درسنامه: تعریف انواع تابع و مفاهیم مرتبط با آن

مفهوم تابع

وقتی کمیتی وابسته به کمیتی دیگر باشد، مفهوم تابع به‌وجود می‌آید. مثلاً اگر فرمول مساحت دایره‌ای به شعاع r را در نظر بگیریم $(S=\pi r^{۲})$، مساحت دایره، یعنی S به شعاع دایره، یعنی r بستگی دارد. در این جا کمیت مساحت به کمیت شعاع وابسته است و می‌گوییم **S تابعی از r** است. دقت کنید در این رابطه، r متغیر مستقل و S متغیر وابسته است. خاصیت هر تابعی این است که برای هر مقدار از **متغیر مستقل** فقط یک مقدار برای **متغیر وابسته** ایجاد می‌شود. واضح است به ازای یک شعاع مشخص برای دایره، قطعاً یک و فقط یک مساحت به‌دست خواهد آمد.

تعریف دامنه و برد تابع: به مجموعه مقادیری که متغیر مستقل می‌گیرد، دامنه‌ی تابع و به مجموعه مقادیری که متغیر وابسته می‌گیرد، برد تابع می‌گویند.

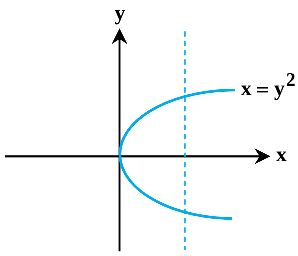
نماد تابع: برای اینکه بتوانیم بحث مشخص‌تری داشته باشیم، فرض می‌کنیم x متغیر مستقل و y متغیر وابسته باشد (البته این دو حرف بیشتر در مورد تابع به کار می‌رود، هر چند که اجباری نیست. مثلاً همان‌طور که دیدید مساحت دایره S، تابعی از متغیر مستقل r بود). برای نمایش ضابطه‌ی تابع از تساوی $y=f(x)$ استفاده می‌کنیم که خوانده می‌شود «y مساوی اِف x است»، اگر x مقدار خاصی مانند c داشته باشد، آن‌گاه مقدار نظیر y برابر با $f(c)$ است و مقدار f در نقطه‌ی c نامیده می‌شود.

شرط تابع بودن: به شرطی می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=f(x)$ تابع است که به ازای هر مقدار x، **فقط یک مقدار برای y** ایجاد شود. مثلاً ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ یک تابع است، چون هر مقداری که به x بدهیم، فقط و فقط یک مقدار برای y پدید می‌آید (دقت کنید اگر به ازای دو مقدار مختلف از x، یک مقدار یکسان برای y ایجاد شود، باز هم خواهیم گفت ضابطه داده شده، تابع است. همان‌طور که در ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ به ازای $x=۱$ و $x=-۱$ یک مقدار یکسان، یعنی $y=۱$ ایجاد می‌شود). اما ضابطه‌ی $x=y^{۲}-۲$، تابعی برحسب x نیست. چون اگر به x مثلاً مقدار $x=۲$ را بدهیم، آن‌گاه برای y دو مقدار متفاوت $y=\pm ۲$ ایجاد می‌شود.

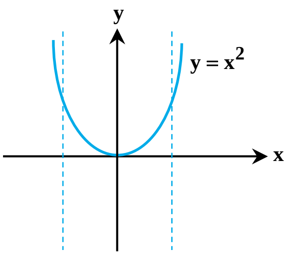
محک خط قائم برای تشخیص تابع بودن:

منحنی $y=f(x)$ فقط وقتی تابعی از x است که اگر خط قائمی در دستگاه مختصات رسم کنیم، این خط قائم، نمودار تابع را **بیش از یک بار قطع نکند**.

برای مثال به دو نمودار مقابل توجه کنید:



(ب)



(الف)

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، هر خط قائمی که بر نمودار $y=x^{۲}$ رسم کنیم، فقط در یک نقطه، نمودار تابع را قطع می‌کند (شکل (الف)) و بنابراین می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ تابعی برحسب x است. اما همان‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، خط قائمی که بر نمودار $x=y^{۲}$ رسم کرده‌ایم، نمودار تابع را در دو نقطه (یعنی بیش از یک نقطه) قطع کرده است. پس می‌توانیم بگوییم ضابطه‌ی $x=y^{۲}$ تابعی برحسب x نیست.

تعریف دیگر تابع:

فرض کنید P، جمعیت جهان باشد که به زمان t وابسته است و ارتباط آن‌ها به‌صورت جدول مقابل باشد.

سال (t)	P جمعیت (میلیون)
۱۹۰۰	۱۶۵۰
۱۹۱۰	۱۷۵۰
۱۹۲۰	۱۸۶۰
۱۹۶۰	۳۰۴۰
۱۹۸۰	۴۴۵۰
۱۹۹۰	۵۲۸۰
۲۰۰۰	۶۰۸۰

همان‌طور که می‌بینید، به ازای هر مقدار t، مقدار متناظری از P وجود دارد پس در این حالت هم می‌توانیم بگوییم P تابعی از زمان است. یعنی به ازای هر زمان مشخص، فقط یک مقدار جمعیت وجود دارد. پس همیشه قرار نیست نمایش تابع، به شکل ضابطه‌ی $y=f(x)$ باشد. یعنی تعریف زیر را داریم:

فرض کنید رابطه‌ی f مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب و متمایز از اعداد حقیقی باشد، به طوری که هیچ دو جفت (x,y) در f، دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتبی در رابطه‌ی f مؤلفه‌ی اول یکسان داشتند، در این صورت مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز برابر باشد. به عبارت ساده‌تر اگر به ازای x های یکسان، y های یکسان داشته باشیم، در این صورت رابطه‌ی f را تابع می‌نامیم.

مثال ۱: به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $f=\{(۳,۲),(۱,۲),(m,۱),(۳,m^{۲}+m)\}$ یک تابع می‌باشد؟

۱) ۲- و ۱　　۲) ۱　　۳) ۲-　　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» چون زوج‌های $(۲\,,\,۳)$ و $(۳,m^{۲}+m)$ در ضابطه‌ی این تابع قرار دارند، پس باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشد (به دلیل تساوی مؤلفه‌ی اول آنها)؛ پس داریم:

$$m^{۲}+m=۲\rightarrow m^{۲}+m-۲=۰\rightarrow (m-۱)(m+۲)=۰\rightarrow m=۱\,,\,m=-۲$$

اگر $m=۱$ باشد، آن‌گاه زوج‌های $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ ایجاد می‌شود که نمی‌توانند در ضابطه‌ی یک تابع باشند، پس $m=-۲$ قابل قبول است.

تذکر ۱: رابطه‌هایی که در آنها متغیر وابسته (در ضابطه‌هایی به شکل $y=f(x)$ منظور y است)، داخل قدرمطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، **معمولاً** تابع نیستند. متغیر وابسته را با y نشان می‌دهیم، مگر آن‌که در صورت سؤال، شرط دیگری داده شده باشد.

خواص تابع جزء صحیح:

۱) $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + ۱$ ۲) $x-۱ < \lfloor x\rfloor \le x$ ۳) $۰ \le p = x - \lfloor x\rfloor < ۱$ ۴) $\lfloor x - \lfloor x\rfloor\rfloor = ۰$

۵) $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n\,,\ (n\in\mathbb{Z})$ ۶) $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} ۰ &, x\in\mathbb{Z} \\ -۱ &, x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

۷) $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ یا $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + ۱$ ۸) $\lfloor x + \lfloor x\rfloor\rfloor = ۲\lfloor x\rfloor$

مثال ۱۱: جواب معادله‌ی $\frac{\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor}{۴} + \lfloor x\rfloor = \lfloor x + \lfloor x\rfloor\rfloor$ کدام است؟

۱) $۱\le x<۲$ ۲) $۰\le x<۱$ ۳) $۲\le x<۳$ ۴) $۳\le x<۴$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به خاصیت (۸) جزء صحیح داریم: $\frac{۲\lfloor x\rfloor}{۴} + \lfloor x\rfloor = ۲\lfloor x\rfloor \Rightarrow \frac{\lfloor x\rfloor}{۲} = \lfloor x\rfloor \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۲\lfloor x\rfloor \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۰ \Rightarrow ۰\le x<۱$

رسم توابع $y = \lfloor f(x)\rfloor$: برای رسم نمودار این‌گونه توابع، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس خطوط $y=k$ $(k\in\mathbb{Z})$ را رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(x)$ را قطع کند و روی آن پاره‌خط‌های مساوی ایجاد کند، قسمتی از نمودار را که بین نقطه‌های برخورد دو خط $y=k$ و $y=k+۱$ با نمودار $y=f(x)$ قرار دارد بر خط $y=k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت ذکر این نکته لازم است که به نقاط ابتدا و انتها از لحاظ توپر و یا توخالی بودن باید توجه کرد.

مثال ۱۲: نمودار تابع $y=\lfloor x\rfloor$ را در فاصله $-۲\le x<۲$ رسم کنید.

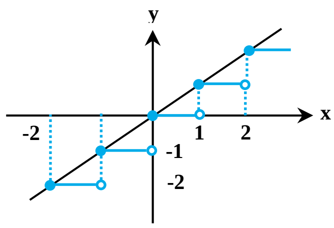
پاسخ :

$-۲\le x<-۱ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = -۲ \Rightarrow y=-۲$

$-۱\le x<۰ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = -۱ \Rightarrow y=-۱$

$۰\le x<۱ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۰ \Rightarrow y=۰$

$۱\le x<۲ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۱ \Rightarrow y=۱$



مثال ۱۳: حاصل $\left|\lfloor ۷x\rfloor - |\lfloor ۵x\rfloor|\right|$ به ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۷

پاسخ : گزینه «۴» $\left|\left\lfloor -\frac{۷}{۲}\right\rfloor - \left|\left\lfloor -\frac{۵}{۲}\right\rfloor\right|\right| = \left|\lfloor -۳/۵\rfloor - |\lfloor -۲/۵\rfloor|\right| = |-۴-|-۳|| = |-۷| = ۷$

مثال ۱۴: مجموعه جواب‌های معادله‌ی $\lfloor x\rfloor^۲ + ۲\lfloor x\rfloor - ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) $-۳\le x<-۲$ ۲) $۱\le x\le ۲$ ۳) $۱<x<۲$ ۴) $\begin{cases} ۱\le x<۲ \\ -۳\le x<-۲\end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» مجموع ضرایب صفر است، پس یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر معادله برابر $\frac{c}{a}$ یعنی (۳-) است، پس داریم: $\begin{cases} \lfloor x\rfloor = -۳ \to -۳\le x<-۲ \\ \lfloor x\rfloor = ۱ \to ۱\le x<۲\end{cases}$

۱۲) تابع ضمنی: گاهی اوقات ضابطه‌ی y برحسب x به جای آن که به شکل صریح یعنی $y=f(x)$ مشخص شود به صورت $F(x,y)=c$ داده می‌شود که به آن تابع ضمنی می‌گوئیم. در برخی از معادلات ضمنی می‌توانیم y را برحسب x بـه دست آوریم. بـرای مثال بـا حل معادلـه‌ی ضمنی $x^۲+xy=۱$ داریم $y=\frac{۱-x^۲}{x}$. برخی از معادلات ضمنی، تابع نیستند؛ برای مثال از معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ داریم $y=\pm\sqrt{۱-x^۲}$. و در برخی از توابع ضمنی نمی‌توان به راحتی y را برحسب x تعیین کرد، مثلاً معادله‌ی ضمنی $y^۳+y+x=۱$ یک تابع است اما نمی‌توان به سادگی y را برحسب x پیدا کرد.

بررسی تقارن‌های یک منحنی

برخی از منحنی‌ها نسبت به محورهای مختصات یا خطوط معروف دیگر، تقارن دارند. برای تشخیص این تقارن‌ها ابتدا با آوردن همه‌ی متغیرها به یک سمت تساوی معادله‌ی منحنی را به‌صورت $f(x,y)=c$ بنویسید. حالا از این موارد استفاده کنید:

۱) **تقارن نسبت به محور x ها:** اگر تبدیل y به $-y$، معادله منحنی را تغییر ندهد، یعنی $f(x,-y)=f(x,y)$ آن‌گاه نسبت به محور x تقارن دارد.

۲) **تقارن نسبت به محور y ها:** اگر تبدیل x به $-x$، معادله منحنی را تغییر ندهد، یعنی $f(-x,y)=f(x,y)$ آن‌گاه نسبت به محور y تقارن دارد.

۳) **تقارن نسبت به مبدأ مختصات:** اگر تبدیل همزمان x به $-x$ و y به $-y$ معادله را عـوض نکنـد، یعنـی $f(-x,-y)=f(x,y)$ آن‌گـاه نسـبت بـه مبـدأ مختصات تقارن دارد.

۴) **تقارن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم):** اگر تبدیل x به y و تبدیل y به x معادله را عوض نکند، یعنی $f(x,y)=f(y,x)$، منحنی نسبت به خط $y=x$ تقارن دارد.

۵) **تقارن نسبت به خط $y=-x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم):** اگر تبدیل x به $-y$ و تبدیل y به $-x$ معادله را عوض نکنـد، یعنـی $f(-y,-x)=f(x,y)$ منحنی نسبت به خط $y=-x$ تقارن دارد.

۶) تقارن نسبت به خط $x=a$: اگر معادله منحنی به ازای $a-x$ و $a+x$ تغییری نکند، یعنی $f(a-x,y)=f(a+x,y)$ نسبت به خط $x=a$ تقارن دارد.
البته این شرط را می‌توان به صورت $f(۲a-x,y)=f(x,y)$ هم نوشت.

۷) تقارن نسبت به خط $y=b$: اگر معادله منحنی به ازای $b-y$ و $b+y$ تغییری نکند، یعنی $f(x,b-y)=f(x,b+y)$ نسبت به خط $y=b$ تقارن دارد.
البته این شرط را می‌توان به‌صورت $f(x,۲b-y)=f(x,y)$ هم نوشت.

مثال ۱۵: **نمودار تابع $g(x)=\left|\frac{۱}{۲}x^۳-۳x^۲+۶x-۴\right|$ و منحنی $xy+x^۲y^۲=xy^۲+yx^۲$ به ترتیب (از راست به چپ) نسبت به کدام خطوط متقارن هستند؟**

۱) $x=۲$ و $y=x$ ۲) $x=-۱$ و $y=x$ ۳) $x=۲$ و $y=-x$ ۴) $x=-۱$ و $y=-x$

پاسخ: گزینه «۱» بررسی تقارن منحنی $xy+x^۲y^۲=xy^۲+yx^۲$ نسبت به خطوط $y=x$ و $y=-x$ ساده است. ابتدا همه‌ی عبارات را به سمت چپ می‌آوریم:

$$f(x,y)=xy+x^۲y^۲-xy^۲-yx^۲=۰$$

در این ضابطه به جای x، y قرار می‌دهیم و به جای y، x قرار می‌دهیم:

$$f(y,x)=yx+y^۲x^۲-yx^۲-xy^۲=f(x,y)$$

پس این منحنی نسبت به خط $y=x$ متقارن است. اما اگر به جای x، $-y$ و به جای y، $-x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$f(-y,-x)=(-y)(-x)+(-y)^۲(-x)^۲-(-y)(-x)^۲-(-x)(-y)^۲=yx+y^۲x^۲+yx^۲+xy^۲\neq f(x,y)$$

پس نسبت به خط $y=-x$ تقارن ندارد.

اکنون تقارن تابع $g(x)=\left|\frac{۱}{۲}x^۳-۳x^۲+۶x-۴\right|$ را بررسی می‌کنیم. اگر $g(a-x)=g(a+x)$ باشد این تابع نسبت به خط $x=a$ تقارن دارد. اگر به ضابطه‌ی $g(x)$ توجه کنیم، با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$g(x)=\left|\frac{۱}{۲}(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸)\right|=\frac{۱}{۲}\left|(x-۲)^۳\right|$$

با بررسی تقارن نسبت به خط $x=۲$ خواهیم داشت:

$$g(۲-x)=\frac{۱}{۲}\left|(۲-x-۲)^۳\right|=\frac{۱}{۲}\left|-x^۳\right|=\frac{۱}{۲}\left|x^۳\right|$$

$$g(۲+x)=\frac{۱}{۲}\left|(۲+x-۲)^۳\right|=\frac{۱}{۲}\left|x^۳\right|$$

پس $g(۲-x)=g(۲+x)$ است و نمودار $g(x)$ نسبت به خط $x=۲$ تقارن دارد.

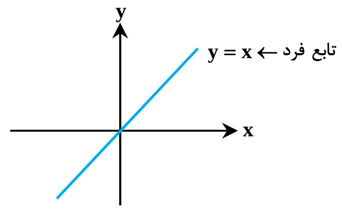
توابع زوج یا فرد

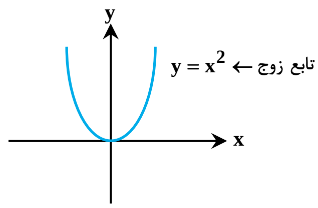
تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-x\in D_f$ آن‌گاه:

۱) تابع $f(x)$ زوج است، هرگاه $f(x)=f(-x)$. ۲) تابع $f(x)$ فرد است، هرگاه $f(x)=-f(-x)$.

بنابراین با توجه به تعریف‌های فوق، در توابع فرد $f(-x)+f(x)=۰$ و در توابع زوج $f(-x)-f(x)=۰$ خواهد بود.

نکته ۳: نمودار توابع فرد، نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج، نسبت به محور y ها متقارن است.





نکته ۴: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=c$ (یعنی تابع ثابت) تابعی زوج و تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۰$، تابعی هم زوج و هم فرد است.

مثال ۱۶: **کدام یک از توابع زیر هم فرد و هم زوج می‌باشد؟**

الف) $f(x)=\sqrt{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}$ ب) $f(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x>۰\\ ۰ & ;\ x=۰\\ -۱ & ;\ x<۰\end{cases}$ ج) $f(x)=\left\lfloor\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right\rfloor$ د) $f(x)=\sqrt{\sin\pi\lfloor x\rfloor}$

۱) الف و ج ۲) الف، ج و د ۳) الف، ب و ج ۴) الف و د

پاسخ: گزینه «۲» هر چهار تابع (الف تا د) را بررسی می‌کنیم:

الف) چون عبارت زیر رادیکال می‌باشد، لذا ضابطه‌ی دوم نمی‌تواند برقرار باشد؛ پس $f(x)=۰$ و $f(x)$ هم زوج و هم فرد است.

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}۰ & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$$

ب) تابع علامت $\operatorname{sgn}(x)$ می‌باشد و این تابع، تابعی فرد است.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x>۰\\ ۰ & ;\ x=۰\\ -۱ & ;\ x<۰\end{cases}\Rightarrow$$

ج) $f(x)$ تابعی هم زوج و هم فرد می‌باشد.

$$f(x)=\left\lfloor\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right\rfloor\xrightarrow{۰\le x^۲<x^۲+۱}۰\le\frac{x^۲}{x^۲+۱}<۱\Rightarrow\left\lfloor\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right\rfloor=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

د) دقت شود که به ازای هر مقدار x، $\lfloor x\rfloor$ عددی صحیح مانند k است و می‌دانیم $\sin k\pi$ همواره برابر صفر می‌باشد، لذا $f(x)=\sqrt{\sin\pi\lfloor x\rfloor}=۰$ و در نتیجه هم زوج و هم فرد است.

برد تابع

مفهوم برد یک تابع عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی مقادیری که y می‌تواند داشته باشد، معمولاً برد تابع f را با نماد R_f نمایش می‌دهند. برای تعیین برد یک تابع روش‌های مختلفی وجود دارد که به شرح زیر است:

۱ــ به‌دست آوردن x برحسب y: این روش را نمی‌توان در تمام توابع به عنوان بهترین روش محسوب کرد و در بسیاری موارد نیز امکان‌پذیر نیست. به این روش، روش استفاده از تابع معکوس هم می‌گویند. اما چون همه‌ی توابع معکوس‌پذیر نیستند، لذا بهتر است ما از این اصطلاح استفاده نکنیم.

مثال ۱۸: برد تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $0\le y\le 3$ ۲) $0<y\le 2$ ۳) $0<y\le\frac{3}{2}$ ۴) $0<y\le\frac{5}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» از ضابطه‌ی تابع، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=2\Rightarrow x^2=\frac{2-y}{y}\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{2-y}{y}\ge 0\Rightarrow 0<y\le 2$$

مثال ۱۹: برد یا حوزه‌ی مقادیر رابطه‌ی $f=\{(x,y)|\frac{x^2}{4}+y^2=1,x\in\mathbb{R}\}$ کدام است؟

۱) $-2\le x<2$ ۲) $-1\le y\le 1$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

پاسخ : گزینه «۲» برای محاسبه‌ی برد تابع، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}=1-y^2\Rightarrow x^2=4(1-y^2)\xrightarrow{x^2\ge 0}1-y^2\ge 0\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow -1\le y\le 1$$

البته اگر بدانیم که معادله‌ی مورد نظر یک بیضی است، با توجه به شعاع افقی آن معلوم می‌شود که $-1\le y\le 1$ است.

مثال ۲۰: برد یا حوزه‌ی مقادیر (Range) تابع $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) [-۱ و ۱) ۴) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه‌ی برد، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=x^2-1\Rightarrow x^2-yx^2=y+1\Rightarrow x^2(1-y)=y+1\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y}\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{y+1}{1-y}\ge 0$$

حال باید عبارت $\frac{y+1}{1-y}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت و مخرج کسر به ترتیب -1 و $+1$ می‌باشند. برای $y>1$ مقدار کسر منفی است. برای $y<-1$ باز هم مقدار کسر منفی است، اما در فاصله‌ی بین دو ریشه یعنی $-1\le y<1$ مقدار کسر مثبت است. دقت کنید که $y=1$ قابل قبول نیست، چون ریشه‌ی مخرج است. با توجه به توضیحات فوق، برد تابع بازه‌ی $[-1,1)$ می‌باشد.

مثال ۲۱: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-2,2)$

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: برد این تابع را با نوشتن x برحسب y می‌توانیم تعیین کنیم:

$$y=2x\sqrt{1-x^2}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}y^2=4x^2(1-x^2)\Rightarrow 4x^4-4x^2+y^2=0\xrightarrow{x^2=A}4A^2-4A+y^2=0$$

حالا یک معادله‌ی درجه دوم برحسب A داریم. برای آن‌که معادله دارای جواب باشد، باید $\Delta\ge 0$ باشد.

$$\Delta\ge 0\Rightarrow 4-4y^2\ge 0\Rightarrow 4y^2\le 4\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow -1\le y\le 1$$

روش دوم: با توجه به وجود $1-x^2$ زیر رادیکال می‌توانیم از یک راه حل ابتکاری استفاده کنیم؛ قرار می‌دهیم $x=\sin t$، در این صورت داریم:

$$f(t)=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\sin t\sqrt{\cos^2 t}=2\sin t\cos t=\sin 2t$$

و می‌دانیم تغییرات تابع سینوس، بین ۱- و ۱ می‌باشد. پس برد f هم به صورت $[-1,1]$ است.

۲ــ استفاده از مربع کامل: در این روش که معمولاً در توابع با توان زوج به کار می‌رود، با توجه به این‌که برد تابع $y=ax^2+bx+c$ اگر $a>0$ برابر $[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ و اگر $a<0$ برابر $(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$ باشد، می‌توان تست‌های به این شکل را جواب داد.

مثال ۲۲: برد تابع $g(x)=x^2+4x+5$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(0,\infty)$ ۳) $[1,\infty)$ ۴) هیچ‌کدام

پاسخ : گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases}\Delta=-4\\ a=1\end{cases}$ و با توجه به فرمول برد تابع $[-\frac{-4}{4},\infty)$ یا $[1,\infty)$ می‌باشد.

مثال ۲۳: برد تابع $y=\sin^{-1}\sqrt{x-x^2}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{\pi}{3}]$ ۲) $[0,\frac{\pi}{6}]$ ۳) $[0,\frac{\pi}{4}]$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا برد تابع $\sqrt{x-x^2}$ را حساب می‌کنیم، برای این منظور عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل و یک عدد ثابت می‌نویسیم:

$$x-x^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$$

مقدار $(x-\frac{1}{2})^2$ بزرگتر یا مساوی صفر است و این یعنی $\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$، قطعاً کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ است. پس $x-x^2\le\frac{1}{4}$ و لذا $\sqrt{x-x^2}\le\frac{1}{2}$ می‌باشد و از آنجایی که عبارت رادیکالی است، پس بزرگتر از صفر هم باید باشد، لذا $0\le\sqrt{x-x^2}\le\frac{1}{2}$. از طرفی چون $\sin^{-1}$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با اعمال آن روی نامساوی، جهت‌ها ثابت باقی می‌ماند:

$$\sin^{-1}(0)\le\sin^{-1}(\sqrt{x-x^2})\le\sin^{-1}(\frac{1}{2})\Rightarrow 0\le y\le\frac{\pi}{6}$$

۳ـ استفاده از فرمول‌ها و روابط موجود:

۱) $x+\frac{1}{x}\ge 2\ ;\ (x>0)$

۲) $x+\frac{1}{x}\le -2\qquad (x<0)$

۳) $f(x)=|x-a|+|x-b|\Rightarrow R_f=[|b-a|,+\infty)$

۴) $f(x)=|x-a|-|x-b|\Rightarrow R_f=\left[-|b-a|,|b-a|\right]$

۵) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+1}\\[2ex] f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\end{cases}\Rightarrow R_f=[0,1)$

۶) $f(x)=\frac{2ax}{x^2+1}\to R_f=[-a,a]$

۷) $f(x)=a\sin x+b\cos x\to -\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$

۸) $f(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\Rightarrow\frac{1}{2^{n-1}}\le f(x)\le 1$

۹) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$

مثال ۲۴: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,1]$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به فرمول‌های گفته شده، گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۲۵: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(0,1)\cup(1,2]$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون $\sqrt{x^2+1}\ge 1$ می‌باشد، لذا طبق نامساوی ارائه شده در فرمول‌های گفته شده داریم: $R_f:[2,+\infty)$

مثال ۲۶: حداکثر مقدار تابع $y=2\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به فرمول در این سؤال $a=2$ و $b=1$ است، لذا داریم:

$$-\sqrt{5}\le y\le\sqrt{5}\Rightarrow \mathrm{Max}(y)=\sqrt{5}$$

مثال ۲۷: برد تابع $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ را به‌دست آورید.

پاسخ :

روش اول: با توجه به فرمول‌های گفته شده داریم:
$$\frac{1}{2^{2-1}}\le y\le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\le y\le 1 \Rightarrow R_f=[\frac{1}{2},1]$$

روش دوم: اگر فرمول یادتان نباشد:
$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=-1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \Rightarrow R_f=[\frac{1}{2},1]$$

مثال ۲۸: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ کدام فاصله است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[0,2)$ ۴) $\mathbb{R}-(0,1)$

پاسخ : گزینه «۲»
$$f(x)=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}$$

از طرفی با توجه به فرمول گفته شده داریم: $-1\le\frac{2x}{x^2+1}\le 1$، بنابراین $0\le f(x)\le 2$.

مثال ۲۹: برد تابع $y=\mathrm{Arctg}(x^2+6x+10)$ برابر است با:

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2})$

پاسخ : گزینه «۳» برای چندجمله‌ای $x^2+6x+10$ داریم: $a=1$ و $\Delta=-4$، پس $1\le x^2+6x+10<\infty$. اگر این چندجمله‌ای را α بنامیم $1\le\alpha\le\infty$ و می‌دانیم که $\mathrm{Arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$ و $\mathrm{Arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{4}\le y<\frac{\pi}{2}$.

مثال ۳۰: برد تابع $y=\frac{2}{e^x+1}$ در کدام بازه است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(2,+\infty)$ ۴) $(0,2)$

پاسخ : گزینه «۴» وقتی x به $-\infty$ میل کند، مقدار e^x **تقریباً** برابر صفر خواهد شد و در نتیجه مقدار کسر **تقریباً** برابر ۲ می‌شود. هر چقدر x بزرگ شود، مقدار e^x نیز افزایش یافته و وقتی x به $+\infty$ نزدیک شود، آن‌گاه مقدار کسر **تقریباً** برابر صفر خواهد شد، لذا $0<y<2$ می‌باشد.

مثال ۳۱: برد تابع $f(x)=2\cosh(2\cosh x)$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2},+\infty)$ ۴) $[e^2+\frac{1}{e^2},+\infty)$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم که تابع $\cosh x$ در اعداد مثبت صعودی است و مقدار آن از $+1$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. با دو بار استفاده از این نکته خواهیم داشت:
$$1\le\cosh x<\infty \Rightarrow 2\le 2\cosh x<\infty \Rightarrow \cosh 2\le\cosh(2\cosh x)<\infty \Rightarrow 2\cosh 2\le 2\cosh(2\cosh x)<\infty$$

بنابراین $2\cosh 2\le f(x)<\infty$. با توجه به ضابطه‌ی $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ داریم $2\cosh 2=e^2+\frac{1}{e^2}$. پس $e^2+\frac{1}{e^2}\le f(x)<\infty$.

مثال ۳۲: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sin x})$ کدام است؟

۱) $[0,\pi]$ ۲) $(0,\pi)$ ۳) $\{0,\pi\}$ ۴) $\{0,\pi,2\pi\}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. تابع $\mathrm{Arc}\cos u$ به شرطی تعریف شده است که $-1\le u\le 1$ باشد. بنابراین داریم: $-1\le\frac{1}{\sin x}\le 1$.

برای آن‌که بتوانیم طرفین نامساوی را معکوس کنیم، لازم است بخش‌های مثبت و منفی تفکیک شوند:
$$\begin{cases}0\le\frac{1}{\sin x}\le 1 \Rightarrow \infty>\sin x\ge 1\\ -1\le\frac{1}{\sin x}<0 \Rightarrow -\infty<\sin x\le -1\end{cases}$$

اما می‌دانیم که $-1\le\sin x\le 1$ پس این نامساوی‌ها غیرممکن هستند مگر آن‌که $\sin x=1$ یا $\sin x=-1$ باشد، پس این تابع فقط در نقاطی تعریف شده است که $\sin x=\pm 1$ باشد (یعنی در زاویه‌های $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$). حالا می‌توانیم برد $f(x)$ را مشخص کنیم:
$$\begin{cases}\sin x=1 \Rightarrow y=\mathrm{Arc}\cos(\frac{1}{1})=0\\ \sin x=-1 \Rightarrow y=\mathrm{Arc}\cos(\frac{1}{-1})=\pi\end{cases} \Rightarrow R_f=\{0,\pi\}$$

تعیین برد توابع شامل جزء صحیح ($y=\lfloor f(x)\rfloor$)

با توجه به این‌که حاصل جزء صحیح، اعداد صحیح خواهد بود، پس برای تعیین برد توابع به شکل $y=\lfloor f(x)\rfloor$ ابتدا برد تابع $f(x)$ را تعیین کرده و سپس در بازه‌ای که برای $f(x)$ به‌دست آمده، مقادیر ممکن برای $\lfloor f(x)\rfloor$ را پیدا می‌کنیم.

مثال ۳۳: برد تابع $y=\left\lfloor \sqrt{1-x^2}\right\rfloor$ کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f^2(x)=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-f^2(x) \xrightarrow{x^2\ge 0} 1-f^2(x)\ge 0 \Rightarrow -1\le f(x)\le 1 \\ f(x)\ge 0 \ (\text{شرط واضح}) \end{cases}\right\} \Rightarrow 0\le f(x)\le 1 \Rightarrow y\in\{0,1\}$$

مثال ۳۴: برد تابع $y=\lfloor \text{tg}x+\cot gx\rfloor$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{Z}-\{-1,0,1\}$ ۳) $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ ۴) $\mathbb{Z}-\{-1,0\}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که: $\text{tg}x+\cot gx=\text{tg}x+\dfrac{1}{\text{tg}x}$

بنابراین با توجه به فرمول‌های گفته شده، می‌دانیم عبارت درون جزء صحیح در تابع فوق بین ۲- و ۲ قرار ندارد و در نتیجه برد تابع شامل اعداد صحیح ۱-، ۰ و ۱ نخواهد بود.

مثال ۳۵: برد تابع $y=\left\lfloor \sin^2 x+2\sin x-1\right\rfloor$ شامل چند عضو است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» $y=\left\lfloor \sin^2 x+2\sin x-1\right\rfloor=\left\lfloor \sin^2 x+2\sin x+1-2\right\rfloor=\left\lfloor (\sin x+1)^2-2\right\rfloor=\left\lfloor (\sin x+1)^2\right\rfloor-2$

می‌دانیم $-1\le \sin x\le 1$ می‌باشد، لذا $0\le \sin x+1\le 2$ است و هنگامی هم که به توان ۲ برسد، بین صفر و ۴ است، یعنی $0\le (\sin x+1)^2\le 4$؛ لذا داریم:

$$\left.\begin{aligned} &0\le (\sin x+1)^2<1 \Rightarrow y=0-2=-2 \\ &1\le (\sin x+1)^2<2 \Rightarrow y=1-2=-1 \\ &2\le (\sin x+1)^2<3 \Rightarrow y=2-2=0 \\ &3\le (\sin x+1)^2<4 \Rightarrow y=3-2=1 \\ &(\sin x+1)^2=4 \Rightarrow y=4-2=2 \end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow R_y=\{-2,-1,0,1,2\}$$

مثال ۳۶: برد تابع $y=2^{\lfloor |x|\rfloor}$ برابر است با:

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\{1,2,4,8,\ldots\}$ ۴) $\{2,4,8,\ldots\}$

پاسخ : گزینه «۳» عبارت $\lfloor |x|\rfloor$ مقداری صحیح و غیرمنفی می‌باشد، یعنی: $\lfloor |x|\rfloor=\{0,1,2,3,\ldots\} \Rightarrow 2^{\lfloor |x|\rfloor}=\{2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots\ldots\}$

نکته ۲: دانستن رابطه‌ی $y=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & ; x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ در حل برخی سؤالات کاربرد دارد که البته نتیجه‌ی آن یعنی این‌که $y\in\{-1,0\}$ است، بیشتر مورد استفاده‌ی ما قرار می‌گیرد.

مثال ۳۷: برد تابع $f(x)=2x-2\lfloor x\rfloor+1$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[1,3)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $[0,3)$

پاسخ : گزینه «۲» $0\le x-\lfloor x\rfloor<1 \Rightarrow 0\le 2x-2\lfloor x\rfloor<2 \Rightarrow 1\le 2x-2\lfloor x\rfloor+1<3 \Rightarrow R_f=[1,3)$

مثال ۳۸: برد تابع $y=\sqrt{x-9\left\lfloor \dfrac{x}{9}\right\rfloor}+5$ کدام است؟

۱) $[5,7]$ ۲) $[4,8)$ ۳) $[5,8)$ ۴) $[4,8]$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از رابطه $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} &x-9\left\lfloor \frac{x}{9}\right\rfloor=9\left(\frac{x}{9}-\left\lfloor\frac{x}{9}\right\rfloor\right) \\ &0\le \frac{x}{9}-\left\lfloor \frac{x}{9}\right\rfloor<1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0\le x-9\left\lfloor\frac{x}{9}\right\rfloor<9 \Rightarrow 0\le\sqrt{x-9\left\lfloor\frac{x}{9}\right\rfloor}<3 \Rightarrow 5\le y<8$$

آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۱۰	مدت زمان پاسخگویی: ۲۵ دقیقه	سطح آزمون : A

۱ـ دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\cos(\sin x)}+\sin^{-1}(\frac{x^2+1}{2x})$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ اگر $f(x)=\arcsin(tg\frac{x}{10})$ و $g(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$، آن‌گاه مجموعه اشتراک برد f و g کدام است؟

۱) $0\le y\le\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ ۳) $0\le y\le\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}\le y\le\pi$

۳ـ اگر برد تابع f برابر با $[-1,2]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $g(x)=\sqrt{2+f(x)-f^2(x)}$، کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[0,\frac{3}{2}]$ ۴) $(0,1)$

۴ـ در مورد تابع f با دامنه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و برد $\mathbb{R}$ و ضابطه‌ی $f(x)=\log^3(\sec x+tgx)$، چند تا از عبارت‌های زیر درست است؟

I) تابعی زوج است. II) تابعی یک به یک است. III) تابعی فرد است. IV) تابعی پوشاست.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ اگر تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در معادله‌ی $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$ صدق کند، آن‌گاه $f(x)$ کدام مقدار زیر می‌تواند باشد؟

۱) x^2e^{x+1} ۲) e^x ۳) $\sqrt{x}e^x$ ۴) xe^{x+1}

۶ـ تابع f به ازای هر جفت عدد حقیقی x و y، در معادله‌ی تابع مقابل صدق می‌کند: $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$

اگر $f(1)=1$، آن‌گاه چند عدد صحیح $n\neq 1$ وجود دارد، به قسمی که $f(n)=n$ شود؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ـ اگر $f_0(x)=\frac{x}{x+1}$ و $f_{n+1}=f_0of_n$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$، آن‌گاه ضابطه‌ی $f_{1395}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{1395x+1}$ ۲) $\frac{x}{1396x+1}$ ۳) $\frac{x}{1394x+1}$ ۴) $\frac{1394x}{1395x+1}$

۸ـ حوزه‌ی تعریف تابع $f(x)=\log(\cos x)$ کدام است؟

۱) $x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ ۲) $x\ge 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, x\ge 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

۹ـ حاصل عبارت $Arccos\frac{1}{x}+Arcsin\sqrt{x^2+x+1}+Arctg\sqrt{x(x+1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) تعریف نشده

۱۰ـ حوزه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$ کدام است؟

۱) $(3-\pi, 3+\pi)$ ۲) $(3-2\pi, 3-\pi)$ ۳) $(3,4]$ ۴) $(3-2\pi,3-\pi)\cup(3,4]$

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۴»

پاسخنامه آزمون (۳)

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»