درسنامه: دامنه، برد، حد و پیوستگی توابع چند متغیره

بخش زیادی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مربوط به توابع یک متغیره می‌باشد که در آن‌ها با داشتن مقدار متغیر مستقل (معمولاً x)، مقدار تابع (معمولاً y) مشخص می‌شود. اما بسیاری از توابع در ریاضیات و کاربردهای آن، توابعی از دو یا چند متغیر می‌باشند. اغلب کمیت‌ها در جهان واقعی، به تعداد زیادی از متغیرها وابسته هستند. برای مثال، میزان سود فروشگاه به عوامل زیادی مانند هزینه‌ی حمل و نقل، تعداد مشتریان، مقدار خرید هر مشتری، هزینه‌ی اجاره‌ی محل فروشگاه، ... وابسته است. پس سود یک فروشگاه، تابعی چند متغیره است.

در این درسنامه توابع چند متغیره را معرفی کرده و دامنه، برد، حد و پیوستگی این توابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف توابع چند متغیره

تابع $z=x^2+y^2$ را یک تابع دو متغیره می‌گوییم، زیرا به ازای دو مقدار x و y می‌توان مقدار تابع یعنی z را به‌دست آورد. تابع $u=xe^{2y}+z^3e^{-x}$ را یک تابع سه متغیره می‌گوییم، زیرا وقتی مقدار متغیرهای x، y و z معلوم باشند، می‌توان مقدار تابع یعنی u را محاسبه کرد.

مثال ۱: اگر $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y+z}+e^{2z}$، در این صورت مقدار $f(2,1,0)$ چقدر است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا توجه کنید که تابع فوق یک تابع سه متغیره (با متغیرهای x، y و z) است. برای محاسبه $f(2,1,0)$، به ترتیب مقدار متغیرهای x، y و z برابر ۲، ۱ و ۰ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(2,1,0)=\frac{2^2}{1+0}+e^{2\times 0}=4+1=5$$

مثال ۲: اگر $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$ باشد $f(x,y)$ برابر است با:

۱) $\dfrac{x(1+y)}{1-y}$ ۲) $\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$ ۳) $\dfrac{y(1-x)}{1+y}$ ۴) $\dfrac{y^2(1+y)}{1-x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

روش اول: قرار می‌دهیم $u=x+y$ و $v=\frac{y}{x}$ در این صورت داریم: $\frac{u}{x}=\frac{x+y}{x}=\frac{y}{x}+1=v+1$ و $x=\frac{u}{v+1}$، بنابراین داریم:

$$f(u,v)=\underbrace{(x+y)}_{u}(x-y)=u.x(1-\frac{y}{x})=u.\frac{u}{v+1}(1-v)=\frac{u^2(1-v)}{1+v}\ \Rightarrow\ f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

روش دوم: در رابطه $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$، به جای x و y در هر دو طرف $x=1$ و $y=2$ قرار می‌دهیم در این صورت $f(3,2)=1^2-2^2=-3$.

در بین گزینه‌ها فقط در گزینه (۲)، وقتی به جای x و y به ترتیب ۳ و ۲ قرار دهیم حاصل (۳-) می‌شود.

مثال ۳: اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ به‌صورت $f(x,y)=(x+y,x,y)$ و $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ به‌صورت $g(x,y,z)=(x-y,z-x)$ تعریف شده باشد. در این صورت fog کدام است؟

۱) $(y+z,x+y,x+z)$ ۲) $(z-y,x-y,z-x)$ ۳) $(x-y,y-z,z-x)$ ۴) $(y-z,x,y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم منظور از fog همان $f(g(x,y,z))$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$fog=f(g(x,y,z))=f(x-y,z-x)=((x-y)+(z-x),x-y,z-x)=(z-y,x-y,z-x)$$

مثال ۴: اگر تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$، با ضابطه $f(x,y,z)=(xy,yz)$ و تابع $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $g(x,y)=(e^{x+y},e^{x-y},e^y)$ تعریف شده باشد، در این صورت fog را به‌دست آورید.

۱) (e^{2x},e^x) ۲) (e^x,e^y,e^{x+y}) ۳) (e^{x-y},e^{x+y}) ۴) (e^x,e^{x+y})

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مشابه توابع یک متغیره منظور از fog این است که $f(g(x,y))$ را به‌دست آوریم، یعنی داریم:

$$fog=f(g(x,y))=f(e^{x+y},e^{x-y},e^y)=(e^{x+y}.e^{x-y},e^{x-y}.e^y)=(e^{2x},e^x)$$

دامنه و برد توابع چند متغیره

دامنه و برد توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شود. کلیه مقادیر x و y را که به ازای آن تابع $z=f(x,y)$ تعریف شده باشد را **دامنه** تابع f می‌گوییم. مقادیر z که به ازای x و yهای مختلف در دامنه حاصل می‌شود را **برد** تابع f می‌گوییم.

مثال۵: دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\sqrt{xy}+\sin^{-1}x$ کدام است؟

۱) $D=\{(x,y)\,|-1\le x\le 1$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۲) $D=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}^+$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۳) $D=\{(x,y)\,|-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

۴) $D=\{(x,y)\,|-1<x<1$ و x و y هم علامت‌اند$\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال، یعنی xy باید نامنفی باشد، بنابراین x و y باید هم علامت باشند. عبارت مقابل $\sin^{-1}$ همواره باید بین ۱- و ۱ باشد یعنی $-1\le x\le 1$.

مثال۶: برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $[0,3]$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» از آنجائیکه $-x^2-y^2$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر می‌باشد، پس مقدار زیر رادیکال کوچکتر یا مساوی ۹ خواهد بود. لذا مقدار z از عدد ۳ نمی‌تواند بیشتر باشد، و همچنین واضح است که z منفی نیست؛ چون رادیکال با فرجه‌ی زوج نمی‌تواند منفی باشد.

مثال۷: دامنه و برد تابع $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:** ریشه مخرج کسر جزء دامنه نیست، در کسر فوق مخرج فقط در مبدأ مختصات یعنی $(0,0)$ برابر صفر می‌شود، پس دامنه f، مجموعه $\mathbb{R}^2-\{0,0\}$ می‌باشد. اما برای تعیین برد دو روش داریم:

روش اول: برای تعیین برد تابع f توجه کنید که:

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } x^2}f(x,y)=\frac{2(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

اگر در عبارت به‌دست آمده در بالا قرار دهیم $u=\frac{y}{x}$، تابع f به‌صورت $\frac{2u}{1+u^2}$ در می‌آید که بین ۱- و ۱ قرار دارد، پس برد تابع f بازه $[-1,1]$ می‌باشد.

روش دوم: تابع f را در مختصات قطبی بازنویسی می‌کنیم یعنی به جای x و y به ترتیب $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ قرار می‌دهیم، در این صورت تابع f به‌صورت مقابل در می‌آید.

$$f(r,\theta)=\frac{2r\cos\theta.r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

با توجه به اینکه همواره $\sin 2\theta$ بین ۱- و ۱ قرار دارد، پس برد f بازه $[-1,1]$ است.

سؤال دانشجو: چرا دامنه f را به‌صورت $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ نشان دادید، مگر نباید دامنه را به‌صورت $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ نشان می‌دادید؟

جواب: دقت کنید که تابع داده شده شامل دو متغیر x و y می‌باشد، و در این تابع هر کدام از x و y می‌توانند هر مقدار دلخواهی را داشته باشند (البته به جز این که همزمان صفر باشند)، بنابراین دامنه را به‌صورت $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ نشان می‌دهیم. به طور کلی در توابع یک متغیره از $\mathbb{R}$، در توابع دو متغیره از $\mathbb{R}^2$ و در توابع سه متغیره از $\mathbb{R}^3$ استفاده می‌کنیم.

مثال۸: حجم ناحیه محدود به دامنه تابع $f(x,y,z)=\sqrt{8-x^2-y^2-z^2+2x}$ چقدر است؟

۱) $\frac{32\pi}{3}$ ۲) $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$ ۳) 36π ۴) $18\pi\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، یعنی داریم:

$$8-x^2-y^2-z^2+2x\ge 0\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x\le 8\Rightarrow (x-1)^2+y^2+z^2\le 9$$

بنابراین دامنه f، ناحیه درون و روی کره‌ای به شعاع ۳ می‌باشد، که حجم آن $\frac{4}{3}\pi(3)^3=36\pi$ است.

مثال ۹: برد تابع حقیقی به معادله $Q=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ کدام بازه است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)$

پاسخ: گزینه «۱» دامنه این تابع (x,y)هایی هستند که $x^2>y^2$ باشد. برای محاسبه‌ی برد می‌دانیم که $x^2+y^2\ge x^2-y^2$، پس $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\ge 1$.

از طرف دیگر اگر مخرج به سمت صفر میل کند، داریم $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\to\infty$ لذا برد تابع $[1,+\infty)$ است.

مثال ۱۰: برد تابع دو متغیره $z=\sqrt{12-4x^2-y^2+12x+4y}$ کدام بازه است؟

۱) $[0,5]$ ۲) $[0,4]$ ۳) $[1,5]$ ۴) $[1,2\sqrt{3}]$

پاسخ: گزینه «۱» عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم.

$$12-4x^2-y^2+12x+4y=12-4(x-\frac{3}{2})^2-(y-2)^2+13=25-4(x-\frac{3}{2})^2-(y-2)^2\le 25$$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد و لذا این عبارت در بازه $[0,25]$ و بنابراین z در بازه $[0,5]$ قرار می‌گیرد.

حد توابع دو متغیره

تعریف حد: فرض کنید $X=(x,y)$ و $X_0=(x_0,y_0)$ نقطه‌ای دلخواه از دامنه تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ باشد، در این صورت می‌گوییم $\lim\limits_{X\to X_0}f(x,y)=L$ ، هرگاه:

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\delta>0\ :\ 0<|X-X_0|<\delta\ \Rightarrow |f(X)-L|<\varepsilon$$

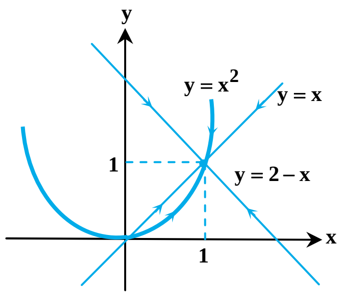
توضیح: در بالا منظور از نماد $|X-X_0|$، فاصله دو نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌باشد که از رابطه $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ به‌دست می‌آید.

تعریف فوق شبیه حد توابع یک متغیره و در واقع تعمیم همان تعریف در حالت کلی‌تر است، بنابراین همان قضایا و نتایج یک متغیره در اینجا نیز برقرار هستند. توجه داشته باشید که اغلب در تست‌ها نیازی به تعریف فوق در محاسبه حد توابع چند متغیره نداریم و مانند توابع یک متغیره بیشتر از تکنیک‌ها و روش‌های حدگیری استفاده می‌کنیم.

روش محاسبه حد توابع دومتغیره: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را در نظر بگیرید، برای وجود حد $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ باید مقدار این حد مستقل از روش میل کردن (x,y) به سمت (x_0,y_0) باشد، به عبارت دیگر؛ اگر با چند روش مختلف میل کردن، جوابهای مختلف به‌دست آید، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست. بنابراین برای بررسی وجود حد توابع دو متغیره، مسیرهای مختلفی را در نظر می‌گیریم (برای نقطه‌ی $(0,0)$ معمولاً مسیرهای $x=0$، $y=0$، $y=mx$ بررسی می‌شوند) اگر بر روی این مسیرها، حدهای مختلفی به‌دست آید حد وجود ندارد و اگر حدهای به‌دست آمده با هم برابر شوند، در مورد وجود حد نمی‌توانیم نظر قطعی بدهیم و در این صورت سعی می‌کنیم ثابت کنیم حد وجود دارد.

پرسش دانشجو: منظور از روش میل کردن چیست؟

اگر به یاد داشته باشید در حد یک متغیره برای وجود حد لازم بود حد چپ و حد راست موجود و با هم برابر باشند. در واقع در حد یک متغیره فقط دو روش برای نزدیک شدن به یک نقطه وجود داشت ولی در حدهای چند متغیره بیشمار روش برای نزدیک شدن به یک نقطه وجود دارد و برای وجود حد لازم است مقدار حد روی همه این مسیرها برابر شود. به‌طور مثال در شکل مقابل چند مسیر برای نزدیک شدن به نقطه $P(1,1)$ رسم شده‌اند.



مثال ۱۱: حد تابع $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ در نقطه $(0,0)$ کدام است؟

۱) حد ندارد ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» برای بررسی وجود حد، روی مسیر $y=mx$ به محاسبه حد می‌پردازیم، یعنی در تابع f به جای yها، mx قرار می‌دهیم و آن را به یک حد یک متغیره تبدیل می‌کنیم.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+mx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+m)}=\frac{1}{m+1}$$

جواب به‌دست آمده وابسته به m است، پس حد وجود ندارد (چون با تغییر مقدار m مقدار حد نیز عوض می‌شود.)

نکته ۱: روش دیگر بررسی حد توابع دو متغیره در نقطه‌ی $(0,0)$ استفاده از مختصات قطبی می‌باشد. با توجه به این‌که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌توانیم $f(x,y)$ را در مختصات قطبی نمایش داده، و وقتی $r \to 0$ مقدار حد را محاسبه کنیم، اگر مقدار حد وابسته به θ باشد، حد وجود ندارد. (معمولاً وقتی در مخرج عبارت $x^2 + y^2$ ظاهر شود، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.)

مثال ۱۲: مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

۱) دارای حد نیست.
۲) ۱
۳) صفر
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta\cos\theta = 0$$

نکته ۲: برای محاسبه حد توابع به‌صورت $z = f(x,y)$ (که در آن f خارج‌قسمت دو چند جمله‌ای برحسب x, y است)، در نقطه $(0,0)$ وقتی به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیدیم، می‌توانیم از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم. معمولاً در ابتدا باید بررسی کنیم که آیا تابع f در یک همسایگی محذوف مبدأ تعریف شده است یا خیر؟ (منظور این است که مبدأ تنها ریشه مخرج کسر باشد، به طور مثال، در عبارت $\frac{x^2}{x^2+y^2}$، اگر مخرج را مساوی صفر قرار دهیم، فقط وقتی صفر می‌شود که x و y هر دو صفر باشند؛ یعنی تنها ریشه مخرج، مبدأ می‌باشد. ولی در عبارت $\frac{x^2}{x^2-y^2}$، وقتی مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم، تمام نقاط روی خطوط $y = \pm x$ به‌دست می‌آیند؛ پس f در همسایگی محذوف مبدأ تعریف نشده است.

اگر تابع f در همسایگی محذوف مبدأ تعریف شده باشد؛ یعنی تنها ریشه مخرج، مبدأ باشد دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱ـ اگر هریک از جملات صورت، درجه‌ای بیشتر از تک‌تک جملات مخرج داشته باشند، حد تابع برابر صفر است. به‌طور مثال حد توابع $\frac{x^3}{x^2+y^2}$، $\frac{x^3 y}{|x|+|y|}$، $\frac{x^3y^3}{x^2+y^4}$ و $\frac{x^3+y^5}{x^2+3y^2}$ در $(0,0)$ برابر صفر است.

۲ـ اگر درجه جملات صورت، کوچکتر یا مساوی تک‌تک جملات مخرج باشد، تابع حد ندارد. به‌طور مثال توابع $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$، $\frac{xy}{x^2+y^2}$، $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ حد ندارند.

توضیح: اگر مخرج کسر ریشه‌ای به جز مبدأ داشته باشد (یعنی تابع در هیچ همسایگی محذوف مبدأ تعریف نشده باشد)، آن‌گاه در صورتی که در محاسبه حد ضابطه f قابل ساده شدن باشد به‌طوری که عامل صفر شونده حذف شود، تابع می‌تواند دارای حد باشد. (به طور مثال در تابع $\frac{x^2-y^2}{x-y}$، صورت کسر با مخرج کسر ساده می‌شود و تابع به‌صورت $(x+y)$ در می‌آید که حد آن در مبدأ موجود و برابر صفر است) و در غیر این صورت معمولاً تابع حد ندارد.

نکته ۳: در بررسی حدود توابعی مانند تابع $\frac{x^a y^b}{x^m+y^n}$ بهتر است مسیر $x^m = ky^n$ را نیز بررسی کنید. یعنی مسیری که جملات مخرج را هم‌درجه کند. همچنین انتخاب مسیری که باعث هم‌درجه شدن صورت و مخرج شود نیز در بعضی از سؤالات مناسب است.

مثال ۱۳: کدامیک از توابع زیر در مبدأ مختصات حد دارند؟

۱) $\frac{x-y}{x+y}$
۲) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
۳) $\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$
۴) $\frac{x^2y^2}{|x|+|y|}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق نکته فوق، فقط گزینه (۴) در مبدأ مختصات حد دارد، و حد آن برابر صفر است.

در گزینه (۱) درجه صورت و مخرج با هم برابر است. پس حد وجود ندارد. در گزینه (۲) نیز درجه صورت و مخرج با هم برابر است، پس حد وجود ندارد.
در گزینه (۳) با وجود اینکه درجه صورت از مخرج بیشتر است، ولی بازهم حد وجود ندارد. زیرا مخرج کسر در نقاطی به جزء مبدأ نیز صفر می‌شود. در گزینه‌ی (۳) اگر طراح سؤال مقدار $f(x,y)$ را در نقاطی که $y = \pm x$ است، به صورت جداگانه تعریف می‌کرد، حد می‌توانست موجود باشد.

مثال ۱۴: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) حد وجود ندارد ۴) ∞

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» ابتدا حد را روی مسیر $y=0$ به‌دست می‌آوریم، در این صورت داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2} \xrightarrow{\text{مسیر } y=0} \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4}=0$$

حالا مسیری را انتخاب می‌کنیم که جملات مخرج را هم درجه کند؛ یعنی مسیر $y=x^2$ را بررسی می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2} \xrightarrow{\text{مسیر } y=x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

چون حاصل حد روی مسیرهای مختلف متفاوت است، پس حد وجود ندارد.

مثال ۱۵: با چه شرطی حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$، وجود دارد؟ ($p$، m و n اعدادی طبیعی هستند.)

۱) $m+n\geq 2p$ ۲) $m+n>2p$ ۳) $m+n>2p+1$ ۴) $m+n\geq 2p+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» حد موردنظر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است و برای وجود حد لازم است درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر باشد. درجه صورت برابر $m+n$ و درجه مخرج برابر $2p$ می‌باشد، بنابراین بایستی $m+n>2p$ باشد.

مثال ۱۶: حاصل کدام حد زیر با بقیه فرق می‌کند؟

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$ ۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ ۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

بررسی گزینه (۱): چون درجه صورت بیشتر از مخرج است و مبدأ تنها ریشه مخرج است، حد موجود و برابر صفر است.

بررسی گزینه (۲): در صورت از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم، در این صورت حد به‌صورت $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ در می‌آید که چون درجه صورت و مخرج برابر است حد وجود ندارد.

بررسی گزینه (۳): چون درجه صورت بیشتر از مخرج است و مبدأ تنها ریشه مخرج می‌باشد، حد موجود و برابر صفر است.

بررسی گزینه (۴): حد موردنظر را به‌صورت $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ می‌نویسیم، طبق قانون رشد، مخرج سریع‌تر از صورت رشد می‌کند پس حد موجود و برابر صفر است.

مثال ۱۷: مقدار حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{y+x^2}$ چقدر است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) حد وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این مثال، پیدا کردن مسیری که روی آن مقدار حد صفر نشود و جواب متفاوتی به ما بدهد کمی سخت است. وقتی مسیرهای معمولی $y=mx$ ، $y=0$ و $x=0$ را بررسی می‌کنیم، روی همه‌ی آن‌ها مقدار حد، صفر می‌شود. برای یافتن مسیر مناسب، فرض می‌کنیم مسیر مطلوب ما $y=f(x)$ باشد. البته این مسیر باید از نقطه $(0,0)$ عبور کند؛ پس $f(0)=0$ است. با جایگذاری آن در حد داریم: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+f^3(x)}{f(x)+x^2}$

اگر بتوانیم $f(x)$ را طوری انتخاب کنیم که کوچکترین درجه‌ی مخرج، x^3 باشد، با استفاده از هم‌ارزی کوچکترین درجه مقدار حدی به جز صفر به‌دست خواهد آمد. برای رسیدن به این هدف باید x^2 را از مخرج حذف کنیم؛ پس مسیر $f(x)=-x^2+mx^3$ مناسب است.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+(-x^2+mx^3)^3}{(-x^2+mx^3)+x^2}=\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^6(-1+mx)^3}{mx^3} \xrightarrow{\text{کمترین درجه}} \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{mx^3}=\frac{1}{m}$$

بنابراین حد وجود ندارد.

به‌دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم یک تابع را تحت قیود یا شرایط جنبی پیدا کنیم. به طور مثال فرض کنید دو نوع کالای I و II در یک کارخانه تولید می‌شوند و $f(x,y)$ سود حاصل از فروش این دو نوع کالا باشد که x تعداد کالای از نوع I و y تعداد کالای از نوع II باشد. اما تولید این دو نوع کالا توسط سرمایه کنترل می‌شود یعنی مقیدیم تحت رابطه $g(x,y)=c$ کار کنیم. در نتیجه می‌خواهیم تابع $z=f(x,y)$ را در بین تمام (x,y)های صادق در $g(x,y)=c$ بهینه (ماکزیمم) کنیم.

برای حل مسائلی به شکل فوق معمولاً از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای یادگیری روش ضرایب لاگرانژ ابتدا این روش را در مورد یک مثال ساده به کار می‌بریم، تا اصول کلی روش مشخص شود. سپس روش را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال۲۱: مقدار مینیمم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را با شرط $x+2y=10$ به‌دست آورید.

پاسخ:

روش اول (روش ضرایب لاگرانژ): شرط داده شده در مسأله را به‌صورت $g(x,y)=x+2y-10=0$ می‌نویسیم. (یعنی کل معادله را به یک طرف منتقل و مساوی صفر قرار می‌دهیم.)

طبق روش لاگرانژ برای یافتن مینیمم یا ماکزیمم کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} g(x,y)=0 & :(\text{شرط مسأله}) \\ f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \end{cases}$$

در واقع همواره در روش لاگرانژ همواره شرط داده شده در مسأله به عنوان یک معادله مورد استفاده قرار می‌گیرد، و بقیه معادله‌های مورد نیاز به این صورت نوشته می‌شوند که از تابع موردنظر بر حسب یک متغیر (مثلاً x) مشتق می‌گیریم و آن را مساوی λ برابر مشتق شرط بر حسب همان متغیر (مثلاً x) قرار می‌دهیم. و این کار را برای همه متغیرها تکرار می‌کنیم. (λ را ضریب لاگرانژ می‌گویند) در مورد این مثال دستگاه لاگرانژ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x=\lambda\times 1 \\ 2y=\lambda\times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=10 & (1) \\ \lambda=2x & (2) \\ \lambda=y & (3) \end{cases}$$

از معادله (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $y=2x$، که با جایگزینی در معادله (۱) خواهیم داشت: $x+2(2x)=10 \Rightarrow x=2\ ,\ y=4$

به ازای $x=2$ و $y=4$ مقدار تابع f برابر ۲۰ برابر $f(2,4)=2^2+4^2=20$ به‌دست می‌آید.

روش دوم (روش جایگذاری): در برخی مسائل به جای استفاده از روش لاگرانژ، می‌توان همه‌ی متغیرها را برحسب یکی از آن‌ها محاسبه و در تابع موردنظر جایگزین کرد و سپس ماکزیمم یا مینیمم تابع یک متغیره‌ی به‌وجود آمده به‌دست آورد، ولی این روش نمی‌تواند یک جایگزین همیشگی برای روش لاگرانژ باشد. اما در این مثال می‌توانیم از این روش استفاده کنیم. از شرط داده شده نتیجه می‌شود $x=10-2y$، که با جایگزینی در تابع f، خواهیم داشت:

$$f(y)=(10-2y)^2+y^2=100-40y+5y^2$$

تابع به‌دست آمده در بالا فقط بر حسب متغیر y است، برای یافتن مقدار مینیمم مشتق آن را بر حسب y مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(y)=-40+10y=0 \Rightarrow y=4$$

به ازای $y=4$، از شرط $x+2y=10$ مقدار $x=2$ به‌دست می‌آید. یعنی مانند روش لاگرانژ نقطه مینیمم $A(2,4)$ و مقدار مینیمم تابع برابر ۲۰ است.

روش سوم (روش ساده شده لاگرانژ): در اغلب مسائل می‌توان روش لاگرانژ را بدون دخالت دادن ضریب لاگرانژ یعنی λ حل نمود. (فقط توجه داشته باشید که این یک روش تستی است و در اکثر تست‌ها محاسبات را ساده‌تر می‌کند ولی در حالتی که تابع اصلی شامل سه متغیر باشد، ولی شرط داده شده در مسأله شامل دو متغیر باشد، استفاده از آن مشکلاتی را ایجاد می‌کند.

در این روش شرط داده شده در مسأله، مانند روش اصلی به عنوان یک معادله استفاده می‌شود، و برای نوشتن سایر معادله‌ها کسرهایی در نظر می‌گیریم که صورت آن‌ها مشتق تابع بر حسب یک متغیر و مخرج آن‌ها مشتق شرط بر حسب همان متغیر می‌باشد و این کسرها را مساوی هم قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \dfrac{f_x}{g_x}=\dfrac{f_y}{g_y} \end{cases}$$

در این مثال دستگاه فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x+2y-10=0 & (1) & :(\text{شرط مسأله}) \\ \dfrac{2x}{1}=\dfrac{2y}{2} & (2) \end{cases}$$

از معادله (۲)، $y=2x$ به‌دست می‌آید که با جایگزینی در معادله (۱) نتیجه می‌شود: $x+2(2x)-10=0 \Rightarrow x=2\ ,\ y=4 \Rightarrow z=2^2+4^2=20$

اکنون که با روش لاگرانژ به صورت عملی آشنا شدید، می‌خواهیم صورت دقیق آن را نیز بیان کرده و نتایج آن را مرور کنیم.

قضیه (قاعده ضرایب لاگرانژ): فرض کنید f و g دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول پیوسته در همسایگی نقطه $P(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ باشند، و نقطه P نقطه اکسترمم تابع f باشد، به طوری که نقطه P یک نقطه مرزی سطح $g(x,y,z)=c$ نباشد و در نقطه P گرادیان مساوی صفر نباشد، آن‌گاه نقطه P در دستگاه $\begin{cases} g(x,y,z)=c \\ \vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g\end{cases}$ صدق می‌کند.

توضیحات در مورد قضیه:

۱) در قضیه بالا λ را ضریب لاگرانژ می‌گویند.

۲) نقطه P در قضیه بالا در معادله $\vec{\nabla}f(P)\times\vec{\nabla}g(P)=\vec{O}$ صدق می‌کند، زیرا طبق معادله دوم دستگاه $\vec{\nabla}f(P)$ و $\vec{\nabla}g(P)$ موازیند.

۳) بردار $\vec{\nabla}f(P)$ بر سطح رویه $g(x,y,z)=c$ در نقطه $P(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ عمود است.

۴) نقاطی که در دستگاه فوق صدق می‌کنند لزوماً نقطه اکسترمم تابع f نخواهند بود.

مثال ۲۲: ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=Lnx+Lny+3Lnz$، روی یک هشتم کره $x^2+y^2+z^2=25$ با شرط $x>0$، $y>0$، $z>0$، کدام است؟

۱) $Ln25\sqrt{15}$ ۲) $Ln75\sqrt{15}$ ۳) $Ln75\sqrt{5}$ ۴) $Ln125\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25\ ,\ x>0\ ,\ y>0\ ,\ z>0 \\ (2x,2y,2z)=\lambda(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{3}{z}) \Rightarrow \lambda=2x^2=2y^2=\frac{2z^2}{3} \Rightarrow x^2=y^2=\frac{z^2}{3}\end{cases}$$

از معادله $x^2=y^2=\frac{z^2}{3}$ و جایگزینی در $x^2+y^2+z^2=25$، نتیجه می‌شود:

$$x^2+x^2+3x^2=25 \Rightarrow 5x^2=25 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{5}\ ,\ y=\sqrt{5}\ ,\ z=\sqrt{15}$$

در این صورت ماکزیمم f برابر $Ln\sqrt{5}+Ln\sqrt{5}+3Ln\sqrt{15}=Ln75\sqrt{15}$

مثال ۲۳: مقدار ماکزیمم تابع $w=2x+y+2z$ با شرط $x^2+y^2+z^2=36$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این مثال از روش لاگرانژ ساده شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-36=0 & (1) \\ \frac{2}{2x}=\frac{1}{2y}=\frac{2}{2z} & (2)\end{cases}$$

از معادله (۲)، (با طرفین وسطین) نتیجه می‌شود $x=z=2y$. بنابراین در معادله (۱)، به جای x و z قرار می‌دهیم 2y. در این صورت معادله (۱) به‌صورت مقابل در می‌آید: $(2y)^2+y^2+(2y)^2-36=0 \Rightarrow 9y^2=36 \Rightarrow y=\pm 2$

به ازای $y=2$، $x=z=4$ به‌دست می‌آید یعنی به نقطه $A(4,2,4)$ می‌رسیم. به ازای $y=-2$، $x=z=-4$ به‌دست می‌آید یعنی به نقطه $B(-4,-2,-4)$ می‌رسیم، در نقطه A مقدار w برابر ۱۸ و در نقطه B مقدار w برابر ۱۸- به‌دست می‌آید.

مثال ۲۴: منطقه‌ای کوهستانی وجود دارد که ارتفاع در هر نقطه دلخواه مانند (x,y) از این ناحیه برابر $f(x,y)=4x^2y+y^3$ است. در این ناحیه راهی وجود دارد که تصویر آن بر صفحه xoy منحنی $2x^2+y^2=6$ است. مرتفع‌ترین و پست‌ترین نقطه واقع در این مسیر کدام است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه Harvard)

پاسخ: ارتفاع نقاط، همان تابع f است و در واقع می‌خواهیم ماکزیمم و مینیمم f را با شرط $2x^2+y^2=6$ به‌دست آوریم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=6 \\ 8xy=\lambda(4x) \\ 4x^2+3y^2=\lambda(2y)\end{cases} \Rightarrow 4x(2y-\lambda)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad y=\frac{\lambda}{2}$$

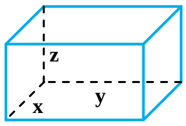
اگر $x=0$ آن‌گاه $y=\pm\sqrt{6}$ خواهد بود یعنی نقاط $A(0,\sqrt{6})$ و $B(0,-\sqrt{6})$ به‌دست می‌آیند.

با جایگذاری رابطه $y=\frac{\lambda}{2}$ در معادله سوم نتیجه می‌شود: $4x^2+3(\frac{\lambda}{2})^2=\lambda(\lambda) \Rightarrow x^2=\frac{\lambda^2}{16} \xrightarrow{\text{در معادله } 2x^2+y^2=6} \frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^2}{4}=6 \Rightarrow \lambda=\pm 4$

به ازای $\lambda=4$، نقاط $C(1,2)$ و $D(-1,2)$ و به ازای $\lambda=-4$ نقاط $E(1,-2)$ و $F(-1,-2)$ به‌دست می‌آیند. با مقایسه مقادیر f در نقاط به‌دست آمده مشخص است که نقاط C و D بیشترین و E, F کمترین ارتفاع را دارند.

$$f(0,\sqrt{6})=6\sqrt{6}\ ,\ f(0,-\sqrt{6})=-6\sqrt{6}\ ,\ f(1,2)=16\ ,\ f(-1,2)=16\ ,\ f(1,-2)=-16, f(-1,-2)=-16$$

مثال ۲۵: مطابق شکل می‌خواهیم یک استخر روباز به شکل مکعب با حجم ۳۲ متر مکعب بسازیم، ابعاد این استخر برای اینکه کمترین مصالح ساختمانی در ساخت آن مصرف شود، کدام مقادیر باید باشد؟



۱) $x=4\,,\,y=2\,,\,z=4$ ۲) $x=2\,,\,y=16\,,\,z=1$

۳) $x=4\,,\,y=4\,,\,z=2$ ۴) $z=4\,,\,x=2\,,\,y=4$

پاسخ: گزینه «۳» برای اینکه کمترین مقدار مصالح مصرف شود باید مساحت آن مینیمم شود. از طرفی مساحت این استخر با توجه به اینکه روباز است به‌صورت $S=xy+2yz+2zx$ قابل بیان است. لذا با شرط $V=xyz=32$ باید S مینیمم گردد:

$$\begin{cases} y+2z=\lambda(yz) & (1)\\ x+2z=\lambda(xz) & (2)\\ 2y+2x=\lambda(xy) & (3)\end{cases}$$

اگر رابطه (۱) را در x و رابطه (۲) را در y ضرب کرده و از هم کم کنیم، داریم:

$$2zx-2zy=0 \Rightarrow 2z(x-y)=0 \Rightarrow x=y$$

به همین ترتیب از ترکیب روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت $x=2z$، لذا داریم:

$$V=xyz=2z\times 2z\times z \Rightarrow 32=4z^3 \Rightarrow z^3=8 \Rightarrow z=2 \Rightarrow x=4\,,\,y=4$$

مثال ۲۶: حجم بزرگترین مکعب مستطیلی را که می‌توان داخل نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$، محاط کرد، چقدر است؟

۱) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{a^3}{2}$ ۳) $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$ ۴) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنیم نقطه‌ی $P(x,y,z)$ رأسی از این مکعب باشد که در $\frac{1}{8}$ اول و روی سطح نیم‌کره قرار دارد. در این صورت طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل به ترتیب $2x$، $2y$ و z خواهد بود. (اگر کره‌ی کامل را داشتیم، ارتفاع مکعب هم $2z$ می‌شد ولی در این مثال فقط نیم‌کره‌ی $z\ge 0$ را داریم.) بنابراین حجم مکعب مستطیل $V=(2x)(2y)z$ می‌باشد که تحت قید $g:x^2+y^2+z^2=a^2$ بایستی ماکزیمم شود.

$$\frac{V_x}{g_x}=\frac{V_y}{g_y}=\frac{V_z}{g_z} \Rightarrow \frac{4yz}{2x}=\frac{4xz}{2y}=\frac{4xy}{2z} \Rightarrow y^2z=x^2z\ ,\ z^2x=y^2x \Rightarrow x^2=y^2=z^2 \xrightarrow{\text{در } \frac{1}{8} \text{ اول است } P} x=y=z$$

با توجه به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ داریم $3x^2=a^2$ پس $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$ و $V=4xyz=\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

توضیح: به‌طور کلی هرگاه در قید داده شده و تابع داده شده، تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر معادله را عوض نکند، نقطه‌ی اکسترمم وقتی رخ می‌دهد که $x=y=z$ باشد.

مثال ۲۷ (سخت): کمترین حجم محدود به محورهای مختصات و صفحه‌ی مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=1$، در یک هشتم اول ناحیه‌ی $x>0$، $y>0$ و $z>0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۳» فرض می‌کنیم که صفحه مذکور در نقطه به مختصات $A(x_0,y_0,z_0)$ بر کره $x^2+y^2+z^2=1$ مماس باشد.

بردار عمود بر سطح کره در این نقطه برابر است با:

$$f:x^2+y^2+z^2-1=0$$

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y,2z)\xrightarrow{A(x_0,y_0,z_0)}(2x_0,2y_0,2z_0)$$

معادله خط عمود بر سطح: $f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

$$2x_0x-2x_0^2+2yy_0-2y_0^2+2zz_0-2z_0^2=0$$

با توجه به این که $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ می‌باشد، داریم:

$$xx_0+yy_0+zz_0=1$$

نقاط تلاقی این صفحه، با محورهای مختصات به ترتیب برابر است با $A(\frac{1}{x_0},0,0)$ و $B(0,\frac{1}{y_0},0)$ و $C(0,0,\frac{1}{z_0})$ می‌باشد.

هدف ما پیدا کردن ماکزیمم حجم هرم به‌دست آمده توسط این نقاط روی محورهای مختصات می‌باشد که داریم:

حجم هرم $V=\frac{1}{6}abc$

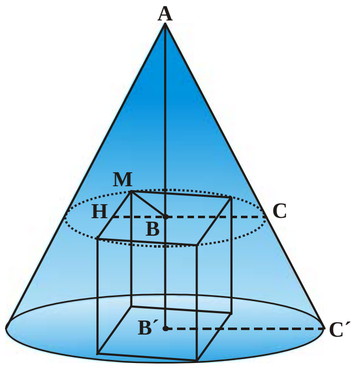
$$V=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x_0y_0z_0}\right)$$

با توجه به این که $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ می‌باشد، پس مجموع متغیرها، مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که عامل‌ها با هم برابر باشند، یعنی: $x_0=y_0=z_0$ و داریم:

$$x_0^2+x_0^2+x_0^2=1 \Rightarrow 3x_0^2=1 \Rightarrow x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}=y_0=z_0 \Rightarrow V=\frac{1}{6}\times\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^3}=\frac{1}{6}\times\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۲۸ (سخت): در مخروط قائم با ارتفاع ۹ و شعاع قاعده ۳، مکعب مستطیلی با بیشترین حجم محاط می‌کنیم. حجم این مکعب چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) ۶



پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل مقابل، اگر طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را به ترتیب x، y و z بنامیم، در این صورت شعاع دایره بالایی که وجه بالایی مکعب مستطیل روی آن قرار دارد طبق قضیه فیثاغورث در مثلث BHM که در آن BH برابر $\frac{y}{۲}$ و MH برابر $\frac{x}{۲}$ می‌باشد برابر $\sqrt{\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{۲}$ می‌باشد. حال طبق تشابه در مثلث‌های ABC و AB′C′ می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\frac{۹-z}{۹}=\frac{\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{۲}}{۳}$$

$$۳\sqrt{x^۲+y^۲}+۲z=۱۸\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+y^۲}=۱۸-۲z$$

$$۹(x^۲+y^۲)=۳۲۴-۷۲z+۴z^۲\Rightarrow ۹x^۲+۹y^۲-۷۲z=۳۲۴$$

بنابراین می‌خواهیم $V=xyz$ را با قید فوق بهینه کنیم:

$$\begin{cases}۹x^۲+۹y^۲+۴z^۲-۷۲z=۳۲۴\\ \frac{yz}{۱۸x}=\frac{xz}{۱۸y}=\frac{xy}{۸z-۷۲}\end{cases}\Rightarrow x^۲=y^۲\ ,\ ۹x^۲=۹y^۲=۴z^۲-۳۶z\Rightarrow ۱۲z^۲-۱۴۴z=۳۲۴\Rightarrow z^۲-۱۲z-۲۷=۰\Rightarrow (z-۹)(z-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{z=۹}_{\text{غ‌ق‌ق}}\ ,\ z=۳\ ,\ x=۲\ ,\ y=۲\Rightarrow V=۱۲$$

توجه: هر گاه در مسأله‌ای بخواهیم فاصله منحنی یا رویه را از مبدأ مینیمم (یا ماکزیمم) کنیم، چون فاصله یک نقطه دلخواه مانند $A(x,y)$ یا $A(x,y,z)$ (در فضا) از مبدأ برابر $d=\sqrt{x^۲+y^۲}$ یا $d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ می‌باشد، به جای آن به ترتیب از $f(x,y)=x^۲+y^۲$ و $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ استفاده می‌کنیم. چون محاسبه مشتق دو تابع اخیر ساده‌تر از حالت رادیکالی می‌باشد و وقتی f مینیمم یا ماکزیمم شود، فاصله یا همان d نیز مینیمم یا ماکزیمم می‌شود. در حالت کلی، اگر بخواهیم فاصله از نقطه‌ای (a,b,c) را مینیمم (یا ماکزیمم) کنیم، تابع $f(x,y,z)=(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲$ را در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۹: بیشترین و کمترین فاصله منحنی $x^۲+xy+y^۲=۱۲$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ و $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$ و $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$ و $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۱» قرار می‌دهیم $f(x,y)=x^۲+y^۲$، در این صورت می‌خواهیم مقادیر اکسترمم تابع f را با شرط $g(x,y)=x^۲+xy+y^۲-۱۲=۰$ به‌دست آوریم. از روش لاگرانژ ساده شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^۲+xy+y^۲-۱۲=۰ & (۱)\\ \frac{۲x}{۲x+y}=\frac{۲y}{x+۲y}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۲x^۲+۴xy=۴xy+۲y^۲\Rightarrow x^۲=y^۲ & (۲)\end{cases}$$

از معادله (۲) نتیجه می‌شود $y=\pm x$، که با جایگزینی در معادله (۱) نتیجه می‌شود:

$$y=x\Rightarrow x^۲+x^۲+x^۲-۱۲=۰\Rightarrow x=\pm۲\ ,\ y=\pm۲\Rightarrow f(x,y)=۴+۴=۸$$

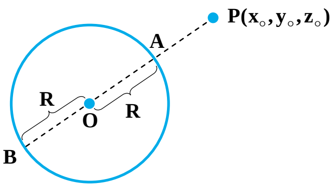
$$y=-x\Rightarrow x^۲-x^۲+x^۲-۱۲=۰\Rightarrow x=\pm۲\sqrt{۳}\ ,\ y=\pm۲\sqrt{۳}\Rightarrow f(x,y)=۱۲+۱۲=۲۴$$

بنابراین کمترین فاصله برابر $\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$ و بیشترین فاصله برابر $\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$ خواهد بود.

مثال ۳۰: فاصله نزدیکترین و دورترین نقاط روی کره $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ از نقطه $P(۴,۳,۱۲)$ چقدر است؟

۱) ۹ و ۱۵ ۲) ۱۰ و ۱۶ ۳) ۹ و ۸ ۴) ۶ و ۱۶

پاسخ: گزینه «۲»



روش اول: با توجه به شکل مقابل اگر R شعاع کره و O مرکز کره و P نقطه‌ای دلخواه درون یا بیرون کره باشد، بیشترین فاصله نقطه P از کره برابر BP یا همان $OP+R$ و کمترین فاصله نقطه از کره $AP=|OP-R|$ است. در این سؤال شعاع کره برابر ۳ و $OP=\sqrt{۴^۲+۳^۲+۱۲^۲}=۱۳$ است، بنابراین کمترین فاصله $۱۳-۳=۱۰$ و بیشترین فاصله $۱۳+۳=۱۶$ است.

روش دوم: فاصله نقطه دلخواه مانند (x,y,z) روی سطح کره از نقطه $(۴,۳,۱۲)$ برابر $\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۳)^۲+(z-۱۲)^۲}$ می‌باشد، یعنی می‌خواهیم عبارت $(x-۴)^۲+(y-۳)^۲+(z-۱۲)^۲$ را تحت قید $x^۲+y^۲+z=۹$ بهینه کنیم که در این صورت می‌توانیم از روش لاگرانژ استفاده کنیم که طولانی خواهد بود.

مثال ۳۱: نقطه‌هایی روی رویه $xy^2z^3=2$ پیدا کنید که به مبدأ نزدیک‌ترند؟

☑ **پاسخ:** تابع فاصله از مبدأ $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است. اما برای سادگی بیشتر می‌توانیم تابع $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را در نظر بگیریم و نقطه‌ی مینیمم آن را با قید $g:xy^2z^3=2$ به‌دست آوریم. از روش لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{F_x}{g_x}=\frac{F_y}{g_y}=\frac{F_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2x}{y^2z^3}=\frac{2y}{2xyz^3}=\frac{2z}{3xy^2z^2}\Rightarrow 4x^2yz^3=2y^3z^3\ ,\ 6x^2y^2z^2=2y^2z^4$$

دقت کنید که معادله‌ی $g:xy^2z^3=2$ خیال ما را از بابت مخالف صفر بودن x، y و z راحت کرده است. پس با ساده کردن عبارات داریم:

$$2x^2=y^2\ ,\ 3x^2=z^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}x\ ,\ z=\pm\sqrt{3}x$$

با جایگذاری این نتایج در معادله‌ی g داریم:

$$xy^2z^3=2\Rightarrow x(2x^2)(\pm3\sqrt{3}x^3)=2\Rightarrow\pm6\sqrt{3}x^6=2\Rightarrow x^6=\pm3^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\pm3^{-\frac{1}{4}}$$

مقادیر y و z نیز به سادگی از نتایج قبلی به دست می‌آیند:

$$y=\pm\sqrt{2}x=\pm3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2}\ ;\ z=\pm\sqrt{3}x=\pm3^{\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{1}{4}}=\pm3^{\frac{1}{4}}$$

البته توجه داشته باشید که در معادله‌ی $g:xy^2z^3=2$ مقدار y می‌تواند به دلخواه مثبت یا منفی باشد اما x و z باید هم علامت باشند یعنی یا هر دو مثبت باشند یا هر دو منفی باشند. پس نقاط $(3^{-\frac{1}{4}},\pm3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2},3^{\frac{1}{4}})$ و $(-3^{-\frac{1}{4}},\pm3^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2},-3^{\frac{1}{4}})$ جواب مسأله هستند.

نکته۱: اگر بخواهیم ماکزیمم یا مینیمم تابع f را تحت دو قید $g_1(x,y,z)=c_1$ و $g_2(x,y,z)=c_2$ به‌دست آوریم، کافی است دستگاه
$$\begin{cases}g_1(x,y,z)=c_1\\ g_2(x,y,z)=c_2\\ \vec{\nabla}f=\lambda_1\vec{\nabla}g_1+\lambda_2\vec{\nabla}g_2\end{cases}$$
را حل کنیم، ولی معمولاً می‌توان رویه‌های $g_1(x,y,z)=c_1$ و $g_2(x,y,z)=c_2$ را با هم برخورد داد و با حذف z از آن‌ها به یک قید مانند $h(x,y)=c$ رسید و مانند روش لاگرانژ با یک قید عمل کرد.

مثال ۳۲: صفحه‌ی $x+y+2z=2$، سهمی‌وار $z=x^2+y^2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. نقطه‌هایی روی این بیضی که به مبدأ نزدیک‌ترین و دورترین هستند را پیدا کنید.

۱) $(-1,-1,2)$ نزدیک‌ترین و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ دورترین.

۲) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ نزدیک‌ترین و $(-1,-1,2)$ دورترین.

۳) $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ نزدیک‌ترین و $(1,1,-2)$ دورترین.

۴) $(1,1,-2)$ نزدیک‌ترین و $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ دورترین.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فاصله از مبدأ توسط تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ به‌دست می‌آید. اما برای سادگی بیشتر می‌توانیم تابع $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را در نظر بگیریم. ما اکسترمم‌های مقید F را با دو قید $g_1:x+y+2z=2$ و $g_2:x^2+y^2-z=0$ می‌خواهیم. ابتدا سعی می‌کنیم با حذف z از این دو قید به مسأله‌ای برسیم که یک قید داشته باشد. از معادله‌ی g_1 داریم $z=\frac{2-x-y}{2}$، بنابراین با قرار دادن این تساوی در تابع F و قید g_2 داریم:

$$\begin{cases}F(x,y)=x^2+y^2+\frac{(2-x-y)^2}{4}\\ x^2+y^2-\frac{2-x-y}{2}=0\end{cases}$$

این قید جدید را می‌توانیم h بنامیم. با انجام محاسبات داریم:

$$\begin{cases}F(x,y)=\frac{1}{4}(5x^2+5y^2+2xy-4x-4y+4)\\ h(x,y)=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+x+y-2)=0\end{cases}$$

اکنون از دستگاه لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{F_x}{h_x}=\frac{F_y}{h_y}\Rightarrow\frac{\frac{1}{4}(10x+2y-4)}{\frac{1}{2}(4x+1)}=\frac{\frac{1}{4}(10y+2x-4)}{\frac{1}{2}(4y+1)}$$

با انجام طرفین وسطین و ساده کردن عبارات می‌بینیم که $y=x$ است. (هرگاه در ضابطه‌ی $F(x,y)$ و شرط $h(x,y)=0$ تبدیل x به y و y به x معادله‌ها را تغییر ندهد معلوم است که نقطه‌ی اکسترمم روی خط $y=x$ قرار دارد.) حالا با جایگذاری $y=x$ در معادله‌ی قید داریم:

$$\frac{1}{2}[2x^2+2x^2+x+x-2]=0\Rightarrow2x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ x=-1$$

حالا به نتایج $y=x$ و $z=\frac{2-x-y}{2}$ که قبلاً به‌دست آوردیم توجه کنید. اگر $x=\frac{1}{2}$ باشد، داریم $y=\frac{1}{2}$ و $z=\frac{1}{2}$. اگر $x=-1$ باشد، داریم $y=-1$ و $z=2$. در نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ داریم $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نقطه‌ی $(-1,-1,2)$ داریم $f=\sqrt{6}$. پس گزینه‌ی (۲) درست است.