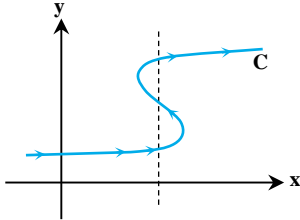


## درسنامه ۲: منحنی‌های پارامتری و تعریف توابع برداری

برای بررسی منحنی‌های فضایی از ابزارهایی مانند پارامتری کردن منحنی استفاده می‌کنیم. سرعت حرکت روی منحنی یا مقدار خمیدگی آن را با استفاده از توابعی به نام توابع برداری اندازه‌گیری می‌کنیم. در این بخش با مفهوم منحنی‌های پارامتری و توابع برداری آشنا می‌شویم.

### منحنی‌های پارامتری



فرض کنید متحرکی در صفحه‌ی  $xOy$  روی منحنی  $C$  در حال حرکت باشد. همان‌طور که می‌دانید اگر مطابق شکل یک خط عمودی، بیشتر از یک بار منحنی  $C$  را قطع کند، دیگر نمی‌توان آن را به صورت تابع  $y = f(x)$  بیان کرد. پس برای نوشتن معادله‌ی مسیر حرکت این متحرک، به جای رابطه‌ی دکارتی  $y = f(x)$  باید از شیوه‌ی دیگری استفاده کنیم. یکی از روش‌ها استفاده از معادلات پارامتری است. در این روش به جای این که  $y$  بر حسب  $x$  یا  $x$  بر حسب  $y$  نوشته شود، هر دوی آن‌ها به متغیر دیگری مانند  $t$  وابسته می‌شوند. این متغیر سوم را پارامتر می‌نامیم.

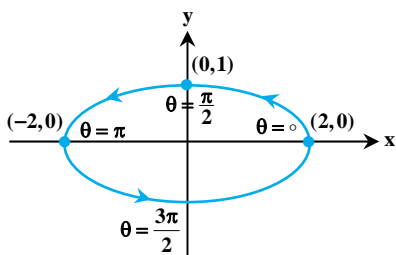
برای مثال در منحنی  $y^2 = x$  نمی‌توانید  $y$  را به صورت تابعی از  $x$  بنویسید. اگر هم سعی کنید، به تساوی  $y = \pm\sqrt{x}$  می‌رسید که تابع نیست، زیرا به

ازای هر  $x \geq 0$ ، دو مقدار  $y$  به دست می‌آید. اما همین منحنی را می‌توانیم با معادلات پارامتری  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$  بیان کنیم و حالا به ازای هر مقدار  $t$ ، فقط یک  $x$

و یک  $y$  به دست می‌آید. پس منحنی  $y^2 = x$  تابعی بر حسب  $x$  نیست اما می‌توان آن را به صورت تابعی بر حسب متغیر  $t$  نوشت. البته معادلات پارامتری

می‌توانند توابع  $y = f(x)$  را هم نشان دهند. برای مثال تابع  $y = 2x^3 + x$  را می‌توانیم به صورت  $\begin{cases} x = t \\ y = 2t^3 + t \end{cases}$  پارامتری کنیم. اگر پارامتر  $t$  نشان‌دهنده‌ی

زمان باشد، با جایگذاری مقادیر مختلف به جای آن می‌توانیم مشخص کنیم که در هر لحظه، کدام نقطه از منحنی به دست می‌آید. بنابراین معادلات پارامتری می‌توانند انواع مختلفی از منحنی‌ها را نشان دهند در حالی که معادله‌ی  $y = f(x)$  فقط برای منحنی‌هایی که تابعی از  $x$  باشند، قابل استفاده است.



به طور خلاصه یک منحنی پارامتری، منحنی‌ای است که مختصات نقاط آن با جایگذاری یک پارامتر مانند  $t$  در فرمول‌های  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  به دست می‌آیند. اگرچه اغلب اوقات از پارامتر  $t$  استفاده می‌کنیم اما این

کار الزامی نیست. برای مثال در منحنی  $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  از پارامتر  $\theta$  استفاده شده است. به ازای  $\theta = 0$

داریم  $(x, y) = (2, 0)$  و به ازای  $\theta = \frac{\pi}{2}$  نقطه‌ی  $(x, y) = (0, 1)$  به دست می‌آید و به همین ترتیب می‌توانیم

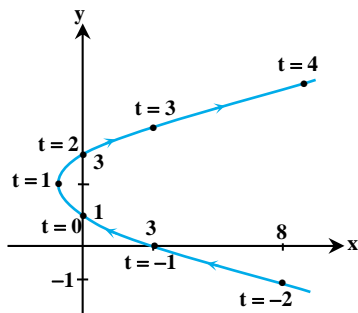
با قرار دادن مقادیر مختلف  $\theta$  نقاط مختلف  $C$  را تعیین کنیم.

**تذکره:** گاهی اوقات می‌توانیم از معادلات پارامتری  $x = x(t)$ ،  $y = y(t)$  متغیر  $t$  را حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم  $x$  و  $y$  را پیدا کنیم. برای مثال

اگر  $x = t^2 - 2t$  و  $y = t - 1$  باشد، با ایجاد مربع کامل در ضابطه‌ی  $x$  خواهیم داشت  $x = (t^2 - 2t + 1) - 1 = (t - 1)^2 - 1$  و اکنون از تساوی  $y = t - 1$  استفاده می‌کنیم و به تساوی  $x = y^2 - 1$  می‌رسیم. یک راه دیگر آن است که از رابطه‌ی  $y = t - 1$  نتیجه بگیریم  $t = y + 1$  و این نتیجه را در معادله‌ی پارامتری  $x$  قرار بدهیم:

**مثال ۱:** منحنی  $C$  با معادلات پارامتری  $x = t^2 - 2t$ ،  $y = t + 1$  تعریف شده است. این منحنی را رسم کرده و نوع آن را تعیین کنید.

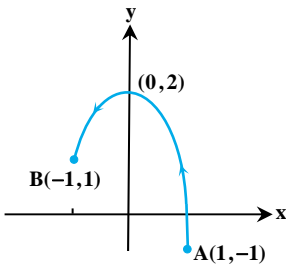
**پاسخ:** در این منحنی پارامتر  $t$  محدود نشده است. بنابراین  $-\infty < t < +\infty$  خواهد بود. با قرار دادن برخی از مقادیر  $t$  در معادلات پارامتری، چند نقطه از منحنی را مشخص می‌کنیم. سپس با حرکت در جهت افزایش  $t$  می‌توانیم این منحنی را رسم کنیم.



t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

از نمودار به دست آمده معلوم می‌شود که این منحنی یک سهمی است. البته برای اطمینان بیشتر از این موضوع می‌توانیم متغیر  $t$  را از معادلات فوق حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم بین  $x$  و  $y$  را پیدا کنیم. از تساوی  $y = t + 1$  معلوم می‌شود که  $t = y - 1$  است. حالا با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی  $x$  خواهیم داشت:

بنابراین منحنی  $x = y^2 - 4y + 3$  یک سهمی است.



**مثال ۲:** منحنی پارامتری  $y = 2\sin^2 t - \cos t$ ،  $x = \cos t$  را در فاصله  $0 \leq t \leq \pi$  رسم کنید.

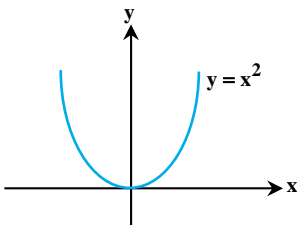
**پاسخ:** در این مثال پارامتر  $t$  در محدوده  $0 \leq t \leq \pi$  قرار گرفته است. اگر  $t = 0$  قرار دهیم نقطه‌ی  $A(1, -1)$  به دست می‌آید که ابتدای این منحنی است. به ازای  $t = \frac{\pi}{2}$  داریم  $x = 0$  و  $y = 2$  و منحنی از نقطه  $(0, 2)$  عبور می‌کند. در نهایت وقتی  $t = \pi$  قرار می‌دهیم، نقطه‌ی  $B(-1, 1)$  به دست می‌آید که انتهای منحنی است.

اگر بتوانیم از معادلات پارامتری  $x$  و  $y$  متغیر  $t$  را حذف کرده و معادله‌ی دکارتی  $x$  و  $y$  را پیدا کنیم، رسم این منحنی ساده‌تر می‌شود. از رابطه‌ی  $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$  استفاده می‌کنیم. به این ترتیب داریم:

$$y = 2(1 - \cos^2 t) - \cos t = 2(1 - x^2) - x \Rightarrow y = 2 - x - 2x^2$$

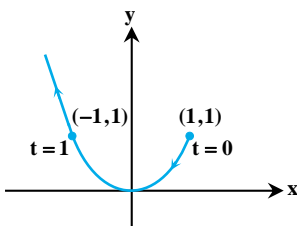
پس این منحنی بخشی از سهمی  $y = 2 - x - 2x^2$  است که در بازه  $-1 \leq x \leq 1$  قرار دارد.

### مزیت معادلات پارامتری



فرض کنید به شما اطلاع دهند که ذره‌ای روی منحنی  $y = x^2$  حرکت کرده است. ببینیم این اطلاع چقدر به شما کمک می‌کند تا نحوه‌ی حرکت آن ذره را بررسی کنید. با کمی دقت متوجه می‌شوید که بسیاری از جزئیات مجهول باقی می‌مانند. مثلاً این که آن ذره از کدام نقطه شروع به حرکت کرده است؟ در کدام جهت حرکت کرده است؟ با چه سرعتی حرکت کرده است؟ شما جواب هیچ‌کدام از این پرسش‌ها را نمی‌دانید!

حالا فرض کنید به شما اطلاع دهند که مسیر حرکت یک ذره دارای معادلات پارامتری  $x = 1 - 2t$  و  $y = (1 - 2t)^2$  در بازه  $0 \leq t < \infty$  است. ببینیم این معادله‌ها چگونه مسیر حرکت را مشخص خواهند کرد؟



اولاً با دقت به روابط پارامتری داده شده، متوجه می‌شویم که باز هم  $y = (1 - 2t)^2 = x^2$  است؛ پس ذره‌ی موردنظر روی سهمی  $y = x^2$  حرکت کرده است. با این تفاوت که این بار پاسخ همه‌ی پرسش‌های قبلی را می‌دانیم. در لحظه‌ی شروع حرکت یعنی در لحظه‌ی  $t = 0$  داریم  $x = 1$  و  $y = 1$  پس می‌دانیم که این حرکت از نقطه‌ی  $(1, 1)$  آغاز شده است. یک ثانیه بعد یعنی در لحظه‌ی  $t = 1$  داریم  $x = -1$  و  $y = 1$  پس با گذشت مدت یک ثانیه، متحرک یاد شده از نقطه‌ی  $(1, 1)$  به نقطه‌ی  $(-1, 1)$  رسیده است. با این حساب می‌توانیم سرعت حرکت را هم تشخیص بدهیم. ضمن آن که جهت حرکت نیز مشخص شده است.

بنابراین معادله‌ی پارامتری یک منحنی نسبت به معادله‌ی دکارتی آن، اطلاعات بیشتری به ما می‌دهد.

**تذکره ۲:** فرض کنید منحنی  $C$  با معادلات پارامتری  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  مشخص شده باشد. اگر در این معادلات، به جای  $t$  از  $2t$  استفاده کنیم، منحنی  $(x(2t), y(2t))$  همان منحنی قبلی است؛ فقط سرعت حرکت روی آن دو برابر شده است. (البته شیوه‌ی دقیق محاسبه‌ی سرعت را در بخش‌های بعدی خواهیم خواند). در واقع معادله‌ی پارامتری یک منحنی، منحصر به فرد نیست و ممکن است برای یک منحنی بتوانیم معادلات پارامتری متفاوتی را پیدا کنیم.

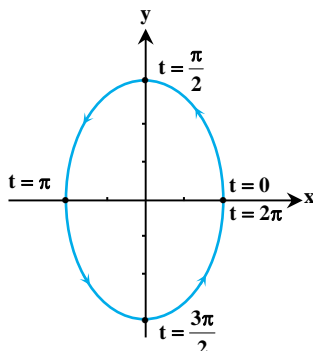
### مثال ۳:

(الف) منحنی پارامتری  $y = 3\sin t$ ،  $x = 2\cos t$  را در فاصله  $0 \leq t \leq 2\pi$  رسم کنید.

(ب) منحنی پارامتری  $y = 3\sin 2t$ ،  $x = 2\cos 2t$  را در فاصله  $0 \leq t \leq 2\pi$  رسم کرده و با منحنی (الف) مقایسه کنید.

**پاسخ:**

(الف) مطابق جدول زیر در برخی از مقادیر مهم  $t$ ، نقطه‌ی  $(x, y)$  را مشخص می‌کنیم. با حرکت در جهت افزایش  $t$  و اتصال این نقاط به یکدیگر متوجه می‌شویم که منحنی مورد نظر یک دور کامل از یک بیضی است.



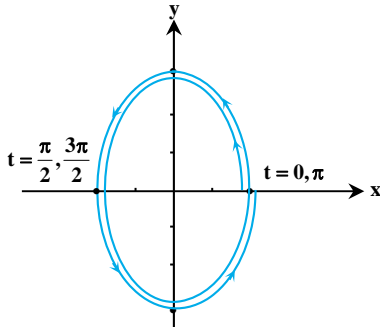
t	x	y
0	2	0
$\frac{\pi}{2}$	0	3
$\pi$	-2	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-3
$2\pi$	2	0

همان‌طور که می‌دانید با حذف  $t$  از معادلات و نوشتن معادله‌ی دکارتی می‌توانیم از بیضی بودن منحنی مطمئن شویم:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x}{2} \\ \sin t = \frac{y}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم که  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  است پس به معادله‌ی  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  می‌رسیم که یک بیضی با شعاع افقی ۲ و شعاع عمودی ۳ است.

ب) اکنون به معادلات پارامتری  $x = 2 \cos 2t$  و  $y = 3 \sin 2t$  در فاصله‌ی  $0 \leq t \leq 2\pi$  توجه می‌کنیم. با تشکیل جدول در همان مقادیر  $t$  متوجه می‌شویم که همان بیضی قبلی به‌دست می‌آید اما چون به جای  $t$  از  $2t$  استفاده شده است، سرعت حرکت روی منحنی دو برابر شده است و به همین دلیل یک بیضی کامل را در فاصله‌ی زمانی  $0 \leq t \leq \pi$  طی می‌کنیم، سپس در زمان باقی مانده که از  $t = \pi$  تا  $t = 2\pi$  ادامه دارد، یک دور دیگر از همین بیضی را طی می‌کنیم.



t	x	y
0	2	0
$\frac{\pi}{2}$	-2	0
$\pi$	2	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2	0
$2\pi$	2	0

دقت کنید که دوره‌های اول و دوم بر هم منطبق هستند ولی ما عمداً آن‌ها را با کمی فاصله نشان داده‌ایم تا بهتر بتوانید نحوه‌ی حرکت منحنی را مشاهده کنید.

## تبدیل منحنی‌های دکارتی به پارامتری

گاهی اوقات ترجیح می‌دهیم یک منحنی دکارتی را به‌صورت پارامتری بنویسیم. برای انجام این کار از دسته‌بندی زیر استفاده می‌کنیم:

### ۱- پارامتری کردن تابع $y = f(x)$

اگر ضابطه‌ی  $y$  را برحسب  $x$  دارید، کافیست فرض کنید  $x = t$  و آن‌گاه  $y = f(t)$  به‌دست می‌آید. پس معادله‌ی پارامتری منحنی  $y = f(x)$  به‌صورت  $r(t) = (t, f(t))$  خواهد بود. دقت کنید که حدود  $t$  همان حدود  $x$  هستند زیرا  $x = t$  است.

توجه: بدیهی است که معادله‌ی  $x = f(y)$  را می‌توان به‌صورت  $y = t$  و  $x = f(t)$  پارامتری کرد. در این صورت حدود  $t$ ، همان حدود  $y$  هستند.

### ۲- پارامتری کردن پاره خط AB

فرض کنیم  $A(x_1, y_1, z_1)$  و  $B(x_2, y_2, z_2)$  دو نقطه از فضای سه بعدی باشند. اگر مسیر حرکت یک متحرک، از نقطه‌ی  $A$  تا نقطه‌ی  $B$  باشد، برای پارامتری کردن این مسیر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{R}(t) = A + (B - A)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{R}(t) = (x_1 + (x_2 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)t, z_1 + (z_2 - z_1)t)$$

به عبارت بهتر، مؤلفه‌های  $\vec{R}(t)$  چنین هستند:

به ازای  $t = 0$  در نقطه‌ی  $A$  قرار داریم و در  $t = 1$  به نقطه‌ی  $B$  می‌رسیم.

### ۳- پارامتری کردن بیضی و دایره

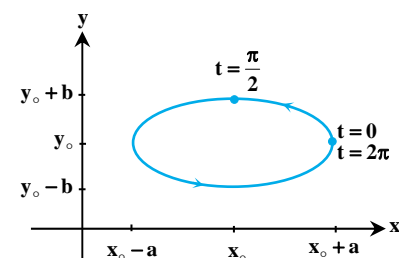
می‌دانید که معادله‌ی یک بیضی در حالت کلی به‌صورت  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  است.

$(x_0, y_0)$  مرکز بیضی و  $a$  و  $b$  شعاع‌های افقی و عمودی آن هستند. از اتحاد مثلثاتی

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  برای پارامتری کردن این معادله استفاده می‌کنیم. با این فرض که

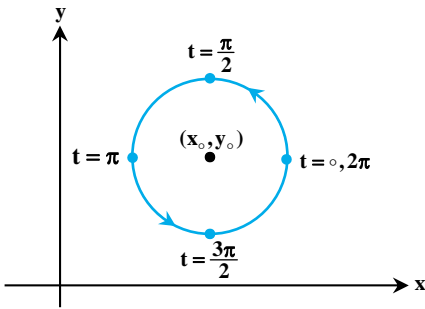
$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases} \quad \text{باشد، خواهیم داشت: } \frac{y-y_0}{b} = \sin t \text{ و } \frac{x-x_0}{a} = \cos t$$

به ازای  $t = 0$  نقطه‌ی  $(x_0 + a, y_0)$  به‌دست می‌آید که گوشه‌ی سمت راست بیضی است.



به ازای  $t = \frac{\pi}{2}$  نقطه‌ی  $(x_0, y_0 + b)$  به‌دست می‌آید که بالاترین نقطه‌ی بیضی است و به همین ترتیب در جهت مثلثاتی روی بیضی حرکت می‌کنیم.

در  $t = 2\pi$  دوباره به نقطه‌ی  $(x_0 + a, y_0)$  می‌رسیم بنابراین، در یک بیضی کامل  $0 \leq t \leq 2\pi$  است.



در معادله بیضی اگر  $a = b$  باشد، معادله‌ی دایره به دست می‌آید. بنابراین دایره‌ی  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$  که دایره‌ای به مرکز  $(x_0, y_0)$  و شعاع  $a$  است به این صورت پارامتری می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + a \sin t \end{cases}$$

برای یک دایره‌ی کامل که در جهت مثلثاتی طی می‌شود، حدود  $t$  عبارتند از:  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

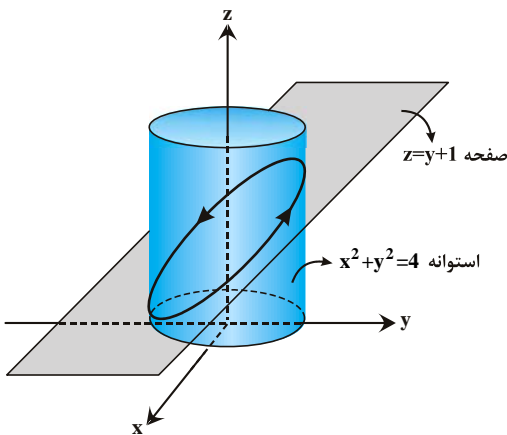
**خم‌های فضایی:** منحنی‌های پارامتری که در صفحه‌ی  $xOy$  قرار دارند، دارای دو مؤلفه به صورت  $\vec{R}(t) = (x(t), y(t))$  هستند. همان‌طور که مشاهده کردید گاهی اوقات می‌توانیم با حذف  $t$  از معادلات پارامتری، رابطه‌ی دکارتی بین  $x$  و  $y$  را پیدا کنیم. اما منحنی‌های فضایی دارای سه مؤلفه به شکل  $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  هستند. اگر بخواهیم معادله‌ی پارامتری یک خم فضایی را به معادله‌ی دکارتی تبدیل کنیم، معمولاً دو معادله دکارتی به دست می‌آید که هر کدام رویه‌ای در فضای  $\mathbb{R}^3$  هستند و منحنی مورد نظر، محل برخورد آنها با یکدیگر است.

برای مثال منحنی فضایی  $C$  با معادله‌ی پارامتری  $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$  را در نظر بگیرید. با حذف  $t$  از این معادلات به دو معادله‌ی دکارتی به شکل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2y \end{cases}$$

می‌رسیم که نشان می‌دهند منحنی  $C$  محل برخورد استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  و صفحه‌ی  $z = 2y$  است.

**مثال ۴:** منحنی پارامتری  $\vec{R}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 1 + 2\sin t)$  را در فضای سه بعدی نشان دهید.



**پاسخ:** با توجه به معادله‌ی پارامتری داده شده داریم:  $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ . رابطه‌ی بین  $z$  و  $y$  خیلی واضح است. تساوی  $z = y + 1$  برقرار است و نشان می‌دهد که منحنی  $\vec{R}(t)$  روی صفحه‌ی  $z = y + 1$  قرار گرفته است. از طرف دیگر با کمک اتحاد مثلثاتی  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  می‌توانیم رابطه‌ی  $x$  و  $y$  را بنویسیم:

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$$

معادله‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  استوانه‌ای در فضای سه بعدی است. از اینجا هم نتیجه می‌گیریم که منحنی  $\vec{R}(t)$  روی این استوانه قرار دارد. به طور خلاصه با استفاده از معادلات پارامتری  $\vec{R}(t)$  داریم:

$$\vec{R}(t): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

منحنی  $\vec{R}(t)$  محل برخورد استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  و صفحه‌ی  $z = y + 1$  است.

## توابع برداری

تابع  $f(t) = t^2 + 1$  توجه کنید. در این تابع با قرار دادن هر عدد حقیقی به جای  $t$ ، یک عدد حقیقی دیگر به دست می‌آید. مثلاً به ازای  $t = 1$  مقدار  $f(1) = 2$  به دست می‌آید. این نوع از توابع را **توابع حقیقی** می‌نامند. اما توابعی هم هستند که با قرار دادن هر عدد حقیقی در آنها یک بردار به دست می‌آید. برای مثال به تابع  $\vec{F}(t) = (2t+1)\vec{i} + 3t\vec{j} - t^2\vec{k}$  دقت کنید. با قرار دادن  $t = 1$  در این تابع به بردار  $\vec{F}(1) = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  می‌رسیم. چنین توابعی را **توابع برداری** می‌نامند. در حالت کلی یک تابع برداری به صورت  $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$  یا  $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  نوشته می‌شود. توابع حقیقی  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  و  $f_3(t)$  را مؤلفه‌های  $\vec{F}(t)$  می‌نامند. معمولاً توابع برداری را با حروف بزرگ و توابع حقیقی را با حروف کوچک نشان می‌دهیم. فرض کنید ذره‌ای در فضا در حال حرکت باشد و مکان این ذره در لحظه‌ی  $t$  توسط بردار  $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  مشخص شده باشد.  $\vec{R}(t)$  را بردار مکان می‌نامیم. بردار مکان، حالت خاصی از توابع برداری است که در بررسی مسائل فیزیکی مربوط به حرکت، سرعت و شتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد. دقت کنید که هر چه در مورد توابع برداری گفته می‌شود، برای بردار مکان  $\vec{R}(t)$  هم قابل استفاده است.

**حد توابع برداری:** برای محاسبه‌ی حد تابع برداری  $\vec{F}(t)$  در نقطه‌ی  $t_0$  کفایت از مؤلفه‌های آن در این نقطه حد بگیریم. به عبارتی داریم:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t)\vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t)\vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t)\vec{k}$$

پس حد  $\vec{F}(t)$  در  $t_0$  فقط وقتی وجود دارد که همه‌ی مؤلفه‌های آن در این نقطه دارای حد باشند.

**کج مثال ۵:** تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه  $\vec{F}(t) = \frac{\cos 2t}{\sin 4t} \vec{i} + \sin t \vec{j} + \frac{\sin t}{2 \cos t} \vec{k}$  مفروض است، حد تابع در نقطه  $t_0 = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

(۱) حد موجود نیست. (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$  (۳)  $\frac{1}{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k})$  (۴)  $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \vec{F}(t)$  باید از همه‌ی مؤلفه‌های  $\vec{F}(t)$  حد بگیریم:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \vec{F}(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\sin 4t} \vec{i} + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t \vec{j} + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{2 \cos t} \vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\sin 4t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin 2t}{4 \cos 4t} = \frac{1}{2}$$

در اولین مؤلفه، حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  ایجاد می‌شود، پس از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \vec{F}(t) = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k} = \frac{1}{2} (\vec{i} + \sqrt{2} \vec{j} + \vec{k})$$

در سایر مؤلفه‌ها حالت مبهم ایجاد نمی‌شود و مقدار حد معلوم است.

**پیوستگی توابع برداری:** یک تابع حقیقی مانند  $f(t)$  به شرطی در  $t_0$  پیوسته است که حد آن در این نقطه با مقدارش برابر باشد یعنی  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$  باشد. حالا به تابع برداری  $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  توجه کنید. اگر مؤلفه‌های  $\vec{F}(t)$  همگی در  $t_0$  پیوسته باشند، می‌گوییم  $\vec{F}(t)$  در  $t_0$  پیوسته است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

**کج مثال ۶:** به ازای چه مقادیری از  $a$  تابع  $\vec{F}(t) = \begin{cases} \sin t \vec{i} + a(t+2) \vec{j} + \frac{\tan t}{t} \vec{k} & ; t \neq 0 \\ \vec{j} + \vec{k} & ; t = 0 \end{cases}$  در نقطه  $t = 0$  پیوسته است؟

(۴)  $\frac{3}{2}$

(۳) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱) ۰

پاسخ: گزینه «۲» از صورت سؤال معلوم است که در  $t = 0$  داریم  $\vec{F}(0) = \vec{j} + \vec{k}$ . حالا مقدار  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t)$  را حساب می‌کنیم، حاصل این حد باید با  $\vec{F}(0)$  برابر باشد.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow 0} a(t+2) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} \vec{k} = 2a \vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

**مشتق‌گیری از توابع برداری:** تابع برداری  $\vec{F}(t)$  در  $t = t_0$  مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر مؤلفه‌های آن در این نقطه، مشتق‌پذیر باشند. مشتق‌گیری از تابع برداری  $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  با مشتق‌گیری از تک‌تک مؤلفه‌ها انجام می‌شود:

$$\vec{F}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

$$\vec{F}''(t) = (f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t))$$

با مشتق‌گیری دوباره از مؤلفه‌ها می‌توانیم بردار  $\vec{F}''(t)$  را بنویسیم:

**قواعد مشتق‌گیری از توابع برداری:** پیش از آغاز بحث، به اعمال جبری متنوعی که روی توابع برداری انجام می‌شوند اشاره می‌کنیم. فرض کنید  $\vec{F}(t)$  و  $\vec{G}(t)$  توابع برداری و  $h(t)$  تابعی حقیقی باشد. انواع اعمال دوتایی که با این توابع ایجاد می‌شوند عبارتند از  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$ ،  $h(t) \vec{F}(t)$ ،  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$  که مفهوم هر کدام و نحوه‌ی مشتق‌گیری از آن را شرح می‌دهیم.  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$  تابعی برداری است که از ترکیب  $h(t)$  و  $\vec{F}(t)$  به‌دست می‌آید. اگر در تابع  $\vec{F}(t)$  به جای همه‌ی  $t$ ،  $h(t)$  را قرار دهید  $\vec{F}(h(t))$  به‌دست می‌آید. برای مثال اگر  $\vec{F}(t) = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + t \vec{k}$  و  $h(t) = 3t$  باشد، ترکیب آن‌ها  $\vec{F}(h(t)) = \sin 3t \vec{i} + \cos 3t \vec{j} + 3t \vec{k}$  است. تابع برداری  $h(t) \vec{F}(t)$  حاصل ضرب یک تابع حقیقی در یک تابع برداری است. اگر  $\vec{F}(t)$  و  $h(t)$  همان توابع قبلی باشند داریم:  $h(t) \vec{F}(t) = 3t(\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + t \vec{k}) = 3t \sin t \vec{i} + 3t \cos t \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$ . علاوه بر این دو تابع برداری  $\vec{F}(t)$  و  $\vec{G}(t)$  را می‌توان در هم ضرب داخلی و خارجی کرد که آن‌ها را با  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$  و  $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$  نشان می‌دهیم. در اینجا نحوه‌ی مشتق‌گیری از این اعمال دوتایی را مرور می‌کنیم.

۱)  $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = h'(t) \vec{F}(h(t))$

۲)  $(h \vec{F})'(t) = h'(t) \vec{F}(t) + h(t) \vec{F}'(t)$

۳)  $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$

۴)  $(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$

در مورد حاصل ضرب خارجی دقت کنید که نباید توابع برداری را جابجا کنید. برای مثال اگر  $\vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$  را به‌صورت  $\vec{G}'(t) \times \vec{F}(t)$  بنویسید نادرست خواهد بود. اما در مورد حاصل ضرب داخلی جابجا کردن توابع اشکالی ایجاد نمی‌کند.