۲}۲x-۱)dx=۴\times\frac{-۱}{۲}\int ۲(۱-\cot gh^{۲}۲x)dx=-۲\cot gh۲x+c$$

**مثال ۷:** اگر $f'(\sin^{۲}x)=\cos^{۲}x$ و $f(\circ)=\circ$، آن‌گاه $f(۱)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-۱$

۲) $۱$

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا می‌نویسیم: $\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x$ و سپس با فرض $\sin^{۲}x=u$ از طرفین نسبت به u انتگرال می‌گیریم:

$$f'(\sin^{۲}x)=۱-\sin^{۲}x\ \xrightarrow{\sin^{۲}x=u}\int f'(u)du=\int(۱-u)du\ \Rightarrow f(u)=u-\frac{u^{۲}}{۲}+c\ \xrightarrow{f(\circ)=\circ}f(u)=u-\frac{u^{۲}}{۲}\ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۲}$$

**مثال ۸:** اگر $F(x)=\int f(x)dx$، آن‌گاه $I=\int f(ax+b)dx$ کدام است؟

۱) $aF(ax+b)$

۲) $\frac{۱}{a}F(x)$

۳) $aF(x)$

۴) $\frac{۱}{a}F(ax+b)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$ax+b=u\Rightarrow adx=du\ \Rightarrow dx=\frac{du}{a}\ \Rightarrow I=\frac{۱}{a}\int f(u)du\ \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} I=\frac{F(u)}{a}=\frac{۱}{a}F(ax+b)$$

**مثال ۹:** حاصل $I=\int\frac{x}{x^۴+x^۲+۱}dx$ کدام است؟

۱) $\text{Arctg}(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}})$　　۲) $\text{Arctg}(\frac{۲x^۲+۱}{\sqrt{۳}})$　　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}})$　　۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}(\frac{۲x^۲+۱}{\sqrt{۳}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه $I$، ابتدا $x^۲=u$ در نظر می‌گیریم، بنابراین $۲xdx=du$. پس از جایگذاری، متغیر جدید مخرج را مربع کامل می‌کنیم و بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{\frac{du}{۲}}{u^۲+u+۱}=\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u^۲+u+۱}=\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{(u+\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}\text{Arctg}(\frac{u+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\textbf{Arctg}(\frac{۲x^۲+۱}{\sqrt{۳}})$$

**توضیح:** در برخی انتگرال‌ها می‌توان مخرج را مربع کامل کرد و سپس از فرمول‌های انتگرال‌گیری استفاده کرد. در این سؤال بعد از تغییر متغیر اولیه به یک عبارت رسیدیم که قابل تبدیل به مربع دو جمله بود.

**مثال ۱۰:** حاصل $I=\int\frac{(x^۲-۱)dx}{(x^۴+۳x^۲+۱)tg^{-۱}(\frac{x^۲+۱}{x})}$، کدام است؟

۱) $Ln|tg^{-۱}(x-\frac{۱}{x})|+c$　　۲) $Ln|tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})|+c$　　۳) $x+Ln|tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})|+c$　　۴) $x-Ln|tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})|+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا در صورت و مخرج از $x^۲$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{x^۲-۱}{(x^۴+۳x^۲+۱)tg^{-۱}(\frac{x^۲+۱}{x})}=\frac{x^۲(۱-\frac{۱}{x^۲})}{x^۲(x^۲+۳+\frac{۱}{x^۲})tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})}=\frac{۱-\frac{۱}{x^۲}}{[(x+\frac{۱}{x})^۲+۱]tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})}$$

حالا اگر از تغییر متغیر $x+\frac{۱}{x}=t$ استفاده کنیم، بنابراین $(۱-\frac{۱}{x^۲})dx=dt$ و لذا انتگرال به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$I=\int\frac{dt}{(t^۲+۱)tg^{-۱}t}=\int\frac{۱}{\underbrace{tg^{-۱}(t)}_{u}}(\underbrace{\frac{dt}{۱+t^۲}}_{du})=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|tg^{-۱}(t)|+c=\mathbf{Ln|tg^{-۱}(x+\frac{۱}{x})|+c}$$

## از کجا بفهمیم از چه تغییر متغیری باید استفاده کنیم؟

تغییر متغیر، مهم‌ترین روش در انتگرال‌گیری است. اما متأسفانه قاعده‌ی مشخصی برای آن وجود ندارد. مثلاً توصیه‌هایی غیررسمی می‌تواند این باشد: «عبارت درون رادیکال، توان اعداد، کل رادیکال، کل عبارت نوشته شده در مخرج کسر، عبارت داخل کمان مثلثاتی و نظایر آن بهتر است u انتخاب شوند» اما این توصیه‌ها همیشه درست نیستند؛ ممکن است در برخی سؤالات سخت آزمون‌ها، از آن‌ها استفاده نشود. نتیجه این که نمی‌توان به طور «صددرصد» قوانین و دستورهایی را برای تشخیص «نوع تغییر متغیر» در انتگرال‌ها وضع کرد. اما خیلی نگران نباشید، اکثر انتگرال‌هایی که در آزمون‌ها و امتحانات دانشگاهی با آن‌ها برخورد می‌کنیم، با دستورالعمل و دسته‌بندی‌هایی که در این بخش انجام خواهیم داد، قابل محاسبه هستند.

## تغییر متغیر در انتگرال‌های شامل رادیکال

در بیشتر انتگرال‌هایی که ما در حل آن‌ها از «تغییر متغیر» استفاده می‌کنیم، معمولاً آقای رادیکال حضور دارد! برای همین توصیه می‌کنم به این قسمت توجه و عنایت ویژه داشته باشید:

**حالت اول: در انتگرال، رادیکالی وجود دارد که مشتق عبارت داخل رادیکال، پشت آن وجود دارد.**

ساده‌ترین حالت ممکن از انتگرال‌هایی که شامل رادیکال هستند، حالتی است که مشتق عبارت زیر رادیکال، پشت رادیکال وجود دارد. در این حالت عبارت درون رادیکال را برابر با $u$ در نظر گرفته و چون $u'$ پشت آن وجود دارد، به راحتی به محاسبه‌ی انتگرال می‌پردازیم. البته باید دقت کنید منظور از این که مشتق رادیکال، پشت آن وجود دارد، این است که اگر عبارت رادیکال‌دار را جدا کردیم، از آنچه می‌ماند، بشود مشتق عبارت درون رادیکال را استخراج کرد، برای مثال در انتگرال $\int\frac{۲xdx}{\sqrt{۱+x^۲}}$، وقتی عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ را جدا کنیم، $۲xdx$ باقی می‌ماند، که دقیقاً مشتق عبارت زیر رادیکال است. اما اگر انتگرال به‌صورت $\int\frac{dx}{۲x\sqrt{۱+x^۲}}$ بود، نمی‌شد گفت مشتق عبارت زیر رادیکال پشت آن وجود دارد، چون وقتی $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ را جدا کنیم، $\frac{dx}{۲x}$ می‌ماند که به هیچ وجه مشتق عبارت زیر رادیکال نیست!

**مثال ۱۱:** حاصل $I=\int\frac{\sqrt[۳]{۱+Lnx}}{x}dx$، را بیابید.

☑ **پاسخ:** عبارت زیر رادیکال را $u$ می‌نامیم و مشتق آن، $\frac{۱}{x}$ در کنارش وجود دارد:

$$u=۱+Lnx\Rightarrow du=\frac{۱}{x}dx$$

$$I=\int u^{\frac{۱}{۳}}du=\frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}+c=\mathbf{\frac{۳}{۴}(۱+Lnx)^{\frac{۴}{۳}}+c}$$

**مثال ۱۲:** **حاصل انتگرال $I=\int x\sqrt{(۱-x^۲)^۳}dx$ به ازای $x=۰$ و $c=۱$ کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $۰$
۴) $-\frac{۶}{۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$I=\int x\sqrt{(۱-x^۲)^۳}dx=\int x(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}dx \Rightarrow u=۱-x^۲ \Rightarrow du=-۲x\,dx \Rightarrow x\,dx=-\frac{du}{۲}$$

$$I=\int (u^{\frac{۳}{۲}})(-\frac{du}{۲})=-\frac{۱}{۲}(\frac{u^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}})+c=-\frac{۱}{۵}(۱-x^۲)^{\frac{۵}{۲}}+c \xrightarrow[x=۰]{c=۱} I=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

**مثال ۱۳:** **حاصل $I=\int \frac{۲}{(۲-x)^۲}\sqrt[۳]{\frac{۲-x}{۲+x}}dx$ ، به‌صورت $A\sqrt[۳]{(\frac{۲+x}{۲-x})^۲}+c$ می‌باشد، مقدار $A$ چقدر است؟**

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در حال حاضر مشتق عبارت زیر رادیکال را در کنارش نداریم؛ اما اگر کمی خلاقیت به خرج دهیم مشکل حل می‌شود. به‌صورت سؤال توجه کنید، در عبارت زیر رادیکال، مخرج کسر $۲+x$ است اما در عبارت خارج از رادیکال مخرج کسر $(۲-x)^۲$ است، از این‌جا حدس می‌زنیم که عبارت بیرون رادیکال مشتقِ $\frac{۲-x}{۲+x}$ نیست، اما می‌تواند مشتقِ $u=\frac{۲+x}{۲-x}$ باشد، به همین خاطر این کسر را وارونه می‌کنیم.

$$I=\int \frac{۲}{(۲-x)^۲}(\frac{۲+x}{۲-x})^{-\frac{۱}{۳}}dx$$

حالا فرض می‌کنیم $u=\frac{۲+x}{۲-x}$ باشد:

$$u=\frac{۲+x}{۲-x} \Rightarrow du=\frac{(۲-x)+(۲+x)}{(۲-x)^۲}dx=\frac{۴}{(۲-x)^۲}dx$$

بنابراین با ضرب و تقسیم در ۲ می‌توانیم $du$ را ایجاد کنیم:

$$I=\frac{۱}{۲}\int \frac{۴}{(۲-x)^۲}(\frac{۲+x}{۲-x})^{-\frac{۱}{۳}}dx=\frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۳}}du=\frac{۱}{۲}\times\frac{u^{\frac{۲}{۳}}}{\frac{۲}{۳}}+c=\frac{۳}{۴}(\frac{۲+x}{۲-x})^{\frac{۲}{۳}}+c$$

بنابراین $A=\frac{۳}{۴}$ است.

**حالت دوم: در انتگرال، تابع رادیکالی وجود دارد و مشتق عبارت رادیکالی کنار آن وجود ندارد.**

در این حالت معمولاً کل عبارات شامل رادیکال را برابر با u در نظر می‌گیریم و حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم. البته حالت‌های خاصی هم ممکن است وجود داشته باشد که پس از انجام عملیات‌هایی به خواسته‌ی خود می‌رسیم.

**مثال ۱۴:** **حاصل $I=\int \frac{x(۱+\sqrt{x^۲+۱})^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}dx$ کدام است؟**

☑ **پاسخ:** در این مثال با انتخاب $u=\sqrt{x^۲+۱}$ می‌بینیم که $du=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}dx=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}dx$، پس $du$ را در انتگرال داریم:

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}(۱+\sqrt{x^۲+۱})^۲dx=\int (۱+u)^۲du$$

با تغییر متغیر $t=۱+u$، داریم: $du=dt$، پس:

$$I=\int t^۲dt=\frac{t^۳}{۳}+c=\frac{(۱+u)^۳}{۳}+c=\frac{(۱+\sqrt{x^۲+۱})^۳}{۳}+c$$

**مثال ۱۵:** **حاصل انتگرال $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{۱+x^۲+\sqrt{(۱+x^۲)^۳}}}$ را حساب کنید.**

☑ **پاسخ:** با استفاده از تغییر متغیر $۱+x^۲=t$، خواهیم داشت $xdx=\frac{۱}{۲}dt$، لذا داریم:

$$I=\int \frac{\frac{۱}{۲}dt}{\sqrt{t+\sqrt{t^۳}}}=\int \frac{\frac{۱}{۲}dt}{\sqrt{t+t\sqrt{t}}}=\int \frac{\frac{۱}{۲}dt}{\sqrt{t}\sqrt{۱+\sqrt{t}}}=\int \frac{dt}{۲\sqrt{t}\sqrt{۱+\sqrt{t}}}$$

حالا با تغییر متغیر $۱+\sqrt{t}=u$ داریم: $du=\frac{dt}{۲\sqrt{t}}$ و بنابراین داریم:

$$I=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=۲\sqrt{u}+c=۲\sqrt{۱+\sqrt{t}}+c=۲\sqrt{۱+\sqrt{۱+x^۲}}+c$$

**حالت سوم: در انتگرال، تابع رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax^۲+bx+c}$ وجود دارد.**

این حالت خود دارای دسته‌بندی‌های مختلفی به‌صورت زیر است:

**الف)** ساده‌ترین حالت این است که مشتق زیر رادیکال کنار آن وجود داشته باشد، که مانند حالت اول است و باید از تغییر متغیر $u=ax^۲+bx+c$ استفاده کنیم.

**ب)** اگر مشتق زیر رادیکال در انتگرال موجود نباشد، با ایجاد مربع کامل، عبارت رادیکالی را به یکی از سه شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{u^۲+a^۲}\ ,\ \sqrt{u^۲-a^۲}\ ,\ \sqrt{a^۲-u^۲}$$

که برای هر یک از آن‌ها تغییر متغیر مثلثاتی به شکل زیر وجود دارد:

**۱) برای حالتی که زیر انتگرال، رادیکالی به شکل $\sqrt{a^۲-u^۲}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ استفاده می‌کنیم.**

در این حالت، محدودیت $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ را ایجاد می‌کنیم، زیرا در این بازه $\cos\theta>۰$ است. بعد از این تغییر متغیر، از دست رادیکال به شکل زیر خلاص می‌شویم:

$$\sqrt{a^۲-u^۲}=\sqrt{a^۲-(a\sin\theta)^۲}=\sqrt{a^۲(۱-\sin^۲\theta)}=\sqrt{a^۲\cos^۲\theta}=a|\cos\theta|$$

**مثال ۱۶:** **حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\sqrt{(۱-x^۲)^۳}}$ کدام است؟**

۱) $\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}+c$

۲) $\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}+c$

۳) $x\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}+c$

۴) $x\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\sin\theta$، $dx=\cos\theta\,d\theta$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(۱-x^۲)^۳}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(۱-\sin^۲\theta)^۳}}=\int\frac{\cos\theta}{\cos^۳\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos^۲\theta}=\mathrm{tg}\,\theta+c=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}+c$$

در این نوع انتگرال‌ها در قسمت نهایی پاسخ، باید عبارت به‌دست آمده بر حسب $\theta$ را به عبارتی بر حسب $x$ تبدیل کنیم. برای این منظور چون $x=\sin\theta$، آن‌گاه $\cos\theta=\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\sqrt{۱-x^۲}$ و لذا $\mathrm{tg}\theta$ را می‌توان به‌صورت $\mathrm{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ نوشت. البته در این سؤال استفاده از فرمول‌های مثلثاتی راحت بود. اما یک روش جالب، رسم یک مثلث قائم‌الزاویه است که در مثال‌های بعدی آن روش را نیز خواهیم دید.

**۲) برای حالتی که زیر انتگرال رادیکالی به شکل $\sqrt{u^۲-a^۲}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u=a\sec\theta$ و یا $u=a\cosh\theta$ استفاده می‌کنیم.**

دقت کنید؛ در این حالت وقتی از تغییر متغیر $u=a\sec\theta$، استفاده می‌کنیم، محدودیت $۰\le\theta<\frac{\pi}{۲}$ (برای $u\ge a$) و یا $\pi\le\theta<\frac{۳\pi}{۲}$ (برای $u\le -a$) را در نظر می‌گیریم. زیرا در این بازه، $\mathrm{tg}\theta$ مثبت است. بعد از این تغییر متغیر، از دست رادیکال به شکل زیر خلاص می‌شویم:

$$\sqrt{u^۲-a^۲}=\sqrt{(a\sec\theta)^۲-a^۲}=\sqrt{a^۲\sec^۲\theta-a^۲}=\sqrt{a^۲(\sec^۲\theta-۱)}=\sqrt{a^۲\mathrm{tg}^۲\theta}=a|\mathrm{tg}\theta|=a\mathrm{tg}\theta$$

چون مطابق محدودیت ذکر شده، $\mathrm{tg}\theta>۰$ بود، توانستیم قدرمطلق را در قسمت آخر محاسبات برداریم.

**مثال ۱۷:** **حاصل $I=\int\frac{dx}{(x+\frac{۱}{۲})\sqrt{۴x^۲+۴x}}$، کدام است؟**

۱) $\mathrm{arcsec}(۲x+۱)+C$

۲) $\mathrm{arcsec}(۴x+۱)+C$

۳) $\mathrm{arcsec}(x+\frac{۱}{۲})+C$

۴) $\mathrm{arcsec}(۴x+\frac{۱}{۲})+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا عبارت زیر رادیکال را به صورت «$۴(x+\frac{۱}{۲})^۲-۱$» می‌نویسیم و لذا داریم:

$$I=\int\frac{dx}{(x+\frac{۱}{۲})\sqrt{۴(x+\frac{۱}{۲})^۲-۱}}$$

حالا از تغییر متغیر $۲(x+\frac{۱}{۲})=\sec\theta$، استفاده می‌کنیم و لذا $dx=\frac{۱}{۲}\sec\theta\mathrm{tg}\theta d\theta$ است، بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{(\frac{۱}{۲}\sec\theta\mathrm{tg}\theta)d\theta}{\frac{۱}{۲}\sec\theta\sqrt{\sec^۲\theta-۱}}=\int\frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\theta}d\theta=\int d\theta=\theta+C=\mathrm{arcsec}(۲x+۱)+C$$

**۳) برای حالتی که زیر انتگرال، رادیکالی به شکل $\sqrt{u^۲+a^۲}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u=a\mathrm{tg}\theta$ و یا $u=a\sinh\theta$ استفاده می‌کنیم.**

دقت کنید؛ در این حالت وقتی از تغییر متغیر $u=a\mathrm{tg}\theta$ استفاده می‌کنیم، محدودیت $-\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. زیرا در این بازه، $\cos\theta>۰$ است و بعد از این تغییر متغیر از دست رادیکال به شکل مقابل خلاص می‌شویم: $\sqrt{u^۲+a^۲}=\sqrt{(a\mathrm{tg}\theta)^۲+a^۲}=\sqrt{a^۲(۱+\mathrm{tg}^۲\theta)}=a|\sec\theta|=a|\frac{۱}{\cos\theta}|=a(\frac{۱}{\cos\theta})$

و چون در این بازه، $\cos\theta>۰$ بود، در قسمت آخر محاسبات توانستیم قدرمطلق را برداریم.

**تذکر۲:** برای انتخاب نوع تغییر متغیر در انتگرال‌های نوع (۲) و (۳) بهتر است به دیگر عبارات موجود در انتگرال و همچنین نوع جواب درگزینه‌ها دقت کرده و یکی از این دو تغییر متغیر را استفاده کنیم. البته معمولاً تغییر متغیر مثلثاتی در اکثر سؤالات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**مثال۱۸:** حاصل $I=\int \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x^۴}dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{(۹+x)^{\frac{۳}{۲}}}{۹x^۳}+C$

۲) $-\frac{(۹+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۲۷x^۳}+C$

۳) $\frac{(۹+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۹x^۳}+C$

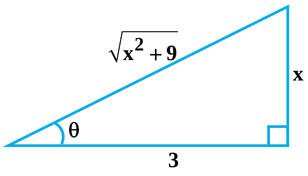
۴) $\frac{(۹+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۲۷x^۳}+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به وجود عبارت رادیکالی استفاده از روش تغییر متغیر و با فرض $x=۳tg\theta$ داریم؛ $dx=(۳\sec^۲\theta)d\theta$. با توجه به رابطه $۱+tg^۲\theta=\sec^۲\theta$ داریم:

$$I=\int\frac{\sqrt{۹\sec^۲\theta}}{۸۱tg^۴\theta}(۳\sec^۲\theta)d\theta=\int\frac{۳\sqrt{\sec^۲x}(۳\sec^۲\theta)}{۸۱tg^۴\theta}d\theta=\frac{۱}{۹}\int\frac{\sec^۳\theta}{tg^۴\theta}d\theta=\frac{۱}{۹}\int\frac{\cos\theta}{\sin^۴\theta}d\theta=\frac{۱}{۹}\int\underbrace{\boxed{\sin^{-۴}\theta}}_{u}\underbrace{\boxed{\cos\theta d\theta}}_{du}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۹}(\frac{\sin^{-۳}\theta}{-۳})=-\frac{۱}{۲۷}(\frac{۱}{\sin^۳\theta})=(-\frac{۱}{۲۷})\frac{۱}{(\sin^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}}=(-\frac{۱}{۲۷})\frac{۱}{(\frac{x^۲}{x^۲+۹})^{\frac{۳}{۲}}}+C=(-\frac{۱}{۲۷})\frac{(x^۲+۹)^{\frac{۳}{۲}}}{x^۳}+C$$

**توضیح:** وقتی حاصل انتگرال بر حسب $\theta$ محاسبه شد، باید عبارت را برحسب $x$ بنویسیم. برای این منظور یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل مقابل ترسیم می‌کنیم و ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی $\theta$ را $x$ نامیده و ضلع مجاور آن را ۳ در نظر می‌گیریم، تا رابطه‌ی $tg\theta=\frac{x}{۳}$ که از ابتدا فرض کرده بودیم، برقرار شود. طبیعی است در چنین مثلثی، وتر «$\sqrt{x^۲+۹}$» به‌دست می‌آید و حالا به راحتی می‌توانیم $\sin\theta$ را بر حسب $x$ حساب کنیم. به راحتی داریم:



«$tg\theta=\frac{x}{3}$»

$$\sin\theta=\frac{\text{ضلع روبه‌روی زاویه}\ \theta}{\text{وتر مثلث}}=\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۹}}\Rightarrow\sin^۲\theta=\frac{x^۲}{x^۲+۹}$$

**توجه:** البته ترسیم شکل برای درک بهتر داوطلبان است وگرنه به راحتی با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توانیم از رابطه‌ی $tg\theta=\frac{x}{۳}$، مقدار $\sin^۲\theta$ را حساب کنیم.

(از رابطه‌ی $\frac{۱}{\cos^۲\theta}=(۱+tg^۲\theta)$، می‌توانید $\cos^۲\theta$ را حساب کرده و از روی رابطه‌ی $\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta$، به راحتی به $\sin^۲\theta$ رسید!)

**مثال۱۹:** حاصل $I=\int\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x^۴}dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x})^۳+C$

۲) $\frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x})^۳+C$

۳) $-\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x})^۳+C$

۴) $-\frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x})^۳+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه‌ی این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم، فرض کنید؛ $x=\sin\theta$، پس $dx=\cos\theta d\theta$ و با توجه به رابطه $\frac{۱}{\sin^۲\theta}=۱+\cot g^۲\theta$، داریم:

$$I=\int\frac{\sqrt{۱-\sin^۲\theta}}{\sin^۴\theta}\cos\theta d\theta=\int\frac{|\cos\theta|}{\sin^۴\theta}\cos\theta d\theta\overset{\theta\in[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]}{=\!=\!=}\int\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۴\theta}d\theta=\int\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}(\frac{۱}{\sin^۲\theta})d\theta$$

$$\Rightarrow I=\int\cot g^۲\theta(۱+\cot g^۲\theta)d\theta\xrightarrow{\text{از تغییر متغیر}\ u=\cot g\theta\ \text{داریم}}I=-\frac{u^۳}{۳}+c=-\frac{\cot g^۳\theta}{۳}+c=-\frac{۱}{۳}[\frac{\cos^۳\theta}{\sin^۳\theta}]+c$$

خُب، انتگرال بر حسب $\theta$ محاسبه شد، اما گزینه‌ها بر حسب $x$ هستند، بنابراین باید حاصل انتگرال را بر حسب $x$ بنویسیم، برای این منظور باید $\cos\theta$ را نیز بر حسب $x$ حساب کنیم:

$$x=\sin\theta\Rightarrow x^۲=\sin^۲\theta\Rightarrow ۱-x^۲=۱-\sin^۲\theta\Rightarrow ۱-x^۲=\cos^۲\theta\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنابراین داریم:

$$I=-\frac{۱}{۳}[\frac{\cos^۳\theta}{\sin^۳\theta}]+c=-\frac{۱}{۳}[\frac{(\sqrt{۱-x^۲})^۳}{x^۳}]+c$$

**مثال۲۰:** حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{x^۲+۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴x}+c$

۲) $\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴}+c$

۳) $-\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴}+c$

۴) $\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴x}+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به این‌که مشتق عبارت داخل رادیکال، بیرون رادیکال موجود نیست و عبارت زیر رادیکال به فرم $\sqrt{u^۲+a^۲}$ می‌باشد. پس از متغیر $u=a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$x=۲tg\theta\Rightarrow dx=۲(۱+tg^۲\theta)d\theta=\frac{۲}{\cos^۲\theta}d\theta=۲\sec^۲\theta d\theta$$

$$I=\int\frac{۲\sec^۲\theta\, d\theta}{۴tg^۲\theta\sqrt{۴+۴tg^۲\theta}}=\int\frac{۲\sec^۲\theta\, d\theta}{۴tg^۲\theta\sqrt{۴(۱+tg^۲\theta)}}=\int\frac{۲\sec^۲\theta d\theta}{(۴tg^۲\theta)(۲\sec\theta)}=\frac{۱}{۴}\int\frac{\sec\theta}{tg^۲\theta}d\theta=\frac{۱}{۴}\int\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۴}\int\frac{\cos\theta}{\sin^۲\theta}d\theta=\frac{۱}{۴}\int(\underbrace{\sin\theta}_{u})^{-۲}\underbrace{\cos\theta d\theta}_{du}=-\frac{۱}{۴}\sin^{(-۲+۱)}\theta+c=-\frac{۱}{۴\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{۴x}+c$$

توجه شود در قسمت نهایی که عبارت را برحسب x نوشتیم چون $x=۲tg\theta$ و $\cot g\theta=\frac{۲}{x}$ و از آنجایی که $\sin^۲\theta=\frac{۱}{۱+\cot g^۲\theta}$ می‌توان نتیجه گرفت $\sin^۲\theta=\frac{۱}{۱+(\frac{۲}{x})^۲}=\frac{x^۲}{x^۲+۴}$. لذا $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}$ به‌دست آمد.

**سؤال دانشجو:** گاهی نوع تغییر متغیر این نوع انتگرال‌ها از یادمان می‌رود، برای رفع این مشکل چه کار کنیم؟

**پاسخ:** این مشکل را بارها شنیده‌ام، اما رفع آن بسیار ساده است! دانشجو باید توجه کند؛ در این نوع انتگرال‌های شامل رادیکال، ماجرا از این قرار است که **ما می‌خواهیم از دست رادیکال خلاص شویم و آن را از بازی محاسبه‌ی انتگرال بیرون کنیم!!** توجه به همین جمله باعث می‌شود شما هیچ‌وقت تغییر متغیرها را یادتان نرود! من از شما سؤال می‌کنم! چرا در انتگرال $\sqrt{a^۲-u^۲}$ از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ استفاده می‌کنیم؟ خُب خودم جواب می‌دهم! چون هدف ما خلاصی از دست رادیکال است، پس $a^۲(۱-\sin^۲\theta)$ و به عبارت دیگر $a^۲\cos^۲\theta$ ایجاد می‌کنیم. مثلاً فرض کنید؛ بخواهیم در این انتگرال از تغییر متغیر $u=atg\theta$ و یا $u=a\sec\theta$، استفاده کنیم! آیا می‌توان عبارتی که مربع کامل است در رادیکال ایجاد کرد!؟ جواب خیر است. به همین ترتیب برای رادیکال‌های دیگر نیز ماجرا به همین شکل است؛ برای مثال در انتگرال $\sqrt{u^۲+a^۲}$، واقعاً چه کار کنیم که از دست رادیکال خلاص شویم؟ مثلاً $u=a\sin\theta$، خوب است!؟ معلومه که نه! حالا اگه $u=a\sinh\theta$ بود، می‌شد قبول کرد! چون $\sinh^۲\theta+۱=\cosh^۲\theta$ و یا حتی $u=atg\theta$ هم به ما کمک می‌کند، چون $a^۲(۱+tg^۲\theta)$ ایجاد می‌کند که می‌دانیم برابر $\frac{a^۲}{\cos^۲\theta}$ می‌باشد و به راحتی از رادیکال بیرون می‌آید.

**۴) روش کوچکترین مضرب مشترک برای انتگرال‌های شامل رادیکال:** در برخی انتگرال‌ها توان‌های مختلفی از x، درون رادیکال‌هایی با فرجه‌های مختلف قرار دارند. در این حالت، تغییر متغیر مناسب به‌صورت $x=t^k$ است که k، کوچکترین مضرب مشترک «فرجه‌ها» می‌باشد. مثال زیر موضوع را بهتر روشن می‌کند:

**مثال ۲۱: حاصل $\int\frac{x+\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۶]{x}}{x(۱+\sqrt[۳]{x})}dx$، را به‌دست آورید.**

☑ **پاسخ:** کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها برابر با ۶ است (چون فرجه‌ها ۶، ۳ و ۳ هستند)، بنابراین تغییر متغیر مناسب $x=t^۶$ است که از آن $dx=۶t^۵dt$، نتیجه می‌شود. بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{t^۶+\sqrt[۳]{(t^۶)^۲}+\sqrt[۶]{t^۶}}{t^۶(۱+\sqrt[۳]{t^۶})}(۶t^۵dt)=۶\int\frac{t^۶+t^۴+t}{t(۱+t^۲)}dt=۶\int\frac{t(t^۵+t^۳+۱)}{t(۱+t^۲)}dt=۶\int\frac{t^۵+t^۳+۱}{۱+t^۲}dt$$

چون درجه صورت از درجه مخرج بیشتر است، بنابراین با تقسیم صورت بر مخرج، داریم:

$$I=۶\int(t^۳+\frac{۱}{۱+t^۲})dt=۶\int t^۳dt+۶\int\frac{dt}{۱+t^۲}=۶(\frac{t^۴}{۴})+۶Arctgt+C\xrightarrow{t=x^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{x}}I=\frac{۳}{۲}(x^{\frac{۱}{۶}})^۴+۶Arctg\sqrt[۶]{x}+C=\boldsymbol{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۶Arctg\sqrt[۶]{x}+C}$$

**مثال ۲۲: در پاسخ انتگرال $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}$، یکی از جمله‌ها به‌صورت $A\sin^{-۱}(x+\frac{۱}{۲})$ می‌باشد. مقدار A کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا انتگرال را به‌صورت $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{۴-(۲x+۱)^۲}}$ بازنویسی می‌کنیم، سپس با به کارگیری تغییر متغیر $u=۲x+۱$، داریم:

$$I=\int\frac{\frac{u-۱}{۲}\times\frac{du}{۲}}{\sqrt{۴-u^۲}}=\frac{۱}{۴}\int\frac{u-۱}{\sqrt{۴-u^۲}}du=\frac{۱}{۴}\int\frac{u}{\sqrt{۴-u^۲}}du-\frac{۱}{۴}\int\frac{۱}{\sqrt{۴-u^۲}}du=\frac{۱}{۴}(-\frac{۱}{۲})\int(۴-u^۲)^{-\frac{۱}{۲}}(-۲u)du-\frac{۱}{۴}Arc\sin(\frac{u}{۲})$$

$$=-\frac{۱}{۸}(۲(۴-u^۲)^{\frac{۱}{۲}})-\frac{۱}{۴}Arc\sin\frac{۲x+۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}[۴-u^۲]^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۴}Arc\sin(x+\frac{۱}{۲})+C=-\frac{۱}{۴}\sqrt{۴-(۲x+۱)^۲}-\frac{۱}{۴}Arc\sin(x+\frac{۱}{۲})+C$$

**نکته۱:** حالت خاصی از انتگرال رادیکالی به‌صورت $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ و یا $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{mx^۲+nx+k}}$، می‌باشد که با استفاده از تغییر متغیر $ax+b=\frac{۱}{u}$ محاسبه می‌شوند. این نوع انتگرال‌ها تاکنون به ندرت مورد سؤال قرار گرفته‌اند، اما آشنایی با آن‌ها خالی از لطف نیست!

**مثال ۲۳:** **حاصل $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{۸x^{۲}+۲x-۱}}$، را بیابید. $(x>۰)$**

☑ **پاسخ:** با فرض $x=\frac{۱}{u}$، آن‌گاه $dx=-\frac{du}{u^{۲}}$ و لذا داریم: $\sqrt{۸x^{۲}+۲x-۱}=\sqrt{\frac{۸}{u^{۲}}+\frac{۲}{u}-۱}=\sqrt{\frac{۸+۲u-u^{۲}}{u^{۲}}}$

$$I=\int\frac{-\frac{du}{u^{۲}}}{\frac{۱}{u}\times\frac{\sqrt{۸+۲u-u^{۲}}}{u}}=-\int\frac{du}{\sqrt{۸+۲u-u^{۲}}}=-\int\frac{du}{\sqrt{۹-(u-۱)^{۲}}}=-\mathrm{Arcsin}\frac{u-۱}{۳}+c=-\mathrm{Arcsin}(\frac{\frac{۱}{x}-۱}{۳})+c=\mathbf{Arcsin}(\frac{۱-x}{۳x})+c$$

**نکته۲:** در محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به فرم کلی $I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}dx$ تغییر متغیر مناسب، $x+\frac{b}{۲a}=u$ است.

## انتگرال دیفرانسیل دوجمله‌ای و قضیه‌ی چبیشف

انتگرال دو جمله‌ای دیفرانسیل به‌صورت $\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}dx$، تعریف می‌شود که در آن $m$، $n$ و $p$ اعداد گویا هستند. بر اساس قضیه‌ی چبیشف این نوع انتگرال‌ها را تنها در سه حالت زیر می‌توان به انتگرال‌گیری توابع گویا تبدیل کرد:

**حالت اول:** اگر $p$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه دو حالت را خواهیم داشت؛ هرگاه $p>۰$ باشد، آن‌گاه $(a+bx^{n})^{p}$، همان دو جمله‌ای نیوتن بوده و بنابراین انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه می‌باشد. اما اگر $p<۰$، آن‌گاه از تغییر متغیر $x=t^{N}$ استفاده می‌کنیم که $N$ مخرج مشترک کسرهای $m$ و $n$ است.

**حالت دوم:** اگر «$\frac{m+۱}{n}$» عددی صحیح باشد، از تغییر متغیر $a+bx^{n}=t^{\alpha}$ استفاده می‌کنیم که $\alpha$ مخرج کسر $p$ است.

**حالت سوم:** هرگاه «$\frac{m+۱}{n}+p$»، عددی صحیح باشد. آن‌گاه از تغییر متغیر $a+bx^{n}=t^{\alpha}x^{n}$ استفاده می‌کنیم که در آن، $\alpha$ مخرج کسر $p$ است.

**مثال ۲۴:** **تغییر متغیرهای مناسب برای انتگرال‌های زیر را بیابید.**

الف) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[۴]{x}+۱)^{۱۰}}$

ب) $\int x^{-\frac{۲}{۳}}(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}dx$

ج) $\int x^{-۱۱}(۱+x^{۴})^{-\frac{۱}{۲}}dx$

☑ **پاسخ:**

**بررسی انتگرال الف:** در این انتگرال $p=-۱۰$ و بنابراین در حالت اول هستیم. چون مخرج مشترک کسرهای $m$ و $n$ یعنی ۴ و ۲ برابر با ۴ است، لذا تغییر متغیر مناسب $x=t^{۴}$ است.

**بررسی انتگرال ب:** در این انتگرال $p=\frac{۱}{۲}$ و چون $p$ عددی صحیح نیست، $\frac{m+۱}{n}$ را بررسی می‌کنیم: $\frac{m+۱}{n}=\frac{-\frac{۲}{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}}=۱$، پس در حالت دوم هستیم و باید از تغییر متغیر مناسب $۱+x^{\frac{۱}{۳}}=t^{۲}$ استفاده کنیم.

**بررسی انتگرال ج:** در این انتگرال $p=-\frac{۱}{۲}$ و چون $p$ عددی صحیح نیست، باید $\frac{m+۱}{n}$ را بررسی کنیم؛ $\frac{m+۱}{n}=\frac{-۱۱+۱}{۴}=-\frac{۵}{۲}$، و چون این عبارت هم غیرصحیح است، «$\frac{m+۱}{n}+p$» را حساب می‌کنیم که حاصلش $-۳=-\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲}$ است و لذا در حالت سوم هستیم و بنابراین باید از تغییر متغیر $۱+x^{۴}=t^{۲}x^{۴}$ استفاده کنیم.

**مثال ۲۵:** **حاصل انتگرال $I=\int\frac{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}dx$، برابر کدام گزینه است؟**

۱) $(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۲}{۳}}+C$

۲) $۲(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}+C$

۳) $(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}+C$

۴) $۲(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۲}{۳}}+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به روش انتگرال‌گیری از دوجمله‌ای دیفرانسیلی باید به سؤال جواب بدهیم. برای این منظور تابع زیر انتگرال را به فرم استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور عبارت مخرج کسر را به‌صورت کسر منتقل می‌کنیم:

$$I=\int\frac{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}dx=\int x^{-\frac{۲}{۳}}(x^{\frac{۱}{۳}}+۱)^{\frac{۱}{۲}}dx \qquad (*)$$

با مقایسه با مطلب گفته شده در مورد این نوع انتگرال‌ها، داریم:

$$m=-\frac{۲}{۳}\ ,\ n=\frac{۱}{۳}\ ,\ P=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{m+۱}{n}=\frac{-\frac{۲}{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}}=۱$$

چون $\frac{m+۱}{n}$ عددی صحیح است، بنابراین باید از تغییر متغیر $۱+x^{\frac{۱}{۳}}=u^{۲}$ استفاده کنیم، لذا داریم:

$$۱+x^{\frac{۱}{۳}}=u^{۲} \Rightarrow (\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}})dx=۲udu \Rightarrow x^{-\frac{۲}{۳}}dx=۶udu$$

بنابراین انتگرال (*) را به‌صورت روبرو بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int(۶udu)u=۶\int u^{۲}du=۶(\frac{u^{۳}}{۳})+C=۲u^{۳}+C=۲(۱+x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}+C$$

**توضیح:** البته در حل این سؤال نیازی به آشنایی با روابط دوجمله‌ای دیفرانسیلی نبود. همان‌طور که در متن درس نیز گفتیم به عنوان یک توصیه‌ی غیررسمی! در انتگرال‌هایی که تابع رادیکالی داریم، عبارت رادیکالی را برابر با $u$ در نظر می‌گیریم. اتفاقی که در بالا با چک کردن مقادیر $m$، $n$ و $p$ افتاد، برای دانستن این بود که چه تغییر متغیری باید اعمال شود. البته همیشه این‌طوری نیست که مطالب دوجمله‌ای دیفرانسیل مفید نباشد!

**تذکر ۳:** نوع دیگری از سؤالات که هر از گاهی در آزمون‌ها مطرح می‌شوند، در ظاهر خود، نشانه‌ی انتگرال (یعنی $\int$) را ندارند! اما در مسیر پاسخگویی به آن‌ها به انتگرال‌گیری نیاز داریم.

**مثال ۲۶: معادله‌ی منحنی که در نقطه‌ای به طول $x=۱$ بر خط $y=x-۲$ مماس باشد و داشته باشیم $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۶x$، کدام است؟**

۱) $y=x^{۳}-۳x+۱$

۲) $y=x^{۳}-۳x-۲$

۳) $y=x^{۳}-۲x+۴$

۴) $y=x^{۳}-۲x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۶x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\int ۶xdx=۳x^{۲}+c \Rightarrow y=\int(۳x^{۲}+c)dx=x^{۳}+cx+d$$

چون طبق فرض سؤال، منحنی در نقطه‌ی $x=۱$ بر خط $y=x-۲$ مماس می‌باشد، بنابراین منحنی از نقطه $P(۱,-۱)$ عبور می‌کند و شیب آن در $x=۱$ برابر شیب خط یعنی یک خواهد بود.

$$\begin{cases}۱+c+d=-۱\\ ۳+c=۱ \Rightarrow c=-۲\ ,\ d=۰\end{cases}$$

بنابراین معادله به‌صورت $y=x^{۳}-۲x$ است.

## استفاده از روش‌های ابتکاری در محاسبه‌ی انتگرال‌ها

هر چند حاصل اکثر انتگرال‌ها را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر مناسب و روش‌های دیگر محاسبه کرد، اما روش‌هایی برای برخی از انتگرال‌ها وجود دارد که حل انتگرال را بسیار راحت‌تر می‌کنند، در این قسمت چند نمونه از آن‌ها را برایتان حل می‌کنیم.

**مثال ۲۷: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.**

الف) $\int\frac{\sin x}{۱+\sin x}dx$

ب) $\int\sec xdx$

ج) $\int\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}dx$

د) $\int\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}dx$

☑ **پاسخ:**

**حل الف:** برای حل این انتگرال بهتر است به‌صورت کسر، عدد $\underline{۱}$ را اضافه و کم کنیم (این ایده به خاطر وجود $۱+\sin x$ در مخرج کسر به ذهن می‌رسد):

$$I=\int\frac{\sin x}{۱+\sin x}dx=\int\frac{۱+\sin x-۱}{۱+\sin x}dx=\int(۱-\frac{۱}{۱+\sin x})dx=\int dx-\int\frac{۱}{۱+\sin x}dx=I_{۱}-I_{۲}$$

حاصل انتگرال اول که به راحتی برابر با $x$ به‌دست می‌آید، مشکل اصلی به‌دست آوردن حاصل انتگرال دوم است. یادتان باشد؛ برای حل انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int\frac{dx}{۱\pm\sin x}$، بهتر است صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم:

$$\int\frac{۱}{۱+\sin x}dx=\int\frac{۱-\sin x}{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}dx=\int\frac{۱-\sin x}{۱-\sin^{۲}x}dx\xrightarrow{\text{انتگرال را به دو انتگرال تفکیک می‌کنیم}}$$

$$I=\int\frac{۱dx}{۱-\sin^{۲}x}-\int\frac{\sin x}{۱-\sin^{۲}x}dx=\int\frac{۱}{\cos^{۲}x}dx-\int tgx(\frac{۱}{\cos x})dx=tgx-\sec x+c$$

**حل ب:** به‌دست آوردن انتگرال $\int\sec xdx$، روش‌های مختلفی دارد، اما یک روش ابتکاری و راحت این است که صورت و مخرج این کسر را در $(\sec x+tgx)$ ضرب کنیم:

$$\int(\sec x)dx=\int\frac{\sec x(\sec x+tgx)}{\sec x+tgx}dx=\int\frac{\sec^{۲}x+(\sec x)tgx}{\sec x+tgx}dx$$

خب حالا اگر از تغییر متغیر $\sec x+tgx=u$ استفاده کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{\cos x}+tgx=u \Rightarrow [\frac{\sin x}{\cos^{۲}x}+\frac{۱}{\cos^{۲}x}]dx=du \Rightarrow [\frac{۱}{\cos x}(\frac{\sin x}{\cos x})+\sec^{۲}x]dx=du \Rightarrow [(\sec x)tgx+\sec^{۲}x]dx=du$$

ملاحظه می‌کنید؛ مشتق مخرج کسر در صورت کسر وجود دارد، لذا داریم:

$$I=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=\mathbf{Ln|\sec x+tgx|+c}$$

**حل ج:** بهترین روش حل این است که صورت و مخرج عبارتِ تحتِ انتگرال را در «مزدوج مخرج کسر» ضرب کنیم.

(این ایده به دلیل وجود $\sqrt{۱-x}$ در صورت کسر به ذهن می‌رسد)

$$\int\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}}dx=\int\frac{\sqrt{۱-x}.\sqrt{۱-x}}{(\sqrt{۱+x})(\sqrt{۱-x})}dx=\int\frac{۱-x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx=\int\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx+\int\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}+\frac{۱}{۲}\int-۲x(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx=\mathbf{\sin^{-۱}x+(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}+c}$$

**حل د:** با ضرب صورت و مخرج در $e^{-\frac{x}{۲}}$ داریم:

$$I=\int\frac{e^{x-\frac{x}{۲}}-e^{-\frac{x}{۲}}}{e^{x-\frac{x}{۲}}+e^{-\frac{x}{۲}}}dx=\int(\frac{e^{\frac{x}{۲}}-e^{-\frac{x}{۲}}}{e^{\frac{x}{۲}}+e^{-\frac{x}{۲}}})dx=\int(\frac{\frac{e^{\frac{x}{۲}}-e^{-\frac{x}{۲}}}{۲}}{\frac{e^{\frac{x}{۲}}+e^{-\frac{x}{۲}}}{۲}})dx=\int(\frac{\sinh\frac{x}{۲}}{\cosh\frac{x}{۲}})dx=۲\mathrm{Ln}(\cosh\frac{x}{۲})+c$$

**مثال ۲۸:** حاصل $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}|\mathrm{cotg}x|+c$
۲) $\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}x|+c$
۳) $\mathrm{Ln}|\mathrm{cotg}۲x|+c$
۴) $\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}۲x|+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل در صورت کسر به جای dx، عبارت $(\sin^۲x+\cos^۲x)dx$ را قرار می‌دهیم. لذا داریم:

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos x}=\int\frac{(\sin^۲x+\cos^۲x)dx}{\sin x.\cos x}=\int(\frac{\sin^۲x}{\sin x.\cos x}+\frac{\cos^۲x}{\sin x.\cos x})dx=\int(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})dx$$

$$=\int\mathrm{tg}x dx+\int\mathrm{cotg}x dx=-\mathrm{Ln}|\cos x|+\mathrm{Ln}|\sin x|+c=\mathrm{Ln}|\frac{\sin x}{\cos x}|+c=\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}x|+c$$

**مثال ۲۹:** حاصل $I=\int\frac{۱-\mathrm{tg}x}{۱+\mathrm{tg}x}dx$ کدام است؟

۱) $-\mathrm{Ln}[\cos(\frac{\pi}{۴}-x)]+c$
۲) $\mathrm{Ln}[\cos(\frac{\pi}{۴}-x)]+c$
۳) $\mathrm{Ln}[\sin(\frac{\pi}{۴}-x)]+c$
۴) $-\mathrm{Ln}[\sin(\frac{\pi}{۴}-x)]+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $\mathrm{tg}\frac{\pi}{۴}=۱$ و با کمی دقت واضح است تابع زیر انتگرال برابر با مقدار مقابل است: $\frac{۱-\mathrm{tg}x}{۱+\mathrm{tg}x}=\frac{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{۴})-\mathrm{tg}x}{۱+(\mathrm{tg}\frac{\pi}{۴})\mathrm{tg}x}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{۴}-x)$

در رابطه‌ی بالا از فرمول $\mathrm{tg}(a-b)=\frac{\mathrm{tg}a-\mathrm{tg}b}{۱+\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}$ استفاده کردیم و اصولاً این رابطه در حل برخی مسائل مشکل، بعضاً به کار می‌آید:

$$I=\int\mathrm{tg}(\frac{\pi}{۴}-x)dx=\int\frac{\sin(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos(\frac{\pi}{۴}-x)}dx=\mathrm{Ln}[\cos(\frac{\pi}{۴}-x)]+c$$

**مثال ۳۰:** حاصل $I=\int x\sqrt{\frac{۲+x^۲}{۲-x^۲}}dx$ کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

۱) $\mathrm{Arc}\sin\frac{x^۲}{۲}-\frac{\sqrt{۴-x^۴}}{۲}+c$
۲) $\mathrm{Arc}\sin\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۲}$
۳) $-\mathrm{Arc}\sin\frac{x}{۲}+\sqrt{۴-x^۲}+c$
۴) $-\mathrm{Arc}\sin\frac{x^۲}{۲}+\sqrt{۴-x^۴}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یک انتگرال نسبتاً جالب! با تغییر متغیر $x^۲=t$، آن‌گاه $۲xdx=dt$، لذا داریم:

$$I=\frac{۱}{۲}\int\sqrt{\frac{۲+t}{۲-t}}dt\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در }\sqrt{۲+t}\text{ ضرب می کنیم}}I=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲+t}{\sqrt{۴-t^۲}}dt=\frac{۱}{۲}\int(\frac{۲}{\sqrt{۴-t^۲}})dt+\frac{۱}{۲}\int\frac{t}{\sqrt{۴-t^۲}}dt=\int\frac{dt}{\sqrt{۲^۲-t^۲}}+\frac{۱}{۲}\int t(۴-t^۲)^{-\frac{۱}{۲}}dt$$

$$=\mathrm{Arc}\sin\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۲}\int-\frac{۱}{۲}(-۲t)(۴-t^۲)^{-\frac{۱}{۲}}dt=\mathrm{Arc}\sin\frac{t}{۲}-\frac{۱}{۴}\times۲[۴-t^۲]^{-\frac{۱}{۲}+۱}+c=\mathrm{Arc}\sin\frac{t}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-t^۲}+c=\mathrm{Arc}\sin\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۴}+c$$

**روش دیگر:** $$I=\int x\sqrt{\frac{۲+x^۲}{۲-x^۲}}dx=\int\frac{(۲+x^۲)xdx}{\sqrt{۴-x^۴}}\xrightarrow[۲xdx=du]{x^۲=u}I=\frac{۱}{۲}\int\frac{۲du}{\sqrt{۴-u^۲}}+\frac{۱}{۲}\int\frac{u}{\sqrt{۴-u^۲}}du=\mathrm{Arc}\sin(\frac{u}{۲})-\frac{\sqrt{۴-u^۲}}{۲}+c$$

# درسنامه ۵: انتگرال معین و خواص آن

بیشترین حجم سؤالات فصل انتگرال، به انتگرال‌های معین و نکات مربوط به آن اختصاص دارد. بنابراین این درسنامه را بسیار با دقت بخوانید.

## انتگرال معین

در درسنامه‌های قبلی «انتگرال نامعین» را تعریف کردیم و همان‌طور که از نامش معلوم بود، حاصل آن تابعی «نامعین» می‌شد (این نامعینی به خاطر وجود C و مشخص نبودن آن و مهم‌تر از آن، معلوم نبودن عددی مشخص برای انتگرال بود).

در این قسمت، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را فرم معین انتگرال $f(x)$ در بازه‌ی a تا b، معرفی می‌کنیم. در واقع با محاسبه‌ی این انتگرال، به یک عدد ثابت می‌رسیم که این عدد ارتباط مستقیمی با مساحت زیر نمودار $f(x)$ در بازه‌ی a تا b دارد که البته ما فعلاً قصد نداریم وارد این بحث شویم! (در قسمت کاربرد انتگرال در بحث محاسبه‌ی مساحت زیر نمودار توابع، به طور کامل این ارتباط را برملا خواهیم کرد!!) اگر در پایین و بالای یک انتگرال نامعین، دو عدد قرار دهیم، انتگرال از بلاتکلیفی در می‌آید و مقدارش معین می‌شود. در انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می‌نامند.

**قضیه: اگر تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، f برای این بازه انتگرال‌پذیر است.**

در واقع قضیه فوق به ما می‌گوید؛ **اگر f تابعی پیوسته در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، حتماً در این بازه انتگرال‌پذیر نیز می‌باشد. ولی یادتان باشد این جمله به این معنی نیست که اگر f بر این بازه پیوسته نباشد، آن وقت انتگرال‌پذیر هم نخواهد بود.** در واقع «پیوسته بودن» شرط کافی برای «انتگرال‌پذیری» می‌باشد، ولی شرط لازم نیست. مثلاً اگر بخواهیم انتگرال تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ را در بازه‌ی $[۱,۴]$ حساب کنیم، واضح است؛ تابع جزء صحیح، یعنی $\lfloor x\rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است و حال این که این تابع انتگرال‌پذیر است.

**به زبان ساده‌تر:** هرگاه تابعی پیوسته باشد، می‌توانید چشم بسته بگویید این تابع انتگرال‌پذیر است. اما اگر تابعی پیوسته نبود، با توجه به مطالبی که در درسنامه‌های آینده به شما یاد خواهم داد، باید بررسی کنید که آیا تابع انتگرال‌پذیر هست یا نه!؟

## دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر $f(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد و $F(x)$، یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد، به عبارت دیگر $F'(x)=f(x)$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $x\in[a,b]$، تساوی زیر را داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

خُب، با توجه به این که بیشتر سؤالات آزمون‌ها مربوط به انتگرال معین می‌باشند، در این قسمت سعی کرده‌ام تعداد زیادی مثال از انواع مختلف انتگرال را برای شما حل کنم، تا اولاً با انتگرال‌گیری معین آشنا شوید و ثانیاً مجدداً تمام روش‌های انتگرال‌گیری را با هم مرور کنیم. البته روش انتگرال‌گیری معین تفاوتی با فرم نامعین ندارد، اما چند نکته مهم زیر را در نظر داشته باشد:

۱) در سمت راست، دیگر خبری از ثابت C نیست و فقط تابع اولیه‌ی عبارتِ زیر انتگرال، نوشته می‌شود.

۲) پس از محاسبه‌ی تابع اولیه، باید حدود بالا و پایین انتگرال را مطابق با دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل، در ضابطه‌ی تابع اولیه قرار دهیم.

۳) اگر در انتگرال‌گیری از روش تغییر متغیر استفاده کردیم و انتگرال را بر حسب متغیر جدید نوشتیم، حواسمان باید جمع باشد که حدود انتگرال جدید را نیز بر اساس متغیر جدید بنویسیم. البته در برخی سؤالات پس از تغییر متغیر عبارت تحت انتگرال، می‌توانیم به بازه‌های انتگرال‌گیری دست نزنیم و در نهایت وقتی حاصل انتگرال را حساب کردیم، مجدداً حاصل انتگرال را بر حسب متغیر قدیم بنویسیم و طبیعی است؛ در چنین شرایطی، همان بازه‌های قدیمی را می‌توانیم در ضابطه‌ی تابع اولیه به‌دست آمده جایگزین کنیم. مثال‌های بعدی این موضوع را بهتر روشن می‌سازد:

**مثال۱:** **حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{tgx}{\sqrt{\cos x}}dx$ کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}-۲$
۲) $۲\sqrt{۲}-۱$
۳) $\sqrt{۲}-۱$
۴) $۲-\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$، انتگرال را بازنویسی می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin xdx}{\cos x\sqrt{\cos x}}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin xdx}{\cos^{\frac{۳}{۲}}x}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(\underbrace{\cos x}_{u})^{-\frac{۳}{۲}}\underbrace{\sin xdx}_{-du}=-۲[-u^{-\frac{۱}{۲}}]_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=[\frac{۲}{\sqrt{\cos x}}]_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\mathbf{۲\sqrt{۲}-۲}$$

همان‌طور که گفتیم؛ می‌توانستیم بازه‌های انتگرال‌گیری را بر حسب متغیر u به شکل زیر تغییر دهیم و در حاصل انتگرال که برابر $۲u^{-\frac{۱}{۲}}$ بود، آن‌ها را جایگزین کنیم:

$$u=\cos x\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow u=\cos(۰)=۱\\ x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow I=[۲u^{-\frac{۱}{۲}}]_{۱}^{\frac{۱}{۲}}=۲[\frac{۱}{\sqrt{u}}]_{۱}^{\frac{۱}{۲}}=۲\times\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}-۲\times\frac{۱}{\sqrt{۱}}=\mathbf{۲\sqrt{۲}-۲}$$

**مثال ۱۵:** حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\sin^{۲}x\cos x}{۱+e^{۲}\sin^{۲}x})dx$ به‌صورت $\frac{k}{e}(۱-k\text{Arctge})$ می‌باشد، مقدار k کدام است؟

۱) e
۲) $\frac{۱}{e}$
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» وجود «e» درون انتگرال، کمی چهره سؤال را ناخوشایند کرده! اما این به معنی آن نیست که نباید سمتش برویم!! اگر از تغییر متغیر $u=\sin x$ استفاده کنیم، داریم:

$$u=\sin x\Rightarrow du=\cos xdx\quad,\quad x=۰\Rightarrow u=\sin(۰)=۰\ ,\ x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow u=\sin(\frac{\pi}{۲})=۱$$

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{u^{۲}du}{۱+e^{۲}u^{۲}}=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{e^{۲}}(۱-\frac{۱}{۱+e^{۲}u^{۲}})du=\frac{۱}{e^{۲}}\int_{۰}^{۱}du-\frac{۱}{e^{۲}}\int\frac{du}{۱+e^{۲}u^{۲}}=\frac{۱}{e^{۲}}[u]_{۰}^{۱}-\frac{۱}{e^{۲}}[\frac{۱}{e}\text{Arctgeu}]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{e^{۲}}-\frac{۱}{e^{۳}}\text{Arctge}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{e^{۲}}(۱-\frac{۱}{e}\text{Arctge})\Rightarrow k=\frac{۱}{e}$$

**مثال ۱۶:** حاصل $I=\int_{۰}^{۲}\min\{x,x^{۳}\}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این انتگرال کافی است، مینیمم x و $x^{۳}$ را در بازه‌ی انتگرال حساب کنیم. اما حواستان باشد؛ در دو بازه‌ی مختلف یکی از آن‌ها مینیمم است. اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه $x^{۲}<۱$ و لذا با ضرب x در طرفین می‌توان نتیجه گرفت $x^{۳}<x$، اما اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $x^{۲}>۱$ و با ضرب x در طرفین می‌توان نتیجه گرفت $x^{۳}>x$، پس داریم:

$$t=\int_{۰}^{۱}x^{۳}dx+\int_{۱}^{۲}xdx=[\frac{x^{۴}}{۴}]_{۰}^{۱}+[\frac{x^{۲}}{۲}]_{۱}^{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱+۸-۲}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

**مثال ۱۷:** حاصل $I=\int_{۱}^{۳}\frac{xdx}{\sqrt{(x-۱)(۳-x)}}$ کدام است؟

۱) $\pi$
۲) $۲\pi$
۳) $۳\pi$
۴) $۴\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گفتیم برای حل انتگرال‌هایی به این فرم (که مخرج به‌صورت $\sqrt{ax^{۲}+bx+c}$ است) تغییر متغیر مناسب، $x+\frac{b}{۲a}=u$ می‌باشد، بنابراین ابتدا عبارت درون رادیکال را به فرم $ax^{۲}+bx+c$ می‌نویسیم:

$$(x-۱)(۳-x)=-x^{۲}+۴x-۳\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=۴$$

بنابراین تغییر متغیر مناسب، $x+\frac{۴}{۲(-۱)}=u$ می‌باشد که از آن‌جا $u=x-۲$ می‌شود، لذا داریم:

$$-x^{۲}+۴x-۳=-(x-۲)^{۲}+۱=-u^{۲}+۱\quad,\quad x=۱\Rightarrow u=-۱\quad,\quad x=۳\Rightarrow u=۱$$

$$I=\int_{-۱}^{۱}\frac{u+۲}{\sqrt{۱-u^{۲}}}du=\int_{-۱}^{۱}\frac{u}{\sqrt{۱-u^{۲}}}du+۲\int_{-۱}^{۱}\frac{du}{\sqrt{۱-u^{۲}}}$$

انتگرال اول یک تابع فرد است و چون بازه‌ی انتگرال‌گیری متقارن است، پس حاصل آن صفر می‌شود. از طرفی حاصل انتگرال دوم برابر با: $[\text{Arcsin}\,u]_{-۱}^{۱}$ می‌شود، پس داریم:

$$I=۲[\text{Arcsin}۱-\text{Arcsin}(-۱)]=۲[\frac{\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})]=۲\pi$$

**مثال ۱۸:** حاصل انتگرال $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{۶-۵\sin x+\sin^{۲}x}dx$، کدام است؟

۱) ۰
۲) $\text{Ln}\frac{۴}{۳}$
۳) $\text{Ln}\frac{۶}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۵}\text{Ln}۶$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از تغییر متغیر $\sin x=t$، آن‌گاه $\cos xdx=dt$ و چون $x=\text{Arcsin}\,t$ $(۰\le x\le\frac{\pi}{۲})$، بنابراین داریم:

$$x=۰\Rightarrow\text{Arcsin}\,t=۰\xrightarrow{۰\le t\le ۱}t=۰\quad,\quad x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\text{Arcsin}\,t=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{۰\le t\le ۱}t=۱$$

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{۶-۵t+t^{۲}}=\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{(t-۳)(t-۲)}=[\text{Ln}(\frac{t-۳}{t-۲})]_{۰}^{۱}=\text{Ln}۲-\text{Ln}\frac{۳}{۲}=\text{Ln}\frac{۴}{۳}$$

**مثال ۱۹:** مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\sqrt{۲}}\frac{xdx}{x^{۴}+۲x^{۲}+۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}$
۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳۶}$
۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل انتگرال داده شده به جهت اینکه مخرج کسر یک چندجمله‌ای درجه ۲ نسبت به $x^۲$ است و این چندجمله‌ای درجه ۲ نسبت به $x^۲$، دارای ریشهٔ حقیقی نیست $(\Delta < ۰)$. لذا ابتدا باید مخرج را به فرم مربع کامل درآورد و سپس با استفاده از فرمول‌های گفته شده در ابتدای فصل، به حل انتگرال پرداخت:

$$\int \frac{xdx}{(x^۲+۱)^۲+(\sqrt{۳})^۲} = \int \frac{\frac{۱}{۲}du}{u^۲+(\sqrt{۳})^۲} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{u}{\sqrt{۳}}+c = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۳}}+c$$

$$\int_۰^{\sqrt{۲}} \frac{xdx}{x^۴+۲x^۲+۳} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۳}}\Bigg|_۰^{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctg}\sqrt{۳} - \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctg}\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \frac{\pi\sqrt{۳}}{۳۶}$$

**مثال ۲۰:** اگر $F(x) = \int_۰^t xtg^{-۱}xdx$، آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{t\to ۱} F(x)$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این سؤال در اصل باید حاصل $I = \int_۰^۱ xtg^{-۱}xdx$ را حساب کنیم، برای این منظور از قاعده‌ی جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u = tg^{-۱}x \xrightarrow{\text{دیفرانسیل می‌گیریم}} du = \frac{۱}{۱+x^۲}dx \quad , \quad xdx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \frac{x^۲}{۲} = v$$

$$I = [\frac{x^۲}{۲}tg^{-۱}x]_۰^۱ - \int_۰^۱ \frac{x^۲}{۲}(\frac{۱}{۱+x^۲})dx = \frac{۱}{۲}tg^{-۱}(۱) - \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ \frac{x^۲}{۱+x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ (۱-\frac{۱}{۱+x^۲})dx$$

$$= \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۲}[x - \text{Arctg}x]_۰^۱ = \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}$$

**مثال ۲۱:** در تساوی $\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$، اگر $f(a) = f(b) = ۰$، آن‌گاه مقدار A برابر کدام گزینه است؟

۱) $-۲$
۲) $۲$
۳) $۲(a-b)$
۴) $-۲(a-b)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وجود $f''(x)$ در زیر انتگرال سمت چپ، سیگنال استفاده از روابط انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای ما ارسال می‌کند!

بنابراین با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای مناسب داریم:

$$\begin{cases} u = (x-a)(b-x) \Rightarrow du = (-۲x+a+b)dx \\ dv = f''(x)dx \Rightarrow v = f'(x) \end{cases}$$

$$I = \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu \Rightarrow \int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)dx = [(x-a)(b-x)f'(x)]_a^b - \int_a^b (-۲x+a+b)f'(x)dx$$

$$I = ۰ - \int_a^b (-۲x+a+b)f'(x)dx \Rightarrow \mathbf{I = -\int_a^b (-۲x+a+b)f'(x)dx}$$

با توجه به‌صورت سؤال، یکبار دیگر از قاعده انتگرال‌گیری جزء به جزء کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u = -۲x+a+b \Rightarrow du = -۲dx \\ f'(x)dx = dv \Rightarrow f(x) = v \end{cases} \Rightarrow I = -\int_a^b (-۲x+a+b)f'(x)dx = -[(-۲x+a+b)f(x)]_a^b + \int_a^b f(x)(-۲dx)$$

با توجه به این که $f(b)$ و $f(a)$ برابر صفر هستند، لذا عبارت اول (در سمت راست تساوی فوق) برابر صفر می‌شود و داریم:

$$\text{انتگرال سمت چپ} = I = -۲\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A = -۲$$

**مثال ۲۲:** فرض کنید نقطه $p(۱,۳)$ مرکز تقارنِ نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و داشته باشیم $\int_{-۱}^۲ f(x)dx = ۱۲$ در این صورت حاصلِ $I = \int_۰^۳ f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $-۳$
۳) ۶
۴) $-۶$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که وقتی نمودار $y = f(x)$ در نقطه‌ی $(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن داشته باشد، با جایگذاریِ $۲\alpha - x$ و $۲\beta - y$ به جای x و y، باز هم معادله برقرار خواهد بود. به عبارتی داریم:

$$y = f(x) \Rightarrow ۲\beta - y = f(۲\alpha - x)$$

وقتی نقطه‌ی $p(۱,۳)$ مرکز تقارن نمودار $y = f(x)$ باشد، نتیجه می‌گیریم که در این تابع اگر به جای x و y، به ترتیب $۲-x$ و $۶-y$ قرار بدهیم، باز هم تساوی برقرار خواهد بود. به عبارتی داریم:

$$y = f(x) \Rightarrow ۶ - y = f(۲-x) \Rightarrow f(۲-x) = ۶ - f(x)$$

به عبارتی داریم $f(۲-t) = ۶ - f(t)$ اکنون در انتگرالِ $I = \int_۰^۳ f(x)dx$ تغییر متغیر $x = ۲-t$ را انجام می‌دهیم. در این صورت داریم $dx = -dt$، به ازای $x = ۰$ داریم $t = ۲$ و به ازای $x = ۳$ مقدار $t = -۱$ به دست می‌آید.

$$I = \int_۰^۳ f(x)dx = \int_۲^{-۱} f(۲-t)(-dt) = -\int_۲^{-۱} f(۲-t)dt$$

با قرینه کردن انتگرال، حدود آن را جابجا می‌کنیم. در ضمن از تساوی $f(۲-t) = ۶ - f(t)$ استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_{-۱}^۲ [۶ - f(t)]dt = \int_{-۱}^۲ ۶dt - \int_{-۱}^۲ f(t)dt = ۶\times۳ - ۱۲ = ۶$$

**مثال ۳۶:** حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}(x\sin x)^{۲}dx$ ، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^{۳}}{۶}+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi^{۳}}{۴}+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi^{۳}}{۴}-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi^{۳}}{۶}-\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از قاعده‌ی جزء به جزء (روش جدول) استفاده می‌کنیم. با فرض $u=x^{۲}$ و $dv=(\sin^{۲}x)dx$ ، داریم:

| انتگرال | مشتق | علامت |
|---|---|---|
| $\sin^{۲}x$ | $x^{۲}$ | ⊕ |
| $\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x$ | $۲x$ | ⊖ |
| $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{۱}{۸}\cos ۲x$ | $۲$ | ⊕ |
| $\frac{x^{۳}}{۱۲}+\frac{۱}{۱۶}\sin ۲x$ | $۰$ | ⊖ |

$$I=[(\frac{x^{۳}}{۲}-\frac{x^{۲}}{۴}\sin ۲x)-(\frac{x^{۳}}{۲}+\frac{x}{۴}\cos ۲x)+(\frac{x^{۳}}{۶}+\frac{۱}{۸}\sin ۲x)]_{۰}^{\pi}$$

$$I=\frac{\pi^{۳}}{۲}-\frac{\pi^{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi^{۳}}{۶}=\frac{\pi^{۳}}{۶}-\frac{\pi}{۴}$$

**مثال ۳۷:** حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{dx}{a^{۲}\cos^{۲}x+b^{۲}\sin^{۲}x}$ را بیابید.

☑ **پاسخ :** ابتدا انتگرال داده شده را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{dx}{a^{۲}\cos^{۲}x+b^{۲}\sin^{۲}x}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{dx}{\cos^{۲}x}}{a^{۲}+b^{۲}tg^{۲}x}$$

حالا از تغییر متغیر $u=tgx$ ، $du=\frac{dx}{\cos^{۲}x}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{du}{a^{۲}+b^{۲}u^{۲}}=\frac{۱}{b^{۲}}\int_{۰}^{۱}\frac{du}{(\frac{a}{b})^{۲}+u^{۲}}=\frac{۱}{b^{۲}}.\frac{b}{a}Arctg\frac{bu}{a}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{ab}Arctg\frac{b}{a}$$

**مثال ۳۸ (سخت):** اگر $\frac{\pi-Ln۲}{۲}=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}xdx$ ، آن‌گاه حاصل $I=\int_{۰}^{۱}cotg^{-۱}(۱-x+x^{۲})dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۱+\pi Ln۲$ ۲) $۱+\frac{\pi-Ln۲}{۲}$ ۳) $۲(\pi-Ln۲)$ ۴) $\pi-Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یک سؤال جالب که ظاهری ترسناک و البته راه‌حلی نسبتاً آسان دارد! از مثلثات می‌دانیم؛ $cotg^{-۱}x=tg^{-۱}\frac{۱}{x}$ ، بنابراین حاصل انتگرال به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}(\frac{۱}{۱-x+x^{۲}})dx=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}[\frac{x+(۱-x)}{۱-x(۱-x)}]dx$$

باز هم از اطلاعات مثلثاتی خود، رابطه‌ی $tg^{-۱}a+tg^{-۱}b=tg^{-۱}(\frac{a+b}{۱-ab})$ را به خاطر می‌آوریم. پس داریم:

$$I=\int_{۰}^{۱}[tg^{-۱}x+tg^{-۱}(۱-x)]dx=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}xdx+\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}(۱-x)dx$$

با تغییر متغیر $۱-x=t$ ، برای انتگرال دوم داریم:

$$۱-x=t\ \Rightarrow -dx=dt\ ,\ \begin{cases}x=۰\ \Rightarrow t=۱\\ x=۱\ \Rightarrow t=۰\end{cases}\ \Rightarrow \int_{۰}^{۱}tg^{-۱}(۱-x)dx=-\int_{۱}^{۰}tg^{-۱}tdt=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}tdt$$

چون می‌توان نوشت: $\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}tdt=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}xdx$ ، بنابراین داریم:

که همان انتگرال اول است، بنابراین داریم:

$$I=۲\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}xdx\xrightarrow{\text{فرض داده شده در سوال}}I=۲(\frac{\pi-Ln۲}{۴})=\pi-Ln۲$$

**مثال ۳۹ (سخت):** اگر برای $n\geq ۲$ تابع $f$ به‌صورت $f(x)=\frac{x}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}}$ تعریف شود و $g(x)=(\underbrace{fofof\cdots of}_{\text{بار}\ n})(x)$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\int_{۰}^{۱}x^{n-۲}g(x)dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{(۱+n)^{۱+\frac{۱}{n}}-n}{n(n-۱)}$ ۲) $\frac{۲n(۱+n)^{۱-\frac{۱}{n}}-۲}{(n-۱)(n+۲)}$ ۳) $\frac{(۱+n)^{۱-\frac{۱}{n}}-۱}{n(n-۱)}$ ۴) $\frac{۲n^{۲}(۱+n)^{۱+\frac{۱}{n}}-۲n^{۲}}{(n-۱)(n+۲)}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا $fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$fof(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}}}{\sqrt[n]{۱+(\frac{x}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}})^{n}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}}}{\sqrt[n]{۱+\frac{x^{n}}{۱+x^{n}}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}}}{\frac{\sqrt[n]{۱+۲x^{n}}}{\sqrt[n]{۱+x^{n}}}}=\frac{x}{\sqrt[n]{۱+۲x^{n}}}$$

**نکته۲:** حاصل انتگرال‌هایی به‌صورت کلی $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ همواره برابر با $e^x f(x)+c$ می‌شود.

**مثال۴۱:** حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} e^x[\text{Ln}(\cos x)-\text{tg}x]dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}\text{Ln}۲+۱$ ۲) $e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}۲-۱$ ۳) $-\frac{۱}{۲}e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با یک انتگرال با ظاهری نسبتاً ترسناک و البته با باطنی نسبتاً مهربان روبه‌رو هستیم! اگر خوب به باطن کروشه نگاه کنید، متوجه می‌شوید درون آن $\text{Ln}(\cos x)$ و $-\text{tg}x$ داریم. واقعاً کیست که نداند مشتق $\text{Ln}(\cos x)$ برابر با $\frac{-\sin x}{\cos x}$ و به عبارت دیگر برابر با $-\text{tg}x$ است!؟ پس انتگرال با فرض $f(x)=\text{Ln}(\cos x)$ به‌صورت زیر است:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} e^x[f(x)+f'(x)]dx$$

که می‌دانیم حاصل چنین انتگرال‌هایی همیشه و در تمام دنیا برابر با $e^x f(x)$ خواهد شد! بنابراین داریم:

$$I=[e^x f(x)]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=[e^x\text{Ln}(\cos x)]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}\cos(\frac{\pi}{۴})-e^{۰}\text{Ln}(\cos(۰))=e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-\text{Ln}۱=e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}(\sqrt{۲}\times۲^{-۱})-۰$$

$$=e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}(۲^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{-۱})=e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}۲^{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۲}e^{\frac{\pi}{۴}}\text{Ln}۲$$

**توضیح تکمیلی:** در واقع وقتی می‌بینید انتگرال کمی وحشتناک به نظر می‌رسد و $e^x$ در عبارتی نسبتاً نامربوط به خودش ضرب شده، به فکر استفاده از این فرمول باشید!

**مثال۴۲:** حاصل $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^x(۱+\sin x)}{۱+\cos x}dx$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه MIT)

۱) $e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۲) $e^{\pi}$ ۳) $۲e^{\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $۲e^{\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا با استفاده از فرمول توان‌شکن، یعنی $۱+\cos۲u=۲\cos^۲u$ و فرمول دو برابر کمان، یعنی $\sin۲u=۲\sin u\cos u$، انتگرال را بازنویسی می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^x(۱+\sin x)}{۱+\cos x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^x(۱+۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲})}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}e^x(\frac{۱}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}+\text{tg}\frac{x}{۲})dx$$

حالا اگر کمی دقت کنید؛ عبارت داخل پرانتز را می‌توان $f(x)=\text{tg}\frac{x}{۲}$ و در نتیجه $f'(x)=\frac{۱}{۲\cos^۲(\frac{x}{۲})}$، فرض کرد و از نکته‌ی گفته شده استفاده کرد.

پس حاصل انتگرال برابر با $e^x\text{tg}(\frac{x}{۲})$ می‌شود و داریم:

$$I=[e^x\text{tg}\frac{x}{۲}]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=e^{\frac{\pi}{۲}}\text{tg}(\frac{\pi}{۴})-e^{۰}\text{tg}\frac{۰}{۲}=e^{\frac{\pi}{۲}}\times۱=e^{\frac{\pi}{۲}}$$

## نکات و خواص مهم انتگرال‌های معین

**۱) اگر در یک انتگرال معین جای حد بالا و پایین تعویض شود، باید یک منفی در انتگرال ضرب شود:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx}$$

از نکته‌ی گفته شده می‌توان نتیجه گرفت، حاصل هر انتگرال که بازه‌های پایین و بالای آن یکسان باشد، برابر صفر است، یعنی: $\int_a^a f(x)dx=۰$.

**مثال۴۳:** اگر $A=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\frac{dx}{x^۴+۱}$ و $B=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\frac{x^۲dx}{x^۴+۱}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $B=A+\frac{۱}{۲}$ ۲) $B=A+۲$ ۳) $B=A$ ۴) $B=A+۱$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در این‌گونه سؤالات باید سعی کنیم $A$ یا $B$ را برحسب هم به‌دست آوریم، نه اینکه هر کدام را جداگانه حساب کنیم. ابتدا انتگرال $B$ را با استفاده از تغییر متغیر $x=\frac{۱}{t}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^۲}\ ,\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۲\ ,\ x=۲\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\int_{۲}^{\frac{۱}{۲}}\frac{(\frac{۱}{t})^۲}{(\frac{۱}{t})^۴+۱}(-\frac{dt}{t^۲})=-\int_{۲}^{\frac{۱}{۲}}(\frac{\frac{۱}{t^۲}}{\frac{۱+t^۴}{t^۴}\times t^۲})dt=-\int_{۲}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱+t^۴}dt\xrightarrow{\text{با توجه به نکته‌ی گفته شده}}B=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\frac{dt}{۱+t^۴}$$

ملاحظه می‌کنید انتگرال $B$ دقیقاً با انتگرال $A$ برابر شد.

**مثال ۵۱:** اگر $\int_{۲}^{-۳} f(x)dx = ۷$ و $\int_{۲}^{۱} f(x)dx = ۴$ در این صورت حاصل $I = \int_{۱}^{-۳} f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۱۱　　۲) ۳　　۳) ۱۱-　　۴) ۳-

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به این که حاصل انتگرال $f(x)$ در بازه‌ی ۱ تا ۳- خواسته شده و مقدار انتگرال در دو بازه‌ی ۲ تا ۱ و ۲ تا ۳- را داریم، لذا باید بازه‌های انتگرال خواسته شده را به دو بخش تفکیک کنیم:

$$\int_{۲}^{-۳} = \int_{۲}^{۱} + \int_{۱}^{-۳} \Rightarrow \int_{۱}^{-۳} f(x)dx = \int_{۲}^{-۳} f(x)dx - \int_{۲}^{۱} f(x)dx = -۴ + ۷ = ۳$$

**مثال ۵۲:** اگر $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & ; ۰ \le x \le ۱ \\ \sqrt{x} & ; ۱ \le x \le ۲ \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{۲} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۲}-۱}{۲}$　　۲) $\frac{۴\sqrt{۲}+۱}{۲}$　　۳) $\frac{۴\sqrt{۲}-۱}{۳}$　　۴) $\frac{۴\sqrt{۲}+۱}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» تابع داده شده دارای دو ضابطه در بازه‌های مختلف است، بنابراین باید انتگرال را به دو قسمت تقسیم کنیم:

$$I = \int_{۰}^{۲} f(x)dx = \int_{۰}^{۱} f(x)dx + \int_{۱}^{۲} f(x)dx = \int_{۰}^{۱} x^{۲} dx + \int_{۱}^{۲} \sqrt{x}\, dx \Rightarrow I = [\frac{x^{۳}}{۳}]_{۰}^{۱} + [\frac{۲}{۳} x^{\frac{۳}{۲}}]_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۳} + \frac{۴\sqrt{۲}}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۴\sqrt{۲}-۱}{۳}$$

**۷) اگر f در فاصله‌ی [a,b] انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه همواره نامساوی زیر را داریم:**

$$\boxed{|\int_{a}^{b} f(x)dx| < \int_{a}^{b} |f(x)|dx}$$

**مثال ۵۳:** ثابت کنید عبارت $|\int_{۱}^{\sqrt{۳}} (\frac{e^{-x}\sin x}{۱+x^{۲}})dx|$ کوچکتر از $\frac{\pi}{۱۲e}$ است.

☑ پاسخ:

$$A = |\int_{۱}^{\sqrt{۳}} (\frac{e^{-x}\sin x}{۱+x^{۲}})dx| \le \int_{۱}^{\sqrt{۳}} |\frac{e^{-x}\sin x}{x^{۲}+۱}|\, dx \xrightarrow{|\sin x| \le ۱} A \le \int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{e^{-x} \times ۱}{۱+x^{۲}} dx$$

حداکثر $e^{-x}$ در بازه‌ی انتگرال‌گیری برابر با $e^{-۱}$ است، لذا داریم:

$$A \le e^{-۱} \int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{۱}{۱+x^{۲}} dx = \frac{۱}{e} [\text{Arctg}x]_{۱}^{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{e} (\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi}{۱۲e}$$

**مثال ۵۴:** مقدار $\lim_{n \to +\infty} \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sin nx}{x^{۲}+n^{۲}} dx$ ، کدام است؟

۱) ۰　　۲) $۲\pi$　　۳) $\frac{e}{۲\pi}$　　۴) $\infty$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم $|\sin nx| \le ۱$، پس داریم:

$$I = |\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sin nx}{x^{۲}+n^{۲}} dx| \le \int_{۰}^{۲\pi} |\frac{\sin nx}{x^{۲}+n^{۲}}|\, dx \xrightarrow{|\sin nx| \le ۱} \int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{x^{۲}+n^{۲}} = \frac{۱}{n} [tg^{-۱} \frac{x}{n}]_{۰}^{۲\pi} = \frac{۱}{n} tg^{-۱} \frac{۲\pi}{n}$$

وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{۱}{n} \sim \frac{۲\pi}{n}$ و لذا حاصل انتگرال $\frac{۲\pi}{n^{۲}}$ است که برای $n \to +\infty$، حد آن برابر با صفر است.

**روش دیگر:** می‌دانیم $\frac{۱}{n^{۲}} \ge |\frac{\sin nx}{x^{۲}+n^{۲}}| \ge ۰$، بنابراین $\int_{۰}^{۲\pi} |\frac{\sin nx}{x^{۲}+n^{۲}}| dx < \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{n^{۲}} dx$ و لذا داریم:

$$I \le \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{n^{۲}} dx = [\frac{x}{n^{۲}}]_{۰}^{۲\pi} = \frac{۲\pi}{n^{۲}}$$

وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{۲\pi}{n^{۲}} \to ۰$ و لذا $I \le ۰$، چون $۰ \le I \le ۰$، بنابراین $\mathbf{I = ۰}$ است.

**۸) دو خاصیت مقابل در حل برخی از تست‌ها به ما کمک زیادی می‌کند:** $\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$ ، $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$

**مثال ۵۵:** حاصل $I = \int_{۰}^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$　　۲) $\frac{\pi^{۲}}{۸}$　　۳) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$　　۴) $\frac{\pi}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این سؤال از نکته‌ی $\int_{۰}^{a} f(x) = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$، استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_{۰}^{\pi} (\frac{(\pi - x)\sin x}{۱+\cos^{۲} x})dx = \int_{۰}^{\pi} \frac{[\pi - (\pi - x)]\sin(\pi - x)}{۱+\cos^{۲}(\pi - x)} dx \Rightarrow I = \int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx$$

اگر طرفین این تساوی را با تساوی داده شده در صورت سؤال جمع کنیم، داریم:

$$I + I = \int_{۰}^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx + \int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx \Rightarrow ۲I = \pi \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx - \int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx + \int_{۰}^{\pi} \frac{x\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx$$

$$\Rightarrow ۲I = \pi \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin x}{۱+\cos^{۲} x} dx \Rightarrow I = -\frac{\pi}{۲} [\text{Arctg}(\cos x)]_{۰}^{\pi} = -\frac{\pi}{۲} [\text{Arctg}(\cos \pi) - \text{Arctg}(\cos(۰))] = -\frac{\pi}{۲} [-\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}] = -\frac{\pi}{۲} [-\frac{\pi}{۲}] = \frac{\pi^{۲}}{۴}$$

**مثال ۵۶:** حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{۱+(\sin x)^{\cos x}}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$　　۲) $\frac{\pi}{۲}$　　۳) $\frac{\pi}{۶}$　　۴) $\frac{\pi}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این سؤال هم $a=۰$ و $b=\pi$ می‌باشد، بنابراین می‌توانیم تساوی زیر را بنویسیم:

$$I=\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{۱+[\sin(\pi-x)]^{\cos(\pi-x)}}=\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{۱+(\sin x)^{-\cos x}}=\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{۱+\frac{۱}{\sin x^{\cos x}}}\Rightarrow I=\int_{۰}^{\pi}\frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x}+۱}dx \qquad (*)$$

حالا اگر طرفین تساوی (*) را با طرفین تساوی داده شده در صورت سؤال جمع کنیم، داریم:

$$۲I=\int_{۰}^{\pi}\frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x}+۱}dx+\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{۱+(\sin x)^{\cos x}}=\int_{۰}^{\pi}(\frac{(\sin x)^{\cos x}+۱}{(\sin x)^{\cos x}+۱})dx=\int_{۰}^{\pi}dx=[x]_{۰}^{\pi}=\pi \Rightarrow \mathbf{I=\frac{\pi}{۲}}$$

**مثال ۵۷:** اگر $a>۰$، آن‌گاه حاصل $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^۲ x}{۱+a^x}dx$ کدام است؟

۱) $\pi$　　۲) $(\frac{\pi}{a})^۲$　　۳) $\frac{\pi}{a}$　　۴) $\frac{\pi}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باز هم از نکته‌ی $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)$ استفاده می‌کنیم. در این سؤال $a=-\pi$ و $b=+\pi$ و لذا داریم:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^۲(-x)}{۱+a^{-x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^۲ x}{۱+a^{-x}}dx \xrightarrow{\text{ضرب در } a^x} I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^x\cos^۲ x}{a^x+۱}dx \qquad (*)$$

حالا اگر طرفین رابطه (*) را با طرفین رابطه‌ی صورت سؤال جمع کنیم، داریم:

$$۲I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(۱+a^x)\cos^۲ x}{۱+a^x}dx \Rightarrow ۲I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^۲ xdx \Rightarrow ۲I=۲\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})dx \Rightarrow ۲I=\int_{۰}^{\pi}(۱+\cos ۲x)dx$$

$$\Rightarrow ۲I=[x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x]_{۰}^{\pi} \Rightarrow ۲I=\pi \Rightarrow I=\frac{\pi}{۲}$$

**مثال ۵۸ (سخت):** حاصل $I=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{x\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x})dx$ کدام است؟

۱) ۰　　۲) $\frac{\pi}{۸}$　　۳) $\frac{\pi(\pi-۲)}{۳۲}$　　۴) $\frac{\pi(\pi-۲)}{۱۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً توجه کنید که گزینه‌ی اول به عنوان تله‌ی تستی قرار داده شده است! چون اگر تابع زیر انتگرال فرد بود، حاصل انتگرال صفر می‌شد، اما اتفاقاً تابع داده شده، زوج است و بنابراین می‌توانیم بازه‌ی $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}$ را به‌صورت $۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$ بنویسیم. از طرفی با توجه به این که در تابع زیر انتگرال هم $cot\,gx$ داریم و هم $tgx$ و همچنین هم $\sin x$ داریم و هم $\cos x$، تحریک می‌شویم: از رابطه‌ی $\int_{۰}^{a}f(x)dx=\int_{۰}^{a}f(a-x)dx$ استفاده کنیم! بنابراین داریم:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{x\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x})dx=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{x\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x})dx=۲I_۱$$

$$I_۱=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{(\frac{\pi}{۲}-x)\sin(\frac{\pi}{۲}-x)\cos(\frac{\pi}{۲}-x)}{tg^۲(\frac{\pi}{۲}-x)+cot\,g^۲(\frac{\pi}{۲}-x)}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\pi}{۲}-x)\frac{\cos x\sin x}{cot\,g^۲x+tg^۲x}dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\cos x}{cot\,g^۲x+tg^۲x}dx-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{x\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x}dx$$

انتگرال دوم همان $I_۱$ می‌باشد، با انتقال آن به سمت چپ، تساوی مقابل را داریم:

$$۲I_۱=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\sin x\cos x}{cot\,g^۲x+tg^۲x})dx \Rightarrow I_۱=\frac{\pi}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x})dx$$

حالا کافی است؛ حاصل انتگرال جدید (که از دست x اولیه‌ی آن خلاص شده‌ایم) را حساب کنیم! برای این منظور انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$I_۱=\frac{\pi}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\sin x\cos x}{tg^۲x+cot\,g^۲x})dx=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\sin ۲x}{tg^۲x+\frac{۱}{tg^۲x}})dx=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{\frac{۲tgx}{۱+tg^۲x}}{tg^۲x+\frac{۱}{tg^۲x}})dx$$

حالا با استفاده از تغییر متغیر $tg^۲x=u$ داریم:

$$\mathrm{tg}^{۲}x=u\ \Rightarrow(۱+\mathrm{tg}^{۲}x)(۲\mathrm{tg}x)dx=du\ \Rightarrow dx=\frac{du}{۲\mathrm{tg}x(۱+\mathrm{tg}^{۲}x)}\ ,\ x=۰\ \Rightarrow u=\mathrm{tg}^{۲}(۰)=۰\ ,\ x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow u=\mathrm{tg}^{۲}(\frac{\pi}{۲})=+\infty$$

$$\Rightarrow I_{۱}=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{+\infty}[\frac{\frac{۲\mathrm{tg}x}{۱+u}}{u+\frac{۱}{u}}]\frac{du}{۲\mathrm{tg}x(۱+u)}=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\frac{۱}{(۱+u)^{۲}}}{\frac{u^{۲}+۱}{u}}du=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{+\infty}\frac{u}{(۱+u^{۲})(۱+u)^{۲}}du=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{+\infty}\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱+u^{۲}}-\frac{۱}{(۱+u)^{۲}})du$$

$$=\frac{\pi}{۱۶}\int_{۰}^{+\infty}\frac{du}{۱+u^{۲}}+\frac{\pi}{۱۶}\int_{۰}^{+\infty}\frac{-۱}{(۱+u)^{۲}}du=\frac{\pi}{۱۶}[\mathrm{Arctg}u]_{۰}^{+\infty}+\frac{\pi}{۱۶}[\frac{۱}{۱+u}]_{۰}^{+\infty}=\frac{\pi}{۱۶}[\frac{\pi}{۲}]-\frac{\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۱۶}(\frac{\pi}{۲}-۱)=\frac{\pi(\pi-۲)}{۳۲}$$

اما $I=۲I_{۱}$ و بنابراین $\mathbf{I=\frac{\pi(\pi-۲)}{۱۶}}$ می‌باشد.

**نکته:** هرگاه در تابعی هم $\sin x$ داشتیم و هم $\cos x$، به شرط آن‌که با تبدیل $\sin x$ و $\cos x$ به یکدیگر معادله عوض نشود، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}xf(\sin x,\cos x)dx=\frac{\pi}{۴}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\sin x,\cos x)dx$$

در واقع با دانستن این نکته از همان ابتدا می‌توانستید $x$ را از پشت انتگرال بردارید و عدد $\frac{\pi}{۴}$ را در انتگرال باقیمانده ضرب کنید.

**مثال ۵۹:** **اگر $\int_{۰}^{\pi}\mathbf{Ln(\sin\theta)d\theta=-\pi Ln۲}$، آن‌گاه حاصل $\mathbf{I=\int_{۰}^{\pi}Ln(۱+\cos\theta)d\theta}$ کدام است؟** (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Harvard)

۱) $-\frac{\pi}{۲}\mathrm{Ln}۲$ ۲) $-\pi\mathrm{Ln}۲$ ۳) $-\frac{\pi^{۲}}{۲}\mathrm{Ln}۲$ ۴) $-\frac{\pi}{۴}\mathrm{Ln}۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $۱+\cos\theta=۲\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}$ و همچنین با استفاده از قاعده‌ی $\mathrm{LnAB=LnA+LnB}$، انتگرال را کمی ساده می‌کنیم:

$$I=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(۱+\cos\theta)d\theta=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(۲\cos^{۲}\frac{\theta}{۲})d\theta=\int_{۰}^{\pi}(\mathrm{Ln}۲)d\theta+\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(\cos^{۲}(\frac{\theta}{۲}))d\theta$$

$$\Rightarrow I=(\mathrm{Ln}۲)[x]_{۰}^{\pi}+\int_{۰}^{\pi}۲\mathrm{Ln}(\cos\frac{\theta}{۲})d\theta=\pi\mathrm{Ln}۲+۲\int_{۰}^{\pi}\mathbf{Ln\cos(\frac{\theta}{۲})d\theta}\qquad ,\ (۱)$$

اگر حاصل انتگرال دوم را $I_{۲}$ بنامیم، داریم: $\mathbf{I_{۲}=\int_{۰}^{\pi}Ln(\cos\frac{\theta}{۲})d\theta}\Rightarrow I_{۲}=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}\cos(\frac{\pi-\theta}{۲})d\theta=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}[\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\theta}{۲})]d\theta\Rightarrow\mathbf{I_{۲}=\int_{۰}^{\pi}Ln(\sin\frac{\theta}{۲})d\theta}$

سمت چپ دو تساوی فوق (تساوی اول و آخر سطر بالا) برابر $I_{۲}$ و سمت راست آن‌ها از نظر ظاهری با هم فرق می‌کند، اگر طرفین این دو را با هم جمع کنیم، داریم:

$$۲I_{۲}=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(\cos\frac{\theta}{۲})d\theta+\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(\sin\frac{\theta}{۲})d\theta=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}[\sin(\frac{\theta}{۲})\cos(\frac{\theta}{۲})]d\theta=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}[\frac{۱}{۲}(\sin\theta)]d\theta=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}\sin\theta d\theta-\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}۲d\theta$$

$$\Rightarrow ۲I_{۲}=\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(\sin\theta)d\theta-\pi\mathrm{Ln}۲\xrightarrow{\int_{۰}^{\pi}\mathrm{Ln}(\sin\theta)d\theta=-\pi\mathrm{Ln}۲}۲I_{۲}=-\pi\mathrm{Ln}۲-\pi\mathrm{Ln}۲\ \Rightarrow ۲I_{۲}=-۲\pi\mathrm{Ln}۲$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار به دست آمده برای } ۲I_{۲} \text{ را در رابطه‌ی (۱) قرار می‌دهیم}}I=\pi\mathrm{Ln}۲+۲I_{۲}=\pi\mathrm{Ln}۲-۲\pi\mathrm{Ln}۲=\mathbf{-\pi Ln۲}$$

**مثال ۶۰ (سخت):** **حاصل $\mathbf{I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۱+\sqrt{tgx}}dx}$ کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» وجود $\sqrt{\mathrm{tg}x}$ در مخرج کسر و عدم وجود هیچ نسبتِ مثلثاتی دیگری در انتگرال، کاملاً سؤال را سخت به نظر می‌رساند! اما خوبی کار این است که انتگرال معین است و همیشه یادتان باشد در انتگرال‌های معین بعد از خدا، امیدتان به نکته‌ها باشد! خصوصاً این که وقتی نسبتی مثلثاتی داریم و جمع حد پایین و بالای انتگرال برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است. ابتدا با توجه به نکته‌ی گفته شده، چون در این تست $a=\frac{\pi}{۶}$ و $b=\frac{\pi}{۳}$، لذا $a+b=\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}$. پس داریم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۱+\sqrt{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{۲}-x)}}dx=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۱+\sqrt{\cot gx}}dx=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}}dx\ \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{۱+\sqrt{\mathrm{tg}x}}dx$$

با توجه به انتگرال صورت سؤال و انتگرال به‌دست آمده، دو انتگرال داریم که سمت چپ آن‌ها، $I$ و سمت راست آن‌ها از نظر ظاهری با هم فرق می‌کند، اگر طرفین این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، داریم:

$$I+I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۱+\sqrt{\mathrm{tg}x}}dx+\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{۱+\sqrt{\mathrm{tg}x}}dx\Rightarrow ۲I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(\frac{۱+\sqrt{\mathrm{tg}x}}{۱+\sqrt{\mathrm{tg}x}})dx\Rightarrow ۲I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(۱)dx\ \Rightarrow ۲I=[x]_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\Rightarrow ۲I=\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow ۲I=\frac{\pi}{۶}\ \Rightarrow\mathbf{I=\frac{\pi}{۱۲}}$$

**مثال ۷۲:** حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}\frac{xtgx}{\sec x+tgx}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(\pi-۱)}{۲}$ ‌ ۲) $\frac{\pi(\pi-۲)}{۲}$ ‌ ۳) $\frac{\pi^{۲}}{۲}$ ‌ ۴) $\frac{\pi(\pi+۱)}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که انتگرال را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{xtgx}{\sec x+tgx}dx=\int_{۰}^{\pi}\frac{x(\frac{\sin x}{\cos x})}{\frac{۱}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int_{۰}^{\pi}\frac{x\sin x}{۱+\sin x}dx$$

حالا با استفاده از رابطه $\int_{۰}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}f(\sin x)dx$ ، از دست x خلاص می‌شویم:

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{x\sin x}{۱+\sin x}dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin x}{۱+\sin x}dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}(۱-\frac{۱}{۱+\sin x})dx$$

$$=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}(۱-\frac{۱-\sin x}{\cos^{۲}x})\ dx=\frac{\pi}{۲}(x-tgx+\frac{۱}{\cos x})\Big|_{۰}^{\pi}=\frac{\pi}{۲}[\lim_{x\to\pi}(x-tgx+\frac{۱}{\cos x})-۱]=\boldsymbol{\frac{\pi}{۲}(\pi-۲)}$$

**مثال ۷۳:** حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}xLn(\sin x)dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}Ln۲$ ‌ ۲) $-\frac{\pi^{۲}}{۲}Ln۲$ ‌ ۳) $Ln۲\frac{\pi^{۲}}{۲}$ ‌ ۴) $\frac{\pi}{۲}Ln۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با استفاده از نکته گفته شده از دست x ، خلاص می‌شویم: بنابراین داریم:

$$I=\int_{۰}^{\pi}xLn(\sin x)dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}Ln(\sin x)dx$$

اما می‌دانیم $\int_{۰}^{\pi}Ln(\sin x)dx=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}Ln(\sin x)dx$ ، پس داریم:

$$I=۲\times\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}Ln(\sin x)dx=\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}Ln(\sin x)dx$$

قبلاً حاصل انتگرال فوق را برابر با $-\frac{\pi}{۲}Ln۲$ به‌دست آوردیم، پس $I=\pi(-\frac{\pi}{۲}Ln۲)=-\frac{\pi^{۲}}{۲}\mathbf{Ln۲}$.

**۱۶) اگر $f(x)$ تابعی زوج و انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه تساوی‌های زیر را داریم:**

$$\boxed{\int_{۰}^{\pi}xf(\cos x)dx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}f(\cos x)dx}$$

$$\boxed{\int_{۰}^{\frac{n\pi}{۲}}f(\cos x)dx=n\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos x)dx\ ,\ (n\in\mathbb{N})}$$

$$\boxed{\int_{۰}^{\frac{n\pi}{۲}}f(\sin x)dx=n\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\sin x)dx\ ,\ (n\in\mathbb{N})}$$

**مثال ۷۴:** حاصل $I=\int_{۰}^{\pi}x\cos^{۲}xdx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^{۲}}{۲}$ ‌ ۲) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$ ‌ ۳) $\frac{\pi^{۲}}{۲\sqrt{۲}}$ ‌ ۴) $\frac{\pi^{۲}}{\sqrt{۲}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» راه‌حل معمولی سؤال، استفاده از قاعده‌ی «جزء به جزء» می‌باشد، اما با استفاده از نکته‌ی گفته شده به راحتی می‌توانیم به سؤال جواب دهیم:

$$I=\int_{۰}^{\pi}x\cos^{۲}xdx=\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}\cos^{۲}xdx$$

همواره حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\pi}\cos^{۲}xdx$ و $\int_{۰}^{\pi}\sin^{۲}xdx$ ، برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است (البته می‌توانید در این مرحله با استفاده از فرمول توان‌شکن هم به این نتیجه برسید).

بنابراین $I=\frac{\pi}{۲}(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi^{۲}}{۴}$.

**نکته ۳:** اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و اکیداً یکنوا باشد و $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$ ، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\boxed{\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f^{-۱}(x)dx=b\beta-a\alpha}$$

مهم‌ترین کاربرد این نکته، در محاسبه‌ی انتگرال برخی توابع وارون مثلثاتی و هیپربولیک است.

**مثال ۷۵:** حاصل $I=\int_{۰}^{۱}tg^{-۱}\sqrt{x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}-۱$ ‌ ۲) $\frac{\pi}{۲}+۱$ ‌ ۳) ۱ ‌ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» راه‌حل معمولی حل این سؤال، استفاده از تغییر متغیر $x=u^۲$ و رسیدن به انتگرال $I=۲\int_۰^۱ u\,tg^{-۱}u\,du$ و نهایتاً محاسبه‌ی آن به روش «جزء به جزء» است. البته این روش طولانی است. اما اگر از نکته‌ی گفته شده استفاد کنیم، می‌توانیم با فرض $f(x)=tg^{-۱}\sqrt{x}$ و در نتیجه $f^{-۱}(x)=tg^۲x$ و همین‌طور $a=۰$ و $b=۱$ تساوی مقابل را داشته باشیم:

$$\int_۰^۱ tg^{-۱}\sqrt{x}dx+\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} tg^۲xdx=۱\times\frac{\pi}{۴}-۰\times۰=\frac{\pi}{۴}\qquad(*)$$

اما حاصل $I=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} tg^۲xdx$ به‌صورت مقابل حساب می‌شود:

$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}[(tg^۲x+۱)-۱]dx=[tgx-x]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=tg\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین با توجه به تساوی $(*)$ داریم:

$$\int_۰^۱ tg^{-۱}\sqrt{x}dx+(۱-\frac{\pi}{۴})=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\int_۰^۱ \mathbf{tg^{-۱}\sqrt{x}dx=\frac{\pi}{۲}-۱}$$

**مثال ۷۶: حاصل $I=\int_۰^۱ arcsin(\sqrt{\frac{x}{x+۱}})dx$ ، کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۲}-۱$

۴) $\frac{\pi}{۴}+۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حل سؤال با استفاده از نکته‌ی گفته شده ساده‌تر است. توجه کنید که برای استفاده از این نکته، ابتدا باید وارون تابع زیر انتگرال را حساب کنیم.

$$f(x)=arcsin\sqrt{\frac{x}{۱+x}}\Rightarrow\sin y=\sqrt{\frac{x}{۱+x}}\Rightarrow\sin^۲y=\frac{x}{۱+x}\Rightarrow x=tg^۲y\xrightarrow{\text{تعویض نقش x و y}}f^{-۱}(x)=tg^۲x$$

در این سؤال $f(۰)=۰$ و $f(۱)=\frac{\pi}{۴}$ ، بنابراین داریم:

$$\int_۰^۱ arcsin\sqrt{\frac{x}{۱+x}}dx+\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} tg^۲xdx=\frac{\pi}{۴}\times۱-۰\times۰\xrightarrow{tg^۲x=۱+tg^۲x-۱}\int_۰^۱ arcsin\sqrt{\frac{x}{۱+x}}dx=\frac{\pi}{۴}-\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}[(۱+tg^۲x)-۱]dx$$

$$I=\frac{\pi}{۴}[tgx]_۰^{\frac{\pi}{۴}}+[x]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{\pi}{۴}-۱+\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}-۱$$

**توضیح:** حل سؤال به روش‌های دیگر، مثلاً استفاده از تغییر متغیر و در ادامه به کارگیری روش «جزء به جزء» نیز امکان‌پذیر است که مسلماً وقت زیادی از ما خواهد گرفت.

## چند فرمول دیگر از انتگرال‌های معین

۱) اگر توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارای توان فرد باشند، در بازه‌هایی که اختلاف بازه‌های انتگرال برابر با دوره تناوب و یا ضریبی از دوره تنـاوب اسـت، حاصل انتگـرال صفر می‌شود:

$$\int_۰^{۲\pi}\sin^{۲n-۱}xdx=\int_۰^{۴\pi}\sin^{۲n-۱}x\,dx=۰\quad,\quad\int_۰^{۲\pi}\cos^{۲n-۱}xdx=\int_۰^{۴\pi}\cos^{۲n-۱}xdx=۰$$

و در حالت کلی‌تر اگر $a>۰$ ، آن‌گاه داریم:

$$\int_۰^{\frac{۲\pi}{a}}\sin^{۲n-۱}ax\,dx=\int_۰^{\frac{۲\pi}{a}}\cos^{۲n-۱}axdx=۰$$

۲) به ازای هر عدد طبیعی $n$ ، همواره فرمول‌های مقابل را داریم:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^n xdx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-۱}{n}\cdot\frac{n-۳}{n}\cdots\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۲}\ ; & \text{اگر n زوج باشد}\\ \frac{n-۱}{n}\cdot\frac{n-۳}{n-۲}\cdots\times\frac{۲}{۳}\times۱\ ; & \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

$$\int_۰^{\pi}\sin^{n-۱}x\cos(n+۱)xdx=\int_۰^{\pi}\cos^{n-۱}x\sin(n+۱)xdx=۰$$

۳) اگر $n$ عددی طبیعی باشد، همواره دو فرمول مقابل را داریم:

$$\int_۰^{\frac{n\pi}{۲}}\cos^۲xdx=\int_۰^{\frac{n\pi}{۲}}\sin^۲xdx=\frac{۱}{۲}(\frac{n\pi}{۲})$$

در واقع حاصل انتگرال‌ها، نصف حد بالای آن است، برای مثال داریم:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲xdx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲xdx=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \int_۰^{\pi}\cos^۲xdx=\int_۰^{\pi}\sin^۲xdx=\frac{۱}{۲}(\pi)=\frac{\pi}{۲}$$

از این دو فرمول، در ریاضی عمومی (۲) بیشتر استفاده می‌کنیم.

۴) برای توابعی به شکل کلی $h(x)=\begin{cases}f(x)\ ; & x\notin\mathbb{Q}\\ g(x)\ ; & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت انتگرال $I=\int_a^b h(x)dx$ وجود ندارد.

## قضیه مقدار میانگین در انتگرال (محاسبه‌ی مقادیر متوسط توابع)

بر طبق این قضیه، اگر $f$ در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه «حداقل» یک نقطه مانند $c$ ($c$ متعلق به بازه‌ی $[a,b]$است). وجود دارد که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\boxed{\mathbf{f(c)=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx}}$$

که $f(c)$ را مقدار میانگین (متوسط) تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ می‌نامند.

## استفاده از هم‌ارزی در بررسی همگرایی و واگرایی انتگرال‌ها

استفاده از هم‌ارزی‌ها یکی از پرکاربردترین روش‌ها در تعیین همگرایی و یا واگرایی یک انتگرال است. این هم‌ارزی‌ها غالباً در $x \to +\infty$ و $x \to ۰$ به کار برده می‌شوند. در این روش ما سعی می‌کنیم انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ را هم‌ارز با $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ و انتگرال $\int_۰^a f(x)dx$ را هم‌ارز با $\int_۰^a \frac{dx}{x^p}$ در نظر بگیریم تا بتوانیم در مورد همگرایی انتگرال‌ها نظر قطعی بدهیم.

**استفاده از هم‌ارزی‌ها در بی‌نهایت ($x \to \pm\infty$):** برای بررسی همگرایی یا واگرایی در کرانِ $\pm\infty$، ابتدا از صورت و مخرج، جمله‌ای را که سرعت رشد بیشتری دارد نگه دارید. سپس همگرایی یا واگرایی انتگرال را با توجه به همین جمله مشخص کنید. همچنین اگر تابع نمایی $e^{ax}$ در انتگرال باقی ماند، شرط همگرایی آن است که فرم $e^{-\infty}=۰$ ایجاد شود. برای مثال انتگرال $\int_۱^{\infty} x^۳e^{-۲x}dx$ همگراست زیرا توان e منفی است و $e^{-\infty}$ ایجاد می‌شود. همچنین انتگرال $\int_{-\infty}^{۱} x^۴e^{۳x}dx$ همگراست، زیرا با جایگذاری $-\infty$ باز هم توان e منفی می‌شود. اما انتگرال‌های $\int_۲^{\infty} xe^x dx$ و $\int_{-\infty}^{۳} x^۲e^{-۳x}dx$ واگرا هستند چون در آن‌ها $e^{+\infty}$ ایجاد می‌شود. اگر زیر انتگرال فقط توان‌های x باقی ماندند، می‌دانیم که $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>۰)$ به شرطی همگراست که $p>۱$ باشد.

درباره‌ی توابع $\sin u$ و $\cos u$ ابتدا بررسی کنید که آیا کمان این دو تابع به سمت صفر میل می‌کند یا به سمت بی‌نهایت؟ اگر $u \to ۰$ میل می‌کند از هم‌ارزی‌ها استفاده می‌کنیم. معمولاً جایگذاری $\sin u \simeq u$ و $\cos u \simeq ۱-\frac{u^۲}{۲}$ کافی است. اگر $u \to +\infty$ میل می‌کند، از این استفاده کنیم که $\sin u$ و $\cos u$ کران‌دار هستند. در این حالت می‌توانید به جای $\sin u$ و $\cos u$، اعداد ±۱ را تصور کنید. به انتگرال $I_۱=\int_۱^{\infty}\frac{x\sin\frac{۱}{x}}{x^۲+\sin^۲ x}dx$ توجه کنید. می‌خواهیم همگرایی یا واگرایی آن را وقتی که $x \to +\infty$ بررسی کنیم. در صورت کسر $\sin\frac{۱}{x}$ را داریم که کمان آن به صفر میل می‌کند پس، از هم‌ارزی $\sin\frac{۱}{x}\simeq\frac{۱}{x}$ استفاده می‌کنیم. در مخرج کسر $\sin(x)$ را داریم که کمانش به سمت ∞ میل می‌کند پس به جای آن ±۱ تصور می‌کنیم، در این صورت در مخرج کسر عبارتی مانند $x^۲+۱$ داریم.

حالا با استفاده از سرعت رشد داریم:

$$I_۱=\int_۱^{\infty}\frac{x(\frac{۱}{x})}{x^۲+۱}dx \sim \int_۱^{\infty}\frac{dx}{x^۲}$$

حالا $p=۲$ است، پس $p>۱$ و انتگرال همگراست.

**استفاده از هم‌ارزی‌ها در $x=۰$:** برای بررسی همگرا یا واگرا بودن انتگرال در کران $x=۰$، از هم‌ارزی‌ها به همان شکلی که در محاسبه‌ی حد داشتیم، استفاده می‌کنیم. سپس از صورت و مخرج فقط کوچکترین درجه را نگه می‌داریم. در پایان از این موضوع استفاده می‌کنیم که انتگرال $\int_۰^a\frac{dx}{x^p}$ با شرط $p<۱$ همگراست.

**مثال ۱۵: واگرایی و یا همگرایی انتگرال $I=\int_۱^{+\infty}\frac{dx}{x+\sin^۲ x}$ را بررسی کنید.**

☑ **پاسخ :** برای x های بزرگ، تابع $f(x)=\frac{۱}{x+\sin^۲ x}$ هم‌ارز $\frac{۱}{x}$ می‌باشد، و چون $\int_۱^{\infty}\frac{dx}{x^۱}$ $(p=۱)$ واگراست بنابراین I واگراست.

**مثال ۱۶: حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^۲+۱}dx$ کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) انتگرال واگراست.

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» وقتی $x \to \infty$، عبارت زیر انتگرال هم‌ارز $\frac{۱}{x}$ است و چون $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست، $(p=۱)$ پس انتگرال موردنظر نیز واگراست.

**مثال ۱۷: بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^m x}{x^n}dx$، همگرا گردد؟**

۱) $n<m$
۲) $m<n$
۳) $n<m+۱$
۴) $m<n+۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» انتگرال داده شده در $x=۰$ ناسره می‌باشد. وقتی $x \to ۰$، هم‌ارزی $\sin^m x \sim x^m$، را داریم. بنابراین انتگرال به‌صورت $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{x^{n-m}}$ در می‌آید، و بنابراین برای همگرایی لازم است؛ $n-m<۱$ یا $n<m+۱$.

در این قسمت می‌خواهیم دو قضیه را معرفی کنیم که از آن‌ها در بررسی همگرایی یا واگرایی برخی سؤالات نسبتاً مشکل استفاده می‌کنیم. پیشنهاد می‌کنم هر دوی آن‌ها و خصوصاً قضیه‌ی اول به خاطر سپرده شود (لازم به توضیح است برخی از سؤالات که با این قضایا حل می‌شوند، با استفاده از هم‌ارزی‌ها نیز قابل حل هستند).

**قضیه۱: هرگاه $f(x)\geq ۰$ و $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x)=A$ باشد، آن‌گاه با توجه به وضعیت p و A نتایج زیر را داریم:**

۱) اگر $p>۱$ و A متناهی باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$، همگراست.

۲) اگر $p\leq ۱$ و A مخالف صفر باشد ( A می‌تواند بی‌نهایت نیز باشد) آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$، واگراست.

**قضیه۲: اگر $f(x)\geq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^p f(x)=A$ باشد، آن‌گاه با توجه به وضعیت p و A نتایج زیر را داریم:**

۱) اگر $p<۱$ و A متناهی باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت انتگرال $\int_a^{b} f(x)dx$، همگراست.

۲) اگر $p\geq ۱$ و $A\neq ۰$ ( A می‌تواند بی‌نهایت نیز باشد)، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت انتگرال $\int_a^{b} f(x)dx$، واگراست.

**مثال۳۱: کدام‌یک از انتگرال‌های زیر واگراست؟**

۱) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} Ln(\sin x)dx$

۲) $\int_۰^{\infty} \frac{x^۲dx}{۴x^۴+۲۵}$

۳) $\int_۱^{\infty} \frac{xdx}{(Lnx)^۲}$

۴) $\int_۰^{۱} \frac{dx}{\sqrt{Ln(\frac{۱}{x})}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای تمرین بیشتر تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

**بررسی گزینه (۱):** با استفاده از قضیه دوم داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} x^{\frac{۱}{۲}} Ln(\sin x) \sim \lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x}Lnx = \lim_{x\to ۰^+} \frac{Lnx}{\frac{۱}{\sqrt{x}}} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{x\to ۰^+} \left(\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}}\right) = \lim_{x\to ۰^+} ۲x^{\frac{۱}{۲}} = ۰$$

چون $p=\frac{۱}{۲}<۱$ و A متناهی شده $(A=۰)$ لذا انتگرال همگراست.

**بررسی گزینه (۲):** در $x\to +\infty$ با استفاده از قانون بزرگترین درجه داریم: $\frac{x^۲}{۴x^۴+۲۵} \simeq \frac{x^۲}{۴x^۴} = \frac{۱}{۴x^۲}$، پس $p=۲$ پس $p>۱$ است و انتگرال همگراست. اما می‌خواهیم این گزینه را با استفاده از قضیه هم بررسی کنیم. با استفاده از قضیه‌ی اول داریم:

$$\lim_{x\to\infty} x^۲\left(\frac{x^۲}{۴x^۴+۲۵}\right) \sim \lim_{x\to\infty} \frac{x^۴}{۴x^۴} = \frac{۱}{۴}$$

چون $p=۲>۱$ و A متناهی است، پس انتگرال همگراست.

**بررسی گزینه (۳):** با استفاده از قضیه‌ی اول داریم:

$$\lim_{x\to\infty} x^۱\left[\frac{x}{(Lnx)^۲}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{Lnx}\right)^۲ \overset{\text{قانون‌رشد}}{=\!=} \infty$$

چون $p=۱$ و A عددی مخالف صفر شد، (چون A می‌توانست نامتناهی هم باشد) بنابراین انتگرال واگراست.

**بررسی گزینه (۴):** بررسی این گزینه کمی مشکل‌تر است، ابتدا در این گزینه از تغییر متغیر $-Lnx=t$ استفاده کرده و انتگرال را ساده می‌کنیم:

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{Ln(\frac{۱}{x})}} = \int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}} = -\int_{\infty}^{۰} \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = \int_۰^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = \int_۰^{۱} \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} + \int_۱^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = I_۱+I_۲$$

حالا با استفاده از قضیه‌ی دوم انتگرال $I_۱$ و با استفاده از قضیه‌ی اول، انتگرال $I_۲$ را بررسی می‌کنیم.

چون $p=۲>۱$ و A عددی متناهی است، انتگرال $I_۲$ همگراست. $\lim\limits_{t\to\infty} t^۲\left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^۲}{e^t\sqrt{t}} = ۰$

چون $p=\frac{۱}{۲}<۱$ و A عددی متناهی شده، انتگرال $I_۱$ همگراست. $\lim\limits_{t\to ۰^+} t^{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right) = \lim\limits_{t\to ۰^+} \left(\frac{e^{-t}}{۱}\right) = e^۰ = ۱$

**مثال۳۲: به ازای چه مقادیری از $\alpha$، انتگرال $I=\int_۰^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \pi x}dx$ همگراست؟**

۱) $-\frac{۳\pi}{۲}\leq \alpha \leq \frac{۳\pi}{۲}$

۲) $-\frac{۳\pi}{۲}< \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$

۳) $-\pi\leq \alpha \leq \pi$

۴) $-\pi< \alpha < \pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» انتگرال در صفر و بی‌نهایت ناسرگی دارد، بنابراین انتگرال را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم، که یک قسمت شامل صفر و دیگری شامل بی‌نهایت است.

$$I=\int_۰^{\infty} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}dx = \int_۰^{۱} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}dx + \int_۱^{\infty} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}dx = I_۱+I_۲$$

نقطه‌ی $x=۰$ برای انتگرال $I_۱$، ناسرگی ایجاد می‌کند. اگر از هم‌ارزی استفاده کنیم، داریم:

$$I_۱=\int_۰^{۱} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}dx = \int_۰^{۱}\left(\frac{\alpha x}{\pi x}\right)dx = \int_۰^{۱}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)dx = \frac{\alpha}{\pi}[x]_۰^۱ = \frac{\alpha}{\pi}$$

به ازای هر مقدار حقیقی $\alpha$، انتگرال $I_۱$ همگراست.

حالا سراغ انتگرال $I_۲$ می‌رویم. برای این منظور از فرمول $\sinh kx = \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{۲}$ استفاده می‌کنیم، با استفاده از این فرمول داریم:

$$I_۲ = \int_۱^\infty \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\pi x)}dx = \int_۱^\infty \frac{\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{۲}}{\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{۲}}dx = \int_۱^\infty (\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}})dx$$

خُب اگر $\alpha > ۰$ باشد، آن‌گاه انتگرال هم‌ارز انتگرال مقابل است:

$$\int_۱^\infty (\frac{e^{\alpha x}}{e^{\pi x}})dx = \int_۱^\infty \frac{۱}{e^{(\pi-\alpha)x}}dx$$

خُب حالا از قضیه اول کمک می‌گیریم، اگر فرض کنیم $p = ۲$، آن‌گاه حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^۲}{e^{(\pi-\alpha)x}}$ که با شرط $\pi-\alpha > ۰$ متناهی می‌شود، پس با شرط $\alpha < \pi$ این انتگرال همگراست. اما اگر $\alpha < ۰$ باشد، آن‌گاه انتگرال $I_۲$ هم‌ارز انتگرال مقابل است:

$$\int_۱^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{e^{\pi x}}dx = \int_۱^\infty \frac{dx}{e^{(\pi+\alpha)x}}$$

خُب اگر فرض کنیم $p = ۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{e^{(\pi+\alpha)x}}$ با شرط $\pi+\alpha > ۰$ متناهی می‌شود، پس با شرط $\alpha > -\pi$ این انتگرال همگراست، پس در مجموع می‌توان گفت با شرط $-\pi < \alpha < \pi$ انتگرال $I_۲$ و در نتیجه انتگرال $I$ همگراست.

**مثال ۳۳: به ازای چه مقادیری از $\alpha$، انتگرال $I = \int_۰^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$ همگراست؟**

۱) $\alpha \ge ۰$    ۲) $\alpha > ۰$    ۳) $\alpha > ۱$    ۴) $\alpha \ge ۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» انتگرال دو نوع ناسرگی دارد، یکی در صفر و دیگری در بی‌نهایت، بنابراین آن را به شکل زیر به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$I = \int_۰^۱ \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx + \int_۱^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx = I_۱ + I_۲$$

حالا هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم. در انتگرال $I_۱$، نقطه‌ی $x = ۰$، برای انتگرال ناسرگی ایجاد می‌کند، با استفاده از هم‌ارزی در $x \to ۰$، می‌توان نوشت: $\sinh x \sim x$ و لذا انتگرال هم‌ارز با $\int_۰^۱ \frac{x^\alpha}{x}dx$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^{۱-\alpha}}dx$ است و می‌دانیم برای همگرایی این انتگرال، باید $۱-\alpha < ۱$ و به عبارت دیگر، باید $\alpha > ۰$ باشد.

حالا سراغ انتگرال دوم می‌رویم، ابتدا معادل $\sinh x$ را می‌نویسیم:

$$\int_۱^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx = \int_۱^\infty \frac{x^\alpha}{\frac{e^x - e^{-x}}{۲}}dx = ۲\int_۱^\infty (\frac{x^\alpha}{e^x - e^{-x}})dx$$

خُب، هم‌ارز تابع زیر انتگرال در بی‌نهایت، $\frac{x^\alpha}{e^x}$ است و لذا باید وضعیت همگرایی انتگرال $\int_۱^\infty \frac{x^\alpha}{e^x}dx$ بررسی شود. با استفاده از قضیه‌ی اول داریم:

$$\lim_{x\to\infty} x^۲(\frac{x^\alpha}{e^x}) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^{\alpha+۲}}{e^x}) \xlongequal{\text{قانون رشد}} ۰$$

چون $p = ۲ > ۱$ و حاصل حد نیز متناهی شد، لذا انتگرال $I_۲$ همواره همگراست. پس برای همگرایی انتگرال $I$، فقط کافی است انتگرال $I_۱$ همگرا باشد و گفتیم شرط همگرایی $I_۱$ این است که $\alpha > ۰$ باشد.

**مثال ۳۴ (سخت): به ازای چه مقادیری از $\alpha$ و $\beta$، انتگرال $I = \int_۰^\infty (\frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha})e^{-\beta t}dt$ همگراست؟**

۱) $\alpha > ۱$ و $\beta = ۰$    ۲) $\alpha < ۲$ و $\beta = ۰$    ۳) $\alpha \le ۲$ و $\beta > ۰$    ۴) $\alpha < ۲$ و $\beta > ۰$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» انتگرال در صفر و بی‌نهایت ناسرگی دارد، پس آن را به دو انتگرال تفکیک می‌کنیم:

$$I = \int_۰^۱ (\frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha})e^{-\beta t}dt + \int_۱^\infty (\frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha})e^{-\beta t}dt = I_۱ + I_۲$$

$I_۱$ در $t = ۰$ ناسره است و در همسایگی این نقطه، تابع تحت انتگرال هم‌ارز $(\frac{t}{t^\alpha})(۱-\beta t)$ می‌باشد و با توجه به قاعده‌ی کمترین درجه می‌توان گفت تابع هم‌ارز با $\frac{t}{t^\alpha}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$I_۱ = \int_۰^۱ (\frac{t}{t^\alpha})dt = \int_۰^۱ \frac{۱}{t^{\alpha-۱}}dt$$

می‌دانیم این انتگرال به ازای $\alpha - ۱ < ۱$ همگراست و لذا با شرط $\alpha < ۲$، $I_۱$ همگراست.

حالا سراغ انتگرال $I_۲$ می‌رویم: هم‌ارز تابع تحت انتگرال در بی‌نهایت به شکل زیر است:

$$\int_۱^\infty \frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha e^{\beta t}}dt \sim \int_۱^\infty (\frac{۱}{e^{\beta t}})dt \xrightarrow{\text{از قضیه‌ی اول استفاده می‌کنیم}} \lim_{t\to\infty} t^۲(\frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha e^{\beta t}}) \xlongequal{\beta > ۰} ۰$$

بنابراین با شرط $\beta > ۰$، حد فوق صفر است، بنابر قضیه اول متن کتاب، چون $p = ۲ > ۱$ و حاصل حد نیز متناهی شده است، لذا به ازای $\beta > ۰$ انتگرال همگراست.

البته اگر $\beta = ۰$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{t\to\infty} t^p (\frac{Ln(۱+t)}{t^\alpha}) = \lim_{t\to\infty} (\frac{Ln(۱+t)}{t^{\alpha-p}})$$

که این حد با شرط $\alpha - p > ۰$، برابر با صفر می‌شود. برای این که انتگرال همگرا شود باید $p > ۱$ و با این شرط باید $\alpha > ۱$ باشد. بنابراین با شروط $\beta > ۰$ و $\alpha < ۲$ و یا با شرط $\beta = ۰$ و $۱ < \alpha < ۲$، نیز انتگرال همگراست.

**مثال ۳۵: به ازای چه مقادیری از $\alpha$ انتگرال $I = \int_۰^\infty (\frac{۱-\cos t}{t^\alpha})e^{-t}dt$ همگراست؟**

۱) $\alpha < ۲$
۲) $\alpha \le ۲$
۳) $\alpha < ۳$
۴) $\alpha \le ۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» انتگرال در صفر و بی‌نهایت ناسرگی دارد. بنابراین باید انتگرال را به دو بخش که یکی از آن‌ها شامل صفر و دیگری شامل $\infty$ است، تفکیک کنیم:

$$I = \int_۰^\infty (\frac{۱-\cos t}{t^\alpha})e^{-t}dt = \int_۰^۱ (\frac{۱-\cos t}{t^\alpha})e^{-t}dt + \int_۱^\infty (\frac{۱-\cos t}{t^\alpha})e^{-t}dt = I_۱ + I_۲$$

ابتدا شرط همگرایی انتگرال $I_۲$ را بررسی می‌کنیم، برای این منظور از قضیه‌ی گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to+\infty} t^۲(\frac{۱-\cos t}{t^\alpha})e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(۱-\cos t)t^۲}{e^t t^\alpha} \overset{\text{قانون‌رشد}}{=\!=} ۰$$

چون $p = ۲ > ۱$ و حاصل حد نیز صفر شد، بنابراین انتگرال $I_۲$ به ازای تمام مقادیر $\alpha$ همگراست.

حالا سراغ $I_۱$ می‌رویم؛ هر محدودیتی که برای همگرایی $I_۱$ برای $\alpha$ ایجاد شود جواب سؤال است (چون $I_۲$ به ازای هر مقدار $\alpha$ همگراست). چون $t = ۰$ نقطه‌ی ناسرگی $I_۱$ است، بنابراین باید از هم‌ارزی در صفر استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\frac{۱-\cos t}{t^\alpha}(e)^{-t} \sim \frac{\frac{t^۲}{۲}}{t^\alpha}(e^۰) \sim \frac{۱}{۲t^{\alpha-۲}}$$

بنابراین کافی است شرایط همگرایی انتگرال $I_۲ = \int_۰^۱ ۲\frac{dt}{t^{\alpha-۲}}$ را بررسی کنیم و می‌دانیم این انتگرال با شرط $\alpha - ۲ < ۱$ همگراست، پس $\boldsymbol{\alpha < ۳}$، شرط همگرایی $I_۱$ و در نتیجه شرط همگرایی $I$ است.

**مثال ۳۶: کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟**

۱) اگر $f$ تابعی پیوسته و مثبت در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ باشد و انتگرال $\int_۰^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشد، ممکن است؛ $I = \int_۰^{+\infty} f^۲(x)dx$ واگرا باشد.

۲) اگر $f$ تابعی پیوسته و مثبت در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ باشد و انتگرال $\int_۰^{+\infty} f(x)dx$ واگرا باشد، آن‌گاه ممکن است $I = \int_۰^{+\infty} f^۲(x)dx$؛ همگرا باشد.

۳) انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^۲}dx$ همواره واگراست.

۴) انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh x}dx$ همواره همگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یک سؤال ترکیبی برایتان طرح کرده‌ام! که البته هر کدام از گزینه‌ها ممکن است به عنوان یک تست مجزا مطرح شوند! برای تمرین بیشتر تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

**بررسی گزینه (۱):** برای تأیید این گزینه، فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x(x^۲+۱)}}$، می‌دانیم این انتگرال همگراست برای این که داریم:

$$\int_۰^{+\infty} f(x)dx = \int_۰^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x^۲+۱)}} = \int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{x(x^۲+۱)}} + \int_۱^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x^۲+۱)}}$$

واضح است هر دو انتگرال فوق همگرا هستند، چون داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{x(x^۲+۱)}} \sim \frac{۱}{\sqrt{x}} \quad (x \to ۰) \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{x(x^۲+۱)}} \sim \frac{۱}{\sqrt{x^۳}} = \frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}} \quad (x \to \infty)$$

اما انتگرال $\int_۰^{+\infty} f^۲(x)dx = \int_۰^{+\infty} \frac{dx}{x(x^۲+۱)}$ واگراست، چون داریم:

$$\int_۰^{+\infty} \frac{dx}{x(x^۲+۱)} = \int_۰^۱ \frac{dx}{x(x^۲+۱)} + \int_۱^{+\infty} \frac{dx}{x(x^۲+۱)}$$

که به راحتی معلوم است، مثلاً انتگرال اول واگراست، چون هم‌ارزی زیر را در $x = ۰$ داریم:

$$\frac{۱}{x(x^۲+۱)} \sim \frac{۱}{x} \quad (x \to ۰) \Rightarrow I = \int_۰^۱ \frac{۱}{x}dx \Rightarrow \text{واگراست}$$

**بررسی گزینه (۲):** برای تأیید این گزینه فرض کنید: $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$، می‌دانیم این انتگرال واگراست، برای این که داریم:

$$\int_۰^\infty f(x)dx = \int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱+x^۲}} + \int_۱^\infty \frac{dx}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

یک روش پیشنهادی برای حفظ کردن و اشتباه نکردنِ دو فرمول گفته شده این است که بدانید مخرج کسرها در حاصل هر دو انتگرال $a^۲+b^۲$ است (یعنی مجموع مربعات؛ ضریب x در توان e و ضریب x در کمان‌های cos یا sin) و فقط صورت آن با هم فرق می‌کند که برای انتگرالی که شامل $\sin bx$ است، ضریب x، در کمان سینوس (یعنی b) و برای انتگرالی که شامل $\cos bx$ است، ضریب $(-x)$ مربوط به توان e یعنی a، در صورت کسر قرار می‌گیرد. دو فرمول (۱) و (۲) با دو بار استفاده از روش جزء به جزء تقریباً آسان حل می‌شوند، اما انتگرال‌های بعدی به این راحتی‌ها قابل محاسبه نیستند:

$$\boxed{۴)\ \int_۰^{+\infty} xe^{-ax}\cos(bx)dx=\frac{a^۲-b^۲}{(a^۲+b^۲)^۲}\ ,\ (a>۰)}\quad،\quad\boxed{۳)\ \int_۰^{+\infty} xe^{-ax}\sin(bx)dx=\frac{۲ab}{(a^۲+b^۲)^۲}\ ,\ (a>۰)}$$

**توضیح:** اگر از طرفین فرمول‌های (۱) و (۲) نسبت به a مشتق بگیریم، فرمول‌های (۳) و (۴) به‌دست می‌آیند. برای مثال با مشتق‌گیری نسبت به a از فرمول (۱) به (۳) می‌رسیم:

$$(۱):\int_۰^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx=\frac{b}{a^۲+b^۲}\xrightarrow{\text{نسبت به a مشتق می‌گیریم}}\int_۰^{\infty}-xe^{-ax}\sin(bx)dx=\frac{۰-۲ab}{(a^۲+b^۲)^۲}\Rightarrow\int_۰^{\infty}xe^{-ax}\sin(bx)dx=\frac{۲ab}{(a^۲+b^۲)^۲}$$

اگر بخواهیم عامل $x^۲$ کنار $e^{-ax}$ ایجاد شود یک بار دیگر نسبت به a مشتق می‌گیریم.

**مثال ۳۷:** حاصل $I=\int_۰^{+\infty}e^{-۳x}\sin^۲(۲x)dx$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۵۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۵۰}$ ۳) $\frac{۹}{۷۵}$ ۴) $\frac{۸}{۷۵}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا با توجه به فرمول توان‌شکن، یعنی $\sin^۲ ۲x=\frac{۱-\cos ۴x}{۲}$، تابع زیر انتگرال را کمی ساده می‌کنیم:

$$I=\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}e^{-۳x}(۱-\cos ۴x)dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}e^{-۳x}dx-\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}e^{-۳x}\cos ۴xdx=\frac{۱}{۲}[\frac{-۱}{۳}e^{-۳x}]_۰^{+\infty}-\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}e^{-۳x}\cos ۴xdx$$

حالا با توجه به فرمول (۲)، حاصل انتگرال را تعیین می‌کنیم، در این انتگرال $a=۳$ و $b=۴$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$I=-\frac{۱}{۶}[e^{-\infty}-e^{۰}]-\frac{۱}{۲}[\frac{۳}{۳^۲+۴^۲}]=+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲۵})=\frac{۱}{۶}-\frac{۳}{۵۰}=\frac{۸}{۷۵}$$

**نکته ۷:** دو فرمول زیر نیز بعضاً در حل انتگرال‌ها کاربرد دارند که بهتر است به خاطر سپرده شوند (این انتگرال‌ها به نوعی فرم نامعین انتگرال‌های ۱ و ۲ هستند).

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}[a\cos(bx)+b\sin(bx)]+C\quad،\quad\int e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}[a\sin(bx)-b\cos(bx)]+C$$

$$\boxed{۶)\ \int_۰^{+\infty}e^{-kx}(\frac{\cos ax-\cos bx}{x})dx=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{k^۲+b^۲}{k^۲+a^۲})\ ,\ k\geq۰}\quad،\quad\boxed{۵)\ \int_۰^{+\infty}e^{-ax}(\frac{\sin bx}{x})dx=Arctg(\frac{b}{a})}$$

## انتگرال‌های فرولانی

یکی از روش‌های محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره، استفاده از قضیه‌ای است که به انتگرال‌های فرولانی معروف هستند.

۱) اگر تابع $f(x)$ به ازای $x\geq۰$ پیوسته بوده و حد $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$ موجود باشد، و همچنین a و b بزرگتر از صفر باشند، با این شرایط همواره رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\boxed{\int_۰^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(۰)-f(\infty)]Ln\frac{b}{a}}$$

۲) اگر تابع $f(x)$ به ازای $x\geq۰$ پیوسته باشد و انتگرال $I=\int_A^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ به ازای یک $A>۰$ همگرا باشد، و همچنین a و b بزرگتر از صفر باشند، با این شرایط همواره رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\boxed{\int_۰^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(۰)Ln\frac{b}{a}}$$

**مثال ۳۸:** حاصل انتگرال $I=\int_۰^{+\infty}[\frac{arctg(ax)-arctg(bx)}{x}]dx$ را تعیین کنید. $(a,b>۰)$

در این سؤال $f(ax)=arctg(ax)$ و $f(bx)=arctg(bx)$ ابتدا توجه کنید که $f(x)$ برای هر $x\geq۰$ پیوسته است و $f(۰)=arctg(۰)=۰$ و $f(+\infty)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{۲}$ لذا داریم:

$$I=[f(۰)-f(+\infty)]Ln(\frac{b}{a})=(۰-\frac{\pi}{۲})Ln\frac{b}{a}=-\frac{\pi}{۲}Ln\frac{b}{a}$$

**مثال ۳۹:** حاصل دو انتگرال $I_۱=\int_۰^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ و $I_۲=\int_۰^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ را بیابید. $(a,b>۰)$

در انتگرال $I_۱$، $f(ax)=e^{-ax}$ و بنابراین $f(۰)=e^۰=۱$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$ لذا داریم:

$$I_۱=[f(۰)-f(\infty)]\text{Ln}(\frac{b}{a})=(۱-۰)\times\text{Ln}(\frac{b}{a})=\mathbf{Ln(\frac{b}{a})}$$

در انتگرال $I_۲$، $f(ax)=\cos ax$ و بنابراین $f(۰)=\cos(۰)=۱$ و از طرفی $\int_۱^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ همگراست، لذا داریم:

$$I_۲=f(۰)\text{Ln}\frac{b}{a}=۱\times\text{Ln}(\frac{b}{a})=\mathbf{Ln(\frac{b}{a})}$$

---

**مثال ۴۰:** حاصل $I=\int_۰^{+\infty}(\frac{tg^{-۱}(\frac{x}{a})-tg^{-۱}(\frac{x}{b})}{x})dx$، کدام است؟ $(b>۰\,,\,a>۰)$

۱) $\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{a}{b}$

۲) $\pi\text{Ln}\frac{b}{a}$

۳) $\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{b}{a}$

۴) $\text{Ln}\frac{b}{a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق فرمول داریم:

$$\int_۰^{\infty}(\frac{tg^{-۱}(ax)-tg^{-۱}(bx)}{x})dx=-\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{b}{a}$$

اگر در طرفین رابطه‌ی فوق به جای a، $\frac{۱}{a}$ و به جای b، $\frac{۱}{b}$ قرار دهیم، داریم:

$$\int_۰^{\infty}(\frac{tg^{-۱}(\frac{x}{a})-tg^{-۱}(\frac{x}{b})}{x})dx=-\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{\frac{۱}{b}}{\frac{۱}{a}}=-\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{a}{b}=+\frac{\pi}{۲}\text{Ln}\frac{b}{a}$$

---

**نکته۸:** از رابطه‌ی زیر، زیاد در تست‌ها استفاده می‌شود:

$$\boxed{\int_۰^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}dx=\frac{\pi}{۲}\quad ,\quad a>۰}$$

**مثال ۴۱:** مقدار $I=\int_۰^{+\infty}\frac{\sin^۳ x}{x}dx$، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $۲\pi$

۴) $۴\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از فرمول $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$ و به عبارت دیگر: $\sin^۳ x=\frac{۱}{۴}[۳\sin x-\sin ۳x]$، داریم:

$$I=\frac{۱}{۴}\int_۰^{+\infty}(\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{x})dx=\frac{۱}{۴}[۳\int_۰^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})dx-\int_۰^{+\infty}(\frac{\sin ۳x}{x})dx]$$

می‌دانیم؛ $\int_۰^{+\infty}\frac{\sin kx}{x}dx=\frac{\pi}{۲}$، بنابراین داریم:

$$I=\frac{۱}{۴}[۳\times\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}]=\frac{\pi}{۴}$$

## چند فرمول برای محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره

فرمول‌های زیر به ندرت در تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند، «عشقِ فرمول‌ها» حفظ کنند! (البته چندان مهم نیستند و بیشتر در درس ریاضی مهندسی کاربرد دارند!)

۱) $\int_۰^{+\infty}\frac{x^{\beta-۱}}{۱+x}dx=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\ ;\ (۰<\beta<۱)$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

۳) $\int_۰^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{\pi}{۲\Gamma(p)\cos(\frac{\pi p}{۲})}\ ;\ (۰<p<۱)$

۴) $\int_۰^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx=\frac{\pi}{۲\Gamma(p)\sin(\frac{\pi p}{۲})}\ ;\ (۰<p<۱)$

# درسنامه۸: مشتق‌گیری از انتگرال

قبل از آموزش مطالب اصلی این درسنامه، ابتدا قضیه‌ی زیر را که قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال را می‌توان به نوعی نتیجه‌ی این قضیه دانست، ارائه می‌دهیم:

## اولین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه به ازای هر $x$ رابطه‌ی زیر را داریم:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$$

در واقع مشتق یک انتگرال از $a$ تا $x$، نسبت به $x$، همان تابع داخل انتگرال است.

**مثال۱: اگر $F(x)=\int_۲^x e^{-t^۲}dt$، آن‌گاه مقدار $F'(-۱)$ را بیابید.**

☑ **پاسخ :** با توجه به قضیه‌ی فوق داریم:

$$F'(x)=e^{-x^۲} \Rightarrow F'(-۱)=e^{-(-۱)^۲}=e^{-۱}=\frac{۱}{e}$$

**تذکر۱:** قضیه فوق صرفاً از جهت مهم بودن آن در حساب دیفرانسیل و انتگرال گفته شده، در واقع «قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال» که به زودی گفته می‌شود، نتیجه و حالت کلی‌تر این قضیه است و اساس کار ما در این فصل قاعده‌ی «مشتق‌گیری از انتگرال» است.

## مشتق‌گیری از انتگرال

اگر $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ باشد، آن‌گاه $F'(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{F'(x)=\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)'=v'(x)f\left[v(x)\right]-u'(x)f\left[u(x)\right]}$$

همان‌طور که می‌بینید، اگر در فرمول فوق، $u(x)$ عددی ثابت مانند $a$ و $v(x)=x$ باشد، آن‌گاه رابطه به‌صورت زیر می‌شود:

$$F'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=۱\times f(x)-۰=f(x)$$

که همان تساوی داده شده در اولین قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. پس فقط کافی است؛ فرمول کلی فوق را به خاطر بسپارید.

معمولاً از فرمول فوق سه نوع سؤال طرح می‌شود:

۱) سؤالاتی که فقط از ما می‌خواهند از تابع مشتق بگیریم. در این گونه سؤالات، معمولاً «ضابطه‌ی خود تابع»، «ضابطه‌ی مشتق تابع»، «مقدار تابع و مقدار مشتق تابع در یک نقطه»، «طول نقاط اکسترمم و عطف تابع» و ... مورد سؤال می‌باشند.

۲) سؤالاتی که حد عبارتی مورد نظر است و در فرآیند رفع ابهام مجبور می‌شویم از فرمول فوق استفاده کنیم.

۳) سؤالاتی که شامل یک معادله‌ی انتگرالی هستند و از ما ضابطه‌ی تابع خواسته می‌شود و ما برای از بین بردن انتگرال به فرمول فوق متوسل می‌شویم.

**مثال۲: اگر $S(t)=\int_{-t}^{t}\frac{dx}{۱+x^{۱۰}}$ در این صورت $S'(۰)$ کدام است؟**

۱) ۱-
۲) ۲-
۳) ۱
۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» به راحتی با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$S'(t)=۱\times\frac{۱}{۱+(t)^{۱۰}}-(-۱)\times\frac{۱}{۱+(-t)^{۱۰}}=\frac{۲}{۱+t^{۱۰}} \Rightarrow S'(۰)=۲$$

**مثال۳: اگر $f(x)=e^{۱-\cos x}+\int_۰^۲ Ln(\sin x)dx$ باشد، آن‌گاه مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟**

۱) $e$
۲) $Ln\sin ۲$
۳) صفر
۴) $(\sin ۲)e^{\frac{\pi}{۲}}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» توجه داریم جمله دوم تابع $f(x)$ که انتگرال معین است، حاصلش عددی ثابت است و مشتق آن برابر صفر است. لذا فقط مشتق جمله‌ی اول را محاسبه می‌کنیم، می‌دانیم مشتق $a^u$ برابر با $u'a^u Lna$ می‌باشد، پس داریم:

$$f'(x)=(\sin x)e^{۱-\cos x} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=(\sin\frac{\pi}{۲})e^{۱-\cos\frac{\pi}{۲}}=e$$

**مثال۴: اگر $f(x)=\int_۰^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{۱+t^۲}}$ و $g(x)=\int_۰^{\cos x}(۱+\sin^۲ t)dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{۲})$ برابر کدام است؟**

۱) ۱-
۲) ۰
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sin ۲$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا مشتق $f(x)$ را حساب می‌کنیم، و چون در ضابطه‌ی $f'(x)$، عبارت $g'(x)$ بوجود می‌آید، لذا باید $g'(x)$ را نیز حساب کنیم؛

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{۱+(g(x))^۲}} \quad , \quad g'(x)=[۱+\sin^۲(\cos x)]\times(-\sin x) \Rightarrow g'(\frac{\pi}{۲})=-۱ \ , \ g(\frac{\pi}{۲})=۰ \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=-۱$$

**مثال ۱۸:** فرض کنید $g(x)=xe^{x^۲}$ و $f(x)=\int_۱^x g(t)(t+\frac{۱}{t})dt$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ ، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴　　۲) ۲　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)[x+\frac{۱}{x}]}{e^{x^۲}+(۲xe^{x^۲})x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^۲}(x+\frac{۱}{x})}{e^{x^۲}(۱+۲x^۲)}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^۲+۱}{۱+۲x^۲})=\frac{۱}{۲}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را می‌توان برابر با $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ نیز دانست، پس حاصل خواسته شده برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

**توضیح:** در صورتی که راه حل فوق به ذهنتان نرسیده باشد، می‌توانید $f''(x)$ و $g''(x)$ را از روی ضابطه‌ی آن‌ها حساب کرده و در نهایت حاصل حد را حساب کنید. به عنوان روش دوم سؤال، این حالت را تمرین کنید.

**مثال ۱۹:** حاصل $A=\lim\limits_{x\to\infty}(\int_۰^x e^{t^۲}dt)^{\frac{۱}{x^۲}}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۰　　۳) $e$　　۴) $e^{-۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با حالت ابهام $\infty^۰$ روبه‌رو هستیم، اگر حد داده شده را $A$ بنامیم، با $Ln$ گرفتن از طرفین طبق خاصیت $LnA^B=BLnA$ داریم:

$$LnA=Ln[\lim_{x\to\infty}(\int_۰^x e^{t^۲}dt)^{\frac{۱}{x^۲}}]=\lim_{x\to\infty}[Ln(\int_۰^x e^{t^۲}dt)^{\frac{۱}{t^۲}}]=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^۲}Ln(\int_۰^x e^{t^۲}dt)$$

هرگاه $x\to\infty$ ، انتگرال ناسره‌ی $\int_۰^\infty e^{t^۲}dt$ به وجود می‌آید که واگراست. زیرا $e^{t^۲}$ در بی‌نهایت به سمت $+\infty$ میل می‌کند، پس در این حد وقتی $x\to\infty$ داریم $\frac{Ln(\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$. پس با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال و توجه به قاعده‌ی مشتق از انتگرال، داریم:

$$\Rightarrow LnA=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{x^۲}}{\int_۰^x e^{t^۲}dt}}{۲x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^۲}}{۲x\int_۰^x e^{t^۲}dt}$$

باز هم در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ هستیم و بنابراین دوباره از قاعده‌ی هوپیتال و همچنین قاعده‌ی مشتق از انتگرال (در مخرج کسر) استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow LnA=\lim_{x\to\infty}\frac{۲xe^{x^۲}}{۲\int_۰^x e^{t^۲}dt+۲xe^{x^۲}}$$

همان‌طور که می‌بینید کماکان در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ تشریف داریم! بنابراین دوباره از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$LnA=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^۲}+۲x^۲e^{x^۲}}{۲e^{x^۲}+۲e^{x^۲}+۲x^۲e^{x^۲}}\xrightarrow{\text{زور } ۲x^۲e^{x^۲} \text{ چه در صورت و چه در مخرج از بقیه جملات بیشتر است!}}LnA\simeq\frac{۲x^۲e^{x^۲}}{۲x^۲e^{x^۲}}=۱\Rightarrow A=e^۱=e$$

**مثال ۲۰:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $۲x-\int_۰^x\sin^۵ tdt=۱$ ، در بازه‌ی $[۰,۱]$ کدام است؟

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا تابع را مرتب می‌کنیم و آن را مساوی $f(x)$ قرار می‌دهیم و با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی داریم:

$$f(x)=۲x-\int_۰^x\sin^۵ tdt-۱\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=۰-\int_۰^۰\sin^۵ tdt-۱=-۱<۰\\ f(۱)=۲-\int_۰^۱\sin^۵ tdt-۱>۰\end{cases}\Rightarrow f(۰)f(۱)<۰\Rightarrow$$ حداقل یک ریشه در بازه $[۰,۱]$ داریم

از طرفی $f'(x)=۲-\sin^۵ x$ و چون $\sin^۵ x$ حداکثر برابر با $\underline{۱}$ است، پس $f'(x)>۰$ و این یعنی بنابر قضیه رُل و نتایج آن تابع فقط یک ریشه در بازه‌ی $[۰,۱]$ دارد.

**نکته۱:** در برخی سؤالات که ضابطه‌ی $f(x)$ موردنظر طراح است، ما ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم و سپس از ضابطه‌ی $f'(x)$، انتگرال می‌گیریم تا ضابطه‌ی $f(x)$ به‌دست آید که شامل یک عبارت بر حسب $x$، بعلاوه‌ی عدد ثابت $c$ خواهد بود. اما نکته‌ی مهم به‌دست آوردن مقدار $c$ می‌باشد. در برخی سؤالات خود طراح یک شرایط اولیه در صورت مسأله می‌دهد؛ اما اگر هم شرطی داده نشده بود، غصه نخورید! چون شما در معادله‌ی صورت سؤال می‌توانید به جای $x$، یک عدد دلخواه قرار دهید و یک شرط اولیه برای خود ایجاد کرده و از روی شرط اولیه، مقدار $c$ را مشخص کنید. (البته عددی که باعث شود ما به راحتی به یک شرط برسیم! معمولاً این عدد باید طوری باشد که محاسبه‌ی قسمت شامل انتگرال را راحت کند. اعدادی که حدود بالا و پایین انتگرال را یکسان کنند، بهترین اعداد برای پیدا کردن یک شرط اولیه هستند.) مثال‌های بعدی این موضوع را به خوبی روشن می‌کند.

**مثال ۳۳:** اگر $I(a)=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}(a-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}e^{-ax})dx$، آن‌گاه مقدار $I(۱۳۹۳)$ کدام است؟

۱) $۱۳۹۳\,Ln\,۱۳۹۴-۱۳۹۳$ ۲) $۱۳۹۳\,Ln\,۱۳۹۳-۱۳۹۴$ ۳) $۱۳۹۴\,Ln\,۱۳۹۴-۱۳۹۳$ ۴) $۱۳۹۴\,Ln\,۱۳۹۳-۱۳۹۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا نسبت به پارامتر $a$ مشتق می‌گیریم:

$$I'(a)=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}(۱-۰-\frac{x}{x}e^{-ax})dx \Rightarrow I'(a)=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}(۱-e^{-ax})dx \quad , \quad (۱)$$

خُب این که مشکل را اساسی حل نکرد! هنوز محاسبه انتگرال به روش انتگرال‌گیری معمولی سخت است. ولی به هر حال مشتق‌گیری از توان $x$ در مخرج $e^{-ax}$ یک درجه کم کرد و تازه پارامتر ثابت $a$ (البته نه آن که در توان $e$ بود) را هم از بین بُرد! یکبار دیگر نسبت به $a$ مشتق می‌گیریم:

$$I''(a)=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}(۰+xe^{-ax})dx=\int_{۰}^{\infty}e^{-(a+۱)x}dx=[-\frac{e^{-(a+۱)x}}{(a+۱)}]_{۰}^{\infty}=[۰+\frac{۱}{a+۱}] \Rightarrow I''(a)=\frac{۱}{a+۱}$$

خُب $I''(a)$ را بر حسب $a$ داریم، پس از انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$I'(a)=Ln(a+۱)+C_{۱} \quad , \quad (۲)$$

خُب $a$ خودش کم بود، $C_{۱}$ هم اضافه شد!! اما این موضوع خیلی جای نگرانی ندارد، چون اگر در سمت راست تساوی (۱) به جای $a$ صفر قرار بدهیم، داریم:

$$I'(۰)=\int\frac{e^{-x}}{x}(۱-۱)dx \Rightarrow I'(۰)=۰$$

حالا در طرفین تساوی (۲) هم $a=۰$ قرار می‌دهیم:

$$I'(۰)=Ln(۰+۱)+C_{۱} \Rightarrow ۰=C_{۱} \Rightarrow I'(a)=Ln(a+۱)$$

و با انتگرال‌گیری نسبت به $a$ از طرفین تساوی بالا داریم:

$$I(a)=\int Ln(a+۱)da \Rightarrow I(a)=(a+۱)Ln(a+۱)-(a+۱)+C_{۲} \quad , \quad (۳)$$

اگر در طرفین رابطه‌ی داده شده در صورت سؤال به جای $a$ صفر قرار دهیم، $I(۰)=۰$ و اگر در رابطه‌ی (۳)، مقدار $a$ را صفر قرار دهیم، $C_{۲}=۱$ می‌شود، پس داریم:

$$I=(a+۱)Ln(a+۱)-a$$

و در نهایت به جای $a$، عدد ۱۳۹۳ را قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{I=۱۳۹۴\,Ln\,۱۳۹۴-۱۳۹۳}$$

**مثال ۳۴ (سخت):** حاصل $I=\int_{۰}^{۱}\sin(Ln\frac{۱}{x})\frac{x^{b}-x^{a}}{Lnx}dx$ کدام است؟

۱) $arctg(\frac{b-a}{a+b+۲})$ ۲) $arctg(\frac{b-a}{a+b+ab})$ ۳) $arctg(\frac{b-a}{a+b-ab})$ ۴) $arctg(\frac{b-a}{a+b+ab+۲})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مقدار انتگرال تابعی از $a$ و $b$ می‌باشد، در واقع داریم:

$$I(a,b)=\int_{۰}^{۱}\sin(Ln\frac{۱}{x})\frac{x^{b}-x^{a}}{Lnx}dx$$

با مشتق‌گیری نسبت به $a$ داریم:

$$I'_{a}=\int_{۰}^{۱}\sin(Ln\frac{۱}{x})(\frac{-x^{a}Lnx}{Lnx})dx=\int_{۰}^{۱}-x^{a}\sin(Ln\frac{۱}{x})dx=\int_{۰}^{۱}-x^{a}\sin(-Lnx)dx$$

با تغییر متغیر $u=-Lnx$ داریم $x=e^{-u}$ پس $dx=-e^{-u}du$ در ضمن وقتی $x\to۰$ داریم $u\to+\infty$ و وقتی که $x\to۱$ داریم $u\to۰$.

$$I'_{a}=\int_{+\infty}^{۰}-e^{-au}\sin u(-e^{-u})du=-\int_{۰}^{+\infty}e^{-(a+۱)u}\sin u\,du=-\frac{۱}{(a+۱)^{۲}+۱}$$

آخرین انتگرال را با استفاده از فرمول‌های تبدیل لاپلاس که در متن درس آمده است حل کرده‌ایم. در ضمن به علت جابه‌جا کردن حدود انتگرال، مقدار آن قرینه شده است.

به صورت مشابه می‌توان با مشتق‌گیری نسبت به $b$ نشان داد که:

$$I'_{b}=\frac{۱}{(b+۱)^{۲}+۱}$$

اکنون مشتق‌های $I$ نسبت به $a$ و $b$ را داریم. با انتگرال‌گیری از $I'_{a}$ نسبت به $a$ داریم:

$$I=\int I'_{a}da=\int\frac{-۱}{(a+۱)^{۲}+۱}da=-arctg(a+۱)+f(b)$$

برای پیدا کردن ثابت انتگرال یعنی $f(b)$ از $I'_{b}$ استفاده می‌کنیم:

$$I'_{b}=\frac{۱}{(b+۱)^{۲}+۱} \Rightarrow f'(b)=\frac{۱}{(b+۱)^{۲}+۱} \Rightarrow f(b)=\int\frac{۱}{(b+۱)^{۲}+۱}db=arctg(b+۱)+c$$

با جایگذاری $f(b)$ در $I$ داریم:

$$I=arctg(b+۱)-arctg(a+۱)+c$$

برای محاسبه‌ی $c$ توجه کنید که در صورت سؤال اگر $a=b$ باشد باید $I=۰$ به دست آید پس $c=۰$ است:

$$I=arctg(b+۱)-arctg(a+۱)=arc\,tg(\frac{b-a}{(۱+b)(۱+a)+۱})=arc\,tg(\frac{b-a}{ab+a+b+۲})$$

گزینه ۴ صحیح است.

**توجه:** در آخرین تساوی دقت کنید که $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{۱+tg\alpha tg\beta}$ است بنابراین داریم:

$$arc\,tg(x)-arc\,tg(y)=arc\,tg(\frac{x-y}{۱+xy})$$

**مثال ۳۵ (سخت):** اگر $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{۱}{x^۲ - \sin^۲ t})dt = \frac{\pi}{۲x\sqrt{x^۲ - ۱}}$، آن‌گاه حاصل $F(x) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(x^۲ - \sin^۲ t)dt$، برای $x > ۱$، کدام است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Stanford)

۱) $\frac{\pi}{۲}Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$

۲) $\frac{\pi}{۲}Ln(\frac{x + \sqrt{x^۲ - ۱}}{۲})$

۳) $\pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$

۴) $\pi Ln(\frac{x + \sqrt{x^۲ - ۱}}{۲})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا از طرفین رابطه‌ی داده شده نسبت به پارامتر x مشتق می‌گیریم:

$$F'(x) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲x}{x^۲ - \sin^۲ t}dt = ۲x\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{۱}{x^۲ - \sin^۲ t}) \xrightarrow{\text{با توجه به فرض سوال}} F'(x) = ۲x(\frac{\pi}{۲x\sqrt{x^۲ - ۱}}) = \frac{\pi}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

اگر از طرفین رابطه‌ی فوق نسبت به x انتگرال بگیریم، ضابطه‌ی F(x) تعیین می‌شود:

$$F(x) = \int_{۰}^{x} \frac{\pi}{\sqrt{x^۲ - ۱}}dx = \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) + c$$

اما کار هنوز تمام نشده! مشکل اصلی پیدا کردن مقدار c است. پس سراغ تعیین مقدار c می‌رویم:

$$c = F(x) - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(x^۲ - \sin^۲ t)dt - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Lnx^۲(\frac{x^۲ - \sin^۲ t}{x^۲})dt - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$$

$$\Rightarrow c = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Lnx^۲dt + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(۱ - \frac{\sin^۲ t}{x^۲})dt - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$$

$$\Rightarrow c = Lnx^۲[t]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(۱ - \frac{\sin^۲ t}{x^۲})dt - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) \Rightarrow c = ۲Lnx \times \frac{\pi}{۲} - \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(۱ - \frac{\sin^۲ t}{x^۲})dt$$

$$\Rightarrow c = -\pi Ln(\frac{x + \sqrt{x^۲ - ۱}}{x}) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(۱ - \frac{\sin^۲ t}{x^۲})dt$$

می‌دانیم تساوی فوق به ازای تمام x ها برقرار است، بنابراین وقتی $x \to \infty$، آن‌گاه داریم:

$$c = -\pi \lim_{x \to +\infty} Ln(\frac{x + \sqrt{x^۲ - ۱}}{x}) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln(۱ - \frac{\sin^۲ t}{+\infty})dt = -\pi \lim_{x \to +\infty} Ln(\frac{۲x}{x}) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} Ln۱dt \Rightarrow c = -\pi Ln۲$$

بنابراین حاصل نهایی انتگرال به‌صورت مقابل است:

$$I = \pi Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) - \pi Ln۲ = \pi[Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) - Ln۲] = \boldsymbol{\pi Ln(\frac{x + \sqrt{x^۲ - ۱}}{۲})}$$

**تذکر ۲:** فرض کنیم در فرض مسأله انتگرالی برحسب پارامتر λ (یا هر پارامتری دیگری) داشته باشیم. همان‌طور که با مشتق‌گیری نسبت به λ، پاسخ برخی از انتگرال‌ها را پیدا می‌کنیم، گاهی اوقات با انتگرال‌گیری نسبت به λ، انتگرال خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.

**مثال ۳۶: اگر $۰ \le a < ۱$ و $۰ \le b < ۱$، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(\frac{۱ + b\cos x}{۱ + a\cos x})dx$ را بیابید.**

**(راهنمایی: در صورت نیاز از تساوی $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{۱ + \lambda\cos x} = \frac{\arccos\lambda}{\sqrt{۱ - \lambda^۲}}$، استفاده کنید.)**

(از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Oxford)

☑ **پاسخ:** ابتدا از طرفین تساوی داده شده نسبت به λ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{۱ + \lambda\cos x} = \frac{\arccos\lambda}{\sqrt{۱ - \lambda^۲}} \Rightarrow \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} [\int_{۰}^{\lambda} \frac{d\lambda}{۱ + \lambda\cos x}]dx = \int_{۰}^{\lambda} \frac{\arccos\lambda}{\sqrt{۱ - \lambda^۲}}d\lambda \Rightarrow \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{\cos x}Ln(۱ + \lambda\cos x)dx = -\frac{۱}{۲}[(\arccos\lambda)^۲]_{۰}^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(۱ + \lambda\cos x)dx = -\frac{۱}{۲}(\arccos\lambda)^۲ + \frac{۱}{۲}(\frac{\pi^۲}{۴}) \Rightarrow \boldsymbol{I(\lambda) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(۱ + \lambda\cos x)dx = -\frac{۱}{۲}(\arccos\lambda)^۲ + \frac{\pi^۲}{۸}}$$

از طرفی انتگرال داده شده در صورت سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(\frac{۱ + b\cos x}{۱ + a\cos x})dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(۱ + b\cos x)dx - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sec x Ln(۱ + a\cos x)dx = I(b) - I(a)$$

I(a) و I(b)، با قرار دادن a و b به جای λ در ضابطه‌ی I(λ) حساب می‌شود:

$$I = [-\frac{۱}{۲}(\arccos b)^۲ + \frac{\pi^۲}{۸}] - [\frac{-۱}{۲}(\arccos a)^۲ + \frac{\pi^۲}{۸}] = \boldsymbol{\frac{۱}{۲}[(\arccos a)^۲ - (\arccos b)^۲]}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که $\cos\theta$ زیر رادیکال قرار دارد، بنابراین احتمالاً تغییر متغیر و یا روش‌های دیگر انتگرال‌گیری کمکی نخواهد کرد! اما توجه به بازه‌ی انتگرال و از آن مهم‌تر گزینه‌ها، خود به خود ما به سمت استفاده از خواص تابع بتا و گاما هدایت می‌شویم!

با توجه به خواص تابع بتا می‌دانیم حاصل انتگرال فوق برابر با $\frac{۱}{۲}\beta(m,n)$ است، بنابراین داریم:

$$I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(\cos\theta)^{-\frac{۱}{۲}}d\theta \Rightarrow ۲m-۱=\circ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲n-۱=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow n=\frac{۱}{۴}$$

$$I=\frac{۱}{۲}\beta(m,n)=\frac{۱}{۲}\beta(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\frac{\Gamma(\frac{۱}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۲})}{\Gamma(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲})}\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}(\frac{\Gamma(\frac{۱}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۲})}{\Gamma(\frac{۳}{۴})})\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } \Gamma(\frac{۱}{۴}) \text{ ضرب می‌کنیم}} I=\frac{۱}{۲}(\frac{[\Gamma(\frac{۱}{۴})]^۲\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{۱}{۴})\Gamma(\frac{۳}{۴})})$$

دقت کنید با توجه به رابطه‌ی $\Gamma(\alpha)\Gamma(۱-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ در این سؤال $\alpha=\frac{۱}{۴}$ و لذا داریم:

$$\Gamma(\frac{۱}{۴})\Gamma(۱-\frac{۱}{۴})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۲}}\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}(\frac{[\Gamma(\frac{۱}{۴})]^۲\sqrt{\pi}}{\frac{۲\pi}{\sqrt{۲}}})=\frac{[\Gamma(\frac{۱}{۴})]^۲\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{۲\pi}}=\frac{[\Gamma(\frac{۱}{۴})]^۲}{۲\sqrt{۲\pi}}$$

**مثال ۱۶ (سخت):** **حاصل $I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{tgx}dx$ کدام است؟** (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Berkeley)

۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$
۳) $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» انتگرال در نگاه اول کمی ترسناک جلوه می‌کند! اما تا وقتی رابطه‌ی $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲m-۱}t\cos^{۲n-۱}tdt=\frac{۱}{۲}\beta(m,n)$ را داریم، نباید از انتگرال‌هایی که در آن‌ها می‌شود حاصل‌ضرب توان‌های سینوس و کسینوس ایجاد کرد، بترسیم!! اگر طبق رابطه‌ی ساده‌ی $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=(\sin x)(\cos x)^{-۱}$، انتگرال را بازنویسی کنیم، داریم:

$$I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{(\sin x)(\cos x)^{-۱}}dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}[(\sin x)^{۱}(\cos x)^{-۱}]^{\frac{۱}{۲}}dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin x)^{\frac{۱}{۲}}(\cos x)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

حالا باید m و n را تعیین کنیم:

$$۲m-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\frac{۳}{۴}\ ,\ ۲n-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=\frac{۱}{۴}$$

پس حاصل انتگرال به‌صورت مقابل می‌شود:

$$I=\frac{۱}{۲}\beta(\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}(\frac{\Gamma(\frac{۳}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۴})}{\Gamma(\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴})})=\frac{۱}{۲}(\frac{\Gamma(\frac{۳}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۴})}{\Gamma(۱)})=\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}\Gamma(۱-\frac{۱}{۴})\Gamma(\frac{۱}{۴})$$

می‌دانیم $\Gamma(۱-\alpha)\Gamma(\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$، در حاصل انتگرال فوق $\alpha=\frac{۱}{۴}$ است، بنابراین داریم:

$$I=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{۴})})=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})=\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$$

**نکته:** البته حاصل انتگرال‌هایی به فرم کلی $I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}tg^{p}xdx$ با شرط $\circ<p<۱$، همواره برابر با $\frac{\pi}{۲}[\frac{۱}{\sin(\frac{p\pi}{۲})}]$ می‌باشد که در این سؤال $p=\frac{۱}{۲}$ است.

**تمرین مشابه:** حاصل انتگرال $I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{۲x^۲dx}{۱+x^۴}$ را به دست آورید.

**راهنمایی:** با تغییر متغیر $x^۲=tg\theta$ و انجام محاسبات ابتدایی به نتیجه‌ی جالبی خواهید رسید!

**مثال ۱۷ (سخت):** **حاصل $I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۸(۱-x^۶)}{(۱+x)^{۲۴}}dx$ کدام است؟**

۱) ۰
۲) $\beta(۵,۱۰)$
۳) $\beta(۶,۸)$
۴) $\beta(۸,۲۴)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ظاهرِ انتگرال اصلاً جذاب نیست! فعلاً تنها کاری که به ذهن می‌رسد، تفکیک کسر زیر انتگرال به دو کسر است:

$$I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۸-x^{۱۴}}{(۱+x)^{۲۴}}dx=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۸}{(۱+x)^{۲۴}}dx-\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۱۴}}{(۱+x)^{۲۴}}dx$$

خب حالا به نظر می‌رسد بتوان انتگرال را با استفاده از خواص تابع بتا حساب کرد.

$$I=\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۹-۱}}{(۱+x)^{۹+۱۵}}dx-\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^{۱۵-۱}}{(۱+x)^{۱۵+۹}}dx=\beta(۹,۱۵)-\beta(۱۵,۹)$$

با توجه به اینکه $\beta(m,n)=\beta(n,m)$، پس حاصل انتگرال فوق برابر با صفر است.

**۴۰ـ** حاصل $I=\int_{۰}^{۱}x^{۳}Ln(\frac{۱}{x})^{۴}dx$ کدام است؟

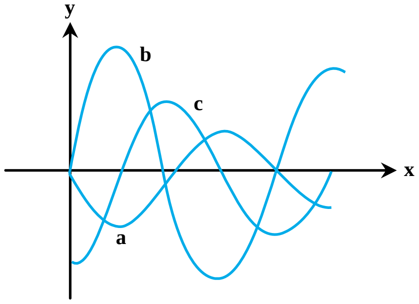
۱) $\frac{۱}{۴}$  ۲) $\frac{۱}{۲}$  ۳) $\frac{۱}{۸}$  ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

**۴۱ـ** با فرض اینکه $\int_{۰}^{+\infty}e^{-x^{۲}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ، آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_{۰}^{+\infty}e^{-(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{e^{۲}}$  ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲e}$  ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲e^{۲}}$  ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$

**۴۲ـ** در شکل زیر نمودار توابع f ، $f'$ و $\int_{۰}^{x}f(t)dt$ داده شده است. نمودار توابع $\int_{۰}^{x}f(t)dt$ ، $f'(x)$ و $f(x)$ به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

۱) a ، b و c
۲) a ، c و b
۳) b ، a و c
۴) c ، b و a



**۴۳ـ** حاصل $\lim_{n\to\infty}(n^{۳}\int_{n}^{۲n}\frac{xdx}{x^{۵}+۱})$ ، چقدر است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۵}$  ۲) $\frac{۷}{۲۴}$  ۳) ۰  ۴) $\frac{۱۱}{۳۰}$

**۴۴ـ** حاصل $I=\int_{۱}^{۱۶}\frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\sqrt[۴]{x})^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۹}$  ۲) $\frac{۱۰}{۹}$  ۳) $\frac{۴۷}{۱۸}$  ۴) $\frac{۷}{۱۸}$

**۴۵ـ** حاصل $I=\int_{۰}^{۱}(\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}})dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $Ln۲-۱$  ۲) $۱-Ln۲$  ۳) $۲Ln۲-۱$  ۴) $۲(۱-Ln۲)$

**۲۸ـ** اگر $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{Ln}(\sin ۲x)dx = -\frac{\pi}{۲}\text{Ln}۲$، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{Ln}(\text{tg}x + \cot gx)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}\text{Ln}۲$
۲) $\pi\text{Ln}۲$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}\text{Ln}۲$
۴) $\frac{۳\pi}{۴}\text{Ln}۲$

**۲۹ـ** حاصل $I = \int_{۰}^{۱} \sin^{-۱}\sqrt[۳]{x}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۳}$

**۳۰ـ** حاصل $I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}} \frac{dx}{\cos^{۳} x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳} + \text{Ln}\sqrt{۳})$
۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳} + \text{Ln}\sqrt{۳})$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \text{Ln}\sqrt{۳}$
۴) $۲(\sqrt{۳} + \text{Ln}\sqrt{۳})$

**۳۱ـ** اگر $f(x) = \int_{۰}^{\sin x} e^{xt^{۲}}dt$ و $g(x) = \int_{۰}^{\text{tg}x} e^{-xt^{۲}}dt$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۰
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-۱$

**۳۲ـ** اگر $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{k + \sin x} = \frac{۲\pi}{\sqrt{k^{۲} - ۱}}$ ،$(k > ۱)$، آن‌گاه حاصل انتگرال $I = \int_{۰}^{۲\pi} \text{Ln}(\frac{۵ + ۳\sin x}{۵ + ۴\sin x})dx$ کدام است؟

۱) $\pi\text{Ln}\frac{۴}{۳}$
۲) $\pi\text{Ln}\frac{۹}{۸}$
۳) $۲\pi\text{Ln}\frac{۴}{۳}$
۴) $۲\pi\text{Ln}\frac{۹}{۸}$

**۳۳ـ** حاصل $I = \int_{۰}^{۱} \frac{x^{۴}(۱ - x)^{۴}}{x^{۲} + ۱}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۴}{۷} - \pi$
۲) $\frac{۲۲}{۷} - \pi$
۳) $\frac{۲۲}{۷} - \frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{۲۴}{۷} - \frac{\pi}{۲}$

**۳۴ـ** با فرض $\int_{۰}^{\infty} e^{-a^{۲}x^{۲}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲a}$، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{+\infty}(e^{-\frac{a}{x^{۲}}} - e^{-\frac{b}{x^{۲}}})dx$، کدام است؟ $(a,b > ۰)$

۱) $\sqrt{\pi}(b - a)$
۲) $\sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$
۳) $\pi(b - a)$
۴) $\pi(\sqrt{b} - \sqrt{a})$

**۳۵ـ** حاصل $I = \int_{۰}^{۱} \frac{\text{Ln}(۱ + t)}{۱ + t^{۲}}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}\text{Ln}۲$
۲) $\frac{\pi}{۸}\text{Ln}۲$
۳) $\frac{\pi}{۴}\text{Ln}۴$
۴) $\frac{۳\pi}{۸}\text{Ln}۴$

**۳۶ـ** به ازای چه مقادیری از $\alpha$، انتگرال $I = \int_{۱}^{\infty} x^{\alpha}(\frac{۱}{\sqrt{\text{Ln}x}} - \frac{۱}{\sqrt{x + ۱}})dx$ همگراست؟

۱) $-۱ < \alpha < ۱$
۲) $-۱ < \alpha < ۰$
۳) $\alpha \leq -۱$
۴) $\alpha < -۱$

**۳۷ـ** اگر $I_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۲n} x dx$، آن‌گاه $I_n$ کدام است؟

۱) $\frac{(۲n - ۱)(۲n - ۳)\cdots \times ۱}{۲^{n}(n!)}(\pi)$
۲) $\frac{(۲n - ۱)(۲n - ۳)\cdots \times ۱}{(۲n)!}(\frac{\pi}{۴})$
۳) $\frac{(۲n - ۱)(۲n - ۳)\times \cdots ۱}{۲^{n+۱}(n + ۱)!}(\pi)$
۴) $\frac{(۲n - ۱)(۲n - ۳)\times \cdots ۱}{۲^{n+۱}n!}(\pi)$

**۳۸ـ** اگر $g$ تابعی پیوسته باشد که $g : [۰,۱] \to (۰,۱)$ آن‌گاه معادله‌ی $۲x - \int_{۰}^{x} g(t)dt = ۱$، در فاصله‌ی $[۰,۱]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) نمی‌توان مشخص کرد.

**۳۹ـ** انتگرال $I = \int_{۰}^{\infty}(x^{p}\sin x^{q})dx$ با شرط $q > ۰$ و $q \neq ۰$ به ازای چه مقادیری از $p$ و $q$ همگرای مشروط است؟

۱) $۰ \leq \frac{p + ۱}{q} \leq ۱$
۲) $۰ < \frac{p + ۱}{q} < ۱$
۳) $-۱ \leq \frac{p + ۱}{q} < ۱$
۴) $۰ \leq \frac{p + ۱}{q} < ۱$

**۴۰ـ** اگر $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{Ln}(\sin ۲t)dt = -\frac{\pi}{۲}\text{Ln}۲$ ، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{+\infty} \text{Ln}(x + \frac{۱}{x})\frac{dx}{۱ + x^{۲}}$ کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه MIT)

۱) $\frac{\pi}{۲}\text{Ln}۲$
۲) $\pi\text{Ln}۲$
۳) $\frac{\pi^{۲}}{۲}\text{Ln}۲$
۴) $\pi^{۲}\text{Ln}۲$

**۴۱ـ** اگر $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx = \text{Ln}\frac{\beta}{\alpha}$، آن‌گاه حاصل $I = \int_{۰}^{\infty}(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x})^{۲}dx$، کدام است؟ $(a > ۰ , b > ۰)$

۱) $۲\text{Ln}(\frac{۲^{a+b}b^{b}a^{a}}{(a + b)^{a+b}})$
۲) $\text{Ln}(\frac{a}{b})^{۲}$
۳) $\text{Ln}(\frac{b}{a})^{۲}$
۴) $\text{Ln}(\frac{a^{a}b^{b}۲^{a+b}}{(a + b)^{a+b}})^{۲}$

## درسنامه: محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

در این درسنامه می‌خواهیم یکی از مهم‌ترین کاربردهای انتگرال معین را شرح دهیم. محاسبه‌ی حدودی که در آن‌ها حد در بی‌نهایت مورد سؤال قرار می‌گیرد و تعداد جملات آن به طور نامتناهی افزایش می‌یابد، با استفاده از تبدیل آن به کمک انتگرال معین بحث این درسنامه است. در واقع قصد ما این است که به جای محاسبه‌ی حد، حاصل یک انتگرال را حساب کنیم. همان‌طور که دیدید در پایان مقدمه به فرمول کلی زیر رسیدیم:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}f(a+(b-a)\frac{i}{n})=\int_{a}^{b}f(x)dx}$$

برای ساده‌سازی رابطه، می‌توانیم مثلاً $a=۰$ و $b=۱$ قرار دهیم و فرمول به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_{۰}^{۱}f(x)dx}$$

در واقع فارسی فرمول بالا این میشه که به جای محاسبه‌ی حد سمت چپ، برو انتگرال سمت راست رو حساب کن!

**مثال ۱:** حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\cos(\frac{i\pi}{۲n})$ ، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ $f(\frac{i}{n})=\cos(\frac{\pi}{۲}.\frac{i}{n})$ و بنابراین $f(x)=\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، پس به جای محاسبه‌ی حد، حاصل انتگرال $\int_{۰}^{۱}\cos(\frac{\pi}{۲}x)dx$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\int_{۰}^{۱}\cos(\frac{\pi}{۲}x)dx=[\frac{۲}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۲}x)]_{۰}^{۱}=\frac{۲}{\pi}[۱-۰]=\frac{۲}{\pi}$$

**مثال ۲:** مقدار $A=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۴}+\frac{n}{n^۲+۹}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای درک بهتر، هر جمله را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

ابتدا سعی می‌کنیم در تمام جملات $\frac{۱}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد کنیم و این کار با تقسیم صورت و مخرج کسرها بر $n^۲$ صورت می‌گیرد.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n}{n^۲+۱}&=\frac{\frac{۱}{n}}{۱+\frac{۱}{n^۲}}=\frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+(\frac{۱}{n})^۲}) &&\Rightarrow i=۱\\
\frac{n}{n^۲+۴}&=\frac{\frac{۱}{n}}{۱+\frac{۴}{n^۲}}=\frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+(\frac{۲}{n})^۲}) &&\Rightarrow i=۲\\
\frac{n}{n^۲+۹}&=\frac{\frac{۱}{n}}{۱+\frac{۹}{n^۲}}=\frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+(\frac{۳}{n})^۲}) &&\Rightarrow i=۳\\
&\vdots\\
\frac{n}{n^۲+n^۲}&=\frac{\frac{۱}{n}}{۱+\frac{n^۲}{n^۲}}=\frac{۱}{n}(\frac{۱}{۱+(\frac{n}{n})^۲}) &&\Rightarrow i=n
\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}$$

بنابراین با توجه به اینکه عبارت داخل پرانتز (در صورت سؤال) به فرم $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{\infty}f(\frac{i}{n})$ نوشته شده که $f(\frac{i}{n})=\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}$ است، لذا می‌توان با توجه به تعریف گفته شده، حد را محاسبه کرد:

$$A=\int_{۰}^{۱}f(x)dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+x^۲}dx=[\text{Arc}\,\text{tg}x]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۴}$$

**مثال۳:** مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۱+\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}+\cdots+\sqrt[۳]{n}}{\sqrt[۳]{n^{۴}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۰ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه فرجه رادیکال‌ها در صورت و مخرج کسر ۳ است، پس می‌توانیم تمام جملات صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم و با فرجه یکسان بنویسیم، پس از این مرحله باید $\frac{۱}{n}$ را پشت عبارت ایجاد کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{n^{۴}}}+\sqrt[۳]{\frac{۲}{n^{۴}}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{n}{n^{۴}}}\right)\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{n^{۳}}\times\frac{۱}{n}}+\sqrt[۳]{\frac{۱}{n^{۳}}\times\frac{۲}{n}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{۱}{n^{۳}}\times\frac{n}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{n}}+\sqrt[۳]{\frac{۲}{n}}+\sqrt[۳]{\frac{۳}{n}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{n}{n}}\right)$$

حالا باید تشخیص دهیم تابع $f(\frac{i}{n})$ چیست؟ با کمی دقت معلوم است که $f(\frac{i}{n})=\sqrt[۳]{\frac{i}{n}}$ است. بنابراین با جایگزینی $\frac{i}{n}=x$، می‌توان گفت: $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ می‌شود. حالا به راحتی انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$A=\int_{۰}^{۱}\sqrt[۳]{x}\,dx=\left[\frac{۳}{۴}x^{\frac{۴}{۳}}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۳}{۴}$$

**روش سه گام برای محاسبه‌ی حد مجموع:**

برای محاسبه‌ی حد مجموع سه گام زیر معمولاً انجام می‌گیرد که البته برای منظم شدن ذهن شما آن‌ها را بیان می‌کنیم:

**گام اول:** ایجاد $\frac{۱}{n}$ در پشت پرانتز حد مجموع (البته در برخی سؤالات $\frac{۱}{n}$ خودش وجود دارد.)

**گام دوم:** تشخیص ضابطه‌ی $f(\frac{i}{n})$ در پرانتز حد مجموع و جایگزینی $x=\frac{i}{n}$ و رسیدن به $f(x)$

**گام سوم:** محاسبه‌ی حاصل $\int_{۰}^{۱}f(x)\,dx$ و گزارش آن به عنوان جوابِ حد مجموع

**مثال۴:** مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{(n+۱)^{۲}}+\dfrac{n}{(n+۲)^{۲}}+\cdots+\dfrac{n}{(۲n)^{۲}}\right]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» طبق روش سه گام ابتدا باید $\frac{۱}{n}$ را پشت کروشه ایجاد کنیم و این کار را با تقسیم صورت و مخرج بر $n^{۲}$ انجام می‌دهیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+۱)^{۲}}+\frac{n}{(n+۲)^{۲}}+\cdots+\frac{n}{(۲n)^{۲}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n}{n^{۲}}}{\frac{(n+۱)^{۲}}{n^{۲}}}+\frac{\frac{n}{n^{۲}}}{\frac{(n+۲)^{۲}}{n^{۲}}}+\cdots+\frac{\frac{n}{n^{۲}}}{\frac{(n+n)^{۲}}{n^{۲}}}\right]$$

دقت کنید که جمله‌ی آخر در مخرج، یعنی $(۲n)^{۲}$، در واقع به‌صورت $(n+n)^{۲}$ بوده و این یعنی $i$، از ۱ تا $n$ تغییر کرده است.

حالا به راحتی $f(\frac{i}{n})$ و $f(x)$ مشخص است:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left[\frac{۱}{(۱+\frac{۱}{n})^{۲}}+\frac{۱}{(۱+\frac{۲}{n})^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{(۱+\frac{n}{n})^{۲}}\right]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{۱}{(۱+\frac{i}{n})^{۲}}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow A=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{(x+۱)^{۲}}dx=\left[-\frac{۱}{x+۱}\right]_{۰}^{۱}=-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}$$

**مثال۵:** حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+۱)^{۳}}+\dfrac{۲n}{(n+۲)^{۳}}+\dfrac{۳n}{(n+۳)^{۳}}+\cdots+\dfrac{۱}{۸n}\right)$، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۷}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ممکن است جمله‌ی آخر کمی محاسبات ما را نسبت به استفاده از فرمول حد مجموع به هم بزند، اما دقت کنید که حد را می‌توان به‌صورت مقابل بازنویسی کرد که در آن صورت و مخرج جمله آخر، در $n^{۲}$ ضرب شده است:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+۱)^{۳}}+\frac{۲n}{(n+۲)^{۳}}+\frac{۳n}{(n+۳)^{۳}}+\cdots+\frac{n.n}{۸n^{۳}}\right)$$

با قرار دادن $\frac{۱}{n}$ در پشت پرانتز (و ضرب $n$ در صورت تمام کسرها) داریم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{n^{۲}}{(n+۱)^{۳}}+\frac{۲n^{۲}}{(n+۲)^{۳}}+\frac{۳n^{۲}}{(n+۳)^{۳}}+\cdots+\frac{n(n^{۲})}{(۲n)^{۳}}\right)$$

برای یکسان شدن فرم همه‌ی جملات، در عبارت آخر، $۲n$ را به‌صورت $n+n$ می‌نویسیم، لذا داریم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{n^{۲}}{(n+۱)^{۳}}+\frac{۲n^{۲}}{(n+۲)^{۳}}+\frac{۳n^{۲}}{(n+۳)^{۳}}+\cdots+\frac{n(n^{۲})}{(n+n)^{۳}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\mathrm{Ln}(۱+x)\ \Rightarrow du=\dfrac{۱}{۱+x}dx \\ \\ dv=dx\ \Rightarrow v=x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow I=\int_{۰}^{۱}\mathrm{Ln}(۱+x)dx=\left[x\mathrm{Ln}(x+۱)\right]_{۰}^{۱}-\int_{۰}^{۱}\dfrac{x}{۱+x}dx=\mathrm{Ln}۲-\int_{۰}^{۱}\dfrac{x+۱-۱}{x+۱}dx \\ \Rightarrow I=\mathrm{Ln}۲-\int_{۰}^{۱}(۱-\dfrac{۱}{x+۱})dx=\mathrm{Ln}۲-(x-\mathrm{Ln}\,|\,x+۱\,|)\Big]_{۰}^{۱}=\mathrm{Ln}۲-(۱-\mathrm{Ln}۲)=\mathrm{Ln}۴-۱ \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=\mathrm{Ln}۴-۱\ \Rightarrow \mathrm{Ln}(\lim_{n\to\infty}A)=\mathrm{Ln}۴-\mathrm{Ln}e=\mathrm{Ln}\frac{۴}{e}\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}A=\frac{۴}{e}$$

**مثال ۸:** حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{۱}{(۲n+۳)^{۲}-۱^{۲}}+\frac{۱}{(۲n+۶)^{۲}-۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{(۲n+۳n)^{۲}-n^{۲}}\right)$ **کدام است؟** (از سؤالات پایان‌ترم دانشگاه صنعتی شریف)

۱) $\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$
۳) $\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یکی از راه‌ها برای ایجاد فاکتور $\frac{۱}{n}$ و رسیدن به فرم $\frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}f(\frac{i}{n})$ آن است که با توجه به درجه‌ی مخرج، صورت و مخرج کسرها را بر $n$ یا $n^{۲}$ یا ... تقسیم کنیم. اگر مخرج از درجه‌ی یک بود، صورت و مخرج را بر $n$ تقسیم می‌کنیم. اگر مخرج از درجه‌ی دو بود، صورت و مخرج را بر $n^{۲}$ تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب با توجه به درجه‌ی مخرج، صورت و مخرج را بر $n^{k}$ تقسیم می‌کنیم. در این مثال درجه‌ی مخرج دو است، بنابراین صورت و مخرج را بر $n^{۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{۱}{(۲n+۳)^{۲}-۱^{۲}}+\frac{۱}{(۲n+۶)^{۲}-۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{(۲n+۳n)^{۲}-n^{۲}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{۱}{n^{۲}}}{(۲+\frac{۳}{n})^{۲}-\frac{۱}{n^{۲}}}+\frac{\frac{۱}{n^{۲}}}{(۲+\frac{۶}{n})^{۲}-\frac{۲^{۲}}{n^{۲}}}+\cdots+\frac{\frac{۱}{n^{۲}}}{(۲+\frac{۳n}{n})^{۲}-\frac{n^{۲}}{n^{۲}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{(۲+\frac{۳}{n})^{۲}-(\frac{۱}{n})^{۲}}+\frac{۱}{(۲+\frac{۶}{n})^{۲}-(\frac{۲}{n})^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{(۲+\frac{۳n}{n})^{۲}-(\frac{n}{n})^{۲}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(۲+۳\frac{i}{n})^{۲}-(\frac{i}{n})^{۲}}$$

همان‌طور که می‌بینید $f(\frac{i}{n})=\frac{۱}{(۲+۳\frac{i}{n})^{۲}-(\frac{i}{n})^{۲}}$، پس $f(x)=\frac{۱}{(۲+۳x)^{۲}-x^{۲}}$. اکنون آماده‌ایم حد را به کمک انتگرال به‌دست آوریم؛ با دقت به مخرج $f(x)$ متوجه وجود اتحاد مزدوج می‌شویم:

$$L=\int_{۰}^{۱}f(x)dx=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(۲+۳x-x)(۲+۳x+x)}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(۲x+۲)(۴x+۲)}\xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}}$$

$$L=\int_{۰}^{۱}\left(\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲x+۲}+\frac{۱}{۴x+۲}\right)dx=\left[-\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}(۲x+۲)+\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}(۴x+۲)\right]_{۰}^{۱}\Rightarrow L=\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}(\frac{۴x+۲}{۲x+۲})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}(\frac{۳}{۲})$$

**مثال ۹ (سخت):** حاصل $\left[\frac{n}{(n+۱)\sqrt{(۲n+۱)}}+\frac{n}{(n+۲)\sqrt{۲(۲n+۲)}}+\cdots+\frac{n}{۲n\sqrt{n\times ۳n}}\right]\lim\limits_{n\to\infty}$ **، چند برابر $\pi$ است؟**

(از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه MIT)

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» قبل از آن که روش سه گام را آغاز کنیم، توضیح مختصری در مورد حد مجموع داده شده می‌آوریم. اگر به نحوه‌ی تغییرات در جمله‌ای اول، دوم و ... دقت کنیم، متوجه می‌شویم که صورت کسر همیشه $n$ است و در مخرج کسر، پرانتزی که پشت رادیکال ضرب شده است، در جمله‌ای اول $(n+۱)$ و در جمله‌ی دوم $(n+۲)$ می‌باشد که فرم کلی آن $(n+i)$ است. عبارت زیر رادیکال هم به‌صورت $\sqrt{i\times(۲n+i)}$ تغییر می‌کند. با این توضیحات می‌توان گفت که حد داده شده به‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{n}{(n+i)\sqrt{i\times(۲n+i)}}$ است. در آخرین جمله از حد مجموع چون $i=n$ می‌شود، ممکن است ظاهر جمله کمی گیج‌کننده باشد.

وقتی $i=n$ قرار می‌دهیم، متوجه می‌شویم که آخرین جمله $\frac{n}{(n+n)\sqrt{n\times(۲n+n)}}$ است که در صورت سؤال، همین جمله را به‌صورت $\frac{n}{۲n\sqrt{n\times ۳n}}$ نوشته‌اند.

حالا برمی‌گردیم به حل سؤال، در روش سه گام اولین قدم ما ایجاد $\frac{۱}{n}$ پشت حد مجموع است. در چنین مثالی فاکتور گرفتن از $n$ در مخرج مشکل است به جای این کار می‌توانیم $\frac{۱}{n}$ را پشت مجموع بنویسیم و در عوض صورت کسرها را در $n$ ضرب کنیم. پس داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{n^{۲}}{(n+i)\sqrt{i\times(۲n+i)}}$

قدم بعدی آن است که کسر بوجود آمده را به‌صورت $f(\frac{i}{n})$ بنویسیم. برای این کار صورت و مخرج را بر $n^{۲}$ تقسیم می‌کنیم: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\frac{۱}{n^{۲}}(n+i)\sqrt{i\times(۲n+i)}}$

در مخرج کسر، $\frac{۱}{n^۲}$ را در $(n+i)$ و $\sqrt{i\times(۲n+i)}$ ضرب می‌کنیم؛ به این صورت که $\frac{۱}{n}$ را در پرانتز و $\frac{۱}{n}$ را در رادیکال ضرب می‌کنیم. همه‌ی این کارها به این خاطر است که می‌خواهیم $\frac{i}{n}$ ایجاد شود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{مخرج کسر}=\frac{۱}{n^۲}(n+i)\sqrt{i\times(۲n+i)}=\frac{۱}{n}(n+i)\frac{۱}{n}\sqrt{i\times(۲n+i)}=(۱+\frac{i}{n})\sqrt{\frac{i}{n}\times(۲+\frac{i}{n})}$$

حتماً می‌دانید که برای ضرب کردن $\frac{۱}{n}$ در رایکال باید آن را به‌صورت $\sqrt{\frac{۱}{n^۲}}=\frac{۱}{n}$ در نظر بگیرید و رادیکال‌ها را در هم ضرب کنید. حالا به هدف خود رسیده‌ایم، یعنی همه‌ی عبارات برحسب $\frac{i}{n}$ هستند.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(۱+\frac{i}{n})\sqrt{\frac{i}{n}\times(۲+\frac{i}{n})}}$$

با نگاه کردن به کسر به‌وجود آمده و قرار دادن $x$ به جای $(\frac{i}{n})$ها، متوجه می‌شویم که $f(x)=\frac{۱}{(۱+x)\sqrt{x(۲+x)}}$ است. حالا باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\int_{۰}^{۱}f(x)dx=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x(۲+x)}}$$

ابتدا از تغییر متغیر $u=۱+x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین $x=u-۱$ و $dx=du$ است. حدود $x$ به‌صورت $۰\le x\le ۱$ می‌باشد، پس حدود $u$ به شکل $۱\le u\le ۲$ خواهد بود:

$$\text{حاصل حد}=\int_{۱}^{۲}\frac{du}{u\sqrt{(u-۱)(۱+u)}}=\int_{۱}^{۲}\frac{du}{u\sqrt{u^۲-۱}}$$

اگر فرمول انتگرال‌گیری $\int\frac{du}{u\sqrt{u^۲-a^۲}}=\frac{۱}{a}\sec^{-۱}|\frac{u}{a}|$ را به یاد داشته باشید، به این صورت انتگرال را حل می‌کنید:

$$\text{حاصل حد}=\int_{۱}^{۲}\frac{du}{u\sqrt{u^۲-۱}}=[\sec^{-۱}|u|]_{۱}^{۲}=\sec^{-۱}(۲)-\sec^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۳}-۰=\frac{\pi}{۳}$$

اما اگر این فرمول را به خاطر نداشته باشید، می‌توانید با تغییر متغیر $u=\sec\theta$ به‌صورت زیر به جواب برسید:

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^۲-۱}}=\int\frac{\sec\theta tg\theta}{\sec\theta\sqrt{\sec^۲\theta-۱}}d\theta=\int\frac{tg\theta}{\sqrt{tg^۲\theta}}d\theta=\int d\theta=\theta=\sec^{-۱}u$$

حالا با قرار دادن کران‌های $u$ خواهیم داشت:

$$\text{حاصل حد}=[\sec^{-۱}u]_{۱}^{۲}=\sec^{-۱}(۲)-\sec^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۳}-۰=\frac{\pi}{۳}$$

**مثال ۱۰:** **حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^۲}{\sqrt[۳]{i^۲+n^۲}}$ ، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\infty$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای ایجاد فرم $f(\frac{i}{n})$ ابتدا از عبارت زیر رادیکال، $n^۲$ را فاکتور می‌گیریم تا $\frac{i}{n}$ ایجاد شود، در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^۲}{\sqrt[۳]{n^۲(۱+(\frac{i}{n})^۲)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^۲}{n^{\frac{۲}{۳}}\sqrt[۳]{۱+(\frac{i}{n})^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n^{\frac{۱}{۳}}(\frac{i}{n})^۲}{\sqrt[۳]{۱+(\frac{i}{n})^۲}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{۱}{۳}}\times(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(\frac{i}{n})^۲}{\sqrt[۳]{۱+(\frac{i}{n})^۲}})$$

در عبارت آخر به‌دست آمده، مقدار داخل پرانتز طبق فرمول «حد مجموع» برابر با $\int_{۰}^{۱}\frac{x^۲}{\sqrt[۳]{۱+x^۲}}dx$ است. تابع زیر انتگرال در بازه‌ی $۰\le x\le ۱$ پیوسته است و مخرج هیچ‌گاه صفر نمی‌شود؛ پس این انتگرال ناسره نیست و مقدارش عددی حقیقی خواهد بود، اما حد $n^{\frac{۱}{۳}}$ وقتی $n\to\infty$ میل کند، برابر $\infty$ است، پس حد موردنظر هم برابر با بی‌نهایت می‌شود.

**نکته۱:** وقتی $n$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و تعداد قطعات زیاد می‌شود، مساحت هر کدام از مستطیل‌ها به تنهایی، به صفر میل خواهد کرد. بنابراین اگر یک یا دو مستطیل ابتدایی و انتهایی را در مجموع به حساب نیاوریم، مقدار حد تغییری نخواهد کرد. به همین دلیل، این که از $i=۰$ آغاز کنیم یا از $i=۱$، همچنین این که تا $i=n$ ادامه دهیم یا تا $i=n-۱$، تأثیری روی جواب ندارد. برای مثال تساوی را به شکل زیر هم می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}f(\frac{i}{n})=\int_{۰}^{۱}f(x)dx$$

**مثال ۱۴:** حاصل حد مقابل به‌صورت $ke^{-\frac{۷}{۹}}$ است، مقدار k کدام است؟ $\lim\limits_{n\to+\infty}[(۱+\frac{۱}{n})^{\frac{۱}{n}(۱+\frac{۱}{n})^۲}\times(۱+\frac{۲}{n})^{\frac{۱}{n}(۱+\frac{۲}{n})^۲}\times\cdots\cdots\times(۱+\frac{n-۱}{n})^{\frac{۱}{n}(۱+\frac{n-۱}{n})^۲}]$

۱) $\sqrt[۳]{۲^{۱۱}}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲^{۱۰}}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲^{۷}}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲^{۸}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» حاصل حد فوق را A می‌نامیم و از طرفین Ln می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\text{LnA}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}((۱+\frac{۱}{n})^۲\text{Ln}(۱+\frac{۱}{n})+(۱+\frac{۲}{n})^۲\text{Ln}(۱+\frac{۲}{n})+\cdots+(۱+\frac{n-۱}{n})^۲\text{Ln}(۱+\frac{n-۱}{n}))=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n-۱}(۱+\frac{i}{n})^۲\text{Ln}(۱+\frac{i}{n})$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$\text{LnA}=\int_۰^۱(۱+x)^۲\text{Ln}(۱+x)dx\xrightarrow{\text{تغییر متغیر } t=x+۱}\text{LnA}=\int_۱^۲t^۲\text{Lnt}\,dt$$

این انتگرال را به روش «جزء به جزء» حل می‌کنیم:

$$(u=\text{Lnt}\Rightarrow du=\frac{dt}{t})\ ,\ (dv=t^۲dt\Rightarrow v=\frac{t^۳}{۳})$$

$$\text{LnA}=\int_۱^۲t^۲\text{Lntdt}=\left[\frac{t^۳}{۳}\text{Lnt}\right]_۱^۲-\int_۱^۲\frac{t^۳}{۳}(\frac{dt}{t})=\frac{۸}{۳}\text{Ln}۲-\int_۱^۲(\frac{t^۲}{۳})dt=\frac{۸}{۳}\text{Ln}۲-\left[\frac{t^۳}{۹}\right]_۱^۲=\frac{۸}{۳}\text{Ln}۲-\frac{۷}{۹}$$

در نتیجه $\text{LnA}=\frac{۸}{۳}\text{Ln}۲-\frac{۷}{۹}$، و بنابراین $A=e^{\frac{۸}{۳}\text{Ln}۲-\frac{۷}{۹}}=۲^{\frac{۸}{۳}}e^{\frac{-۷}{۹}}$ که مقدار $k=۲^{\frac{۸}{۳}}$ را نتیجه می‌دهد.

**نکته۲:** گاهی اوقات در محاسبه‌ی حد مجموع، از هم‌ارزی نیز می‌توان به عنوان یک ابزار برای ساده‌سازی محاسبات استفاده کرد.

**مثال ۱۵:** حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=۱}^{n}(\sqrt[۳]{۱+\frac{k^۲}{n^۳}}-۱)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اولاً توجه کنید که در اینجا متغیر k، به جای متغیر i به کار رفته است. از آن‌جا که $۱\le k\le n$ است، لذا $۱\le k^۲\le n^۲$خواهد بود، بنابراین $\frac{۱}{n^۳}\le\frac{k^۲}{n^۳}\le\frac{n^۲}{n^۳}$ به عبارتی $\frac{۱}{n^۳}\le\frac{k^۲}{n^۳}\le\frac{۱}{n}$ در نتیجه وقتی $n\to\infty$ خواهیم داشت $\frac{k^۲}{n^۳}\to۰$ (دقت کنید که k حداکثر می‌تواند n باشد و بنابراین باز هم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲}{n^۳}=۰$ خواهد بود).

یادآوری می‌کنیم که وقتی u به صفر میل کند، هم ارزی $\sqrt[m]{۱+u}\simeq۱+\frac{u}{m}$ را داریم. بنابراین در این مثال خواهیم داشت:

$$\sqrt[۳]{۱+\frac{k^۲}{n^۳}}\simeq۱+\frac{k^۲}{۳n^۳}$$

به این ترتیب داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}(\sqrt[۳]{۱+\frac{k^۲}{n^۳}}-۱)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{k^۲}{۳n^۳}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۳}(\frac{k}{n})^۲$$

حالا که فرم $f(\frac{k}{n})$ ایجاد شد، به راحتی با جایگزینی $\frac{k}{n}=x$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۳}(\frac{k}{n})^۲=\frac{۱}{۳}\int_۰^۱x^۲dx=\frac{۱}{۳}[\frac{x^۳}{۳}]_۰^۱=\frac{۱}{۹}$$

**مثال ۱۶:** حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sin(\frac{n}{n^۲+۱^۲})+\sin(\frac{n}{n^۲+۲^۲})+\cdots+\sin(\frac{n}{n^۲+n^۲})]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» قبل از هر چیزی ابتدا توجه کنید که چون $n\to\infty$، پس $\frac{n}{n^۲+i^۲}\to۰$ و لذا $\sin(\frac{n}{n^۲+i^۲})\sim\frac{n}{n^۲+i^۲}$، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\frac{n}{n^۲+۱^۲})+\sin(\frac{n}{n^۲+۲^۲})+\cdots+\sin(\frac{n}{n^۲+n^۲})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{n^۲+۱^۲}+\frac{n}{n^۲+۲^۲}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲}]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+i^۲}]$$

$$\Rightarrow\text{حاصل حد}=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{۱}{n}}{۱+(\frac{i}{n})^۲}]=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\sum_{i=۱}^{n}f(\frac{i}{n})]=\int_۰^۱f(x)dx$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}]=\int_۰^۱\frac{۱}{۱+x^۲}dx=\left[\text{tg}^{-۱}x\right]_۰^۱=\frac{\pi}{۴}$$

**۳) روش تشخیص حدهایی که به انتگرال تبدیل می‌شوند:** برای آن که مطمئن شویم حد مجموعِ داده شده، یک حد ریمانی است و با انتگرال حل می‌شود، ابتدا $\frac{۱}{n}$ را فاکتور بگیرید. اگر فاکتور گرفتن از $\frac{۱}{n}$ مشکل است، با نوشتن $\frac{۱}{n}$ پشت مجموع و ضرب کردن n در صورت کسرها این کار را انجام دهید. به مثال مقابل توجه کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲^۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left[\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱^۲}}+\frac{n}{\sqrt{n^۲+۲^۲}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^۲+n^۲}}\right]$$

پس از فاکتورگیری از $\frac{۱}{n}$ به کسرهای به وجود آمده، دقت کنید؛ اگر این کسرها را برحسب $\frac{i}{n}$ بنویسید، باید صورت و مخرج از جملاتی کاملاً هم‌درجه تشکیل شده باشند یعنی یک کسر همگن ایجاد شده باشد. در مثال بالا کسرهایی به‌صورت $\frac{n}{\sqrt{n^۲+i^۲}}$ داریم. می‌بینید که صورت و مخرج هر دو از درجه‌ی یک هستند (با احتساب رادیکال در مخرج کسر). پس می‌توانیم این حد مجموع را به انتگرال تبدیل کنیم. به عنوان یک مثال دیگر، به حد مجموع $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\frac{۱^۲+۱}{n^۲}+\frac{۲^۲+۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n^۲+n}{n^۲}]$ دقت کنید؛ کسرهایی که در این حد مجموع ظاهر شده‌اند به‌صورت $\frac{i^۲+i}{n^۲}$ هستند. پس در صورت کسر یک جمله‌ی درجه یک داریم که همگن بودن کسر را خراب کرده است. اما از آنجا که برای هر مقدار از i حتی برای $i=n$ داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{i}{n^۲}=۰$ پس می‌توانیم این قسمت از جملات را حذف کنیم و اکنون $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\frac{۱^۲}{n^۲}+\frac{۲^۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n^۲}{n^۲}]$ باقی می‌ماند که از کسرهای همگن به شکل $\frac{i^۲}{n^۲}$ تشکیل شده است و در نتیجه به انتگرال تبدیل خواهد شد. اگر بعد از فاکتورگیری از $\frac{۱}{n}$ متوجه شدید که کسرهای به وجود آمده همگن نیستند و به کسر همگن هم تبدیل نمی‌شوند، دیگر نمی‌شود آن حد را به‌صورت انتگرال درآورد. در این موارد یا حد داده شده از فرمول $\lim_{n\to\infty}\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n$ ، حل می‌شود و یا باید آن را با استفاده از قضیه‌ی ساندویچ و یا روش‌های دیگر حل کنید. موضوع مهم دیگری که در حدهای ریمانی باید دیده شود، این است که وقتی $\frac{۱}{n}$ را کنار گذاشتیم، مجموع به وجود آمده باید فرم $f(\frac{۱}{n})+f(\frac{۲}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})$ را داشته باشد. منظور آن است که جملاتی به شکل $f(\frac{۱}{n})$ ، $f(\frac{۲}{n})$ ، ... $f(\frac{n}{n})$ جداگانه دیده شوند و با هم جمع شده باشند، نه آن که f فقط یک بار دیده شود و در داخل آن مجموع $f(\frac{۱}{n}+\frac{۲}{n}+\cdots+\frac{n}{n})$ را داشته باشیم. برای مثال به حد $B=\lim_{n\to\infty}[\frac{۱^۲}{n^۲}+\frac{۲^۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n^۲}{n^۲}]^{\frac{۱}{n}}$ دقت کنید. در این مثال ابتدا Ln می‌گیریم تا $\frac{۱}{n}$ از توان خارج شده و به ضریب تبدیل شود. در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}B=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}(\frac{۱^۲}{n^۲}+\frac{۲^۲}{n^۲}+\cdots+\frac{n^۲}{n^۲})$$

تابع Ln فقط یک بار ظاهر شده و در داخل این تابع مجموعی از جملات را داریم. این فرم را نمی‌توان به انتگرال تبدیل کرد. اما مثلاً به حد $A=\lim_{n\to\infty}[(۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})\cdots(۱+\frac{n}{n})]^{\frac{۱}{n}}$ توجه کنید؛ در این مثال هم Ln می‌گیریم تا $\frac{۱}{n}$ به ضریب تبدیل شود. خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\mathrm{Ln}(۱+\frac{۱}{n})+\mathrm{Ln}(۱+\frac{۲}{n})+\cdots+\mathrm{Ln}(۱+\frac{n}{n})]$ ، تابع $\mathrm{Ln}(۱+\frac{i}{n})$ چندبار دیده می‌شود و این جملات با هم جمع شده‌اند. این مثال را می‌توان به انتگرال تبدیل کرد.

**مثال ۲۲: کدام‌یک از حد مجموع‌های زیر، یک مجموع ریمانی است؟**

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\sqrt{e}+\sqrt[۳]{e^۲}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-۱}}}{n}\quad,\quad B=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۳i^۲+۳i+۱}{n^۳}\quad,\quad C=\lim_{n\to\infty}[(\frac{۱}{n})^۱+(\frac{۲}{n})^۲+\cdots+(\frac{n}{n})^n]^{\frac{۱}{n}}\quad,\quad D=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$$

☑ **پاسخ:** حد مجموع A به وضوح یک حد ریمانی نیست. وقتی $\frac{۱}{n}$ را کنار می‌گذاریم، جملات $۱+\sqrt{e}+\sqrt[۳]{e^۲}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-۱}}$ اصلاً کسرهای همگنی برحسب $\frac{i}{n}$ نیستند. بنابراین A به انتگرال تبدیل نمی‌شود. در مورد B با کنار گذاشتن $\frac{۱}{n}$ به مجموعی از کسرها به فرم $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۳i^۲+۳i+۱}{n^۲}$ می‌رسیم. درست است که این کسرها همگن نیستند اما $\frac{i}{n^۲}$ و $\frac{۱}{n^۲}$ هر دو به صفر میل می‌کنند، (حتی وقتی $i=n$ باشد). با حذف آن‌ها به مجموعی از کسرهای همگن به فرم $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۳i^۲}{n^۲}$ می‌رسیم که به انتگرال تبدیل می‌شود. در حد مجموع C، ابتدا Ln می‌گیریم تا $\frac{۱}{n}$ به ضریب تبدیل شود. اما با این کار به فرم $\frac{۱}{n}\mathrm{Ln}[(\frac{۱}{n})^۱+(\frac{۲}{n})^۲+\cdots+(\frac{n}{n})^n]$ می‌رسیم؛ یعنی Ln فقط یک بار دیده می‌شود و مجموع کسرها در داخل آن قرار دارد. این فرم هم به انتگرال تبدیل نمی‌شود و بالاخره حد مجموع D به وضوح یک حد ریمانی است. وقتی $\frac{۱}{n}$ را کنار می‌گذاریم به $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$ می‌رسیم که کسر همگن $\sqrt{\frac{i}{n}}$ در آن به کار رفته است و این حد خیلی ساده به انتگرال تبدیل می‌شود.

**نکته۴:** اگر $f(x)$ در فاصله‌ی $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر بوده و $f'(x)$ در این فاصله انتگرال‌پذیر باشد، در این صورت همواره داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_{۰}^{۱} f(x)dx] = \frac{۱}{۲}[f(۱)-f(۰)]$$

در واقع این فرمول، بیشتر در مورد حدودی که حالت مبهم $۰\times\infty$ را دارند، استفاده می‌شود.

**مثال ۲۳:** حاصل $\lim_{n\to\infty} n[\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^{۲}+i^{۲}}-\frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^{۲}+i^{۲}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^{۲}} = \int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۲}} = [Arctgx]_{۰}^{۱} = \frac{\pi}{۴}$$

پس $f(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ و چون $\int_{۰}^{۱} f(x)dx = \frac{\pi}{۴}$، بنابراین با توجه به نکته‌ی گفته شده داریم:

حاصل حد خواسته شده در صورت سؤال $= \frac{۱}{۲}[f(۱)-f(۰)] = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱+۱^{۲}}-\frac{۱}{۱+۰^{۲}}) = -\frac{۱}{۴}$

**مثال ۲۴:** حاصل $\lim_{n\to\infty} n[\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^{۲}+i^{۲}}}+۱-\sqrt{۲}]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$

۲) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌خواهیم از فرمول $\lim_{n\to\infty} n[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_{۰}^{۱} f(x)dx] = \frac{۱}{۲}[f(۱)-f(۰)]$ استفاده کنیم. اولین قدم برای نزدیک شدن به این فرمول آن است که $\frac{۱}{n}$ را پشت سری ایجاد کنیم. پس با فاکتورگیری از $\sqrt{n^{۲}}=n$ در مخرج کسر داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^{۲}+i^{۲}}} = \sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^{۲}(۱+\frac{i^{۲}}{n^{۲}})}} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{۱+(\frac{i}{n})^{۲}}}$$

بنابراین صورت سؤال به شکل مقابل در می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} n[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{۱+(\frac{i}{n})^{۲}}}-(\sqrt{۲}-۱)]$$

حد به وجود آمده را با فرمول بالا مقایسه کنید؛ متوجه می‌شویم که $f(\frac{i}{n}) = \frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{۱+(\frac{i}{n})^{۲}}}$ است پس داریم $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$. حالا باید مطمئن شویم که عدد $(\sqrt{۲}-۱)$ با $\int_{۰}^{۱} f(x)dx$ برابر است:

$$\int_{۰}^{۱} f(x)dx = \int_{۰}^{۱}\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}dx = [\sqrt{۱+x^{۲}}]_{۰}^{۱} = \sqrt{۲}-۱$$

حالا اطمینان داریم که حد موردنظر ما با فرمول بالا قابل حل است و جواب آن برابر است با:

حاصل حد $= \frac{۱}{۲}[f(۱)-f(۰)] = \frac{۱}{۲}[\frac{۱}{\sqrt{۲}}-۰] = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

**مثال ۲۵:** حاصل $\lim_{n\to\infty} n[(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n})-Ln۲]$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $-\frac{۱}{Ln۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که عبارت داخل پرانتز را می‌توان به شکل $\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n+i}$ نمایش داد، از طرفی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+\frac{i}{n}} = \int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+x}dx = [Ln(۱+x)]_{۰}^{۱} = Ln۲$$

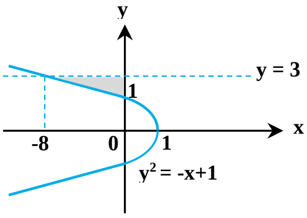
پس $f(x)=\frac{۱}{۱+x}$ و چون $\int_{۰}^{۱} f(x)dx = Ln۲$، لذا می‌توانیم از نکته‌ی گفته شده استفاده کنیم:

حاصل حد خواسته شده $= \frac{۱}{۲}[f(۱)-f(۰)] = \frac{۱}{۲}[\frac{۱}{۱+۱}-\frac{۱}{۱+۰}] = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۴}$

**مثال۲۹: مساحت محدود بین منحنی $y^۲ = -x+۱$ و خط $y = ۳$ و محور oy چقدر است؟**

۱) $\frac{۱۷}{۳}$
۲) $\frac{۱۹}{۳}$
۳) $\frac{۲۲}{۳}$
۴) $\frac{۲۰}{۳}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»



**روش اول:** در این مسأله، اگر بخواهیم از فرمول $S = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$ استفاده کنیم باید دو مقدار عددی $x = a$ و $x = b$ و همچنین دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را داشته باشیم. اما با دقت به معادلات داده شده سه ضابطه برای $y$ داریم:

$$\begin{cases} y^۲ = -x+۱ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۱-x} \\ y = ۳ \end{cases}$$

باید ببینیم از سه ضابطه‌ی به‌دست آمده برای $y$، کدام‌ها $f(x)$ و $g(x)$ را می‌دهند. در صورت سؤال گفته شده که $y = ۳$ یکی از مرزهای ناحیه است، از آن‌جا که $y = ۳$ در ناحیه‌ی $y > ۰$ قرار دارد، متوجه می‌شویم که این ناحیه بین منحنی‌های $y = \sqrt{۱-x}$ و $y = ۳$ قرار دارد. (اگر دانشجو شکل را رسم کند، به وضوح این نتایج را می‌بیند.) در مورد حدود $x$ باید گفت که محور $y$ ها یعنی خط $x = ۰$ یکی از مرزهای داده شده است و اگر $y = ۳$ و $y = \sqrt{۱-x}$ را برخورد دهیم، متوجه می‌شویم $x = -۸$ کران دیگری برای $x$ است:

$$S = \left|\int_{-۸}^{۰} (۳ - \sqrt{۱-x})dx\right| = \left|[۳x + \frac{۲}{۳}(۱-x)^{\frac{۳}{۲}}]_{-۸}^{۰}\right| = \frac{۲۰}{۳}$$

در واقع سطح هاشورخورده بین دو تابع $y_۱ = ۳ , y_۲ = \sqrt{۱-x}$ از نقطه‌ی $x = -۸$ تا $x = ۰$ می‌باشد. در این روش محاسبه کمی طولانی می‌شود اما جهت کوتاه‌تر کردن حل می‌توانیم به روش دیگری نیز عمل کنیم.

**روش دوم:** می‌توانیم از رابطه‌ی $S = \left|\int_c^d (x_۱ - x_۲)dy\right|$ استفاده کنیم. در این صورت دو مقدار عددی برای $y$ می‌خواهیم که کران‌های انتگرال باشند و دو تابع $x_۱ = f(y)$ و $x_۲ = g(y)$ لازم داریم که تفاضل آن‌ها در انتگرال قرار بگیرد. به وضوح از صورت سؤال داریم:

محور oy $\Rightarrow x = ۰$

$$y^۲ = -x+۱ \Rightarrow x = ۱-y^۲$$

دو مقدار عددی هم برای $y$ می‌خواهیم که یکی از آن‌ها $y = ۳$ است و در صورت سؤال داده شده است، مقدار بعدی را با برخورد دادن $x = ۰$ و $x = ۱-y^۲$ به‌دست می‌آوریم، در این صورت $۱-y^۲ = ۰$ و $y = \pm۱$ به‌دست می‌آید. پس به ترتیب سه مقدار $y = -۱ , y = ۱$ و $y = ۳$ را داریم. شکل موردنظر ما یا در ناحیه‌ی $-۱ \le y \le ۱$ قرار دارد، یا در ناحیه‌ی $۱ \le y \le ۳$. از طرفی کران $y = ۳$ در صورت سؤال داده شده است، بنابراین این شکل در محدوده‌ی $۱ \le y \le ۳$ قرار دارد. (باز هم تأکید می‌کنم با رسم شکل دانشجو این موضوع را واضح‌تر می‌بیند، فرض می‌کنم دانشجو در ترسیم شکل مشکل دارد و این توضیحات را می‌نویسم!)

پس سطح هاشورخورده بین دو تابع $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = ۱-y^۲$ از نقطه‌ی $y = ۱$ تا $y = ۳$ است.

$$S = \left|\int_۱^۳ (۱-y^۲)\,dy\right| = \left|(y - \frac{y^۳}{۳})]_۱^۳\right| = \frac{۲۰}{۳}$$

**مثال۳۰: مساحت سطح محصور بین سهمی $y^۲ = ۶x$ و خط قائم بر آن که محور x ها را با زاویه $۱۳۵^\circ$ قطع می‌کند، کدام است؟**

۱) ۳۲
۲) ۴۸
۳) ۱۶
۴) ۳۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این‌که خط قائم، محور x ها را با زاویه $۱۳۵^\circ$ قطع می‌کند، پس شیب آن برابر با $tg(۱۳۵^\circ) = -۱$ است و بنابراین شیب خط مماس برابر ۱ خواهد بود.

$$y^۲ = ۶x \Rightarrow y = \pm\sqrt{۶x} \Rightarrow y' = \pm\frac{۶}{۲\sqrt{۶x}} \xrightarrow{\text{شیب}=۱} \frac{۶}{۲\sqrt{۶x}} = ۱$$

شیب خط مماس مثبت است $(y' = ۱)$. بنابراین علامت مثبت قابل قبول است و داریم $y' = \frac{۶}{۲\sqrt{۶x}} = ۱$. از حل معادله فوق، $x = \frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید و از آنجا $y = ۳$ حاصل می‌شود. شیب خط مماس در نقطه $(\frac{۳}{۲}, ۳)$ برابر ۱ و شیب خط قائم برابر ۱- است پس معادله خط قائم به‌صورت زیر است:

$$y - ۳ = -۱(x - \frac{۳}{۲}) \Rightarrow y = -x + \frac{۹}{۲}$$

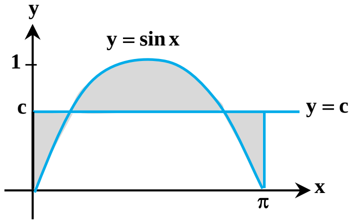
نقاط تلاقی خط $y = -x + \frac{۹}{۲}$ را با سهمی $y^۲ = ۶x$ به‌دست می‌آوریم:

$$(-x + \frac{۹}{۲})^۲ = ۶x \Rightarrow x^۲ - ۹x + \frac{۸۱}{۴} = ۶x \Rightarrow x^۲ - ۱۵x + \frac{۸۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ x = \frac{۲۷}{۲} \end{cases}$$

بنابراین نقاط تلاقی دو منحنی، $(\frac{۳}{۲}, ۳)$ و $(\frac{۲۷}{۲}, -۹)$ می‌باشند. برای یافتن مساحت موردنظر، انتگرال را نسبت به محور y ها محاسبه می‌کنیم، یعنی x را برحسب y به‌دست آورده و در فاصله $-۹ \le y \le ۳$ انتگرال می‌گیریم.

$$S = \int_{-۹}^{۳} [(\frac{۹}{۲} - y) - \frac{y^۲}{۶}]dy = (\frac{۹}{۲}y - \frac{y^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۱۸})\Big|_{-۹}^{۳} = (\frac{۲۷}{۲} - \frac{۹}{۲} - \frac{۲۷}{۱۸}) - (\frac{-۸۱}{۲} - \frac{۸۱}{۲} + \frac{۸۱}{۲}) = (\frac{۱۵}{۲}) + \frac{۸۱}{۲} = \frac{۹۶}{۲} = ۴۸$$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» طبق فرمول، حجم حاصل از دوران منحنی $y = \sin x$ حول خط $y = c$ در فاصله‌ی $۰ \le x \le \pi$ برابر است با: $V = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin x - c)^{۲}\,dx$



پس از حل انتگرال و قرار دادن کران‌های بالا و پایین به جای x، خواهیم دید که V عبارتی وابسته به c است. بنابراین با تابع یک متغیره‌ی $V(c)$ در بازه‌ی $۰ \le c \le ۱$ سروکار داریم. برای مشخص شدنِ کمترین مقدار V، معادله‌ی $\frac{dV}{dc} = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{dV}{dc} = \pi\int_{۰}^{\pi} -۲(\sin x - c)dx = ۲\pi\int_{۰}^{\pi}(c - \sin x)\,dx = ۲\pi[cx + \cos x]_{۰}^{\pi} = ۲\pi[\pi c - ۲] = ۰ \Rightarrow c = \frac{۲}{\pi}$$

بنابراین $c = \frac{۲}{\pi}$ نقطه‌ی بحرانی برای $V(c)$ است. اما باید مقدار V را به ازای $c = \frac{۲}{\pi}$، $c = ۰$ و $c = ۱$ (دو سرِ بازه‌ی $۰ \le c \le ۱$) به‌دست آوریم تا معلوم شود که آیا واقعاً به ازای $c = \frac{۲}{\pi}$ کمترین مقدار V به‌دست می‌آید یا بیشترین مقدار آن حاصل می‌شود و از آن مهم‌تر شاید به ازای $c = ۰$ و $c = ۱$ مقدار مینیمم حاصل شود!؟

$$c = ۰ \Rightarrow V = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin x - ۰)^{۲}\,dx = \pi(\frac{\pi}{۲})$$

$$c = ۱ \Rightarrow V = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin x - ۱)^{۲}dx = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin^{۲} x - ۲\sin x + ۱)\,dx = \pi(\frac{\pi}{۲} - ۴ + \pi) = \pi(\frac{۳\pi}{۲} - ۴)$$

$$c = \frac{۲}{\pi} \Rightarrow V = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin x - \frac{۲}{\pi})^{۲}dx = \pi\int_{۰}^{\pi}(\sin^{۲}x - \frac{۴}{\pi}\sin x + \frac{۴}{\pi^{۲}})\,dx = \pi(\frac{\pi}{۲} - \frac{۸}{\pi} + \frac{۴}{\pi}) = \pi(\frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi})$$

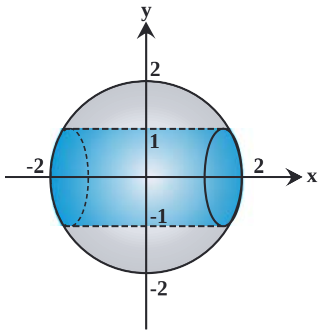
با کمی دقت متوجه می‌شویم که به ازای $c = \frac{۲}{\pi}$ کمترین مقدار V به‌دست می‌آید و به ازای $c = ۰$ بیشترین مقدارش حاصل می‌شود.

**تذکر مهم:** شاید برخی از دانشجویان به این موضوع دقت کرده باشند که خط افقی $y = c$ اگر $۰ < c < ۱$ باشد، منحنی $y = \sin x$ را قطع می‌کند و در نتیجه ناحیه‌ی مورد نظر ما در دو سوی محور دوران قرار می‌گیرد. البته این موضوع اشکالی ایجاد نمی‌کند؛ زیرا هر کدام از این قسمت‌ها در محدوده‌ی جداگانه‌ای دوران می‌کنند و حجم‌های ایجاد شده توسط آن‌ها با هم اشتراکی ندارند. بنابراین لازم نیست فقط قسمت بالایی یا فقط قسمت پایینی را دوران دهیم.

**مثال ۱۲ (سخت): حدوداً چند درصد از حجم یک کره به شعاع ۲، با ایجاد سوراخی به شعاع ۱ در امتداد مرکز، برداشته می‌شود؟**

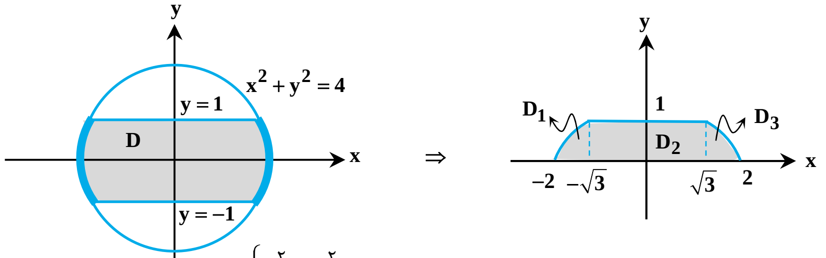
۱) ۲۸ ۲) ۵۰ ۳) ۴۲ ۴) ۳۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا دایره‌ای به شعاع ۲ و خطوط $y = \pm ۱$ را در نظر بگیرید. اگر این دایره حول محور x ها دوران کند، کره‌ای به شعاع $R = ۲$ به‌دست می‌آید که حجم آن برابر است با:



$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۳۲}{۳}\pi$$

در این دوران، ناحیه‌ای از این دایره که بین خطوط $y = \pm ۱$ قرار دارد، سوراخی به شعاع یک در این کره ایجاد می‌کند. حجم این شکل را نیز حساب خواهیم کرد. بنابراین تمرکز خود را بر ناحیه‌ی D که بین خطوط $y = \pm ۱$ و دایره‌ی $x^{۲} + y^{۲} = ۴$ قرار دارد، می‌گذاریم. محور دوران (محور x)، این ناحیه را به دو بخش متقارن تقسیم کرده است. کافیست ناحیه‌ی بالایی را دوران دهیم و نیازی به دو برابر کردن جواب هم نداریم.



ابتدا محل برخورد دایره و خط $y = ۱$ را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۴ \\ y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x^{۲} = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

ناحیه‌ی $D_{۱}$ بین محور x ها و نیم‌دایره‌ی $y = \sqrt{۴ - x^{۲}}$ قرار دارد. حجم حاصل از دوران آن حول محور x ها برابر است با:

$$V_{۱} = \pi\int_{-۲}^{-\sqrt{۳}} y^{۲}dx = \pi\int_{-۲}^{-\sqrt{۳}}(۴ - x^{۲})\,dx = \pi(۴x - \frac{x^{۳}}{۳})\Bigg|_{-۲}^{-\sqrt{۳}} = \pi(-۴\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۸ - \frac{۸}{۳}) = \pi(\frac{۱۶}{۳} - ۳\sqrt{۳})$$

حجم حاصل از دورانِ ناحیه‌ی $D_{۳}$ حول محور x ها نیز برابر با حجم حاصل از دورانِ $D_{۱}$ است: $V_{۳} = V_{۱} = \pi(\frac{۱۶}{۳} - ۳\sqrt{۳})$

از دوران ناحیه‌ی $D_{۲}$ حول محور x ها، استوانه‌ای به شعاع $R = ۱$ و ارتفاع $H = ۲\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید که حجم آن برابر است با $V_{۲} = \pi R^{۲}H = ۲\pi\sqrt{۳}$. البته با استفاده از انتگرال‌گیری نیز می‌توان $V_{۲}$ را محاسبه کرد: $V_{۲} = \pi\int_{-\sqrt{۳}}^{\sqrt{۳}} y^{۲}\,dx = \pi\int_{-\sqrt{۳}}^{\sqrt{۳}} dx = ۲\pi\sqrt{۳}$

اکنون با جمع کردن حجم‌های به‌دست آمده، حجم سوراخ ایجاد شده در کره را تعیین می‌کنیم: $V = V_۱ + V_۲ + V_۳ = ۲\pi(\frac{۱۶}{۳} - ۳\sqrt{۳}) + ۲\pi\sqrt{۳} = ۲\pi(\frac{۱۶}{۳} - ۲\sqrt{۳})$

حالا می‌توانیم نسبت حجم این سوراخ به حجم کل کره را به‌صورت درصد حساب کنیم:

$$\text{جواب} = \frac{V}{\text{حجم کره}} \times ۱۰۰ = \frac{۲\pi(\frac{۱۶}{۳} - ۲\sqrt{۳})}{\frac{۳۲}{۳}\pi} \times ۱۰۰$$

اگر $\sqrt{۳}$ را تقریباً ۱/۷ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{جواب} \simeq \frac{۲\pi(۱۶ - ۶\sqrt{۳})}{۳۲\pi} = \frac{۱۲}{۳۲} \simeq ۳۵\%$$

بنابراین با ایجاد این حفره، ۳۵ درصد از حجم کره حذف می‌شود.

**نکته۲:** هرگاه ناحیه محدود بین دو نمودار $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ $(a < b)$ **حول خط $y = k$** دوران کند، حجم حاصل از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b [(y_۲ - k)^۲ - (y_۱ - k)^۲]dx}$$

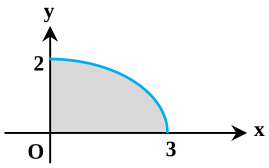
در این رابطه باید $y_۲$ منحنی دورتر و $y_۱$ منحنی نزدیک‌تر به محور دوران باشد. به عبارتی $|y_۲ - k| > |y_۱ - k|$ باشد. البته اگر تشخیص این موضوع مشکل باشد، می‌توانید $y_۱$ و $y_۲$ را با هر ترتیبی که می‌خواهید انتخاب کنید و در پایان اگر جواب منفی شد، قدر مطلق آن را به عنوان جواب مسأله در نظر بگیرید.

**توجه:** دقت کنید که فرمول قبلی، حالت خاصی از همین فرمول است. اگر محور x ها، یعنی خط $y = ۰$ محور دوران باشد، $k = ۰$ است و این فرمول، به همان فرمول قبلی تبدیل می‌شود.

**تذکر۲:** هرگاه در سؤالات، ضابطه‌ی منحنی به‌صورت $x = g(y)$ داده شود، آن‌گاه حجم حاصل از دوران ناحیه محدود بین منحنی $x = g(y)$، خطوط $y = a$، $y = b$ و محور y ها (یا همان خط $x = ۰$) **حول محور y ها** از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b g^۲(y)\,dy}$$

**مثال۱۳: در شکل زیر یک ربع بیضی به مرکز مبدأ مختصات مشخص شده است، حجم حاصل از دوران سطح محدود به نمودار بیضی و محورهای مختصات حول محور oy کدام است؟**



۱) $۱۴\pi$
۲) $۱۲\pi$
۳) $۱۰\pi$
۴) $۸\pi$

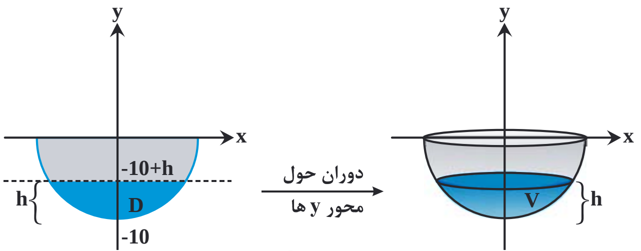
☑ **پاسخ :** گزینه «۲» معادلهٔ بیضی فوق $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ می‌باشد، لذا داریم:

$$V_y = \pi\int_۰^۲ x^۲\,dy = \pi\int_۰^۲ ۹(۱ - \frac{y^۲}{۴})\,dy = ۱۲\pi$$

**مثال۱۴: آب به داخل یک مخزن نیمه کروی به شعاع ۱۰ سانتی‌متر (که قسمت سطح آن به طرف بالا است) جریان دارد. فرض کنید در هر لحظه، h عمق آب از کف مخزن، r شعاع سطح آب و V حجم آب موجود در مخزن باشد. $\frac{dV}{dh}$، در لحظه‌ای که h مساوی ۵ سانتی‌متر باشد، چقدر است؟**

۱) $۱۰۰\pi$
۲) $۲۵\pi$
۳) $۱۲۵\pi$
۴) $۷۵\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» این نوع سؤالات، به طور مستقیم حجم را نمی‌خواهد؛ اما برای رسیدن به جواب باید حجم را حساب کنیم. برای حل این مسأله ابتدا باید ضابطه‌ی V را برحسب h به‌دست آوریم. در شکل سمت چپ نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را مشاهده می‌کنید که با دوران آن حول محور y ها، مخزن موردنظر به وجود می‌آید. همچنین از دوران ناحیه‌ی D حول محور y ها، حجم آبی به‌دست می‌آید که در کف مخزن جمع شده است.



بنابراین با استفاده از فرمول‌های حجم حاصل از دوران، مقدار V را محاسبه می‌کنیم. در ناحیه‌ی D کران‌های y واضح هستند: $-۱۰ \le y \le -۱۰ + h$ بنابراین بهتر است از فرمول $V = \pi\int_a^b g^۲(y)\,dy$ استفاده کنیم. معادله‌ی نیم‌دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر به‌صورت $x^۲ + y^۲ = ۱۰۰$ (البته با شرط $y \le ۰$) است و از آنجا می‌توانیم $x = g(y) = \sqrt{۱۰۰ - y^۲}$ را به‌دست آوریم، پس حجم آب درون مخزن برابر است با: $V = \pi\int_{-۱۰}^{-۱۰+h} (\sqrt{۱۰۰ - y^۲})^۲\,dy = \pi\int_{-۱۰}^{-۱۰+h} (۱۰۰ - y^۲)\,dy$

حل این انتگرال و به‌دست آوردن ضابطه‌ی $V(h)$ به سادگی امکان‌پذیر است. اما از آنجایی که ما نیازی به فرمول $V(h)$ نداریم، بلکه به ضابطه‌ی $\frac{dV}{dh}$ احتیاج داریم، بدون حل انتگرال هم می‌توانیم مشتق V نسبت به h را محاسبه کنیم. از فرمول مشتق از انتگرال استفاده می‌کنیم:

**نکته۳:** در روش پوسته استوانه‌ای، اگر ناحیه **حول خط $x = k$** دوران کند، آن‌گاه روابط به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

برای محاسبه‌ی حجمی که از دوران سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ پدید می‌آید، فرمول زیر را داریم:

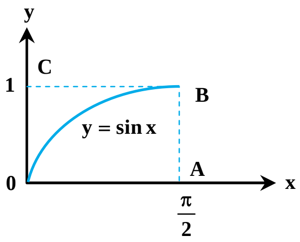
$$V = ۲\pi\int_a^b |x-k|\,f(x)dx$$

و برای حجم حاصل از دوران سطح محصور بین دو منحنی $y_۱$ و $y_۲$ $(y_۲ > y_۱)$ فرمول زیر را داریم:

$$V = \int_a^b ۲\pi|x-k|[y_۲ - y_۱]dx$$

اگر محور دوران، محور y ها یعنی خط $x = ۰$ باشد، در همین رابطه $k = ۰$ قرار می‌دهیم و فرمول $V = \int_a^b ۲\pi x[y_۲ - y_۱]dx$ که از قبل به آن رسیدیم، به‌دست می‌آید.

**مثال۲۳: در شکل مقابل حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی OBC حول محور x ها را $V_۱$ و حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی OAB حول خط $x = \frac{\pi}{۲}$ را $V_۲$ می‌نامیم. مقدار $۴V_۱ - V_۲$، برابر کدام گزینه است؟**



۱) $-\pi$

۲) $۲\pi$

۳) $\pi$

۴) $-۲\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا قرار است ناحیه OBC را حول محور x ها دوران داده و حجم حاصل از آن را به‌دست آوریم. ناحیه موردنظر ما محدود بین دو نمودار $y = ۱$ و $y = \sin x$ است (که $y = ۱$ سقف و $y = \sin x$ کف ناحیه است) و حجم آن با استفاده از روش دیسک از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V_۱ = \pi\int_a^b (R_۲^۲ - R_۱^۲)\,dx = \pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (۱-\sin^۲ x)\,dx = \pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ x\,dx = \pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\frac{۱+\cos ۲x}{۲})dx = \pi[\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴}\sin ۲x]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi^۲}{۴}$$

اما برای محاسبه‌ی $V_۲$ باید دوران حول خط $x = \frac{\pi}{۲}$ را با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای، حساب کنیم:

$$V_۲ = ۲\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} |x - \frac{\pi}{۲}||\sin x - ۰|\,dx = -۲\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (x - \frac{\pi}{۲})\sin xdx = -۲\pi[\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} x\sin xdx - \frac{\pi}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin xdx]$$

در بازه‌ی $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ علامت $\sin x$ مثبت است، پس نیازی به قدرمطلق ندارد. اما «$x - \frac{\pi}{۲}$» مقدارش منفی است. بنابراین وقتی از قدرمطلق بیرون می‌آید قرینه می‌شود. علامت منفی پشت انتگرال نیز به همین دلیل است.

$$\Rightarrow V_۲ = -۲\pi[-x\cos x + \sin x + \frac{\pi}{۲}\cos x]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = -۲\pi[۱ - \frac{\pi}{۲}] = -۲\pi + \pi^۲$$

برای محاسبه $\int x\sin xdx$ از روش جزء به جزء و قاعده‌ی جدول به‌صورت زیر استفاده کردیم:

| انتگرال | مشتق | |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $x$ | ⊕ |
| $-\cos x$ | $۱$ | ⊖ |
| $-\sin x$ | $۰$ | ⊕ |

در نتیجه: $۴V_۱ - V_۲ = \pi^۲ + ۲\pi - \pi^۲ = +۲\pi$.

**نکته۴:** هرگاه خم به‌صورت پارامتری یعنی $x = x(t)$ و $y = y(t)$ برای $t_۱ \le t \le t_۲$ داده شده باشد، آن‌گاه حجم حادث از دوران سطحی که بین این خم و محور x ها قرار دارد، از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{V = \pi\int_{t_۱}^{t_۲} y^۲(t)x'(t)dt}$$

**مثال۲۴: حجم حاصل از دوران یک قوس از سیکلوئید $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(۱ - \cos t) \end{cases}$، حول محور x ها، کدام است؟**

۱) $۱۰\pi a^۳$

۲) $۲۵\pi^۲ a^۳$

۳) $۲/۵\pi a^۳$

۴) $۵\pi^۲ a^۳$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون تابع به‌صورت پارامتری داده شده است، حجم با فرمول مقابل حساب می‌شود: $V = \pi\int y^۲ x'(t)dt$

$$V = \pi\int y^۲ x'dt = \pi\int_۰^{۲\pi} a^۲(۱-\cos t)^۲ \times a(۱-\cos t)dt = \pi a^۳\int_۰^{۲\pi} (۱-\cos t)^۳ dt = \pi a^۳\int_۰^{۲\pi} (۱ - ۳\cos t + ۳\cos^۲ t - \cos^۳ t)dt$$

$$= \pi a^۳\int_۰^{۲\pi} (۱ - ۳\cos t + ۳(\frac{۱+\cos ۲t}{۲}) - (\frac{\cos ۳t + ۳\cos t}{۴}))dt = \pi a^۳\int_۰^{۲\pi} (\frac{۵}{۲} - ۳\cos t + \frac{۳}{۲}\cos ۲t - \frac{۱}{۴}\cos ۳t + \frac{۳}{۴}\cos t)dt$$

$$\Rightarrow V = \pi a^۳ \times \frac{۵}{۲} \times ۲\pi = ۵\pi^۲ a^۳$$

می‌دانیم که دوره‌ی تناوب $\sin kt$ برابر است با $\frac{۲\pi}{k}$. بنابراین دوره‌ی تناوب $\sin ۲t$ برابر است با $\frac{۲\pi}{۲} = \pi$. از طرفی وقتی از توابع $\sin kt$ و $\cos kt$ قدرمطلق گرفته شود، دوره‌ی تناوب آن‌ها نصف می‌شود. پس دوره‌ی تناوب $|\sin ۲t|$ برابر است با $\frac{\pi}{۲}$. به همین دلیل، انتگرال این تابع در بازه‌های $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ و $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ و $[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ و $[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$ با هم برابر است، بنابراین می‌توانیم انتگرال روی بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ را گرفته و چهار برابر کنیم. در این بازه $\sin ۲t \geq ۰$ است و نیازی به قدرمطلق نداریم.

$$L = \int_۰^{۲\pi} \frac{۳a}{۲} |\sin ۲t| dt \Rightarrow L = ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۳a}{۲} \sin ۲t \, dt = -۳a[\cos ۲t]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = ۶a$$

**مثال ۱۳: طول قوس منحنی پارامتری $x = \int_۱^t \frac{\cos z}{z} dz$ و $y = \int_۱^t \frac{\sin z}{z} dz$، از مبدأ مختصات تا نزدیک‌ترین نقطه‌ای که خط مماس بر منحنی در آن نقطه، خطی قائم می‌شود، کدام است؟**

۱) $Ln\frac{\pi}{۲}$  ۲) $Ln۲$  ۳) $Ln\pi^۲$  ۴) $Ln۴$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که در آن خط مماس بر منحنی، خطی قائم است. شیب خط مماس در هر نقطه برابر با مقدار مشتق در آن نقطه است. بنابراین برای آن که خط مماس بر منحنی، خطی قائم باشد باید شیب آن $\infty$ شود، پس به دنبال نقطه‌ای هستیم که در آن $\frac{dy}{dx} = \infty$ شود.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\cos t}{t}} = tgt = \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{۲}$$

البته در همه‌ی مضرب‌های فرد $\frac{\pi}{۲}$ مانند، $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، ... نیز این اتفاق می‌افتد اما $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک‌ترین نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد. بنابراین در $t = \frac{\pi}{۲}$ خط مماس بر منحنی، خطی قائم است. اکنون باید ببینیم در مبدأ مختصات مقدار $t$ چند است؟ مبدأ مختصات یعنی جایی که $(x,y) = (۰,۰)$ است. از معادلات پارامتری $x = \int_۱^t \frac{\cos z}{z} dz$ و $y = \int_۱^t \frac{\sin z}{z} dz$ پیداست که وقتی $t = ۱$ باشد، $x$ و $y$ هر دو با هم صفر می‌شوند. پس مبدأ مختصات به ازای $t = ۱$ به‌دست می‌آید.

اکنون نتایج بدست آمده را جمع‌بندی می‌کنیم. به ازای $t = ۱$ مبدأ مختصات و به ازای $t = \frac{\pi}{۲}$ اولین نقطه‌ای که در آن شیب خط مماس، $\infty$ است، به‌دست می‌آید. طبق صورت سؤال، طول قوس منحنی را در بازه‌ی $۱ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ می‌خواهیم.

$$L = \int_۱^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{x'^۲_t + y'^۲_t} dt = \int_۱^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\frac{\cos^۲ t}{t^۲} + \frac{\sin^۲ t}{t^۲}} dt = \int_۱^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{t} dt = [Lnt]_۱^{\frac{\pi}{۲}} = Ln(\frac{\pi}{۲})$$

**مثال ۱۴ (سخت): طول خم $x + y = ۲e^{\frac{x-y}{۲}}$، از $x = ۱$ تا $x = e + ۱$ برابر با کدام گزینه است؟** (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه‌های روسیه)

۱) $\sqrt{۲}[\sqrt{۱+e^۲} - Ln(\sqrt{۱+e^۲}+۱) + Ln(\sqrt{۲}+۱) + ۱ + \sqrt{۲}]$

۲) $\sqrt{۲}[\sqrt{۱+e^۲} - Ln(\sqrt{۱+e^۲}+۱) + Ln(\sqrt{۲}-۱) + ۱ - \sqrt{۲}]$

۳) $۲[\sqrt{۱+e^۲} - Ln(\sqrt{۱+e^۲}+۱) + Ln(\sqrt{۲}+۱) + ۱ - \sqrt{۲}]$

۴) $\sqrt{۲}[\sqrt{۱+e^۲} - Ln(\sqrt{۱+e^۲}+۱) + Ln(\sqrt{۲}+۱) + ۱ - \sqrt{۲}]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» توجه کنید که پیدا کردن $y$ برحسب $x$، یا $x$ برحسب $y$ به طور صریح کار نسبتاً مشکلی است و به نظر می‌رسد بهتر باشد از روش پارامتری کمک بگیریم. با توجه به آن که ضابطه‌ی این تابع به‌صورت یک رابطه‌ی ضمنی بین $x + y$ و $\frac{x-y}{۲}$ داده شده است، می‌توانیم یکی از آن‌ها را $t$ گرفته و دیگری را برحسب $t$ به‌دست آوریم.

$$\frac{x-y}{۲} = t \Rightarrow x + y = ۲e^t$$

اکنون داریم: $\begin{cases} x + y = ۲e^t \\ x - y = ۲t \end{cases}$، با حل این دستگاه به معادلات پارامتری $x = e^t + t$ و $y = e^t - t$ می‌رسیم. در $x = ۱$ داریم $t = ۰$ و در $x = e + ۱$ داریم $t = ۱$.

بنابراین $۰ \leq t \leq ۱$ است. المان طول قوس را محاسبه می‌کنیم:

$$dL = \sqrt{(x'_t)^۲ + (y'_t)^۲} dt = \sqrt{(e^t + ۱)^۲ + (e^t - ۱)^۲} dt = \sqrt{۲e^{۲t} + ۲} dt = \sqrt{۲} \times \sqrt{۱ + e^{۲t}} dt \Rightarrow L = \sqrt{۲}\int_۰^۱ \sqrt{۱ + e^{۲t}} \, dt$$

با تغییر متغیر $e^t = tg\theta$ انتگرال را حل می‌کنیم. در این صورت داریم: $e^t dt = (۱ + tg^۲\theta) d\theta$، پس $dt = \frac{۱ + tg^۲\theta}{tg\theta} d\theta$ است. به ازای $t = ۰$ داریم $tg\theta = ۱$، پس $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و به ازای $t = ۱$ داریم: $tg(\theta) = e$، یعنی $\theta = tg^{-۱}(e)$. در ضمن می‌دانیم که $۱ + tg^۲\theta = sec^۲ \theta$ است.

$$L=\sqrt{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{tg^{-۱}(e)}\sqrt{۱+tg^۲\theta}\,\frac{(۱+tg^۲\theta)}{tg\theta}d\theta=\sqrt{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{tg^{-۱}(e)}\frac{\sec^۳\theta}{tg\theta}d\theta=\sqrt{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{tg^{-۱}(e)}\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin\theta}d\theta$$

ابتدا حل انتگرالِ نامعین را توضیح می‌دهیم. برای حل این انتگرال در صورت کسر به جای یک، عبارت $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta$ را قرار می‌دهیم:

$$\int\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta\sin\theta}d\theta=\int(\frac{۱}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta})d\theta=\int(\csc\theta+\sec\theta tg\theta)d\theta=-Ln\,|\csc\theta+cotg\,\theta|+\sec\theta$$

حال دقت کنید که $\sec\theta=\sqrt{۱+tg^۲\theta}$ و $cotg\,\theta=\frac{۱}{tg\theta}$ و $\csc\theta=\sqrt{۱+cotg^۲\theta}$ است. بنابراین جواب را برحسب $tg\theta$ نوشته و حدود انتگرال را در آن قرار می‌دهیم.

$$L=\sqrt{۲}[-Ln\,|\sqrt{۱+\frac{۱}{tg^۲\theta}}+\frac{۱}{tg\theta}|+\sqrt{۱+tg^۲\theta}]_{\frac{\pi}{۴}}^{tg^{-۱}e}=\sqrt{۲}[-Ln(\sqrt{۱+\frac{۱}{e^۲}}+\frac{۱}{e})+\sqrt{۱+e^۲}+Ln(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}]$$

$$=\sqrt{۲}[-Ln(\sqrt{\frac{e^۲+۱}{e^۲}}+\frac{۱}{e})+\sqrt{۱+e^۲}+Ln(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}]=\sqrt{۲}[-Ln(\frac{۱}{e}(\sqrt{e^۲+۱}+۱))+\sqrt{۱+e^۲}+Ln(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}]$$

$$=\sqrt{۲}[\underbrace{-Ln(\frac{۱}{e})}_{۱}-Ln(\sqrt{e^۲+۱}+۱)+\sqrt{۱+e^۲}+Ln(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}]\Rightarrow L=\sqrt{۲}[\sqrt{۱+e^۲}-Ln(\sqrt{۱+e^۲}+۱)+Ln(\sqrt{۲}+۱)+۱-\sqrt{۲}]$$

## تعریف تابع طول قوس

در برخی از مسائل علمی به تابعی نیاز داریم که بتوان به وسیله‌ی آن، طول قوس یک منحنی را از نقطه‌ای خاص تا هر نقطه‌ی دیگر روی منحنی، اندازه‌گیری کرد. فرض کنید معادله‌ی منحنی C، به‌صورت $y=f(x)$، باشد و همچنین $S(x)$، فاصله روی منحنی از نقطه‌ی آغازی $(a,f(a))$ تا نقطه‌ی دلخواه $(x,f(x))$ باشد، در این صورت، S تابعی برحسب x است که آن را تابع طول قوس می‌نامند و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{S(x)=\int_a^x\sqrt{۱+(f'(t))^۲}dt}$$

(دقت کنید متغیر انتگرال‌گیری را با t عوض کردیم تا با x متفاوت باشد و شما به اشتباه نیفتید!)

**مثال ۱۵: تابع طول قوس منحنی $y=\sin^{-۱}x+\sqrt{۱-x^۲}$ که نقطه‌ی شروع آن $(۰,۱)$ است، کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۱+x}+۱)$　۲) $\sqrt{۲}(\sqrt{۱+x}-۱)$　۳) $\sqrt{۲}(\sqrt{۱+x}+۱)$　۴) $۲\sqrt{۲}(\sqrt{۱+x}-۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $S(x)$ که طول قوسِ منحنیِ داده شده را از نقطه‌ی $(۰,۱)$ تا نقطه‌ی $(x,f(x))$ تعیین می‌کند، با فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$S(x)=\int_۰^x\sqrt{۱+(f'(t))^۲}\,dt$$

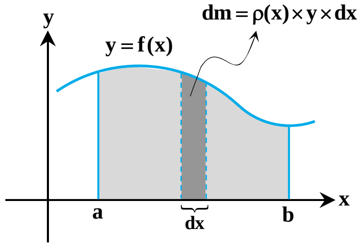
ابتدا $۱+(f'(t))^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(t)=\sin^{-۱}t+\sqrt{۱-t^۲}\Rightarrow f'(t)=\frac{۱}{\sqrt{۱-t^۲}}+\frac{-۲t}{۲\sqrt{۱-t^۲}}=\frac{۱-t}{\sqrt{۱-t^۲}}$$

$$\Rightarrow ۱+(f'(t))^۲=۱+\frac{(۱-t)^۲}{۱-t^۲}=\frac{۲-۲t}{۱-t^۲}=\frac{۲(۱-t)}{(۱+t)(۱-t)}=\frac{۲}{۱+t}$$

با قرار دادن این عبارت در فرمول $S(x)$ خواهیم داشت:

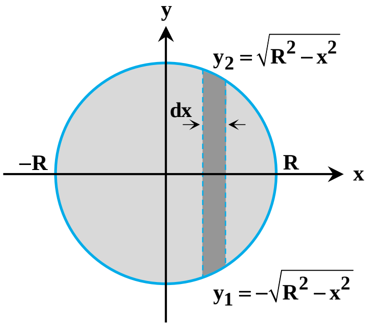
$$S(x)=\int_۰^x\sqrt{\frac{۲}{۱+t}}dt=\sqrt{۲}\int_۰^x(۱+t)^{-\frac{۱}{۲}}dt=۲\sqrt{۲}\left[(۱+t)^{\frac{۱}{۲}}\right]_۰^x=۲\sqrt{۲}(\sqrt{۱+x}-۱)$$



مطابق شکل یک نوار باریک به ضخامت dx از این سطح را در نظر می‌گیریم. مساحت این نوار باریک برابر با حاصل‌ضرب طول و عرض آن یعنی برابر با $y\times dx$ است. جرم این قطعه برابر با ضرب مساحت در چگالی است: $dm=\rho(x)\times y\times dx$ به عبارت دیگر، المانِ جرم برابر با $dm=\rho(x)f(x)dx$ است. اکنون با انتگرال‌گیری در فاصله‌ی $a\le x\le b$ می‌توانیم جرم‌های کوچک به‌دست آمده را جمع کرده و جرم کل را به‌دست آوریم:

$$M=\int_a^b dm=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

**مثال ۱: جرم یک قرص به شعاع R سانتی‌متر را که مرکزش در مبدأ صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد و چگالی سطحی آن به شکل $\rho(x)=k(x+۲R)$ داده شده است، به‌دست آورید.**



☑ **پاسخ :** در این مثال با یک نمونه‌ی دو بعدی که چگالی سطحی دارد روبرو هستیم. بنابراین مطابق شکل یک نوار باریک به عرض dx از این ناحیه در نظر می‌گیریم. نیم‌دایره‌ی بالایی و پایینی دارای معادلات $y_۲=\sqrt{R^۲-x^۲}$ و $y_۱=-\sqrt{R^۲-x^۲}$ هستند. بنابراین طولِ این نوار باریک برابر با $y_۲-y_۱=۲\sqrt{R^۲-x^۲}$ و عرض آن dx است. در نتیجه مساحت آن برابر با $dS=۲\sqrt{R^۲-x^۲}dx$ می‌شود و المان جرم به این صورت به‌دست می‌آید:

$$dm=\rho(x)dS=k(۲R+x)\times ۲\sqrt{R^۲-x^۲}dx$$

با انتگرال‌گیری از dm در بازه‌ی $-R\le x\le R$ جرم کل این جسم معلوم خواهد شد:

$$m=\int_{-R}^{R}dm=\int_{-R}^{R}۲k(۲R+x)\sqrt{R^۲-x^۲}dx=\int_{-R}^{R}[۴kR\sqrt{R^۲-x^۲}+۲kx\sqrt{R^۲-x^۲}]dx$$

به علت فرد بودن تابع $۲kx\sqrt{R^۲-x^۲}$، انتگرال آن در بازه‌ی $-R\le x\le +R$ برابر با صفر است. از طرفی $۴kR\sqrt{R^۲-x^۲}$ زوج است. در نتیجه داریم:

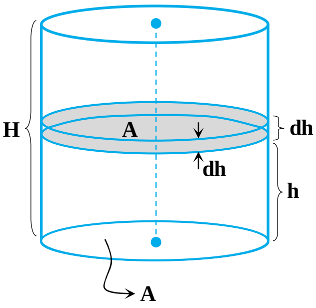
$$m=۴kR\int_{-R}^{R}\sqrt{R^۲-x^۲}dx=۸kR\int_{۰}^{R}\sqrt{R^۲-x^۲}dx$$

از تغییر متغیر $x=R\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx=R\cos\theta d\theta$ است و در بازه‌ی $۰\le x\le R$ داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$.

$$m=۸kR\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{R^۲-R^۲\sin^۲\theta}\,R\cos\theta d\theta=۸kR^۳\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲\theta d\theta=۸kR^۳\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)d\theta=۴kR^۳(\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=۲k\pi R^۳$$

بنابراین جرم این جسم $m=۲k\pi R^۳$ واحد است.

**مثال ۲: چگالی یک استوانه‌ی قائم توپر به ارتفاع H(cm) و مساحت قاعده‌ی $A(cm^۲)$ در هر نقطه از آن به‌صورت $\rho(h)=\rho_۰(۱+h)$ گرم بر سانتی‌متر مکعب است. در این رابطه، h ارتفاع نقطه‌ی موردنظر و $\rho_۰$ عددی ثابت است. جرم استوانه را پیدا کنید.**



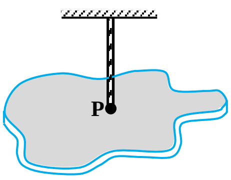
☑ **پاسخ :** با یک نمونه‌ی سه بعدی روبرو هستیم که دارای چگالی حجمی است. ابتدا باید یک برش باریک از استوانه را در نظر گرفته و المان حجم یعنی dV را حساب کنیم. از آنجا که چگالی برحسب متغیر h داده شده است، یک دیسک به ضخامت dh را در ارتفاعِ h از این استوانه در نظر می‌گیریم. مساحت این دیسک با مساحت قاعده یعنی A برابر است و ضخامت آن dh است. بنابراین حجم آن برابر است با: $dV=Adh$

و المان جرم به این صورت به‌دست می‌آید: $dm=\rho(h)dV=A\rho_۰(۱+h)dh$

اکنون با انتگرال‌گیری در بازه‌ی $۰\le h\le H$ می‌توانیم جرم کل استوانه را محاسبه کنیم:

$$m=\int_{۰}^{H}dm=\int_{۰}^{H}A\rho_۰(۱+h)dh=A\rho_۰(h+\frac{h^۲}{۲})\Big|_{۰}^{H}=A\rho_۰H(۱+\frac{H}{۲})$$

## گشتاورها و مرکز جرم



فرض کنید می‌خواهیم یک ورقه‌ی فلزی را طوری روی یک تکیه‌گاه قرار دهیم یا طوری به یک قلاب متصل کنیم که در تعادل کامل باشد؛ یعنی به هیچ سمتی کج نشود. در این صورت، قلاب را باید به کدام نقطه متصل کنیم؟ جواب این است که به «مرکز جرم» جسم متصل کنیم. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از مفهومی به نام گشتاور، مرکز جرم یک جسم را پیدا کنیم.

برای شروع به شکل صفحه‌ی بعد که شبیه الاکلنگ است، دقت کنید! اگر این میله چگالی یکنواخت داشته باشد، به نظر شما کدام سمت آن به پایین حرکت خواهد کرد؟

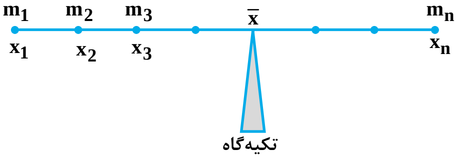
این که در نهایت کدام سمت میله به پایین حرکت کند، به دو عامل بستگی دارد؛ یکی اندازه‌ی جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ و دومی فاصله‌ی آن‌ها از تکیه‌گاه. فرض کنید تکیه‌گاه در نقطه‌ای به طول $\bar{x}$ قرار داشته باشد و جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ قرار بگیرند. تمایل جرم $m_۱$ برای چرخش حول تکیه‌گاه را گشتاور آن می‌نامند و مقدار آن برابر است با $m_۱\times(x_۱-\bar{x})$. به همین ترتیب گشتاور جرم $m_۲$ حولِ تکیه‌گاه، برابر با حاصل‌ضرب $m_۲\times(x_۲-\bar{x})$ است. بنابراین مجموع گشتاورها حول $\bar{x}$ برابر است با: $(x_۱-\bar{x})m_۱+(x_۲-\bar{x})m_۲=$ گشتاور حول $\bar{x}$

اگر این میله در حالت تعادل باشد، مجموع گشتاورها حول $\bar{x}$ برابر با صفر می‌شود. اکنون می‌توانیم مرکز جرم را به این صورت تعریف کنیم:

**مرکز جرم یک جسم، نقطه‌ای است که اگر تکیه‌گاه را در آن نقطه قرار دهیم، مجموع گشتاورها حول آن صفر شود و جسم در حالت سکون و تعادل باقی بماند.**

فرض کنید مرکز جرم میله در نقطه‌ی $\bar{x}$ باشد. طبق توضیحات بالا، گشتاور حول $\bar{x}$ باید صفر باشد. پس خواهیم داشت: $(x_۱-\bar{x})m_۱+(x_۲-\bar{x})m_۲=۰$

اگر از این معادله $\bar{x}$ را حساب کنیم، به معادله‌ی $\bar{x}=\frac{x_۱m_۱+x_۲m_۲}{m_۱+m_۲}$ می‌رسیم. البته این فرمول، مرکز جرم را در حالتی که فقط نقاط $x_۱$ و $x_۲$ دارای جرم باشند، محاسبه کرده است. به نظر شما اگر جرم‌های $m_۱,m_۲,\cdots,m_n$ در نقاط $x_۱,x_۲,\cdots,x_n$ قرار داشته باشند، $\bar{x}$ چگونه به‌دست می‌آید؟

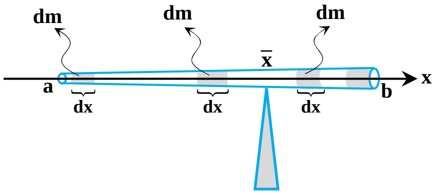


واضح است که فرمول $\bar{x}$ به این شکل تبدیل می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{x_۱m_۱+\cdots+x_nm_n}{m_۱+\cdots+m_n}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_im_i}{\sum_{i=۱}^{n}m_i}$$

حالا آماده‌ایم که فرمول $\bar{x}$ را در حالت کلی پیدا کنیم. میله‌ای را فرض کنید که در بازه‌ی $a\le x\le b$ قرار گرفته است و دارای چگالی $\rho(x)$ است. به‌جای آن که فقط چند نقطه‌ی $x_۱,\cdots,x_n$ دارای جرم باشند، هر نقطه از این میله دارای جرم است؛ یعنی جرم آن در همه‌ی نقاط توزیع شده است. در هر نقطه به طول $x$، قطعه‌ی کوچکی به اندازه‌ی $dx$ از میله جدا می‌کنیم. اگر طول این قطعه‌ی کوچک (یعنی $dx$) را در چگالی‌اش (یعنی $\rho(x)$) ضرب کنیم، جرم آن به‌دست می‌آید. پس جرم این قطعه برابر با $dm=\rho(x)dx$ است. یعنی به‌جای آن که در نقاط $x_۱,\cdots,x_n$ جرم‌های $m_۱,\cdots,m_n$ قرار داشته باشند، در هر قطعه به طول $dx$، جرمی به اندازه‌ی $dm$ داریم، در نتیجه برای جمع کردن آن‌ها به‌جای سیگما باید از انتگرال استفاده کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$$



(در هر قطعه به طول dx جرمی به اندازه dm داریم.)

المانِ جرم برای میله‌ی یک بعدی برابر با $dm=\rho(x)dx$ است و انتگرال آن برابر با جرم کل میله یعنی $M=\int_a^b \rho(x)dx$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{M}$$

## جمع‌بندی

برای همه‌ی اجسام، چه یک بعدی باشند، چه یک منحنی خمیده باشند، چه ناحیه‌ای محدود به منحنی $f(x)$ و محور $x$ها باشند و چه جسمی سه بعدی باشند که دارای حجم است، تا وقتی که تابع چگالی یک متغیره باشد، می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم:

جرم کل جسم $=M=\int dm$

گشتاور نسبت به محور $y$ها $=M_y=\int xdm$

گشتاور نسبت به محور $x$ها $=M_x=\int ydm$ (فقط در فرمول $M_x$ برای نواحی دو بعدی ضریب $\frac{۱}{۲}$ پشت انتگرال لازم است.)

مختصات مرکز جرم $=(\bar{x},\bar{y})=(\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M})$

حالا باید با توجه به قواعد زیر، المانِ جرم یعنی $dm$ را نوشته و در انتگرال قرار دهیم. سپس حدود انتگرال یعنی $x=a$ و $x=b$ را بنویسیم:

**الف)** برای میله‌ای که روی محور $x$ها و در فاصله‌ی $a\le x\le b$ قرار دارد: $dm=$ چگالی $\times$ (المان طول) $=\rho(x)dx$

**ب)** برای ناحیه‌ی مسطحی که به محور $x$ها و منحنی $y=f(x)$ در محدوده‌ی $a\le x\le b$ قرار دارد: $dm=$ چگالی $\times$ (المان سطح) $=\rho(x)ydx$

**ج)** برای منحنی مسطحی که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد: $dm=$ چگالی $\times$ المان طول قوس $=\rho(x)\sqrt{dx^۲+dy^۲}=\rho(x)\sqrt{۱+y'^۲}dx$

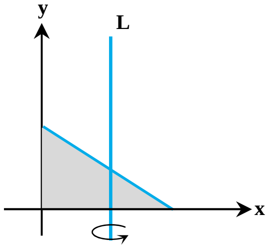
**توجه:** در همه‌ی موارد فوق اگر در صورت سؤال نامی از چگالی نیامده بود یا چگالی یکنواخت ذکر شده بود، $\rho(x)=۱$ است. البته وقتی $\rho(x)=۱$ باشد، برای یک ناحیه‌ی مسطح داریم: $M=$ چگالی $\times$ مساحت $=۱\times S=S$

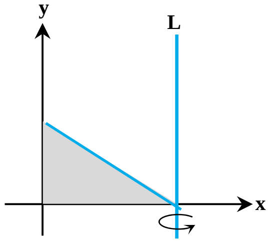
و برای یک منحنی مسطح داریم: $M=$ چگالی $\times$ طول قوس $=۱\times L=L$

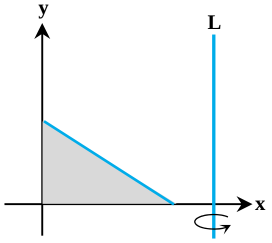
## نحوه‌ی استفاده از قضایای گلدن ـ پاپوس

می‌خواهیم نحوه‌ی استفاده از فرمول‌های پاپوس را به‌صورت ساده‌تر توضیح دهیم. قبل از ورود به بحث، به مهمترین شرط برای استفاده از این فرمول‌ها اشاره می‌کنیم.

**شرط استفاده از قضایا:** فقط وقتی از فرمول‌های گلدن پاپوس استفاده کنید که محور دوران، ناحیه‌ی موردنظر یا منحنی مورد نظر را قطع نکرده باشد. به شکل‌های زیر توجه کنید، در این شکل‌ها قرار است ناحیه‌ی S که درون مثلث قرار دارد، حول خطِ L دوران کند.







در شکل سمت راست، خط L این ناحیه را قطع کرده است، پس نمی‌توانیم از فرمول پاپوس استفاده کنیم. اما در شکل وسط و شکل سمت چپ، استفاده از فرمول پاپوس ایرادی ندارد. همانطور که در شکل وسط می‌بینید، تماس داشتن محور دوران با ناحیه‌ی داده شده اشکالی ایجاد نمی‌کند.

اکنون فرمول‌های پاپوس را به‌صورت فارسی بیان می‌کنیم:

فرمول اول: سطح حاصل از دوران منحنی C حول خط L = ۲π (فاصله‌ی مرکز ثقل C از خط L) × (طول قوسِ C)

فرمول دوم: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی S حول خط L = ۲π (فاصله‌ی مرکز ثقل S از خط L) × (مساحت S)

اگر مرکز ثقل ناحیه‌ی S یا مرکز ثقل منحنی C مشخص باشد، محاسبه‌ی فاصله‌ی آن از خط L به‌سادگی انجام می‌شود. بنابراین نتایج زیر گرفته می‌شوند:

**۱ـ** اگر طول قوس منحنیِ C و مرکز ثقل آن معلوم باشند، با استفاده از فرمول اول، مساحت سطح حاصل از دوران به‌دست می‌آید. در واقع این فرمول رابطه‌ای بین سه کمیت (فاصله‌ی مرکز ثقل C از خط L)، (طول قوسِ C) و (سطح حاصل از دوران منحنی C حول خط L) را بیان می‌کند. اگر دو تا از این کمیت‌ها معلوم باشند، می‌توانیم سومی را محاسبه کنیم.

**۲ـ** وقتی مساحت ناحیه‌ی S و مرکز ثقل آن معلوم باشند، با استفاده از فرمول دوم، حجم جسم حاصل از دوران به‌دست می‌آید. در واقع فرمول دوم پاپوس، یک رابطه بین سه کمیت مقابل برقرار کرده است: (فاصله‌ی مرکز ثقل S از خط L)، (مساحت S) و (حجم حاصل از دوران S حول L) بنابراین با داشتن دو تا از این کمیت‌ها می‌توانیم سومی را حساب کنیم. مثلاً اگر حجم حاصل از دوران و مساحت ناحیه‌ی S را داشته باشیم، می‌توانیم فاصله‌ی مرکز ثقل S تا خط L را به‌دست آوریم.

**تشخیص مرکز ثقل:** برای استفاده از فرمول‌های پاپوس، باید بتوانیم مرکز ثقل ناحیه‌ی داده شده را تعیین کنیم. اگر ناحیه‌ی مورد نظر یک بیضی یا دایره باشد، مرکز آن بیضی یا دایره همان مرکز ثقل ناحیه است.

در مورد چندضلعی‌ها هم محاسبه‌ی مرکز ثقل به سادگی انجام می‌شود. مختصات مرکز ثقل یک مثلث، میانگین مختصات رئوس آن مثلث است. مثلاً مرکز ثقل مثلثی با رئوس $A(۰,۰)$، $B(۲,۰)$ و $C(۴,۳)$ به این صورت به‌دست می‌آید:

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{A+B+C}{۳}=\frac{۱}{۳}(۰+۲+۴,۰+۰+۳)=(۲,۱)$$

به همین ترتیب مرکز ثقل یک n ضلعی برابر با میانگین مختصات رئوس آن n ضلعی است. در این رابطه، نیازی به منتظم بودن n ضلعی نداریم. برای مثال مرکز ثقل یک چهارضلعی با رئوس $A(۴,۰)$، $B(۱,۴)$، $C(۱,۱)$ و $D(۲,۱)$ به این صورت مشخص می‌شود:

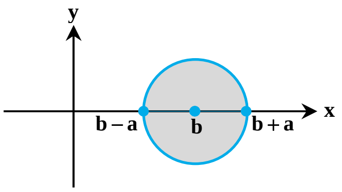
$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{A+B+C+D}{۴}=\frac{۱}{۴}(۴+۱+۱+۲,۰+۴+۱+۱)=\frac{۱}{۴}(۸,۶)=(۲,\frac{۳}{۲})$$

**مثال ۱۱: دایره‌ای به مرکز $(b,۰)$ و شعاع a را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم جسم ایجاد شده چند برابر $\pi^۲$ است؟ $(۰<a<b)$**

(از سؤالات پایان ترم دانشگاه‌های شریف، امیرکبیر و علم و صنعت)

۱) $۴a^۲b$  ۲) $a^۲b^۲$  ۳) $a^۲b$  ۴) $۲a^۲b$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون $a<b$ است، پس $b-a$ مثبت می‌شود و این نشان می‌دهد که محور yها با دایره‌ی داده شده برخورد نمی‌کند، پس بهتر است از فرمول گلدن پاپوس استفاده کنیم. اگر ناحیه‌ی A که مرکز ثقل آن نقطه‌ی P است، حولِ خط L که خارج از A قراردارد دوران کند، جسمی به‌دست می‌آید که آن را تیوب می‌نامیم و حجم آن برابر است با $V=۲\pi Sd$.



در این فرمول S برابر است با مساحتِ ناحیه‌ی A و d برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط L. از این فرمول وقتی استفاده می‌کنیم که محور دوران خارج از ناحیه‌ی A باشد و همچنین مرکز ثقل A را بتوان به راحتی معلوم کرد.

برای مثال وقتی ناحیه‌ی A یک دایره یا بیضی یا مربع باشد این فرمول مناسب است.

در این تمرین، ناحیه‌ی A دایره‌ای به مرکز نقطه $P:(b,۰)$ و شعاع a است و محور دوران، محور yها است، پس $d=b$ و $S=\pi a^۲$.

حجم شکل مورد نظر برابر است با: $V=۲\pi Sd=۲\pi^۲a^۲b$.

**۲۵ـ** قسمتی از منحنی $y = ۴ - \frac{t^۲}{۲}$ و $x = \frac{t^۲}{۳}$ که بین نقاط تلاقی‌اش با محورهای مختصات واقع در ربع اول است، حول محور x ها دوران می‌کند. مساحت سطح حاصل چند برابر $\pi$ است؟

۱) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$  ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$  ۳) $\frac{۷۴}{۵}$  ۴) $\frac{۱۴۸}{۵}$

**۲۶ـ** اگر تابع f با تعریف $f:[-۱,۲] \to [۰,\infty)$ پیوسته باشد و برای هر x متعلق به بازه‌ی $[-۱,۲]$، تساوی $f(x) = f(۱-x)$ برقرار باشد و $S_۱ = \int_{-۱}^{۲} xf(x)dx$ و $S_۲$ سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و دو خط $x = -۱$ و $x = ۲$ و محور x ها باشد، آن‌گاه کدام تساوی زیر قطعاً درست است؟

۱) $S_۱ = S_۲$  ۲) $۲S_۱ = S_۲$  ۳) $۳S_۲ = S_۱$  ۴) $۳S_۱ = S_۲$

**۲۷ـ** حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} [\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^۳}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+۴)^۳}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+۸)^۳}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+۱۲)^۳}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+۴(n-۱)]^۳}}]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}(۱۰-۲\sqrt{۵})$  ۲) $\frac{۱}{۵}(۵+\sqrt{۵})$  ۳) $\frac{۱}{۱۰}(۱۰-\sqrt{۵})$  ۴) $\frac{۱}{۱۰}(۵-\sqrt{۵})$

**۲۸ـ** فاصله‌ی مرکز ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^۳$ و خط $y = ۴x$ واقع در ربع اول، از محور y ها چقدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$  ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$  ۳) $\frac{۳۲}{۲۱}$  ۴) $\frac{۶۴}{۲۱}$

**۲۹ـ** حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} (\sqrt{۱+\frac{i}{n^۲}} - ۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$  ۲) $\frac{۱}{۴}$  ۳) ۱  ۴) ۰

**۳۰ـ** حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{Lnn - Lnk}{\sqrt{nk}}$ کدام است؟

۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

# آزمون (۳)

**تعداد سؤالات : ۳۰** **مدت زمان پاسخگویی:** ۱۰۰ دقیقه **سطح آزمون : A**

۱ـ حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=\sqrt{x}$ و $y=x^۲$ حول خط $y=x$ چند برابر $\pi$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{۴۸\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲\sqrt{۲}}$

۲ـ یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a حول یکی از اضلاعش دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چند برابر $\pi a^۳$ است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳ـ فرض کنید S سطح جسم حاصل از دوران قوسی از دایره‌ی واحد $x^۲+y^۲=۱$ در ربع اول صفحات مختصات است که حول خط $x+y=۱$ دوران می‌کند. مساحت سطح S چقدر است؟

۱) $\frac{۴(۴-\pi)}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۲}\pi(۴-\pi)$ ۳) $\frac{\pi(۴-\pi)}{\sqrt{۲}}$ ۴) $۲\sqrt{۲}(۴-\pi)$

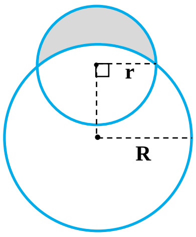
۴ـ اگر منحنی $y=e^{-\frac{x}{۱۰}}\sin x$ $(x\geq ۰)$ را حول محور xها دوران دهیم، جسمی سه‌بُعدی شبیه ریسمانی نامتناهی از دانه‌های تسبیح که کوچک و کوچکتر می‌شوند، پدید می‌آید. حجم کل دانه‌ها چقدر است؟

۱) $\frac{۲۵۱\pi}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۲۵\pi}{۱۰۱}$ ۳) $\frac{۱۲۷\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲۵۰\pi}{۱۰۱}$

۵ـ مساحتِ سطح حاصل از دوران منحنی $y=x^k$ $(۰<x\leq ۱)$ حول محور yها به ازای چه مقادیر حقیقی از k، متناهی است؟

۱) $k\geq ۰$ ۲) $k\geq -۱$ ۳) $k>-۱$ ۴) $k>۰$

۶ـ مساحت ناحیه هلالی محدود به کمان‌هایی از دایره‌هایی به شعاع‌های r و R کدام است؟ $(r<R)$



۱) $۲r\sqrt{R^۲-r^۲}+\frac{\pi}{۲}r^۲-۲R^۲\sin(\frac{r}{R})$

۲) $r\sqrt{R^۲-r^۲}+\frac{\pi}{۲}r^۲-R^۲\sin(\frac{r}{R})$

۳) $r(\sqrt{R^۲-r^۲})+\frac{۳\pi}{۲}r^۲-۲R^۲\arcsin\frac{r}{R}$

۴) $۲r\sqrt{R^۲-r^۲}+\pi r^۲-R^۲\arcsin(\frac{r}{R})$

۷ـ مساحت محصور بین منحنی‌های $y=\frac{Lnx}{۴x}$ و $y=xLnx$، یک جمله به‌صورت $ALn^۲۲$ دارد. مقدار A کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸ـ سطح محدود به منحنی‌های (۱): $x^۴+y^۴=۹x^۲$ و (۲): $x^۴+y^۴=x^۳$ حول محور xها دوران پیدا می‌کند. حجم حاصل از دوران منحنی (۱) چند برابر حجم حاصل از دوران منحنی (۲) است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) $\frac{۲۸۸}{\pi}$ ۴) $\frac{۱۴۴}{\pi}$

۹ـ مختصات مرکز ثقل ناحیه‌ی محصور شده به منحنی $y^۲=x^۳-x^۴$، کدام است؟

۱) $(۰,\frac{۵}{۸})$ ۲) $(\frac{۵}{۸},۰)$ ۳) $(\frac{۵}{۴},\frac{۵}{۸})$ ۴) $(۰,\frac{۵}{۴})$

۱۰ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}[\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲+\cos(\frac{k\pi}{n})}]$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}\pi$

۱۱ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{۲^{\frac{۱}{n}}}{n+۱}+\frac{۲^{\frac{۲}{n}}}{n+\frac{۱}{۲}}+\cdots+\frac{۲^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{۱}{n}}]$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}Ln۲$ ۲) $\frac{۱}{Ln۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲Ln۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}Ln۲$

۱۲ـ سهمی $y^۲=۲x$، مساحت دایره‌ی $x^۲+y^۲=۸$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت مساحت قسمت کوچکتر به مساحت قسمت بزرگتر در کدام گزینه نشان داده شده است؟

۱) $\frac{۳\pi+۲}{۹\pi-۲}$ ۲) $\frac{۲\pi+۳}{۶\pi-۴}$ ۳) $\frac{۳\pi-۲}{۹\pi+۲}$ ۴) $\frac{۳\pi-۳}{۶\pi+۴}$