درسنامه: تعریف دنباله، بررسی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها

تعریف دنباله: به بیان ساده، هر دنباله، یک لیست از اعداد حقیقی است که این لیست جمله‌ی اول مشخصی دارد، ولی جمله‌ی آخر ندارد. به دو مثال از دنباله‌ها دقت کنید:

دنباله‌ای که با عدد ۱ شروع می‌شود و جملات بعدی با اضافه کردن یک واحد به جملات قبل ایجاد می‌شوند: $\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

دنباله‌ای که جمله‌ی اول آن عدد $-\frac{۱}{۲}$ و جملات بعدی توان‌های طبیعی جمله‌ی اول هستند: $\{-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶},...\}$

همانطور که می‌بینید؛ اغلب اوقات در دنباله‌ها، جملات بر اساس یک «قانون» نوشته می‌شوند:

جمله عمومی یک دنباله: یک دنباله را می‌توان با یک جمله‌ی عمومی که به نوعی همان ضابطه‌ی دنباله می‌باشد، مشخص نمود. جمله‌ی عمومی را معمولاً با a_n نمایش می‌دهیم. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $a_n = n = \{۱,۲,۳,۴,۵,\cdots\}$

۲) $a_n = (-۱)^{n-۱} = \{۱,-۱,۱,-۱,\cdots\}$

۳) $a_n = (-\frac{۱}{۲})^n = \{-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶},\cdots\}$

۴) $a_n = \frac{۱}{۲^n} = \{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\cdots\}$

۵) $a_n = \{۳,۳,۳,۳,۳,\cdots\}$

۶) $a_n = \frac{n-۱}{n} = \{۰,\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\cdots\}$

۷) $a_n = \{\frac{\cos(\frac{n\pi}{۲})}{n}\} = \{۰,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۴},۰,-\frac{۱}{۶},\cdots\}$

۸) $a_n = \frac{n^۲}{۲^n} = \{\frac{۱}{۲},۱,\frac{۹}{۸},۱,\frac{۲۵}{۳۲},\cdots\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ جملات یک دنباله را معمولاً داخل یک آکولاد ({ }) قرار می‌دهیم. با مشخص بودن جمله‌ی عمومی با قرار دادن اعداد طبیعی به جای n می‌توان جملات دنباله را مشخص نمود (معمولاً شروع n از عدد ۱ است.)

تذکر۱: دقت شود ضابطه‌هایی نظیر $|a_n| = n-۱$، چون به ازای یک مقدار n، دو مقدار برای a_n تحویل می‌دهد، **نمی‌توانند** یک دنباله باشند.

مثال۱: چند جمله از دنباله $\{\frac{۱+۳n}{n+۱}\}$ بین ۲ و $\frac{۸}{۳}$ قرار دارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» باید جمله‌ی عمومی دنباله را بین ۲ و $\frac{۸}{۳}$ قرار دهیم و ببینیم به ازای چه n هایی نامساوی برقرار است:

$$۲ < \frac{۳n+۱}{n+۱} < \frac{۸}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳n+۱}{n+۱} > ۲ \Rightarrow ۳n+۱ > ۲n+۲ \Rightarrow n > ۱ \\ \frac{۳n+۱}{n+۱} < \frac{۸}{۳} \Rightarrow ۹n+۳ < ۸n+۸ \Rightarrow n < ۵ \end{cases} \Rightarrow ۱ < n < ۵$$

چون n عددی طبیعی است، پس فقط به ازای $n=۲$، $n=۳$ و $n=۴$، این شرایط برقرار است.

مثال۲: اگر $a_{۲n-۱} = \frac{۴n+۱}{n-۱}$، آن‌گاه جمله «$(۲n+۱)$ام» این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۴n+۵}{n+۲}$ ۲) $\frac{۵n}{n+۱}$ ۳) $\frac{۴n+۵}{n}$ ۴) $\frac{۴n+۴}{n+۲}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر در دنباله $a_{۲n-۱}$، n را به $n+۱$ تبدیل کنیم، به $a_{۲n+۱}$ می‌رسیم، لذا داریم:

$$a_{۲n-۱} = \frac{۴n+۱}{n-۱} \Rightarrow a_{۲n+۱} = \frac{۴(n+۱)+۱}{(n+۱)-۱} = \frac{۴n+۵}{n}$$

مثال۳: دنباله $a_n = \{n^۲ - ۱۰n + ۱۶\}$، چند جمله منفی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» باید همواره $a_n < ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$a_n < ۰ \Rightarrow n^۲ - ۱۰n + ۱۶ < ۰ \Rightarrow (n-۲)(n-۸) < ۰ \Rightarrow ۲ < n < ۸ \xrightarrow{n\ \text{عددی طبیعی است}} n = ۳,۴,۵,۶,۷$$

مثال۴: جمله اول، دوم و سوم دنباله $a_n = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: برای به‌دست آوردن جملات دنباله‌هایی مانند فوق که به‌صورت مجموع می‌باشند، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

برای به‌دست آوردن $a_۱$، در جمله‌ی اول (یعنی $\frac{۱}{n}$) و در جمله‌ی آخر (یعنی $\frac{۱}{۲n}$)، مقدار n را مساوی ۱ قرار می‌دهیم. در این صورت $a_۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲\times۱} = \frac{۳}{۲}$ می‌باشد. توجه کنید که در دنباله داده شده مخرج کسرها به ترتیب ۱ واحد افزایش می‌یابد، یعنی برای به‌دست آوردن جملات دنباله از $\frac{۱}{n}$ شروع کرده و مخرج را

یک واحد یک واحد اضافه می‌کنیم تا به $\frac{1}{2n}$ برسیم و تمام کسرها را با هم جمع می‌کنیم. یعنی برای به‌دست آوردن a_1، در جمله‌ی اول $\frac{1}{1}$ و در جمله‌ی آخر $\frac{1}{2\times 1}$ داریم، پس a_1 برابر با $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1$ می‌شود. به همین ترتیب برای به‌دست آوردن a_2، در جمله‌ی اول $\frac{1}{2}$ و در جمله‌ی آخر $\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times 2}$، داریم. پس باید جملات دنباله از $\frac{1}{2}$ تا $\frac{1}{4}$ با هم جمع شوند و در نهایت برای به‌دست آوردن a_3، در جمله‌ی اول $\frac{1}{3}$ و در جمله‌ی آخر $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}$، داریم، پس باید جملات دنباله از $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{6}$ را با هم جمع کنیم.

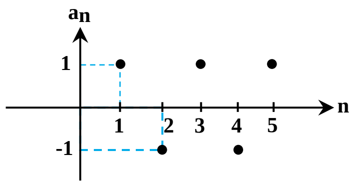
$$a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12} \quad , \quad a_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3+2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$$

نمایش نمودار یک دنباله: یک دنباله را می‌توان حالت خاصی از یک تابع نیز در نظر گرفت که دامنه آن اعداد طبیعی و برد آن اعداد حقیقی هستند. چون دنباله تابعی با دامنه‌ی اعداد طبیعی و برد اعداد حقیقی است، پس به جای محور x، محور n، و به جای محور y، محور a_n را قرار می‌دهیم و نمودار دنباله را رسم می‌کنیم. توجه شود چون n فقط می‌تواند عددی طبیعی باشد، پس شکل نمودار یک دنباله مجموعه‌ای از نقاط جدا از هم خواهد بود. به مثال زیر که رسم نمودار دنباله $a_n=\{(-1)^{n-1}\}$ می‌باشد، دقت کنید:

$a_n=\{(-1)^{n-1}\} \Rightarrow$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_n	۱	۱-	۱	۱-	۱	۱-

$\Rightarrow$



تعریف ریاضی همگرایی یک دنباله: اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، بتوانیم یک عدد طبیعی مانند M پیدا کنیم، که برای هر $n\ge M$ داشته باشیم: $|a_n-L|<\varepsilon$، آن‌گاه می‌گوییم دنباله a_n به عدد حقیقی L همگراست (منظور از $|a_n-L|$ در واقع فاصله جملات دنباله از نقطه‌ی همگرایی است).
به تعبیر دیگر دنباله $\{a_n\}$ را به عدد حقیقی L همگرا می‌گوییم، هرگاه برای تمام همسایگی‌های متقارن L به شعاع دلخواه ε، عدد طبیعی بسیار بزرگی مانند M پیدا شود که تمام جملات دنباله از شماره M به بعد درون این همسایگی قرار بگیرند.

مثال ۵: اگر $a_n=\frac{n}{n+2}$ به ازای چه مقدار M رابطه $\forall n>M: |a_n-1|<\frac{1}{100}$ خواهد بود؟

۱) ۱۰۹۷ ۲) ۱۹۸ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۹۶

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تعریف ریاضی همگرایی دنباله داریم:

$$|a_n-1|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow\left|\frac{2}{n+2}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow n+2>200\Rightarrow \mathbf{n>198}$$

مثال ۶: به ازای چه مقادیری از n، جملات دنباله $\{\frac{5n^2}{n^2+2}\}$ در همسایگی ۵ به شعاع $\frac{1}{20}$ قرار دارند؟

۱) $n<15$ ۲) $n>13$ ۳) $n>15$ ۴) $n>14$

پاسخ: گزینه «۴» حد دنباله برابر با ۵ است، بنابراین داریم:

$$|a_n-5|<\frac{1}{20}\Rightarrow\left|\frac{5n^2}{n^2+2}-5\right|<\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{10}{n^2+2}<\frac{1}{20}\Rightarrow n^2+2>200\Rightarrow n^2>198\Rightarrow \mathbf{n>14}$$

مثال ۷: به ازای چه مقادیری از n، جملات دنباله $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ از عدد ۱، کمتر از عدد ۰/۰۰۱ است؟

۱) $n>999$ ۲) $n>1000$ ۳) $n>1001$ ۴) $n>1002$

پاسخ: گزینه «۲» حد دنباله برابر با یک است، بنابراین داریم:

$$|a_n-L|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\left|\frac{n+1-n}{n}\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}\Rightarrow \mathbf{n>1000}$$

مثال ۸: جملات دنباله $\{\frac{2n^2-32}{n^2-41}\}$ برای مقادیر $n>71$ در کدام همسایگی قرار می‌گیرند؟

۱) (۲,۲/۰۱) ۲) (۱/۹۹۵,۲/۰۰۵) ۳) (۲,۲/۰۵) ۴) (۲,۲/۰۰۵)

پاسخ: گزینه «۱» حد دنباله برابر ۲ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_n-2=\frac{2n^2-32}{n^2-41}-2=\frac{50}{n^2-41}\quad (1)\ ,\ \frac{50}{n^2-41}>0\Rightarrow a_n-2>0\Rightarrow a_n>2$$

در صورت تست قید شده $n>71$، لذا $n^2>5041$، پس $n^2-41>5000$ که اگر طرفین نامساوی را عکس کنیم، داریم:

$$\frac{1}{n^2-41}<\frac{1}{5000}\xrightarrow{\text{طرفین را در عدد ۵۰ ضرب می‌کنیم}}\frac{50}{n^2-41}<\frac{50}{5000}\xrightarrow{(1)}a_n-2<\frac{1}{100}\Rightarrow a_n<2/01$$

با توجه به گزینه‌ها، بازه **(۲,۲/۰۱)** صحیح است.

بررسی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها

دنباله همگرا: اگر حد یک دنباله در زمانی که $n \to +\infty$ حساب شود و حاصل این حد یک عدد حقیقی مشخص مانند L شود، آن‌گاه می‌گوییم این دنباله همگراست و عدد همگرایی آن L است. دقت کنید برای همگرایی دنباله، حد دنباله **نباید** بی‌نهایت شود و یا **نباید** دو عدد متفاوت (یا حتی چند مقداری) شود.

دنباله واگرا: اگر حد یک دنباله در زمانی که $n \to +\infty$ حساب شود و حاصل برابر بی‌نهایت (∞) شود و یا دنباله حد مشخصی نداشته باشد، می‌گوییم این دنباله واگراست. منظور از حد مشخص نداشتن دنباله، این است که مقدار حد دنباله به ازای مقادیر مختلف n، برابر چند مقدار مختلف شود.

تذکر۲: مقدار عددی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$، همان عدد همگرایی دنباله a_n می‌باشد.

تذکر۳: در این فصل هر جا می‌نویسیم $n \to \infty$ منظورمان این است که $n \to +\infty$. بنابراین اگر در برخی سؤالات علامت مثبت را کنار ∞ نگذاشته‌ایم، منظورمان این نیست که ∞ همان $\pm\infty$ است، بلکه در مورد دنباله‌ها فقط $+\infty$ مدنظر ما است.

مثال۹: **واگرایی و یا همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.**

پاسخ:

۱) $a_n = \{n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ چون حد برابر $+\infty$ شده، پس دنباله واگراست.

۲) $a_n = \{(-1)^n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = \pm 1$ مقدار حد همواره دو مقدار ۱ یا ۱- را دارد، لذا دنباله واگراست.

۳) $a_n = \dfrac{n+1}{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1$ این دنباله همگرا به عدد یک است.

نکته۱: اگر C عددی حقیقی باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} C^n$ با شرط $|C|<1$ (یا به عبارت دیگر $-1<C<1$) همواره همگرا به صفر است و به ازای $|C|>1$، دنباله واگراست چون حاصل حد دنباله $\{C^n\}$ برابر ∞ می‌شود.

مثال۱۰: **به ازای چه مقداری از x دنباله $\{(\frac{x}{x+1})^n\}$ همگرا می‌شود؟**

۱) $x > -\frac{1}{2}$ ۲) $x < -\frac{1}{2}$ ۳) $x = -\frac{1}{2}$ ۴) همواره همگراست.

پاسخ: گزینه «۱» باید $\frac{x}{x+1} = 1$ و یا $|\frac{x}{x+1}| < 1$ باشد تا دنباله همگرا شود:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = x+1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow \text{غیر ممکن است} \\ |\dfrac{x}{x+1}| < 1 \Rightarrow |x| < |x+1| \Rightarrow x^2 < x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \mathbf{x > -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

مثال۱۱: **کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد دنباله $\{a_n\}$ درست است؟**

۱) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، دنباله $\{(-1)^n a_n\}$ نیز همگراست.
۲) اگر دنباله $\{a_n\}$ واگرا باشد، دنباله $\{(-1)^n a_n\}$ همگراست.
۳) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، دنباله $\{a_n^2\}$ نیز همگراست.
۴) اگر دنباله $\{a_n^2\}$ همگرا باشد، دنباله $\{a_n\}$ نیز همگراست.

پاسخ: گزینه «۳» اگر فرض کنیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 = L \times L = L^2$ پس $\{a_n^2\}$ همگراست.

بررسی گزینه (۱): اگر فرض کنیم $a_n = 1$، آن‌گاه $\{(-1)^n\} = \{(-1)^n \times 1\}$ که می‌دانیم یک دنباله نوسانی و واگراست، پس گزینه (۱) غلط است.

بررسی گزینه (۲): اگر فرض کنیم $a_n = n$، آن‌گاه $\{(-1)^n a_n\} = \{(-1)^n n\}$ و واضح است این دنباله هم واگراست، پس گزینه (۲) غلط است.

بررسی گزینه (۴): اگر فرض کنیم $a_n = (-1)^n$، آن‌گاه $a_n^2 = (-1)^{2n} = 1$، که دنباله همگراست، ولی خود دنباله $\{a_n\}$ واگراست.

نکته۲: با اضافه یا کم کردن تعداد محدودی جمله به یک دنباله همگرایی و یا واگرایی آن دنباله تغییری نمی‌کند.

محاسبه حدود و عدد همگرایی در دنباله‌ها

در محاسبه حد دنباله‌ها، کلیه قوانینی که برای توابع در $+\infty$ وجود دارند، قابل استفاده هستند. فقط باید به این نکته توجه شود که در دنباله‌ها، دامنه اعداد طبیعی می‌باشد. از جمله نکاتی که در محاسبه حد دنباله‌ها کاربرد بیشتری دارند، به‌صورت زیر است:

۱) وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه هم‌ارزی زیر را داریم (اگر k زوج باشد، باید $a > 0$ باشد.)

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[k]{an^k + bn^{k-1} + \cdots}) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a}\,|n + \frac{b}{ka}|$$

واضح است وقتی k فرد است، علامت قدرمطلق لازم نیست.

مثال ۱۲: دنباله $a_n = \{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2 - 2n}\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [\sqrt{1}\,|n + \frac{1}{1\times 2}| - \sqrt{1}\,|n - \frac{3}{1\times 2}|] = \lim_{n\to\infty} (n + \frac{1}{2} - n + \frac{3}{2}) = \frac{4}{2} = 2$$

مثال ۱۳: حاصل $\lim_{n\to+\infty} (\sin^2 \pi\sqrt{n^2+n})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) حاصل حد نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۲» یک سؤال بسیار جالب، با ظاهری جذاب که در نظر اول تستی ساده به نظر می‌رسد! اما احتمال اشتباه در حل این تست و انتخاب گزینه (۴) بسیار زیاد است! برای حل این سؤال از اطلاعات مثلثاتی و هم‌ارزی در بی‌نهایت استفاده می‌کنیم: عبارت زیر رادیکال هم‌ارز با $(n + \frac{1}{1\times 2})$ می‌باشد:

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2[\pi\sqrt{n^2+n}] \sim \lim_{n\to+\infty} \sin^2[\pi(n + \frac{1}{2})] = \lim_{n\to+\infty} \sin^2(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (\pm\sin\frac{\pi}{2})^2 = 1$$

توضیح در مورد قسمت نهایی محاسبه‌ی فوق: می‌دانیم وقتی n زوج باشد $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2}$ و وقتی n فرد باشد، $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2}$ می‌شود، اما توجه کنید در توان سینوس عدد ۲ قرار دارد و این یعنی این که همواره مقدار حد برابر با ۱ می‌شود.

۲) اگر $|c| > |b| > |a|$، آن‌گاه هم ارزی زیر را داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} (a^n + b^n + c^n) \simeq \lim_{n\to+\infty} a^n$$

مثال ۱۴: حاصل $\lim_{n\to\infty} (\frac{2^n + 3^n + 5^n}{4^n + 5^n + 10^n})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۱» در مخرج کسر، عدد ۱۰ از بقیه بزرگتر و در صورت کسر عدد ۵ از بقیه بزرگتر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{2^n + 3^n + 5^n}{4^n + 5^n + 10^n}) \simeq \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{10^n} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{5}{10})^n = 0$$

۳) هم‌ارزی زیر در محاسبه حدود در بی‌نهایت کاربرد زیادی دارد. در این هم‌ارزی P عددی ثابت و بزرگتر از -1 است:

$$\lim_{n\to+\infty} (1^P + 2^P + 3^P + \cdots + n^P) \sim \lim_{n\to+\infty} (\frac{n^{P+1}}{p+1}) \quad , \quad (P > -1)$$

البته در برخی مسائل ممکن است هم‌ارزی فوق به شکل دقیق‌تر زیر نیز استفاده شود:

$$\lim_{n\to+\infty} (1^P + 2^P + 3^P + \cdots + n^P) \sim \lim_{n\to+\infty} (\frac{n^{P+1}}{p+1} + \frac{n^P}{2}) \quad , \quad (P > -1)$$

که حالت‌های خاصی از آن به‌صورت زیر است:

$$P = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \sim \lim_{n\to\infty} (\frac{n^2}{2})$$

$$P = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \sim \lim_{n\to\infty} (\frac{n^3}{3})$$

$$P = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \sim \lim_{n\to\infty} (\frac{n^4}{4})$$

با استفاده از فرمول گفته شده، دو هم‌ارزی مقابل نیز حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(2+4+6+\cdots+2n) \sim \lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(1+3+5+\cdots+(2n-1)) \sim \lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) \end{cases}$$

مثال ۱۵: حاصل حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+\cdots+n^{15})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1}{13}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به فرمول، در این تست $P=15$، لذا داریم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+\cdots+n^{15}) \sim \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{16}}(\frac{n^{16}}{16}) = \frac{1}{16}$$

مثال ۱۶: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از هم‌ارزی گفته شده، داریم:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}}{2n^2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۱۷: حاصل $A = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2\cdots+(2n)^2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ : گزینه «۱» صورت و مخرج را می‌توان با استفاده از هم‌ارزی گفته شده ساده کرد:

$$\lim\limits_{n\to\infty}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \sim \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3} \quad ، \quad \lim\limits_{n\to\infty}(1^2+2^2+\cdots+(2n)^2) \sim \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^3}{3} \Rightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{8n^3}{3}}) = \frac{1}{8}$$

۴) اگر a و b اعداد بزرگ‌تر از یک و $k>0$ آن‌گاه در بی‌نهایت سرعت رشد بعضی از توابع به‌صورت زیر است (علامت $\prec$ به معنی بسیار کوچک‌تر است.)

$$\boxed{\log_a n \prec n^k \prec b^n \prec n! \prec n^n}$$

مثال ۱۸: دنباله $a_n = \frac{3n^n+n!}{3n^n+4n!}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به قدرت رشد، می‌دانیم قدرت رشد n^n از $n!$ بیشتر است، بنابراین داریم:

$$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3n^n}{3n^n} = 1$$

مثال ۱۹: دنباله $\{\cos(\frac{\log n}{n})\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) π ۴) -1

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(\frac{\log n}{n}) = \cos(\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\log n}{n})) = \cos(0) = 1$$

توجه شود در محاسبه حد عبارت $\frac{\log n}{n}$ چون سرعت رشد مخرج (یعنی n) از صورت کسر (یعنی $\log n$) بیش‌تر بود، حاصل حد برابر صفر شد.

مثال ۲۰: مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}[(\frac{1}{e^e})^n+(\frac{1}{e^\pi})^n+(\frac{1}{\pi^e})^n+(\frac{1}{\pi^\pi})^n]^{\frac{1}{n}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{\pi^\pi}$ ۲) $\frac{1}{e^e}$ ۳) $\frac{1}{e^\pi}$ ۴) $\frac{1}{\pi^e}$

پاسخ : گزینه «۲» باید با استفاده از قانون رشد ببینیم کدام‌یک از جملات رشد بیشتری دارند. بزرگ‌ترین جمله، به ازای کمترین مقدار مخرج به‌دست می‌آید.

واضح است $\pi>3>e$، پس داریم: $\pi^\pi>\pi^e>e^\pi>e^e$، یعنی e^e از همه کوچکتر است، پس $\frac{1}{e^e}$ از همه بزرگتر است: $\lim\limits_{n\to+\infty}[(\frac{1}{e^e})^n]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e^e}$ = حاصل حد

۵) قضیه ساندویچ: سه دنباله a_n، b_n و c_n را در نظر بگیرید، اگر $a_n \le c_n \le b_n$ و داشته باشیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$ خواهد بود.

مثال ۲۱: اگر دنباله $a_n = ۲ + \dfrac{\sin n!}{n+۲}$ و $b_n = ۲ + \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n+۲}}$ و همچنین $a_n < c_n < b_n$ باشد، آن‌گاه دنباله c_n به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا حدود a_n و b_n را حساب می‌کنیم، دقت شود در محاسبه حد a_n، همواره مقدار $-۱ \le \sin n! \le ۱$ است:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(۲+\frac{\sin n!}{n+۲}\right) = ۲ + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۱}{n+۲}\right)\times \sin n! = ۲ + ۰ \times (-۱ \le \text{عددی} \le ۱) = ۲ + ۰ = ۲$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(۲+\frac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n+۲}}\right) = ۲ + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n+\cos n}{\sqrt{n+۲}}\right) = ۲ + \frac{\text{عدد حقیقی}}{\text{بی‌نهایت}} = ۲ + ۰ = ۲$$

چون $a_n < c_n < b_n$، لذا بر طبق قضیه ساندویچ $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = ۲$ خواهد بود.

مثال ۲۲: اگر $a_n = \dfrac{۱}{(n+۱)^۲} + \dfrac{۱}{(n+۲)^۲} + \cdots + \dfrac{۱}{(n+n)^۲}$، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۱}{e}$ ۳) $\dfrac{۱}{\sqrt{e}}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم به ازای عدد طبیعی k همواره داریم: $\dfrac{۱}{n^۲} < \dfrac{۱}{(n+k)^۲} < ۰$، بنابراین داریم:

$$۰ < \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \frac{۱}{(n+۲)^۲} + \cdots + \frac{۱}{(n+n)^۲} < \underbrace{\frac{۱}{n^۲} + \frac{۱}{n^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲}}_{\text{n مرتبه}}$$

$$\Rightarrow ۰ < a_n < \frac{n}{n^۲} \Rightarrow ۰ < a_n < \frac{۱}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(۰) < \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} \Rightarrow ۰ < \lim_{n\to\infty} a_n < ۰ \Rightarrow \text{طبق قضیه ساندویچ}: \lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

سؤال دانشجو: آیا از این که وقتی $n \to +\infty$، مقدار تمام جملات صفر می‌شود، نمی‌شد از همان ابتدا نتیجه گرفت، حاصل مجموع نیز صفر است!؟

پاسخ: این استدلال غلط است؛ برای این که وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه شما به اندازه‌ی بی‌نهایت صفر دارید، یعنی حاصل خواسته شده $۰ \times \infty$ است و می‌دانیم مبهم است. البته در این سؤال خاص، حاصل حد با محاسبه نیز، صفر شده است. اما مثلاً به حد زیر توجه کنید:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^۲+۱} + \frac{n}{n^۲+۴} + \frac{n}{n^۲+۹} + \cdots + \frac{n}{۲n^۲}\right)$$

از محاسبه حد مجموع به کمک انتگرال می‌دانیم، حاصل این حد برابر با $\dfrac{\pi}{۴}$ است و این در حالی است که هر جمله‌ی دنباله به تنهایی به صفر میل می‌کند! **توصیه غیر رسمی:** اگر در این‌گونه سؤالات، اختلاف درجه‌ی n، در صورت و مخرج کسر (درجه صورت ـ درجه مخرج) از عدد $\underline{۱}$ بیشتر باشد، آن‌گاه می‌توان از همان ابتدا گفت حاصل حد برابر صفر است، اما اگر این اختلاف یک و یا کمتر از یک باشد، باید حاصل حد به طور دقیق محاسبه شود.

مثال ۲۳: جمله‌ی عمومی دنباله a_n در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < a_n^۳ - ۲a_n^۲ + a_n - ۱ < \frac{n^۲+n}{n^۲+۳}$$

در مورد این دنباله کدام گزینه صحیح است؟

۱) همگرا به ۲ است. ۲) همگرا به یک است. ۳) واگراست. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نامساوی داده شده، استفاده از قضیه ساندویچ به ذهن می‌رسد. لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{+\infty} = \cos(۰) = ۱$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^۲+n}{n^۲+۳}\right) \sim \lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{n^۲} = ۱$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ، حد عبارت داده شده برابر با ۱ است:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n^۳ - ۲a_n^۲ + a_n - ۱) = ۱ \Rightarrow a_n^۳ - ۲a_n^۲ + a_n - ۲ = ۰ \Rightarrow a_n^۲(a_n - ۲) + (a_n - ۲) \Rightarrow (a_n^۲+۱)(a_n-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow a_n^۲ = -۱ \Rightarrow \text{امکان ندارد} \\ a_n - ۲ = ۰ \Rightarrow a_n = ۲ \end{cases}$$

بنابراین دنباله به عدد **۲** همگراست.

مثال ۲۴ (سخت): اگر $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+\cos^2(\frac{n^{1395}}{n+1})}$ و $B=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A=B+1$ ۲) $B=A+1$ ۳) $A-B=0$ ۴) $A-B=\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با یک سؤال بسیار جالب و نسبتاً سخت روبه‌رو هستیم که البته با کمی ذکاوت و زرنگی ساده حل می‌شود! طبیعی است A و B باید جداگانه حساب شوند (چون ارتباطی بین توابع A و B وجود ندارد که مثلاً بخواهیم $A-B$ را حساب کنیم.) ابتدا مقدار A را حساب می‌کنیم. دقت کنید؛ عبارت زیر رادیکال را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$\sqrt[n]{2\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+\cos^2(\frac{n^{1395}}{n+1})}=\sqrt[n]{\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+\cos^2(\frac{n^{1395}}{n+1})}=\sqrt[n]{\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+1}$$

از طرفی واضح است عبارت درون رادیکال بزرگتر از یک می‌باشد (چون عدد یک، بعلاوه‌ی مقداری مثبت شده است)، پس داریم:

$$1\le\sqrt[n]{2\sin^2(\frac{n^{1395}}{n+1})+\cos^2(\frac{n^{1395}}{n+1})}\le\sqrt[n]{2}$$

اما طبق نکته می‌دانیم $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$، پس طبق قضیه‌ی ساندویچ، حاصل حد خواسته شده برابر با یک است. حالا سراغ محاسبه‌ی مقدار B می‌رویم:

مقدار B را با توجه به قضیه‌ی ساندویچ می‌توان حساب کرد، چون داریم:

$$1\le[1+n(1+\cos n)]^{\frac{1}{2n+n\sin n}}\le(1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}$$

نامساوی فوق به ازای حداقل و حداکثر مقادیر ممکن برای $\cos n$ نوشته شده است، یعنی وقتی $\cos n=-1$، آن‌گاه $1+n+n\cos n=1+n-n=1$ می‌باشد. و وقتی $\cos n=1$، آن‌گاه $1+n+n\cos n=1+n+n=1+2n$ می‌باشد.

خُب حالا باید مقدار حد عبارت سمت راست را حساب کنیم، با قرار دادن $n\to+\infty$ به حالت ابهام ∞^0 می‌رسیم، اما بهتر است مقدار این حد را نیز با استفاده از قضیه‌ی ساندویچ محاسبه کنیم، برای این منظور دوباره مقادیر حداقل و حداکثر را برای $\sin n$ در نظر می‌گیریم و لذا نامساوی زیر را داریم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{\frac{1}{n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{\frac{1}{3n}}\qquad(*)$$

حدود چپ و راست به راحتی با استفاده از نکته‌ی $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f(n)}=1$، حاصلشان برابر با <u>۱</u> می‌شود، چون داریم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+2n}=1\ ,\quad \lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{\frac{1}{3n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+2n)^{\frac{1}{3}}}=1$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده در نامساوی (*) برابر با <u>۱</u> می‌شود و لذا حد B نیز برابر با <u>۱</u> به‌دست می‌آید و $A=B$ است.

مثال ۲۵ (سخت): اگـر $A=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}})$ و $B=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$، آن‌گـاه کـدام گزینه زیر صحیح است؟

۱) $A-B=1$ ۲) $B-A=1$ ۳) $A=B$ ۴) $B-A=\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال باید مقدار هـر دو حـد را حساب کـنیم، ابتـدا مقـدار A را حسـاب مـی‌کـنیم: دقـت کنیـد تعـداد جملـه‌هـا «$n+1$»تاست، واضح است هر کدام از جملات مجموع داده شده به تنهایی بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ و کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ هستند، پس داریم:

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}\Rightarrow1\le\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}]\le1$$

پس طبق قضیه ساندویچ مقدار A برابر با <u>۱</u> است.

حالا می‌رویم سراغ حد B: برای پاسخ به این قسمت هم باید از قضیه‌ی ساندویچ استفاده کنیم: واضح است تمام جملات داخل پرانتزها از صفر بزرگتر هسـتند و از طرفی حاصل‌ضرب آن‌ها از $(\sqrt{2}-1)^n$ کوچکتر است، یعنی داریم:

$$0<(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})<(\sqrt{2}-1)^n$$

از طرفی مقدار «$\sqrt{2}-1$» حدوداً $0/4$ است که وقتی به توان بی‌نهایت برسد، برابر با صفر می‌شود. پس حاصل حد خواسته شده برابر با صفر می‌شود.

سؤال دانشجو: چرا با وجود این که فرجه‌ی رادیکال آخر «$2n+1$» است، تعداد جملات را n تـا در نظـر گـرفتیم و در قسـمت سـمت راسـت نامساوی عبـارت $(\sqrt{2}-1)^n$ را نوشتیم؟

پاسخ: این یک تحلیل اشتباه است، برای این که تعداد جملات در این تصاعد به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\frac{\text{جمله‌ی اول}-\text{جمله‌ی آخر}}{2}+1=\frac{(2n+1)-3}{2}+1=\frac{2(n-1)}{2}+1=n-1+1=n$$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا جمله‌ی عمومی سری را در مزدوج $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ یعنی در عبارت $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$ ضرب می‌کنیم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{[(\sqrt{n})^2-(\sqrt{n+1})^2]\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{f_{n+1}})=f_1-\lim_{n\to+\infty}f_{n+1}=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1$$

مثال ۱۹: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}]$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» عبارت داخل کروشه برابر با $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$ می‌باشد که با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، به یک مجموع تلسکوپی تبدیل می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(2k-1)-(2k+1)}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\underbrace{\sqrt{2k-1}}_{f_k}-\underbrace{\sqrt{2k+1}}_{f_{k+1}})=-\frac{1}{2}[\sqrt{2\times1-1}-\sqrt{2n+1}]=-\frac{1}{2}[1-\sqrt{2n+1}]$$

پس سؤال از ما حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}[-1+\sqrt{2n+1}]$ را خواسته است و بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1+\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n}}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}.\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲۰: حاصل $S=\sum_{n=1}^{10}n(n!)$، کدام است؟

۱) $10!$ ۲) $11!$ ۳) $10!-1$ ۴) $11!-1$

پاسخ: گزینه «۴» اگر جمله‌ی عمومی را به این فرم بنویسیم، حاصل سری به راحتی محاسبه می‌شود:

$$S=\sum_{n=1}^{10}[(n+1)-1](n!)=\sum_{n=1}^{10}[(n+1)n!-n!]$$

می‌دانیم $n!(n+1)=(n+1)!$ است، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{10}(n+1)!-n!=-\sum_{n=1}^{10}(\underbrace{n!}_{f_n}-\underbrace{(n+1)!}_{f_{n+1}})=-[1!-(10+1)!]=11!-1$$

مثال ۲۱: اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+k}{(n+k+1)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{kk!}$ ۲) $\frac{1}{k!}$ ۳) $\frac{1}{k}$ ۴) $\frac{k!}{(k+1)!}$

پاسخ : گزینه «۲» در این سؤال نیز عبارتی شامل فاکتوریل داریم، بنابراین سعی می‌کنیم صورت کسر را شبیه مخرج کسر کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+k}{(n+k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)-1}{(n+k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(n+k+1)}{(n+k)!(n+k+1)}-\frac{1}{(n+k+1)!}]=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{(n+k)!}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+k+1)!}}_{f_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(0+k)!}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+k+1)!}=\frac{1}{k!}-0=\frac{1}{k!}$$

مثال ۲۲: حاصل سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+4)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{36}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه «۴» این نوع سری‌ها که عبارت درون سری به‌صورت کسری و چند جمله‌ای می‌باشد و عبارتی شامل فاکتوریل در مخرج کسر وجود دارد، دارای یک روش حل منظم هستند. در واقع در این نوع سری‌ها که یک عبارت درجه‌ی اول بر حسب n که معمولاً به‌صورت $(n+\alpha)!$ می‌باشد در مخرج کسر، و عبارتی شامل توان‌های مختلف n در صورت کسر قرار دارد، روش حل اینست که؛ باید سعی کنیم عبارت صورت کسر را طوری بازنویسی کنیم که در ترکیب آن «عین عبارت مخرج کسر» (البته بدون فاکتوریل) ایجاد شود. پس از این مرحله سعی می‌کنیم در کسری که موردنیاز است با استفاده از قاعده‌ی $(n+\alpha)!=(n+\alpha-1)!(n+\alpha)$، از عبارت فاکتوریل‌دار مخرج کسر، یک واحد کم کرده و آن را به‌صورت دو پرانتز که در هم ضرب می‌شوند، بنویسیم و با «صورت کسر» عمل ساده‌سازی را انجام دهیم. مثلاً در این سری در مخرج کسر $(n+4)!$ داریم، بنابراین باید در صورت کسر «$n+4$» ایجاد کنیم.

این موضوع به راحتی و به شکل زیر صورت می‌گیرد:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+4)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)-1}{(n+4)!}=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n+4}{(n+3)!(n+4)}-\frac{1}{(n+4)!}]=\sum_{n=1}^{\infty}[\underbrace{\frac{1}{(n+3)!}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+4)!}}_{f_{n+1}}]$$

همان‌طور که می‌بینید به یک سری تلسکوپی رسیده‌ایم، بنابراین داریم: $S=\frac{1}{(1+3)!}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+4)!}=\frac{1}{4!}-0=\frac{1}{24}$

توضیح: بعداً در درسنامه‌ی بسط مکلورن، با سری‌هایی نظیر فوق برخورد خواهیم کرد و در آنجا نیز برای ساده‌سازی از همین روش استفاده خواهیم کرد. دقت کنید؛ حاصل این سری پس از ایجاد فرم سری تلسکوپی یعنی رسیدن به سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}$ با دانستن بسط e، و بدون استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی نیز قابل تعیین است. هر چند آموزش بسط مکلورن مربوط به این درسنامه نیست، اما حل این سری با استفاده از بسط e را در این قسمت نیز ارایه می‌دهیم، می‌دانیم بسط e به‌صورت مقابل است: $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Rightarrow\begin{cases}e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}\\ e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}=e-(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}=e-(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(n+3)!}-\frac{1}{(n+4)!}]=[e-2-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}]-[e-2-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}]=\frac{1}{4!}=\frac{1}{1\times2\times3\times4}=\frac{1}{24}$$

مثال ۲۳: سری $\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{4}{1+(4k+3)(4k-1)}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از رابطه $\text{Arctg}a-\text{Arctg}b=\text{Arctg}\frac{a-b}{1+ab}$ داریم:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{4}{1+(4k+3)(4k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{(4k+3)-(4k-1)}{1+(4k+3)(4k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}[\text{Arctg}(4k+3)-\text{Arctg}(4k-1)]$$

$$=(-1)\sum_{k=0}^{\infty}[\underbrace{\text{Arctg}(4k-1)}_{f_k}-\underbrace{\text{Arctg}(4k+3)}_{f_{k+1}}]=(-1)[\text{Arctg}(4\times0-1)-\lim_{k\to+\infty}\text{Arctg}(4k+3)]=(-1)[\text{Arctg}(-1)-\text{Arctg}\infty]$$

$$=(-1)[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}]=\frac{3\pi}{4}$$

مثال ۲۴: حاصل $\sum_{P=1}^{\infty}2\sin(\frac{1}{2P(P+1)}).\sin(\frac{2P+1}{2P(P+1)})$ کدام است؟

۱) $1-\cos1$ ۲) $\cos1-1$ ۳) $\frac{1}{2}(1-\cos1)$ ۴) $\frac{1}{2}(\cos1-1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از فرمول $2\sin A\sin B=[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$ داریم:

$$\sum_{P=1}^{\infty}2\sin(\frac{1}{2P(P+1)}).\sin(\frac{2P+1}{2P(P+1)})=\sum_{P=1}^{\infty}[\cos\frac{1-(2P+1)}{2P(P+1)}-\cos\frac{1+(2P+1)}{2P(P+1)}]=\sum_{P=1}^{\infty}(\cos\frac{-2P}{2P(P+1)}-\cos\frac{2(P+1)}{2P(P+1)})$$

$$=\sum_{P=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{P+1}-\cos\frac{1}{P})=(-1)\sum_{P=1}^{\infty}(\underbrace{\cos\frac{1}{P}}_{f_P}-\underbrace{\cos\frac{1}{P+1}}_{f_{P+1}})=-(\cos1-\lim_{P\to+\infty}\cos\frac{1}{P+1})=-[\cos1-\cos(0)]=1-\cos1$$

مثال ۲۵ (سخت): حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مثالی زیبا و البته نه چندان سخت برای دانشجویان! ابتدا مخرج را به‌صورت تفاضل دو مربع می‌نویسیم:

$$n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+1-n)(n^2+1+n)=[\underbrace{n(n-1)+1}_{f_n}][\underbrace{n(n+1)+1}_{f_{n+1}}]$$

حالا باید کسر داده شده را به‌صورت تفاضل دو سری، بنویسیم:

$$\frac{n}{[n(n-1)+1][n(n+1)+1]}=\frac{A}{n(n-1)+1}-\frac{B}{n(n+1)+1}$$

$$\Rightarrow n=A(n^2+n+1)-B(n^2-n+1)\Rightarrow n=(A-B)n^2+(A+B)n+A-B$$

با متحد قرار دادن دو طرف تساوی و با توجه به طرف چپ تساوی که فقط n داریم؛ دستگاه زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases}A-B=0\\A+B=1\end{cases}\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}\xrightarrow{A=B}B=\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[n(n-1)+1][n(n+1)+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n-1)+1}-\frac{1}{n(n+1)+1}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{1(1-1)+1}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)+1}=\frac{1}{2}[1-0]=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۶ (سخت): سری $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctg}\frac{1}{2n^2}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» باید سری را به فرم یک سری تلسکوپی تبدیل کنیم و با استفاده از فرمول $\mathrm{Arctg}\frac{a-b}{1+ab}=\mathrm{Arctg}a-\mathrm{Arctg}b$ تست را حل کنیم:

$$\mathrm{Arctg}\frac{1}{2n^2}=\mathrm{Arctg}\frac{2}{4n^2}=\mathrm{Arctg}\frac{2}{1+(4n^2-1)}=\mathrm{Arctg}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctg}\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctg}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}[\mathrm{Arctg}(2n+1)-\mathrm{Arctg}(2n-1)]=(-1)\sum_{n=1}^{\infty}[\underbrace{\mathrm{Arctg}(2n-1)}_{f_n}-\underbrace{\mathrm{Arctg}(2n+1)}_{f_{n+1}}]$$

$$=-1[\mathrm{Arctg}(2\times1-1)-\mathrm{Arctg}(+\infty)]=-1(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۷ (سخت): حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2^{n+1}})$، چند برابر $\frac{1}{\pi}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از اتحاد فرعی زیر سری را به فرم یک سری تلسکوپی به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{tg}x=\cot gx-2\cot g2x$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2^{n+1}})=\frac{1}{2^n}[\cot g(\frac{\pi}{2^{n+1}})-2\cot g(\frac{\pi}{2^n})]=\frac{1}{2^n}\cot g(\frac{\pi}{2^{n+1}})-\frac{1}{2^{n-1}}\cot g(\frac{\pi}{2^n})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2^{n+1}})=-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2^{n-1}}\cot g(\frac{\pi}{2^n})-\frac{1}{2^n}\cot g(\frac{\pi}{2^{n+1}})]=-(a_1-a_\infty)=-[\frac{1}{2^{1-1}}\cot g\frac{\pi}{2}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cot g(\frac{\pi}{2^{n+1}})]$$

$$=-(0-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n.\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n.\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

برای محاسبه‌ی حد فوق، دقت کنید وقتی $n\to+\infty$ آن‌گاه $\frac{\pi}{2^{n+1}}\to0$، بنابراین هم ارزی $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}\sim\frac{\pi}{2^{n+1}}$ را داریم:

$$\text{حاصل سری}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n(\frac{\pi}{2^{n+1}})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n.\frac{\pi}{2^n\times2^1}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

تذکر: در سری‌های تلسکوپی اگر اختلاف اندیس‌های مجموع داخل سیگما، از یک واحد بیشتر باشد، باید به جای جمله اول به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات اول را با هم جمع کنیم و به جای جمله آخر به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات آخر را با هم جمع کنیم، به عنوان مثال داریم:

در این مثال اختلاف اندیس‌ها برابر ۳ است.

$$\sum_{k=1}^{n}(f_k-f_{k+3})=(\underbrace{f_1+f_2+f_3}_{\text{مجموع سه جمله اول}})-(\underbrace{f_{n+1}+f_{n+2}+f_{n+3}}_{\text{مجموع سه جمله آخر}})$$

و در حالت خاص اگر حد بالای سیگما ∞ باشد، آن‌گاه چون جملات آخر در ∞ تقریباً با هم برابر هستند، می‌توانیم عدد اختلاف اندیس‌ها را در جمله آخر ضرب کنیم و آن را به‌صورت زیر بنویسیم، به مثال زیر توجه کنید:

در این مثال، اختلاف اندیس‌ها برابر با ۲ است.

$$\sum_{k=3}^{\infty}(f_k-f_{k+2})=(\underbrace{f_3+f_4}_{\text{مجموع دو جمله اول}})-\underbrace{2\times(\lim_{k\to+\infty}f_{k+2})}_{\text{مجموع دو جمله آخر}}$$

باز هم تأکید می‌کنیم که لزومی ندارد حد پایین سیگما از عدد یک شروع شود.

مثال ۲۸: حاصل $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{k^2+2k})$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2+2k}=\sum_{k=1}^{\infty}[\underbrace{(\frac{1}{k})-(\frac{1}{k+2})}_{\text{اختلاف اندیس‌ها ۲ است}}]$$

چون اختلاف اندیس برابر ۲ است، پس باید دو جمله اول پرانتز اول را بنویسیم، و چون حد بالای سیگما ∞ می‌باشد، لذا باید عدد ۲ در حد جمله‌ی آخر سیگما ضرب شود:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-2\times\lim_{k\to+\infty}(\frac{1}{k+2})=\frac{3}{2}$$

مثال ۲۹: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}})$ کدام است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-(\frac{1+\sqrt{2}}{2})$ ۳) صفر ۴) سری واگراست.

پاسخ: گزینه «۴» اگر جمله عمومی را با ضرب صورت و مخرج در « $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ » گویا کنیم، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n+2-n}=\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{n}}_{f_n}-\underbrace{\sqrt{n+2}}_{f_{n+2}})$$

برای تبدیل فرم سری تلسکوپی، جمله f_{n+1} را اضافه و کم می‌کنیم، یعنی جمله‌ی $\sqrt{n+1}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$S=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{n}}_{f_n}-\underbrace{\sqrt{n+1}}_{f_{n+1}})-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\sqrt{n+1}}_{f_n}-\underbrace{\sqrt{n+2}}_{f_{n+1}})$$

$$=-\frac{1}{2}(1-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1})-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2})=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}))=+\infty\Rightarrow \text{واگرا}$$

سری تلسکوپی به‌صورت مجموع دو جمله‌ای:

در بعضی سری‌ها، سری تلسکوپی به‌صورت **مجموع** دو جمله است. در این صورت حتماً باید ضریب $(-1)^k$ وجود داشته باشد و قاعده به‌صورت زیر است:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(f_k+f_{k+1})=(-1)^1f_1+(-1)^nf_{n+1}$$

اگر $n\to\infty$، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(f_k+f_{k+1})=(-1)^1f_1+\lim_{k\to+\infty}(-1)^kf_{k+1}$$

مثال ۳۰: سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از قاعده تفکیک کسرها داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[\underbrace{\frac{1}{(k+2)}}_{f_k}+\underbrace{\frac{1}{(k+3)}}_{f_{k+1}}]$$

با توجه به فرمول فوق داریم:

$$S=(-1)^1(\frac{1}{1+2})+\lim_{k\to+\infty}(\frac{(-1)^k}{k+3})=-\frac{1}{3}$$

دقت شود، تست را بدون استفاده از نکته گفته شده به شکل زیر می‌توان به فرم همان سری تلسکوپی استاندارد (f_k-f_{k+1}) تبدیل کرد:

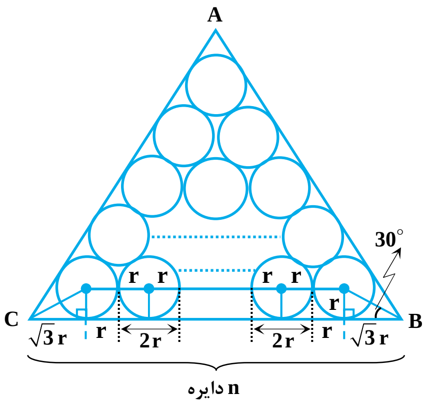
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3})=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(-1)^k}{k+3}+\frac{(-1)^k}{k+2})=\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{(-1)^k}{k+2}}_{f_k}-\underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k+3}}_{f_{k+1}})=\frac{(-1)^1}{1+2}-\lim_{k\to+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+3}=-\frac{1}{3}-0=-\frac{1}{3}$$

سری‌های هندسی

سری هندسی با جملات نامحدود: فرم کلی این سری‌ها به‌صورت $S=\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ است که a عددی حقیقی $(a\neq 0\ ,\ a\neq \pm 1)$ است. در سری‌های هندسی هر جمله از ضرب جمله قبل در یک عدد که قدر نسبت سری نامیده می‌شود (قدر نسبت را معمولاً با r یا q نمایش می‌دهیم) **اگر $-1<q<1$ آن‌گاه سری به عدد $S=\frac{a_1}{1-q}$ همگرا می‌شود.** دقت شود a_1 جمله اول تصاعد هندسی است که با قرار دادن حد پایین سیگما به جای n در ضابطه a^n به‌دست می‌آید.

مثال ۴۶ (سخت): بیشترین تعداد دایره‌های مساوی هم که در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد جای گیرند، به طوری که بر هر ضلع مثلث n دایره مماس شود را با k_n نشان می‌دهیم و S_n مساحت کل k_n دایره باشد، $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Harvard)

۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۶}$



پاسخ : گزینه «۲» خداوکیلی سؤال کمی سخت، ولی جالب است! باید ارتباطی بین مساحت دایره‌ها و مساحت مثلث (و یا حداقل ارتباطی بین مساحت دایره‌ها با اضلاع مثلث) ایجاد کنیم. ابتدا سؤال را برای مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول L حل می‌کنیم. فرض کنید؛ L طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع و r شعاع هر یک از دایره‌ها باشد. وقتی n دایره بر روی یک ضلع داشته باشیم، مانند آنچه در شکل داریم؛ با وصل کردن مرکز دایره‌های کناری به رئوس مثلث، بر طبق قضیه‌ی فیثاغورث، وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر با $۲r = \frac{r}{\sin ۳۰}$ است و بنابراین ضلع دیگر $\sqrt{۳}\,r$ است. اگر این دو دایره را فعلاً کنار بگذاریم، $n-۲$ دایره مماس بر یک ضلع باقی مانده‌اند، طول پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند (پاره‌خطی که از سمت راست دایره‌ی از سمت چپ شروع و تا سمت چپ دایره‌ی اولی از سمت راست، ادامه پیدا می‌کند.) برابر با $(n-۲)۲r$ است (چون قطر هر دایره $۲r$ است و $n-۲$ دایره داریم) پس طول L بر حسب شعاع دایره‌ها، برابر با جمع $۲(r+\sqrt{۳}r)$ با $(n-۲)۲r$ است:

$$L=(n-۲)۲r+۲(r+\sqrt{۳}r)\ \Rightarrow L=(۲n)r-۲r+۲\sqrt{۳}r\ \Rightarrow L=۲r(n+\sqrt{۳}-۱)\ \Rightarrow r=\frac{L}{۲(n+\sqrt{۳}-۱)}$$

از طرفی تعداد دایره‌ها برابر با $۱+۲+۳+\cdots+n$ و یا به عبارت دیگر برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$S_n=\frac{n(n+۱)}{۲}(\pi r^۲)=\frac{n(n+۱)}{۲}\left(\frac{\pi L^۲}{۴(n+\sqrt{۳}-۱)^۲}\right)\xrightarrow{L=۱}S_n=\frac{\pi n^۲+n\pi}{۸(n+\sqrt{۳}-۱)^۲}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}S_n\simeq\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi n^۲}{۸n^۲}=\frac{\pi}{۸}$$

سؤال دانشجو: چه جوری گفتید؛ تعداد دایره‌ها «$۱+۲+۳+\cdots+n$» یا همان $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است؟

جواب: هر چند خیلی واضح است، ولی چون ممکن است استثنائاً چندتایی از شما هم این سؤال را داشته باشید، جواب می‌دهم: برای درک بهتر از بالا به پایین حرکت کنید، در نزدیک رأس A، $\underline{۱}$ دایره داریم، در سطر پایین آن $\underline{۲}$ دایره و در سطر پایین‌تر $\underline{۳}$ دایره و ... در سطر آخر n دایره داریم، پس کلاً «$۱+۲+۳+\cdots+n$» دایره وجود دارد.

نماد پای ($\prod$)

گفتیم نماد $\sum$ برای خلاصه‌نویسی مجموع به کار می‌رود. برای خلاصه‌نویسی حاصل‌ضرب n عدد $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ از نمادی به نام پای استفاده می‌شود. ($\prod$ در زبان یونانی، همان حرف P است (که P اولِ کلمه‌ی Product به معنای حاصل‌ضرب است) در واقع می‌توان نوشت:

$$\prod_{k=۱}^{n} a_k=a_۱\times a_۲\times a_۳\times a_۴\times\cdots\times a_n$$

برای مثال داریم:

$$\prod_{k=۱}^{n} k=۱\times۲\times۳\times۴\times\cdots\times n=n!$$

قاعده ادغام (تلسکوپی) برای حاصل‌ضرب: اگر همه‌ی جملات دنباله a_k مخالف صفر باشند، آن‌گاه داریم:

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{a_k}{a_{k+۱}}=\frac{a_۱}{a_{n+۱}}$$

بدیهی است که طرفین رابطه‌ی فوق می‌توانند وارونه شوند:

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{a_{k+۱}}{a_k}=\frac{a_{n+۱}}{a_۱}$$

اگر صورت و مخرج مثلاً دو واحد با هم فاصله داشته باشند، خواهیم داشت:

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{a_{k+۲}}{a_k}=\frac{a_{n+۲}a_{n+۱}}{a_۱a_۲}$$

یعنی از مخرج کسر که دو گام عقب‌تر است، فقط دو جمله‌ی اول باقی می‌ماند و از صورت کسر که دو گام جلوتر است، فقط دو جمله‌ی آخر باقی می‌ماند. واضح است که این کسرها می‌توانند وارونه هم بشوند:

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{a_k}{a_{k+۲}}=\frac{a_۱a_۲}{a_{n+۱}a_{n+۲}}$$

به همین ترتیب اگر صورت و مخرج ۳ واحد با هم فاصله داشته باشند خواهیم داشت:

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{a_{k+۳}}{a_k}=\frac{a_{n+۳}a_{n+۲}a_{n+۱}}{a_۱a_۲a_۳}$$

در حالت کلی، کافیست به نحوه‌ی حذف شدن صورت و مخرج کسرها در این حاصل‌ضرب‌ها توجه کنیم.

مثال ۴۷: حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{m=2}^{n}(1-\frac{1}{m})$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{m=2}^{n}(\frac{m-1}{m})$$

با توجه به قاعده تلسکوپی، صورت یک واحد عقب‌تر از مخرج است؛ در واقع اگر صورت را $a_m = m-1$ بنامیم، مخرج $a_{m+1}=m$ است. پس اولین جمله‌ی صورت و آخرین جمله‌ی مخرج باقی می‌مانند: لذا حاصل حد برابر با $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ و به عبارت دیگر برابر با صفر است.

مثال ۴۸: اگر $S_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k(k+2)})$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا S_n را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$S_n=\prod_{k=1}^{n}(\frac{k(k+2)+1}{k(k+2)})=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{k+1}{k+2}}{\frac{k}{k+1}}$$

حالا توجه کنید که با فرض $a_k=\frac{k}{k+1}$ و با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی داریم:

$$S_n=\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{\frac{n+1}{(n+1)+1}}{\frac{1}{1+1}}=\frac{2(n+1)}{n+2}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=2$$

مثال ۴۹ (سخت): اگر $S_n=\prod\limits_{k=2}^{n}(\frac{k^3-1}{k^3+1})$، آن‌گاه S_n به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۱
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ صورت و مخرج را تفکیک می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}(\frac{k^3-1}{k^3+1})=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=2}^{n}(\frac{k-1}{k+1})\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right]$$

در حاصل‌ضرب $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}$ صورت و مخرج دو واحد با هم فاصله دارند؛ پس در صورت فقط دو جمله اول و در مخرج فقط دو جمله‌ی آخر باقی می‌مانند:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{1\times2}{n(n+1)}$$

البته می‌توانیم با فرمول تلسکوپی نیز به سؤال جواب دهیم؛ با فرض $a_k=k-1$ داریم $a_{k+2}=k+1$ پس مخرج دو واحد با صورت اختلاف دارد، لذا حاصل به صورت $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k+2}}=\frac{a_2a_3}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1\times2}{n(n+1)}$ است. اما در حاصل‌ضرب $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$ داریم: $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$ پس صورت کسر یک واحد جلوتر از مخرج است. یعنی این حاصل‌ضرب فرم $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ دارد. با فرض $a_k=k^2-k+1$ داریم:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{n+1}}{a_2}=\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1\times2}{n(n+1)})(\frac{n^2+n+1}{3})=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)}$$

دقت کنید که وقتی $n\to\infty$ میل کند، فقط بزرگترین درجه‌ها هستند که مقدار حد را تعیین می‌کنند. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}$$

مثال ۵۰ (سخت): حاصل $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$، برابر کدام گزینه است؟ $(x\neq 0)$

۱) $\frac{1}{\pi}(\frac{\sin x}{x})$ ۲) $\frac{x}{\sin x}$ ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) $\frac{1}{\pi}(\frac{x}{\sin x})$

پاسخ: گزینه «۳» قبل از پاسخ به این سؤال دقت کنید، اگر $x=0$ باشد، آن‌گاه حاصل خواسته شده برابر با ۱ است. اما برویم سراغ به‌دست آوردن حاصل عبارت $\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}$، که اگر بخواهیم بدون نماد آن را بنویسیم، به‌صورت مقابل قابل نمایش است:

$$\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^k}$$

عبارت را در $\sin\frac{x}{2^k}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. دقت کنید در این حالت با توجه به فرمول $\cos a\sin a=\frac{1}{2}\sin 2a$، دو جمله‌ی آخر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos\frac{x}{2^k}\cdot\sin\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2}\sin 2(\frac{x}{2^k})=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{k-1}}$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2^2}\times\cdots\times\cos\frac{x}{2^{k-1}}\times\overbrace{\cos\frac{x}{2^k}\times\sin\frac{x}{2^k}}}{\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2^2}\times\cdots\times(\cos\frac{x}{2^{k-1}}\sin\frac{x}{2^{k-1}})\times\frac{1}{2}}{\sin\frac{x}{2^k}}$$

به همین شکل اگر ادامه دهیم، به اندازه‌ی k تا $\frac{1}{2}$ ایجاد می‌شود و در نهایت به $\sin x$ می‌رسیم، لذا داریم:

$$\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{(\sin x)(\frac{1}{2})^k}{\sin\frac{x}{2^k}}$$

اگر $k\to+\infty$، آن‌گاه داریم:

$$\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}\underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin x}{2^k(\frac{x}{2^k})}=\frac{\sin x}{x}$$

مثال ۵۱ (سخت): حاصل $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$، برای $|x|<1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-x}$ ۲) $\frac{x}{1-x}$ ۳) $\frac{2}{2-x}$ ۴) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا فرم باز حاصل‌ضرب داده شده را می‌نویسیم:

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\xrightarrow{\text{عبارت را در } 1-x \text{ ضرب و تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\Rightarrow\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})=\frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ در صورت کسر فوق، پرانتزها با قاعده‌ی اتحاد مزدوج در هم ضرب می‌شوند و بنابراین حاصل عبارت سمت راست به شکل مقابل می‌شود:

$$\frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x}=\frac{1-x^{2^n\times 2}}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

خب در این قسمت باید از شرط صورت سؤال، یعنی $|x|<1$ استفاده کنیم. وقتی $|x|<1$، آن‌گاه حد عبارت $\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ در بی‌نهایت برابر با $\frac{1}{1-x}$ می‌شود (چون $x^{2^{n+1}}$ به سمت صفر میل می‌کند.) بنابراین حاصل خواسته شده برابر با $\frac{1}{1-x}$ می‌شود.

توضیح: اگر $x\geq 1$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت خواسته شده برابر با $+\infty$ و اگر $x<-1$، آن‌گاه حاصل عبارت خواسته شده برابر با $-\infty$ و اگر $x=-1$، آن‌گاه حاصل عبارت خواسته شده برابر با صفر می‌شود.

چگونه می‌توانیم «تلسکوپی» و یا «هندسی» بودن یک سری را از روی ظاهر آن تشخیص دهیم؟

اکثر داوطلبان، فرمول‌های محاسبه‌ی سری‌های تلسکوپی و سری‌های هندسی را می‌دانند، اما، در بسیاری از مسائل نمی‌توانند تشخیص دهند که نوع سری کدام است، تا بر اساس آن، روش مناسب برای محاسبه‌ی مقدار سری را انتخاب کنند. در پاسخ به این عزیزان می‌توانیم یک جواب «کلیشه‌ای» و یک جواب «غیر رسمی» بدهیم (متأسفانه نمی‌توان جواب رسمی داد!!).

لازم است بگویم: جواب «غیررسمی» تا حدودی مشکل این عزیزان را بر طرف خواهد کرد، ضمن این که ممکن است جواب «کلیشه‌ای»، به مزاج داوطلبان تنبل خوش نیاید! اما به هر حال جواب درستی به حساب می‌آید!

پاسخ کلیشه‌ای: تمرین و حل تست‌های زیاد، داوطلب را به یک سطحی از آمادگی می‌رساند که به راحتی بتواند بین این دو سری تفاوت قائل شده و روش حل را پیدا کند!

پاسخ غیررسمی: نشانه‌ی یک **سری هندسی**، آن است که جمله‌ی عمومی این سری، شامل چندجمله‌ای‌ها $(\cdots, n^۲, n)$ یا لگاریتم‌ها $(\cdots, \log n, Lnn)$ نیست بلکه معمولاً فقط یک تابع نمایی با پایه ثابت و توان n از درجه یک در آن ظاهر شده است؛ یعنی یک عدد ثابت به توان n رسیده است. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۳^n}$ هندسی نیست؛ چون n در صورت کسر، یک چندجمله‌ای است. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{Lnn\times ۵^n}$ هندسی نیست، چون Lnn دارد. اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^n(-۱)^n}{۳^n}$ هندسی است؛ زیرا فقط اعداد ثابت به توان n رسیده‌اند. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)۲^n}{۵^n}$ هندسی است؛ زیرا $\cos(n\pi)=(-۱)^n$ است و بنابراین همه‌ی جملات نمایی هستند. دقت کنید که در سری هندسی، جمله‌ی نمایی مورد نظر، باید فرم A^{kn+b} داشته باشد؛ یعنی A عدد ثابت باشد و توان هم درجه یک باشد. پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{n})^n$ هندسی نیست. چون پایه‌ی ثابت ندارد، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}e^{-n^۲}$ هندسی نیست، چون توانش، n از درجه ۲ است. اما **سری‌های تلسکوپی** را می‌توان با مشخصه‌های زیر شناخت:

۱) سری‌هایی که جمله عمومی آن‌ها از مجموع و تفاضل چند جمله‌ی متوالی تشکیل شده‌اند، تلسکوپی هستند، مانند:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt{n+۲}-۲\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}) \text{ و } \sum_{n=۲}^{\infty}\sqrt[n]{۸}-\sqrt[n+۱]{۸}$$

۲) بیشتر سری‌هایی که در جمله عمومی آن‌ها کسرهای گویا (تقسیم دو چندجمله‌ای) وجود دارد مثل سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۲)}$، $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n+۱}{n^۲(n+۱)^۲}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲-۱}$، تلسکوپی هستند، زیرا با تجزیه‌ی کسرها معمولاً به تفاضل دو جمله تبدیل می‌شوند.

۳) سری‌هایی که جمله عمومی آن‌ها شامل عبارات لگاریتمی هستند و به مجموع و تفاضل چند لگاریتم تبدیل می‌شوند، مثل سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}\log\frac{۳n+۴}{۳n+۱}$، $\sum_{n=۱}^{\infty}Ln\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲}$، تلسکوپی هستند.

۴) سری‌هایی که در ترکیب آن‌ها توابعی بر حسب n، به عنوان کمان، جلوی tg، $Arctg$، $\sin$ و $\cos$ وجود دارد. مثلاً سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}Arctg\frac{۱}{۱+n+n^۲}$، $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\frac{۱}{n(n+۱)}}{\cos\frac{۱}{n}.\cos(\frac{۱}{n+۱})}$، تلسکوپی هستند. زیرا با استفاده از روابط مثلثاتی به تفاضل دو جمله تبدیل می‌شوند.

۵) سری‌هایی که جمله عمومی آن‌ها دارای فاکتوریل و توابع درجه‌ی اول از n هستند (مانند $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+۱}{n!}$ یا $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{(n+۱)!}$)، معمولاً با استفاده از بسط e^x تعیین می‌شوند. اما برخی از آن‌ها را می‌توان به تفاضل دو جمله تبدیل کرده و از راه تلسکوپی هم حل کرد مثلاً:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{(n+۱)!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(n+۱)-۱}{(n+۱)!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+۱)!}$$

توجه: اگر سری داده شده، شبیه به سری هندسی باشد، اما در n ضرب شده باشد، مانند $\sum_{n=۰}^{\infty}n(\frac{۱}{۲})^n$ یا بر n تقسیم شده باشد مانند $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n۳^n}$ با روش‌های دیگری قابل محاسبه است که در درسنامه‌های بعدی گفته می‌شوند.

از کدام آزمون برای کدام سری استفاده کنیم؟

سؤال مهمی که معمولاً دانشجویان می‌پرسند این است که **در تعیین همگرایی یک سری، چگونه بفهمیم از کدام آزمون باید استفاده کنیم؟** سؤال این عزیزان کاملاً کاربردی و به حق است! چون عاقلانه نیست که تمام آزمون‌ها را استفاده کنیم و آن‌ها را یکی پس از دیگری به‌کار ببریم تا بالاخره یکی از آن‌ها جواب دهد!! چنین کاری اتلاف وقت می‌باشد که در آزمون‌ها اصلاً چنین وقتی در اختیار ما نیست! در پاسخ باید بگویم قواعد مهم و محکمی در این زمینه وجود ندارد، اما نکات زیر قطعاً مشکل این عزیزان را حل می‌کند:

۱) در سری‌هایی با جمله‌ی عمومی مثبت، از صورت و مخرج، فقط جمله‌ای که رشد آن بیشتر است را نگه می‌داریم و بر آن اساس تصمیم می‌گیریم. اگر در صورت و مخرج توانی از n باقی بماند، (مانند چندجمله‌ای‌ها) از آزمون P استفاده کنید. در این موارد معمولاً سایر آزمون‌ها مشکلی را حل نمی‌کنند. مثلاً در سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲\sqrt{n}+Lnn}{n^۳+n+۱}$ ابتدا طبق سرعت رشد داریم: $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲\sqrt{n}}{n^۳}$ حالا $P=۳-۲/۵=۰/۵<۱$ پس سری واگراست. یا در سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{\sqrt{n^۲+۲}}{n^۳(\sqrt{n}+۱)}$ (که بر طبق سرعت رشد داریم: $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{\sqrt{n^۲}}{n^۳\sqrt{n}}$) ملاحظه می‌شود $P=۳/۵-۱=۲/۵>۱$، پس سری همگراست.

۲) اگر سری شامل توابعی مانند $Arctgn$، $Ln(۱+\frac{۱}{n})$، $\sin\frac{۱}{n}$، $\sinh n$ و ... باشد، می‌توانیم با استفاده از هم‌ارزی‌ها (در $n\to\infty$)، سری مورد نظر را به یک P سری تبدیل کرد و یا از آزمون مقایسه برای آن استفاده کرد. برای استفاده از این روش دانستن این که سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگرا و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ همگراست، همچنین سری هندسی با قدرنسبت کوچکتر از یک همگراست (مانند $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^n$) به ما بسیار کمک می‌کند. به عنوان یک مثال از استفاده از هم‌ارزی‌ها، سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}nLn(۱+\frac{۱}{n^۲})$ را با استفاده از هم‌ارزی $Ln(۱+\frac{۱}{n^۲})\simeq\frac{۱}{n^۲}$ به سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}n\times\frac{۱}{n^۲}=\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ تبدیل کرده و متوجه می‌شویم که واگراست. برای استفاده از هم‌ارزی در توابع مثلثاتی، دقت کنید که کمان باید به سمت صفر میل کرده باشد.

۳) اگر جمله عمومی سری، فقط شامل جملات لگاریتمی، مانند Lnn و چند جمله‌ای‌ها مثل n و $n^۲$ باشد، بهتر است از آزمون تراکم کوشی استفاده کنید؛ یعنی به جای n ها ۲^n قرار بدهید و در ۲^n هم ضرب کنید، مثلاً $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}nLn۲=\sum\limits_{n=۱}^{\infty}۲^n\frac{Ln۲^n}{۲^n}\simeq\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{Lnn}{n}$ که به وضوح سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}nLn۲$ واگراست. همچنین این نکته یادتان باشد که سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^pLn^qn}$ به شرطی همگراست که $(p>۱)$ یا $(q>۱\ ,\ p=۱)$ باشد.

۴) تا این‌جا به سری‌هایی پرداختیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها شامل چند جمله‌ای‌ها و لگاریتم بود. اکنون به سری‌هایی می‌پردازیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها از جملات پر سرعتی مانند جملات نمایی (A^n) و فاکتوریل $(n!)$ تشکیل شده‌اند. محل استفاده از آزمون‌های ریشه و نسبت، دقیقاً در مورد این نوع از سری‌ها است. معمولاً آزمون ریشه بهتر و سریع‌تر جواب می‌دهد، به شرط آن‌که از هم‌ارزی استرلینگ استفاده کنید. اما اگر نمی‌خواهید $n!$ را با هم‌ارز آن جایگزین کنید، از آزمون نسبت استفاده کنید. در مورد سری‌هایی که دنباله‌هایی مانند $۲\times۴\times۶\times\cdots\times(۲n)$ و $۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲n-۱)$ را در خود دارند، آزمون «رابه» انتخاب مناسبی است.

- مسائل خاصی داریم که با استفاده از «آزمون ریشه» همگرایی سری تعیین می‌شود، اما با استفاده از «آزمون نسبت» تشخیص همگرایی سری امکان‌پذیر نیست. نتیجه این‌که در شرایط برابر، سعی کنید از آزمون ریشه استفاده کنید، چون **آزمون ریشه قوی‌تر است!**

۵) اگر در جمله‌ی عمومی یک سری، عبارتی بر حسب n، با توان‌هایی از n وجود داشته باشد، آن‌گاه استفاده از آزمون ریشه بهتر است. جمله‌های عمومی $(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ و $(۴+(-۱)^n)^{-n}$ از این دسته‌اند.

۶) اکثر سؤالاتی که در آزمون‌ها مطرح می‌شوند را می‌توان با سه آزمون دالامبر (نسبت)، ریشه، استفاده از هم‌ارزی و آزمون P، پاسخ داد. بنابراین به آن‌ها بیشتر توجه کنید! در واقع آزمون‌های مقایسه، مقایسه حدی و آزمون انتگرال، کمتر مورد نیاز ما می‌شود و آزمون‌های رابه، تراکم کوشی به ندرت ممکن است مورد استفاده قرار گیرند.

۷) ممکن است وضعیت همگرایی یک سری خاص با استفاده از آزمون‌های مختلف تعیین شود و فقط محاسبات در آن‌ها متفاوت باشد. مانند سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}ne^{-n^۲}$ که هم با استفاده از آزمون انتگرال می‌توان شرایط همگرایی آن را تعیین کرد و هم با استفاده از آزمون نسبت و هم با آزمون ریشه، البته در بین آن‌ها آزمون ریشه قوی‌تر و ساده‌تر است.

۸) گاهی اوقات راه تشخیص همگرایی، استفاده دقیق از هم‌ارزی استرلینگ است. به سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{n-۲}}{e^nn!}$ دقت کنید؛ آزمون‌های نسبت و ریشه هیچکدام به ما کمکی نمی‌کنند. اما با جایگذاری هم‌ارزی استرلینگ $n!\sim(\frac{n}{e})^n\sqrt{۲\pi}n^{\frac{۱}{۲}}$ به سری $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{\frac{۵}{۲}}}$ می‌رسیم که به وضوح همگراست $(P=\frac{۵}{۲}>۱)$.

مثال ۱۰: اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cot g^{-1} n$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, tg^{-1}(\frac{1}{n^2})$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) A همگرای مشروط و B همگرای مطلق است.
۲) A همگرای مطلق و B همگرای مشروط است.
۳) A و B هر دو همگرایی مشروط دارند.
۴) A و B هر دو همگرایی مطلق دارند.

پاسخ: گزینه «۳» باید وضعیت هر دو سری را بررسی کنیم؛ می‌دانیم وقتی $n>0$ باشد، آن‌گاه داریم: $\cot g^{-1}(n)=tg^{-1}(\frac{1}{n})$، بنابراین سری A را می‌توان به شکل $A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg^{-1}(\frac{1}{n})$ بازنویسی کرد. خُب! حالا به راحتی معلوم است؛ $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} tg^{-1}(\frac{1}{n})=0$ و چون a_n نزولی است، بنابراین طبق آزمون لایبنیتز این سری همگراست. برای این‌که بدانیم سری همگرایی مطلق دارد یا همگرایی مشروط، باید وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n tg^{-1}(\frac{1}{n})|$ و به عبارت دیگر وضعیت سری $\sum_{n=1}^{\infty} tg^{-1}\frac{1}{n}$ را بررسی کنیم. می‌دانیم این سری را می‌توان هم‌ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ دانست و چون این سری مطابق مطالب P–سری واگراست، بنابراین سری اصلی نیز واگراست. پس A همگرایی مشروط دارد. خب حالا سراغ سری B می‌رویم. توجه کنید؛ وقتی $n\to+\infty$، آن‌گاه $tg^{-1}(\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$، پس سری B را می‌توان هم‌ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n(\frac{1}{n^2})$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ دانست. این سری هم، طبق آزمون لایبنیتز همگراست (چون $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ نزولی است). اما سری $\lim_{n\to+\infty}|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}|$ و یا به عبارت دیگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، واگراست. پس B نیز همگرایی مشروط دارد.

مثال ۱۱: اگر $S_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Lnn)^2}$ و $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{Ln(n+1)}$ آن‌گاه کدام گزینه در مورد وضعیت همگرایی S_1 و S_2 درست است؟

۱) S_1 همگرای مطلق و S_2 همگرای مشروط است.
۲) S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.
۳) S_1 و S_2 هر دو همگرای مطلق هستند.
۴) S_1 همگرای مشروط و S_2 همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آزمون همگرایی برای سری‌های متناوب، سری‌های S_1 و S_2 هر دو همگرا هستند زیرا دنباله‌های $\frac{1}{(Lnn)^2}$ و $\frac{1}{Ln(n+1)}$ هر دو نزولی و همگرا به صفر هستند. حالا باید همگرایی مطلق آن‌ها را بررسی کنیم. سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}$ را با استفاده از قضیه‌ی تراکم کوشی بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}2^n\times\frac{1}{(Ln2^n)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(nLn2)^2}=\frac{1}{(Ln2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

این سری به وضوح واگراست، زیرا سرعت رشد صورت از مخرج بیشتر بوده و $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty$ است. بنابراین S_1 فقط همگرای مشروط است. حالا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Ln(n+1)}$ را در نظر بگیرید. برای n های بزرگ $Ln(n+1)\simeq Ln(n)$ البته می‌توانیم به جای این هم‌ارزی، از خاصیت «لغزاندن» حدود سری استفاده کنیم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Ln(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ حالا طبق قضیه‌ی تراکم کوشی، واگرا بودن این سری هم واضح است:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{Ln(2^n)}=\frac{1}{Ln2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n}$$

باز هم $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\infty$ یعنی شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست. خلاصه آن‌که S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.

مثال ۱۲: اگر $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{1}{|\sin n|})$ و $S_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^k}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) S_1 واگرا و S_2 به ازای $0<k\le 1$ همگرای مشروط است.
۲) S_1 واگرا و S_2 به ازای $k>1$ همگرای مشروط است.
۳) S_1 همگرای مشروط و S_2 به ازای $k\le 0$ واگراست.
۴) S_1 همگرای مشروط و S_2 به ازای $k>1$ همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}|\sin n|$ وجود ندارد. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\log(1+\frac{1}{|\sin n|})$ وجود ندارد. پس S_1 شرط لازم برای همگرایی را ندارد و به وضوح واگراست. اکنون به بررسی S_2 می‌پردازیم. وقتی $n\to\infty$ میل می‌کند، خواهیم داشت: $n+(-1)^n=n\pm1\simeq n$، پس می‌توانیم S_2 را به صورت $S_2\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n)^k}$ بررسی کنیم. برای همگرا بودن سری متناوب، لازم است دنباله‌ی $\frac{1}{n^k}$ نزولی و همگرا به صفر باشد، یعنی $k>0$ باشد. اما برای همگرایی مطلق این سری لازم است سری مثبت $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ همگرا باشد و این به شرطی رخ می‌دهد که $k>1$ باشد. بنابراین در یک جمع‌بندی در مورد S_2 خواهیم داشت: اگر $k\le 0$ باشد، S_2 واگراست. اگر $0<k\le 1$ باشد، S_2 همگرای مشروط است و اگر $1<k$ باشد، S_2 همگرای مطلق می‌شود.

مثال ۱۳ (سخت): اگر $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$ و $S_2=\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\log n})$ آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.
۲) S_1 واگرا و S_2 همگرای مطلق است.
۳) S_1 و S_2 هر دو واگرا هستند.
۴) S_1 واگرا و S_2 همگرای مشروط است.

پاسخ: گزینه «۴» برای بررسی S_1 از هم‌ارزیِ $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\simeq \text{Ln}n$ استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n}$

(برای آن‌که صفر شدن $\text{Ln}(1)$ در مخرج اشکال ایجاد نکند؛ جملات سری را برای $n\geq 2$ در نظر گرفته‌ایم. البته می‌دانیم که کنار گذاشتن یک یا چند جمله‌ی اول در سری اشکالی ایجاد نمی‌کند.) همان‌طور که می‌دانیم سری‌های به فرم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p(\text{Ln}n)^q}$ اگر $p=1$ باشد، با شرط $q>1$ همگرا هستند. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n}$ واگراست؛ در نتیجه S_1 هم واگراست. برای بررسی S_2 ابتدا دقت کنید که برای هر کمان مانند α_n داریم: $\sin(n\pi+\alpha_n)=(-1)^n\sin(\alpha_n)$ بنابراین $\sin(n\pi+\frac{1}{\log n})=(-1)^n\sin(\frac{1}{\log n})$، از آن‌جا که با میل کردن n به سمت ∞ داریم: $\frac{1}{\log n}\to 0$، پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin(\frac{1}{\log n})\simeq\frac{1}{\log n}$ استفاده کنیم و به این ترتیب داریم: $S_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$، این یک سری متناوب است و به وضوح شرط همگرایی سری‌های متناوب را دارد؛ زیرا دنباله‌ی $\frac{1}{\log n}$ نزولی است و به صفر میل می‌کند. اما در مورد همگرایی مطلق S_2 باید دید آیا سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$ همگراست یا خیر؟ البته واگرایی این سری واضح است؛ زیرا یک سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p(\log n)^q}$ است که در آن $p=0$ و $q=1$ است. البته یک راه دیگر برای بررسی این سری، استفاده از قضیه‌ی تراکم کوشی است، به این صورت که داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{\log(2^n)}=\frac{1}{\log 2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n}$$

سرعت رشد صورت بیشتر از مخرج است، پس حد جمله‌ی عمومی مخالف صفر است؛ پس سری واگراست. در نتیجه دیدیم که S_1 واگرا و S_2 همگرای مشروط است.

مثال ۱۴ (سخت): اگر $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^n$ و $S_2=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\text{Ln}(n!)}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) S_1 و S_2 هر دو همگرای مطلق هستند.
۲) S_1 همگرای مطلق و S_2 همگرای مشروط است.
۳) S_1 واگرا و S_2 همگرای مشروط است.
۴) S_1 واگرا و S_2 همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۳» برای $n\to\infty$ می‌توانیم از هم‌ارزی $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\simeq\text{Ln}(n)$ استفاده کنیم. در این صورت واضح است که داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(\text{Ln}(n))^n=\infty$$

پس S_1 واگراست. حالا اگر این هم‌ارزی را بلد نباشیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ که به سری همساز معروف است، به وضوح واگراست و مقدارش $+\infty$ است. بنابراین $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=\infty$ و وقتی به توان n هم برسد، باز هم حد آن ∞ می‌شود. در هر صورت دیدیم که S_1 واگراست. در نتیجه S_1 شرط لازم برای همگرایی را ندارد و واگراست.

S_2 به وضوح همگراست؛ زیرا یک سری متناوب است و جمله عمومی آن، دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{\text{Ln}n!}$ نزولی و همگرا به صفر است. اما برای تشخیص همگرایی مطلق یا مشروط آن باید وضعیت سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\text{Ln}(n!)}$ را بررسی کنیم. از هم‌ارزی استرلینگ کمک می‌گیریم:

$$n!\simeq(\frac{n}{e})^n\ \Rightarrow\text{Ln}(n!)\simeq n\text{Ln}(\frac{n}{e})=n(\text{Ln}(n)-1)\simeq n\text{Ln}(n)$$

بنابراین: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\text{Ln}(n!)}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n}$ است؛ یعنی همگرایی یا واگرایی این دو سری معادل است.

از طرفی می‌دانیم سری‌هایی به فرم کلی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\text{Ln})^q}$ اگر $p=1$، آن‌گاه با شرط $q>1$ همگرا و با شرط $q\leq 1$ واگرا هستند، پس این سری واگراست. لذا S_2 همگرای مطلق نیست و فقط می‌توان گفت همگرای مشروط است.

در این سری $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ و چون $|a_{n+1}| < |a_n|$ (یعنی دنباله نزولی است) و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ، بنابراین با توجه به مطالب «سری‌های متناوب» همگراست.

$$x = 2 \Rightarrow \text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\times 2-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

مطابق مطالب « P ـ سری» می‌دانیم سری‌هایی با فرم $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ ، با شرط $P > 1$ ، همواره همگرا هستند. در این سؤال $P = 2$ و در نتیجه سری همگراست.

مثال ۱۴: **بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$ ، برابر کدام گزینه است؟**

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $(-1, 1)$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \infty \Rightarrow |4x-1| < \infty \Rightarrow -\infty < 4x-1 < \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$$

نکته ۲: بازه همگرایی سری‌های توانی، به فرم کلی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ یک بازه‌ی متقارن با مرکز $x = c$ است. در واقع در سؤالات توجه کنید که حتماً باید $x = c$ وسط بازه باشد. در خیلی از سؤالات از همان نگاه اول «حداقل» دو گزینه از بین جواب‌ها حذف می‌شوند! و اگر طراح مهربان باشد، هر سه گزینه غلط معلوم می‌شوند!!

مثال ۱۵: **دامنه تابع $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n \operatorname{Ln}(n+1)}$ کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(0, 5)$ ۲) $[0, 4)$ ۳) $[0, 4]$ ۴) $[-2, 2]$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی مشخص است $x = 2$ ، مرکز بازه همگرایی می‌باشد. بنابراین گزینه‌هایی جواب هستند که بازه‌های آن‌ها نسبت به ۲ متقارن باشد، پس همین الآن با گزینه‌های (۱) و (۴) خداحافظی می‌کنیم و تا این‌جا می‌دانیم یکی از گزینه‌های (۲) یا (۳) صحیح است. تفاوت این دو گزینه در این است که گزینه (۳) اصرار دارد؛ $x = 4$ در بازه‌ی همگرایی قرار دارد و گزینه (۲) به شدت با این حرف مخالف است! بنابراین کافی است؛ شرایط همگرایی سری در $x = 4$ را بررسی کنیم:

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{2^n \operatorname{Ln}(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Ln}(n+1)}$$

برای بررسی همگرایی این سری، از آزمون مقایسه کمک می‌گیریم. می‌دانیم $n+1 > \operatorname{Ln}(n+1)$ ، بنابراین $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\operatorname{Ln}(n+1)}$.

از طرفی با توجه به مطالب P ـ سری می‌دانیم که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ واگراست، پس سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Ln}(n+1)}$ نیز واگرا بوده و در نتیجه نقطه‌ی $x = 4$ جزء دامنه سری **نمی‌باشد**، معلوم شد؛ حق با جناب گزینه (۲) بود و گزینه (۳) بیخود اصرار می‌کرد!!

مثال ۱۶: **بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ کدام است؟** (آزمون دکترای دانشگاه صنعتی شریف ـ سال ۸۷)

۱) $(1, 3)$ ۲) $(2, 4)$ ۳) $[2, 4)$ ۴) $[1, 3)$

پاسخ: گزینه «۳» با نگاهی ساده و گذرا معلوم است که نقطه‌ی $x = 3$ ، مرکز بازه همگرایی است. پس گزینه‌های (۱) و (۴) را مرخص می‌کنیم! (چون بازه‌ی آن‌ها نسبت به $x = 3$ متقارن نیست) خُب حالا ببینیم؛ دعوای گزینه‌های (۲) و (۳) بر سَر چیست؟

گزینه (۳) دوست دارد، عدد $x = 2$ نیز جزو بازه‌ی همگرایی حساب شود، اما گزینه (۲) مخالفت می‌کند، ولی به هر حال نظر من و شما مهم‌تر است، شما چی فکر می‌کنید!؟ فرض می‌کنیم گزینه (۳) درست می‌گوید:

$$x = 2 \Rightarrow \text{حاصل سری} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

در سری فوق $a_n = \frac{1}{n}$ و چون $|a_{n+1}| < |a_n|$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ، بنابراین طبق مطالب سری‌های متناوب، سری همگراست. پس گزینه (۲) اشتباه می‌کرد و گزینه (۳) درست می‌گفت!

نکته ۳: در برخی سؤالاتِ مربوط به بحث بازه‌ی همگرایی، در هر چهار گزینه بازه همگرایی یکسان است و فقط تفاوت آن‌ها در نقاط روی مرز بازه‌هاست. در این گونه سؤالات، دیگر لازم نیست شعاع همگرایی را حساب کنید و می‌توانید مستقیم اعداد روی مرز را در سری امتحان کنید.

مثال ۱۷: بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ کدام گزینه است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$		۲) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$		۳) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$		۴) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها، کافی است بدانیم سری در نقاط $x=-\frac{1}{3}$ و $x=\frac{1}{3}$ چه وضعی دارد.

$$x=-\frac{1}{3}\Rightarrow \text{حاصل سری}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(-3)^{-n}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

با توجه به مطالب «P ـ سری» واضح است که این سری واگراست ($\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$).

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{حاصل سری}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(3)^{-n}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

این سری متناوب است؛ دنباله‌ی $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ نزولی بوده و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ است، بنابراین بر طبق مطالب «سری‌های متناوب» سری همگراست. پس گزینه (۳) صحیح است.

نکته ۴: فرض کنید شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ برابر R باشد، در این صورت شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^{kn+P}$ برابر $\sqrt[k]{R}$ خواهد بود (k و P اعداد طبیعی ثابت هستند).

مثال ۱۸: شعاع همگرایی سری $\sum\frac{n^2}{4^n}(x+1)^{2n}$ چقدر است؟

۱) ۴		۲) $\frac{1}{4}$		۳) ۲		۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow R=4$$

بنابراین طبق نکته فوق شعاع همگرایی سری موردنظر برابر $\sqrt{4}$ یعنی ۲ می‌باشد.

مثال ۱۹: به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ همگراست؟

۱) $-\infty<x<\infty$		۲) $-1<x<1$		۳) $x>1$		۴) $1<x<3$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا شعاع همگرایی این سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(2n-1)!}$ را به‌دست می‌آوریم و در نهایت جذر آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\times\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n+1)(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2+2n}=0$$

$$\frac{1}{R}=0\Rightarrow R\to\infty\Rightarrow -\infty<x<\infty$$

با توجه به شعاع همگرایی به‌دست آمده، جذر آن نیز همان $-\infty<x<\infty$ در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۲۰ (سخت): شعاع همگرایی سری مک‌لورن $S=\int\frac{x-tg^{-1}x}{x^3}dx$ کدام است؟

۱) ∞		۲) ۱		۳) ۳		۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا یادآوری می‌کنیم که بسط مک‌لورن $tg^{-1}x$ به این صورت است:

$$tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

بنابراین تابع زیر انتگرال دارای بسط مک‌لورن زیر است:

$$f(x)=\frac{x-tg^{-1}x}{x^3}=\frac{1}{x^3}(x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+-\cdots)=\frac{1}{x^3}(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+-\cdots)=\frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}(-1)^{n+1}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2n+1}(-1)^{n+1}$$

بنابراین با محاسبه‌ی انتگرال داریم:

$$S(x)=\int(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n-2})dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(\frac{x^{2n-1}}{2n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n-1}$$

برای یافتن شعاع همگرایی با توجه به آن که x^{2n-1} را در سری داریم، از نکته گفته شده داریم:

$$R=\sqrt{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n^2}-1}=\sqrt{1}=1$$

یادآوری کنیم که برای هر چند جمله‌ایِ $p(n)$، همواره رابطه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$ برقرار است.

نکته۵: اگر در محاسبه‌ی شعاع همگرایی، مقدار حدود (حدود آزمون نسبت و یا آزمون ریشه) برابر با چند مقدار مختلف شوند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد را مساوی با $\frac{1}{R}$، قرار می‌دهیم و شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم. در واقع با این کار، کوچکترین شعاع همگرایی را به‌دست می‌آوریم.

مثال۲۱: شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n x^n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که توانی از n داریم، بنابراین از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|[3+(-1)^n]^n|}\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}(3+(-1)^n)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{R}=4\;;\ \text{اگر n زوج باشد}\\ \frac{1}{R}=2\;;\ \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

برای این که R، کوچکترین مقدار باشد، باید حالت اول را در نظر بگیریم، پس $\frac{1}{R}=4$ و به عبارت دیگر $R=\frac{1}{4}$ است.

مثال۲۲: شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{Lnn}\right)x^n$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال $a_n=\frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{Lnn}$، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{[1+2\cos(\frac{n\pi}{4})]^n}{Lnn}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{Lnn}}\times\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{[1+2\cos(\frac{n\pi}{4})]^n}=1\times\lim_{n\to+\infty}[1+2\cos\frac{n\pi}{4}]$$

$$\Rightarrow R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+2\cos(\frac{n\pi}{4})}$$

حد پدید آمده، به مقدار مشخصی همگرا نمی‌شود، اما گفتیم در این‌گونه سؤالات کمترین مقدار شعاع همگرایی را باید انتخاب کرد. بنابراین لازم است $\cos\frac{n\pi}{4}$ بیشترین مقدار خود را داشته باشد، یعنی $\cos\frac{n\pi}{4}=1$، پس شعاع همگرایی سری فوق برابر با $R=\frac{1}{3}$ است.

مثال۲۳: بازه همگرایی سری $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n^2}x^n$ کدام است؟

۱) $[-\sqrt{e},\sqrt{e})$ ۲) $(-e^{-1},e]^{-1}$ ۳) $[-e^{-1},e)^{-1}$ ۴) $(-e^{-1},e)^{-1}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا شعاع همگرایی سری را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n}=e^{\pm1}$$

می‌دانید که وقتی برای ریشه‌ی nاُم چند جواب به‌دست می‌آید، باید بزرگترین جواب به‌دست آمده را در نظر بگیریم، پس داریم:

$$\frac{1}{R}=e\Rightarrow R=\frac{1}{e}$$

بنابراین بازه همگرایی به‌صورت $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ خواهد بود که نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شوند:

$$x=\frac{1}{e}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2(-1)^n}(\frac{1}{e})^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^n)^{n(-1)^n}(\frac{1}{e^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n(-1)^n}}{e^n}\Rightarrow\begin{cases}1\;;\ \text{n زوج}\\0\;;\ \text{n فرد}\end{cases}\Rightarrow\text{واگرا}$$

$$x=-\frac{1}{e}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n^2}(-\frac{1}{e})^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

بسط مک‌لورن توابع معروف به شرح زیر است:

۱) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ ، $(x\in\mathbb{R})$

۲) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ ، $(x\in\mathbb{R})$

۳) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ، $(x\in\mathbb{R})$

۴) $\mathrm{Ln}(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ ، $(-1<x\le 1)$

۵) $(1+x)^k = 1+\frac{kx}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$ ، $|x|<1$

سری فوق در صورتی که k عددی طبیعی باشد، به ازای تمام xها معتبر است، اما به ازای هر k حقیقی و غیر طبیعی، برای $|x|<1$ معتبر است و البته در مورد نقاط روی مرز با توجه به مقادیر k نتایج زیر را داریم:

در این سری اگر $k>0$، آن‌گاه سری در نقاط $x=\pm 1$ هم معتبر است. اگر $k\le -1$، آن‌گاه سری در نقاط $x=\pm 1$ معتبر **نیست**. اگر $-1<k<0$، آن‌گاه سری در نقطه‌ی $x=1$ معتبر است، اما در $x=-1$ معتبر **نیست**.

۶) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ، $(|x|<1)$

۷) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ، $(|x|<1)$

۸) $\sinh x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ، $(x\in\mathbb{R})$

۹) $\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ، $(x\in\mathbb{R})$

۱۰) $\mathrm{Arcsin}\,x = x+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{1\times 3x^5}{2\times 3\times 4\times 5}+\dots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ ، $|x|<1$

۱۱) $\mathrm{tg}\,x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots$ ، $(|x|<\frac{\pi}{2})$

۱۲) $\mathrm{Arctg}\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ، $(-1\le x\le 1)$

۱۳) $\mathrm{Arctgh}\,x = x+\frac{x^3}{3}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ، $(-1<x<1)$

۱۴) $\mathrm{Arcsinh}\,x = x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\dots=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n\times n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$ ، $|x|<1$

توصیه‌نامه!

بیشتر دانشجویان در حفظ کردن سری‌های داده شده، خصوصاً (فرم بسته‌ی آن‌ها) دچار مشکل هستند. برای همین در این قسمت سعی کردهام توصیه‌هایی را به شما عزیزان ارائه دهم:

در ابتدا توصیه بنده این است که حتماً این صفحه را جزء صفحاتی در نظر بگیرید که مرتب به آن سر می‌زنید و با تکرار سعی‌کنید فرمول‌ها به خاطر سپرده شوند. مثلاً این صفحه را اکثر اوقات همراه خود داشته باشید. البته کپی این صفحه! مبادا این برگه را از وسط کتاب پاره کنید!!)

اما از این‌ها که بگذریم، شما باید قواعدی را برای خود درست کنید. مثلاً می‌دانیم $\sin x$ تابعی فرد است، پس باید جملات آن فرد باشند، پس x^{2n+1}، مخصوص بسط $\sin x$ است و به همین ترتیب x^{2n}، مخصوص بسط $\cos x$ است. از طرفی چون سینوس و کسینوس تغییر علامت می‌دهند، عبارت $(-1)^n$ در هر دو بسط حضور فعال دارد! نکته‌ی دیگر آن که؛ هر چی در توان x بود، باید با اضافه شدن علامت فاکتوریل به آن، در مخرج کسر ظاهر شود. اما از اعداد مختلط می‌دانیم $e^{ix}=\cos x+i\sin x$، یعنی بسط e^x هم جملات $\cos x$ را در خود دارد و هم جملات $\sin x$ را، لذا دیگر لازم نیست جملات زوج و فرد را از هم جدا کنیم! یعنی باید در این بسط، توان x، n باشد، و همان توان با علامت فاکتوریل در مخرج قرار بگیرد $(n!)$ و چون e^x همواره مثبت است، پس علامت بین جملات همواره مثبت است و دیگر خبری از $(-1)^n$ نیست! در واقع این بسط جمع جملات سینوس و کسینوس با مثبت کردن علامت تمام جمله‌ها می‌باشد، (فرم باز دو بسط سینوس و کسینوس را با هم جمع کنید، موضوع برایتان قابل درک‌تر است)

به همین شکل با دانستن بسط $\sin x$ و $\cos x$ می‌توانیم به راحتی فرمول بسط‌های $\sinh x$ و $\cosh x$ را در ذهن خود به راحتی ذخیره کنیم. چون این دو عبارت همواره مثبت هستند، پس باید تمام جملات مثبت باشند، پس کافی است در دو بسط $\sin x$ و $\cos x$ عبارت $(-1)^n$ را از بین ببریم تا به بسط دو عبارت $\sinh x$ و $\cosh x$ برسیم.

یکی دیگر از بسط‌های مهم، بسط $\mathrm{Ln}(1+x)$ است. در این بسط، جملات یکی در میان، مثبت و منفی هستند. توان x مانند e^x به‌صورت x^n است و تفاوت اساسی این است که دیگر در این بسط در مخرج کسر خبری از $n!$ فاکتوریل در مخرج نیست و فقط n حضور دارد و به همین دلیل دیگر حد پایین سیگما نمی‌تواند صفر باشد و n از $\underline{1}$ شروع می‌شود. (چون در غیر این‌صورت، مخرج صفر می‌شود!) و تفاوت دیگرش با e^x این است که $(-1)^{n+1}$ در سری حضور دارد و این طبیعی است، چون $\mathrm{Ln}(1+x)$، برخلاف e^x می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

بسط مهم دیگر، بسط برنولی (بسط شماره ۵) می‌باشد که باید آن را حفظ کنید. در این بسط به غیر از جمله‌ی اول که $\underline{1}$ است، توان‌های طبیعی از x وجود دارند و شروع از $k=1$ می‌باشد و در هر مرحله، عدد موجود در توان x با علامت فاکتوریل در مخرج ظاهر می‌شود. ضریب x^1، برابر با k، ضریب x^2 برابر با $k(k-1)$ و به همین ترتیب هر بار با افزایش یک واحدی در توان x، شاهد این هستیم که یک واحد از k کم می‌شود و در ضریب جمله‌ی قبلی ضرب می‌شود.

فرم خاص این سری، به‌صورت ۶ و ۷ می‌باشد که در تست‌ها کاربرد فراوان دارد.

سخن آخر این‌که؛ تا سال ۹۱، بیشتر سؤالات مربوط به بسط‌های فوق بوده‌اند، اما در سال‌های اخیر به نظر می‌رسد؛ بسط‌های $\mathrm{Arcsin}\,x$ و $\mathrm{Arctg}\,x$ نیز مورد توجه طراحان قرار گرفته‌اند. بنابراین این دو بسط را حتماً حفظ باشید! (برای خود قاعده درست کنید و یا بارها و دست کم قبل از امتحان، این بسط‌ها را مطالعه کنید!)

مثال ۱۰: ضریب چهارمین جمله بسط مک‌لورن تابع $f(x)=Ln(1+2x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) -4 ۴) 4

پاسخ : گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده که باید در بسط $Ln(1+x)$، به جای تمام x ها، ۲x قرار دهیم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \Rightarrow Ln(1+2x)=(2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\cdots \Rightarrow \text{ضریب جمله چهارم}=-\frac{2^4}{4}=-4$$

مثال ۱۱: در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{Ln(1+x)}{x}$ برای $|x|<1$ برحسب قوای x، ضریب x^3 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $Ln(1+x)$ داریم:

$$\frac{Ln(1+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots \Rightarrow x^3\ \text{ضریب}=-\frac{1}{4}$$

مثال ۱۲: بسط مک‌لورن تابع $f(x)=xe^x$ کدام است؟

۱) $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots$

۲) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots$

۳) $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

۴) $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به بسط مک‌لورن تابع e^x داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \Rightarrow x.e^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots$$

مثال ۱۳: یک جواب تقریبی برای x ازمعادله $\frac{e^x-1}{x}=\frac{2785}{2784}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1391}$ ۲) $\frac{1}{1392}$ ۳) $\frac{1}{1393}$ ۴) $\frac{1}{1394}$

پاسخ: گزینه «۲» سمت راست تساوی فوق عددی نزدیک به یک است، یعنی به طور تقریبی داریم: $x\sim 1-e^x$، و می‌دانیم این هم‌ارزی در x های نزدیک به صفر حاصل می‌شود، پس می‌توانیم بسط مک‌لورن e^x را بنویسیم:

$$\frac{e^x-1}{x}\sim\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)-1}{x}=\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\cdots}{x}\sim 1+\frac{x}{2}$$

بنابراین داریم:

$$1+\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2784}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{1}{2784}\Rightarrow x=\frac{1}{1392}$$

مثال ۱۴: اگر $\frac{tgx}{x}=\frac{1201}{1200}$، آن‌گاه x برحسب رادیان، کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{201}$ ۲) $\frac{1}{200}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{1}{20}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که عدد $\frac{1201}{1200}$ تقریباً نزدیک به عدد یک است، بنابراین $\frac{tgx}{x}$ هم حدوداً یک است و این یعنی x نزدیک به صفر است.

لذا می‌توانیم بسط مک‌لورن tgx را بنویسیم:

$$\frac{tgx}{x}=\frac{x+\frac{x^3}{3}+\cdots}{x}=1+\frac{x^2}{3}+\cdots$$

بنابراین مقدار تقریبی x به‌صورت مقابل حساب می‌شود:

$$1+\frac{x^2}{3}=\frac{1201}{1200}\Rightarrow\frac{x^2}{3}=\frac{1201}{1200}-1\Rightarrow\frac{x^2}{3}=\frac{1}{1200}\Rightarrow x^2=\frac{1}{400}\Rightarrow x=\frac{1}{20}$$

مثال ۱۵: ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{-1}{6}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $e^{-t^۲}$ داریم:

$$f(x)=\int_۰^x e^{-t^۲}dt=\int_۰^x(۱-t^۲+\frac{t^۴}{۲}-\cdots)dt=(t-\frac{t^۳}{۳}+\frac{t^۵}{۱۰}-\cdots)\Big|_۰^x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۱۰}-\cdots$$

بنابراین ضریب $x^۳$ برابر $\frac{-۱}{۳}$ می‌باشد.

مثال ۱۶: اگر بخواهیم بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{x^۴+۹}$ را بنویسیم، شرط همگرایی سری مک‌لورن این تابع کدام است؟

۱) $|x|<۳$ ۲) $|x|<\sqrt{۳}$ ۳) $|x|<۹$ ۴) $|x|<\sqrt[۴]{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا سعی می‌کنیم تابع را به‌صورت $\frac{۱}{۱+u}$ در آوریم تا بتوانیم از فرمول این بسط استفاده کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{۹+x^۴}=\frac{x}{۹(۱+\frac{x^۴}{۹})}=\frac{x}{۹}(\frac{۱}{۱+\frac{x^۴}{۹}})$$

می‌دانیم با شرط $|x|<۱$، بسط $\frac{۱}{۱+x}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^n$ برقرار است، حالا اگر در طرفین این بسط $\frac{x^۴}{۹}$ قرار دهیم، داریم:

$$\frac{۱}{۱+\frac{x^۴}{۹}}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(\frac{x^۴}{۹})^n$$

طبیعی است؛ وقتی به جای x، $\frac{x^۴}{۹}$ قرار می‌دهیم، شرط همگرایی هم از $|x|<۱$ به $|\frac{x^۴}{۹}|<۱$ تغییر می‌کند. پس داریم:

$$x^۴<۹\Rightarrow x^۲<۳\Rightarrow |x|<\sqrt{۳}$$

در واقع می‌توان گفت؛ شعاع همگرایی سری $\sqrt{۳}$ است.

مثال ۱۷: در بسط مک‌لورن $f(x)=\sqrt{۱+\sin x}$، ضریب $x^۳$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۴۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۴۸}$ ۳) $\frac{۷}{۴۸}$ ۴) $-\frac{۷}{۴۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم بسط مک‌لورن $(۱+u)^{\frac{۱}{۲}}$ به‌صورت مقابل است:

$$(۱+u)^{\frac{۱}{۲}}=۱+\frac{۱}{۲}u+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)}{۲!}u^۲+\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}-۲)}{۳!}u^۳+\cdots=۱+\frac{۱}{۲}u-\frac{۱}{۸}u^۲+\frac{۳}{۶\times۸}u^۳+\cdots$$

چون ضریب $x^۳$ مدنظر است تا $u^۳$ بسط می‌دهیم. در این صورت با جایگزینی $u=\sin x$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{۱+\sin x}=۱+\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{-۱}{۸}\sin^۲ x+\frac{۱}{۱۶}\sin^۳ x+\cdots$$

حال ضریب $x^۳$ را در هریک از جملات فوق به‌دست می‌آوریم. در جمله $\frac{۱}{۲}\sin x$ ضریب $x^۳$ برابر $\frac{-۱}{۱۲}$ می‌باشد، زیرا $\sin x=x-\frac{x^۳}{۶}+\cdots$. جمله $\frac{-۱}{۸}\sin^۲ x$ تابعی زوج است، پس فاقد جمله $x^۳$ است. در جمله $\frac{۱}{۱۶}\sin^۳ x$ چون $\sin^۳ x\sim x^۳$، پس ضریب $x^۳$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است. بنابراین در مجموع ضریب $x^۳$ برابر است با:

$$x^۳ \text{ ضریب }=\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{-۱}{۴۸}$$

مثال ۱۸: در بسط مک‌لورن تابع $e^{x^۲+۲x}$، ضریب $x^۲$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۴}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به این‌که بسط مک‌لورن e^x به‌صورت مقابل است:

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots$$

ابتدا بسط مک‌لورن $e^{x^۲}$ و $e^{۲x}$ را به‌دست می‌آوریم، بدین منظور در بسط e^x به جای xها یک‌بار ۲x و بار دیگر $x^۲$ را جایگزین می‌کنیم.

$$e^{x^۲}=۱+x^۲+\frac{x^۴}{۲!}+\cdots \qquad e^{۲x}=۱+۲x+\frac{۴x^۲}{۲!}+\cdots$$

حال برای به‌دست آوردن بسط مک‌لورن مورد‌نظر یعنی $e^{x^۲+۲x}$، بسط‌های فوق را در هم ضرب می‌کنیم.

$$e^{x^۲+۲x}=e^{x^۲}.e^{۲x}=(۱+x^۲+\frac{x^۴}{۲!}+\cdots)(۱+۲x+۲x^۲+\cdots)$$

برای به‌دست آوردن ضریب $x^۲$ جملاتی از پرانتز اول که در پرانتز دوم ضرب و $x^۲$ ایجاد می‌کنند را در نظر می‌گیریم. در این صورت ضریب $x^۲$ برابر ۳ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۹: در بسط مک‌لورن تابع $\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}$، ضریب x^2 برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{576}$ ۲) $\frac{-1}{576}$ ۳) $\frac{1}{288}$ ۴) $-\frac{1}{288}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم بسط مک‌لورن $(1+x)^k$ به‌صورت مقابل است:
$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\cdots$$

بنابراین بسط مک‌لورن $\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+\frac{x}{8})^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{8})^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}[1+(\frac{-1}{3})(\frac{x}{8})+\frac{(\frac{-1}{3})(\frac{-4}{3})}{2}(\frac{x}{8})^2+\cdots]=\frac{1}{2}-\frac{x}{48}+\frac{x^2}{576}-\cdots$$

مثال ۲۰: در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=e^{tg^{-1}x}-1$، ضریب x^3 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» بسط مک‌لورن $tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$ می‌باشد، بنابراین:
$$f(x)=e^{tg^{-1}x}-1=(x-\frac{x^3}{3})+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{x^3}{3})^3}{3!}+\cdots$$

ضریب x^3 در جمله اول بالا برابر $\frac{-1}{3}$، در جمله دوم x^3 وجود ندارد و در جمله سوم ضریب x^3 برابر $\frac{1}{6}$ می‌باشد. پس در مجموع ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}$ می‌باشد.

مثال ۲۱: در بسط مک‌لورن تابع $\frac{1+x^3}{1+x^2}$، کدام جمله درست <u>نیست</u>؟

۱) ضریب x^2 با ضریب x^6 برابر است.
۲) ضریب x^3 با ضریب x^4 برابر است.
۳) ضریب x^5 با ضریب x^7 برابر است.
۴) ضریب x^8 با ضریب x^4 برابر است.

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+x}$ به‌صورت مقابل است:
$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

در بسط فوق به جای x، x^2 قرار می‌دهیم:
$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

بنابراین بسط $\frac{1+x^3}{1+x^2}$ برابر است با:
$$\frac{1+x^3}{1+x^2}=(1+x^3)(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots)$$

با توجه به عبارت به‌دست آمده در بالا، ضریب x^5 برابر (-1) و ضریب x^7 برابر (1) می‌باشد.

مثال ۲۲: ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن $f(x)=\cosh x-\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10!}$ ۲) $\frac{2}{10!}$ ۳) $\frac{1}{9!}$ ۴) $\frac{2}{9!}$

پاسخ: گزینه «۲» بسط مک‌لورن $\cos x$ و $\cosh x$ به‌صورت زیر است:
$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
و
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

بنابراین ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن $\cosh x-\cos x$ برابر $\frac{2}{10!}$ است.

مثال ۲۳: بسط تیلور تابع $f(x)=xe^x+\frac{1}{e}$ حول نقطه $x=-1$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)!}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e^n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e}(n-1)$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e}(n+1)$

پاسخ: گزینه «۳» برای این که بتوانیم از بسط مک‌لورن استفاده کنیم، تغییر متغیر می‌دهیم:
$$x+1=t\Rightarrow x=t-1$$

$$f(x)=xe^x+\frac{1}{e}=(t-1)e^{t-1}+\frac{1}{e}=\frac{t-1}{e}e^t+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}((t-1)e^t+1)$$
$$=\frac{1}{e}(te^t-e^t+1)=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}+1)=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!})=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!})$$
$$=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}(1-\frac{1}{n+1}))=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}\frac{(n-1)}{n}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(n-1)\overset{t=x+1}{=\!=}\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}(n-1)$$

مثال ۲۴: نمایش تابع $f(x)=Ln(\frac{1}{2+2x+x^2})$، بر حسب توان‌های مثبت $(x+1)$ به‌صورت سری، کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x+1)^{2n+1}}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x+1)^{2n}}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{2n}}{n}$

پاسخ: گزینه «۳» باید مخرج کسر را بازنویسی کنیم و در نهایت از بسط $Ln(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}u^n}{n}$ استفاده کنیم.

$$f(x)=Ln\frac{1}{x^2+2x+2}=Ln\frac{1}{(x+1)^2+1}=-Ln((x+1)^2+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n}}{n}$$

مثال ۲۵: در بسط مک‌لورن تابع $Ln(1-x+x^2)$ ضریب x^5 کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه «۳» یک روش این است که از بسط مک‌لورن $Ln(1+u)$ استفاده کنیم که برای این مثال $u=-x+x^2$ است $(u\to 0)$ اما این روش شاید کمی حجم محاسبات را بیشتر کند. روش دیگر استفاده از یک روش ابتکاری است؛ یعنی ضرب $(1+x)$ در صورت و مخرج عبارت جلوی Ln و بعد از آن استفاده از فرمول $Ln\frac{B}{A}=LnB-LnA$ است.

$$Ln(1-x+x^2)=Ln[\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}]=Ln(\frac{x^3+1}{x+1})=Ln(1+x^3)-Ln(1+x)=(x^3-\frac{(x^3)^2}{2}+\cdots)-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5})$$

$$\Rightarrow x^5\ \text{ضریب}=-\frac{1}{5}$$

مثال ۲۶: در سری مک‌لورن تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$، ضریب x^2 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا برای ساده‌تر کردن ضابطه‌ی $f(x)$ از اتحاد مثلثاتی $\sin^2x+\cos^2x=1$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}{}^3-3\sin^4x\cos^2x-3\sin^2x\cos^4x=1-3\sin^2x\cos^2x\underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}$$

$$\Rightarrow f(x)=1-3\sin^2x\cos^2x\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x}f(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

اکنون از فرمول توان‌شکن $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

بسط مک‌لورن $\cos 4x$ را می‌نویسیم و ضریب x^2 در بسط تابع f مشخص می‌شود:

$$f(x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\cdots)\Rightarrow x^2\ \text{ضریب}=\frac{3}{8}(\frac{-16}{2})=-3$$

مثال ۲۷: ضریب x^2 در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(1+x)^x$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به توضیحات در مورد بسط مک‌لورن توابع، می‌دانیم ضریب x^2 در بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ برابر با $\frac{f''(0)}{2!}$ می‌شود، بنابراین لازم است $f''(x)$ را حساب کنیم:

$$f(x)=(1+x)^x\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}Lnf(x)=xLn(1+x)\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{f'(x)}{f(x)}=1\times Ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\times x$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]$$

حالا دوباره از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=f'(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]+[\frac{1}{1+x}+\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}]f(x)\Rightarrow f''(x)=f'(x)[Ln(1+x)+\frac{x}{1+x}]+[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]f(x)$$

ما دنبال $f''(0)$ بودیم، پس به راحتی داریم:

$$f''(0)=f'(0)(Ln1+0)+(1+1)f(0)=2f(0)$$

از متن سؤال به راحتی $f(0)=1$ به‌دست می‌آید، لذا $f''(0)=2$ و بنابراین ضریب x^2 برابر با $\frac{f''(0)}{2!}=\frac{2}{2}=1$ می‌باشد.

روش دیگر: حل ساده‌تر به این شکل است که با توجه به رابطه‌ی $a^b=e^{bLna}$، $f(x)$ را به شکل زیر بنویسیم:

$$(1+x)^x=e^{xLn(1+x)}=e^{x(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots)}=e^{x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4}=e^{x^2}.e^{-\frac{1}{2}x^3}\times\cdots=(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots)(1+(-\frac{1}{2}x^3)+\cdots)\times\cdots$$

همان‌طور که می‌بینید ضریب x^2 برابر با ۱ است.

مثال ۲۸: در بسط مک‌لورن $f(x)=Ln(\cos x)$، ضریب x^6 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{45}$ ۲) $\frac{1}{45}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۱» چون $f'(x)=-tgx$ است، پس بسط مک‌لورن $-tgx$ را نوشته و از آن انتگرال می‌گیریم:

$$-tgx=-x+\frac{-x^3}{3}+\frac{-2x^5}{15}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}Ln(\cos x)=\frac{-x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$$

یعنی ضریب x^6 برابر $\frac{-1}{45}$ است. البته اگر راه‌حل فوق به ذهنتان نرسید، می‌توانید $f(x)$ را به‌صورت $Ln[(1-\frac{x^2}{2})]$ بنویسید، به راحتی از بسط $Ln(1-u)$ استفاده کنید. که البته راه‌حل سخت‌تر نیازمند دقت بیشتر است.

مثال ۲۹ (سخت): اگر مشتق nام تابع $f(x)=(x^2-6x-2)e^{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر با ۱۳۹۳ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینه «۳» سؤال جالب و البته سختی است! اما تا وقتی بسط e^{x-1} حول نقطه‌ی $x=1$ را بلدیم، باید به حل این سؤال امیدوار باشیم!

برای راحتی در محاسبات می‌توانیم از تغییر متغیر $x-1=t$ استفاده کنیم، در این صورت باید مشتق nام تابع $f(t)$ در نقطه‌ی $t=0$ را حساب کنیم:

$$f(t)=[(t+1)^2-6(t+1)-2]e^t=(t^2-4t-7)e^t=(t^2-4t-7)(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{t^n}{n!}+\cdots)$$

خُب برای رسیدن به مشتق nام تابع $f(t)$ در نقطه‌ی $t=0$، باید از رابطه‌ی مقابل کمک بگیریم:

$$\text{ضریب } t^n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow \mathbf{f^{(n)}(0)=n!\times(\text{ضریب } t^n)}$$

اما قسمت مهم حل این سؤال اینجاست! جمله‌ی t^n در سه حالت ایجاد می‌شود، یکی ضرب t^2 در $\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$، دیگری ضرب $-4t$ در $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ و در نهایت ضرب -7 در $\frac{t^n}{n!}$، بنابراین داریم:

$$\text{ضریب } t^n=\frac{1}{(n-2)!}-\frac{4}{(n-1)!}-\frac{7}{n!}\quad,\quad f^n(0)=n!\times(\text{ضریب } t_n)\Rightarrow$$

پس داریم:

$$f^{(n)}(0)=n![\frac{1}{(n-2)!}-\frac{4}{(n-1)!}-\frac{7}{n!}]=\frac{n!}{(n-2)!}-\frac{4n!}{(n-1)!}-7=\frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!}-\frac{4(n-1)!n}{(n-1)!}-7$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=(n-1)n-4n-7\Rightarrow f^{(n)}(0)=n^2-5n-7$$

اما سؤال گفته؛ مشتق nام تابع برابر با ۱۳۹۳ می‌باشد، لذا داریم:

$$n^2-5n-7=1393\Rightarrow n^2-5n-1400=0\Rightarrow(n-40)(n+35)=0\Rightarrow n=40$$

مثال ۳۰ (سخت): در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\sec x$، ضریب x^4 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه «۲» چون $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ و بسط مک‌لورن $\cos x$ به صورت $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots$ می‌باشد. پس برای به دست آوردن بسط $\sec x$، به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

در واقع، در این روش، باید صورت را بر مخرج (مطابق قواعد تقسیم که احتمالاً از دبیرستان بلد هستید، تقسیم کنید!) تقسیم را تا جایی ادامه می‌دهیم که در خارج‌قسمت به جمله‌ی x^4 برسیم و بعد در این وضعیت در عبارت «خارج قسمت» ضریب x^4 را به عنوان جواب معرفی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنید در این سؤال ضریب x^4 برابر با $\frac{5}{24}$ به‌دست می‌آید. اگر در خارج‌قسمت جمله‌ی x^4 به‌وجود نیاید، معلوم می‌شود که ضریب آن صفر است. (البته این موضوع هیچ‌وقت برای تابع $f(x)=\frac{1}{\sec x}$ که تابعی زوج است، اتفاق نمی‌افتد!)

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
\underline{-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}} & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24} \\
\quad\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} & \\
\underline{\frac{-x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{48}} & \\
\quad\frac{5x^4}{24}-\frac{x^6}{48} &
\end{array}$$

مثال ۳۱ (سخت): در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=tg^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$، ضریب x^3 کدام است؟ ($|x|<1$)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» با یک سؤال نسبتاً جدید و البته جالب روبه‌رو هستیم. ما بسط مک‌لورن $tg^{-1}x$ را بلدیم، بیایید با هم تلاش کنیم سری صورت را به فرم سری $tg^{-1}x$ در بیاوریم! نمی‌دانم چرا هر وقت tg^{-1} می‌بینم، بی‌اختیار به یاد فرمول‌های زیر می‌افتم!

$$tg^{-1}(\frac{a\pm b}{1\mp ab})=tg^{-1}a\pm tg^{-1}b \quad , \quad (ab<1)$$

خُب با این فرمول چه بلایی می‌توانیم بر سر تابع داده شده بیاوریم!؟ اگر فرض کنیم $a=x$ و $b=x$، آن‌گاه داریم:

$$tg^{-1}(\frac{2x}{1-x^2})=tg^{-1}(\frac{x+x}{1-(x)(x)})=tg^{-1}x+tg^{-1}x=2tg^{-1}x$$

بنابراین بسط سری فوق به‌صورت مقابل است:

$$tg^{-1}(\frac{2x}{1-x^2})=2tg^{-1}x=2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{7}x^7+-\cdots$$

نکته۱: هر گاه تابعی فرد باشد، در بسط مک‌لورن آن جملات زوج وجود ندارد و هرگاه تابعی زوج باشد، در بسط مک‌لورن آن جملات فرد وجود ندارد.

مثال ۳۲: ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $x^4 tgx$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4!}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $x^4 tgx$ فرد است و بنابراین در بسط آن جملات زوج وجود ندارد پس ضریب x^4 صفر است.

نکته۲: شعاع همگرایی بسط تیلور تابع کسری f، حول نقطه‌ای مانند x_0، برابر با مینیمم فاصله‌ی نقطه‌ی x_0 تا ریشه‌های مخرج (چه ریشه‌های حقیقی و چه ریشه‌های مختلط) تابع می‌باشد.

مثال ۳۳: شعاع همگرایی سری مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{1}{(x^2-2)(1+x^2)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که در صورت سؤال عنوان شده بسط مک‌لورن تابع f، بنابراین باید $x_0=0$ در نظر گرفته شود. برای به‌دست آوردن شعاع همگرایی این تابع ابتدا ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم:

$$x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \quad , \quad x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm i$$

کمترین فاصله نقاط $x=\pm i$ از نقطه‌ی $x_0=0$ برابر با 1 و کمترین فاصله‌ی نقاط $x=\pm\sqrt{2}$ از نقطه‌ی $x_0=0$ برابر $\sqrt{2}$ است، بنابراین شعاع همگرایی برابر با یک است.

مشتق و انتگرال گرفتن از سری‌های توانی

فرض کنید سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در فاصله $|x-x_0|<R$ به تابع $f(x)$ همگرا باشد. اگر شعاع همگرایی مثبت باشد، آن‌گاه می‌توان از طرفین رابطه مشتق یا انتگرال گرفت، یعنی داریم:

$$1)\ f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1} \quad ; \quad |x-x_0|<R$$

$$2)\ \int_{x_0}^{x}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \quad ; \quad |x-x_0|<R$$

اگر از یک سری مشتق یا انتگرال بگیریم، بازه همگرایی سری‌های جدید به جز نقاط روی مرز، همان بازه‌ی همگرایی سری اصلی خواهد بود (نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شوند). توجه داشته باشید که مهم‌ترین کاربرد مشتق و انتگرال‌گیری از سری‌ها در محاسبه‌ی مقادیر سری‌ها می‌باشد، به مثال بعد توجه کنید:

مثال ۳۴: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{x^2(2-x)}{(1-x)^3}$ ۲) $\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{2}{(1-x)^3}$ ۴) $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که ضریب یک چند جمله‌ای از n، پشتِ x^n قرار دارد، پس طراح سؤال ما را هدایت کرده که از مشتق‌گیری از طرفین تساوی $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ استفاده کنیم! ابتدا با یک مرحله مشتق‌گیری داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

خَب در این قسمت کمی دقت لازم است؛ در خواسته‌ی سؤال پشت عبارت شامل x، یک پرانتز $(n+2)$ ضرب شده، پس ما باید در این قسمت توانی از x داشته باشیم که اگر از آن مشتق گرفتیم، بتوانیم به $(n+2)$ در پشت عبارت شامل x برسیم، برای این منظور طرفین تساوی فوق را در x^3 ضرب می‌کنیم، تا داخل سیگما عبارت x^{n+2} تولید شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\times x^3=\frac{x^3}{(1-x)^2}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}=\frac{x^3}{(1-x)^2}$$

حالا کافیست از طرفین نسبت به x مشتق بگیریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n+1}=\frac{3x^2(1-x)^2-(2)(-1)(1-x)x^3}{(1-x)^4}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n+1}=\frac{3x^2(1-x)+2x^3}{(1-x)^3}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n+1}=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}:(*)$$

اگه سمت چپ تساوی فوق را با آنچه طراح در صورت سؤال خواسته مقایسه کنیم می‌بینیم که تمام آن شبیه خواسته‌ی سؤال است، اما یک تفاوت دارد و آن این که در این تساوی x^{n+1} وجود داره! در این لحظه دو اتفاق می‌افتد!؟ دانشجویان بی‌دقت بدون توجه به توان x^{n+1}، و با توجه به گزینه (۲) که اتفاقاً با سمت راست تساوی فوق یکی است (توجه دارید که طراح بدجنس یا به عبارتی خودم! گزینه (۲) را چه جوری طرح کرده!!) گزینه (۲) را انتخاب می‌کنند و دانشجویان بادقت به سادگی با تقسیم طرفین تساوی فوق بر x، به تساوی زیر یا همان سری داده شده در صورت سؤال می‌رسند و گزینه (۴) را انتخاب می‌کنند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n}=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$$

البته مورد داشتیم که هیچ‌کدام از دو حالت فوق را انتخاب نکرده و وقتی به تساوی (*) رسیده و دیده x^{n+1} به وجود آمده، فکر کرده اشتباه حل کرده و دوباره کلی راه حل قبلی را چک کرده!!

مثال ۳۵: حاصل عبارت $\frac{1}{(1-x)^4}$ برابر با کدام‌یک از گزینه‌ها است؟ $(|x|<1)$

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}x^n$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}x^n$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که در مخرج کسر $(1-x)^4$ داریم، باید از طرفین بسط $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ چند بار مشتق بگیریم، تا توان (۴) برای $1-x$ در مخرج ایجاد شود. حال اگر از طرفین عبارت، سه بار مشتق بگیریم، داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

حالا که $\frac{1}{(1-x)^4}$ ایجاد شد، باید با طرفین وسطین $\frac{1}{(1-x)^4}$ را در یک طرف تساوی نگه داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}\xrightarrow{\text{قاعده لغزاندن حدود}}\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}x^n$$

مثال ۳۶: کدام‌یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n+1}{\pi^n})=(\frac{\pi}{\pi-1})^2$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^3}$

پاسخ: گزینه «۴» برای پاسخ به این سؤال لازم است تمام گزینه‌ها را بررسی کنیم:

بررسی گزینه (۱): برای $|x|<1$ داریم:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در x}}\frac{x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

اگر در طرفین تساوی فوق به جای x، عدد $\frac{1}{\pi}$ را قرار دهیم، داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi^n}=\frac{1}{(1-\frac{1}{\pi})^2}=(\frac{\pi}{\pi-1})^2$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

بررسی گزینه (۲): برای $|x|<1$ داریم:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در x}}\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

پس گزینه (۲) نیز درست است.

مثال ۴۹: حاصل سری $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$، کدام است؟

۱) $4Ln2-2$ ۲) $2Ln2-1$ ۳) $1-Ln2$ ۴) $Ln2$

پاسخ: گزینه «۱» این سؤال را با توجه به بسط مک‌لورن تابع $Ln(1+x)$ پاسخ می‌دهیم؛ می‌دانیم $Ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$، با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود، می‌توانیم بنویسیم؛ $Ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}$ و با توجه به این که $(-1)^{n+2}=(-1)^n$، خواهیم داشت:

$$Ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^{n+1}}{n+1})\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\int Ln(1+x)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}dx\xrightarrow[\text{انتگرال‌گیری عادی در سمت راست}]{\text{انتگرال‌گیری جزء به جزء در سمت چپ و}}$$

$$(x+1)Ln(1+x)-x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

با توجه به سری سمت راست، اگر $x=1$ باشد، آن‌گاه به سری موردنظر سؤال می‌رسیم.

$$(1+1)Ln(1+1)-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}=2Ln2-1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+1)(n+2)}=4Ln2-2$$

تحلیل دیگر: می‌خواهیم فرض کنیم فقط بسط $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1)^n=\frac{1}{1+x}$ را برای حل این تست بلدیم! و بسط $Ln(1+x)$ را به یاد نداریم! ابتدا توجه کنید که عبارت $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ برابر با $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ است و همچنین توجه کنید که $\frac{1}{n+1}=\int_0^1 x^n$ و $\frac{1}{n+2}=\int_0^1 x^{n+1}$، در واقع سری به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S=2\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})(-1)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}[\int_0^1 x^n-\int_0^1 x^{n+1}](-1)^n=2\int_0^1\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}(-1)^n\right]dx$$

$$=2\int_0^1(\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1+x})dx=2\int_0^1(\frac{2}{1+x}-1)dx=4[Ln(1+x)]_0^1-2[x]_0^1=4Ln2-2$$

مثال ۵۰: حاصل سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ کدام است؟

۱) $Ln2-\frac{1}{3}$ ۲) $Ln2-\frac{1}{4}$ ۳) $Ln2$ ۴) $2Ln2-1$

پاسخ: گزینه «۴» سری داده شده در این تست در واقع تقریباً همان سری سؤال قبل است. اگر از قاعده‌ی لغزاندن حدود استفاده کنیم، داریم:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times(-1)^2}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این سری همان سری مثال قبل می‌باشد که فقط ضریب ۲ را ندارد.

مثال ۵۱: مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ: گزینه «۱» چون پشت عبارت توان‌دار n^2 داریم با توجه به سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ باید پشت عبارت توان‌دار n^2 ایجاد کنیم. در واقع باید با مشتق گرفتن و عملیات مناسب روی این سری آن را به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ در آوریم و سپس به جای x در آن $\frac{1}{2}$ قرار دهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم }(*)}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در x}}\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\qquad(1)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در x}}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$$

سؤال دانشجو: چرا در قسمت $(*)$ بعد از مشتق گرفتن، حد پایین سیگما از $n=0$ به $n=1$ تغییر کرد؟ قبلاً مسائلی داشتیم که مشتق می‌گرفتیم ولی در حدود سیگما تغییر ایجاد نمی‌شد.

پاسخ: دقت کنید در این سؤال سمت چپ به شکل مقابل است:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x^0+x^1+x^2+\cdots=1+x+x^2+\cdots$$

مثال ۵۸: حاصل سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)(2n-1)}$ به ازای $x=\sqrt{3}$، کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Harvard)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\mathrm{Ln}2$ ۲) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\mathrm{Ln}4$ ۳) $\pi-\pi\mathrm{Ln}2$ ۴) $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۱» سری داده شده در ابتدا شبیه بسط مک‌لورن توابع گفته شده نیست، برای پاسخ به این سری، می‌توانیم از تساوی زیر استفاده کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1)^{n-1}=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1)^{n-1}=\mathrm{Arctg}x$$

$$\xrightarrow{\text{دوباره از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}(-1)^{n-1}}{(2n)(2n-1)}=\int_0^x\mathrm{Arctg}x\,dx\xrightarrow{\text{با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم}}$$

$$\Rightarrow S=x\mathrm{Arctg}x-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)\Rightarrow S(\sqrt{3})=\sqrt{3}\mathrm{Arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+(\sqrt{3})^2)=\sqrt{3}(\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}4=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\mathbf{Ln2}$$

توضیح: البته اگر از همان ابتدا بسط Arctgx را بلد بودیم، نیازی به محاسبات اولیه نبود و از طرفین این بسط فقط یک بار انتگرال می‌گرفتیم.

مثال ۵۹ (سخت): حاصل سری $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{2n+1}$، به ازای $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$، کدام است؟

۱) $2\mathrm{Ln}3-1$ ۲) $\mathrm{Ln}2$ ۳) $\mathrm{Ln}3$ ۴) $3\mathrm{Ln}2-\frac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به وجود «$2n+1$» در مخرج کسر، باید به فکر استفاده از بسط Arctgx و یا Arctghx باشیم. در سری خبری از $(-1)^n$ نیست، پس باید سراغ بسط Arctghx برویم. دقت کنید؛ در توان x، $4n$ داریم، پس باید به جای x در طرفین بسط x^2 قرار دهیم:

$$\mathrm{Arctgh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Rightarrow\mathrm{Arctgh}x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}.x^2}{2n+1}\Rightarrow\mathrm{Arctgh}x^2=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{2n+1}$$

بنابراین سری خواسته شده برابر با $\frac{1}{x^2}\mathrm{Arctgh}x^2$ است. اما می‌دانیم $\mathrm{Arctgh}x=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+x}{1-x}$ و بنابراین $\frac{1}{x^2}\mathrm{Arctgh}x^2=\frac{1}{2x^2}\mathrm{Ln}(\frac{1+x^2}{1-x^2})$ و چون حاصل سری به ازای $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ خواسته شده، لذا داریم:

$$\text{حاصل سری به ازای } x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\mathrm{Ln}[\frac{1+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]=\mathrm{Ln}(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}})=\mathbf{Ln3}$$

اما ممکن است دانشجو بسط Arctghx را در خاطر نداشته باشد. در این حالت می‌توانیم با انجام عملیات بر روی سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ نیز به شکل زیر به جواب برسیم:

ابتدا در طرفین تساوی $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$، به جای x، x^2 قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\frac{1+x}{1-x})$$

اگر طرفین این تساوی را بر x تقسیم کنیم و بعد از آن، به جای xها، x^2 قرار دهیم به سری داده شده در صورت سؤال می‌رسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\mathrm{Ln}(\frac{1+x}{1-x})\xrightarrow{\text{در طرفین به جای x، } x^2 \text{ قرار می‌دهیم}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{2n+1}=\frac{1}{2x^2}\mathrm{Ln}(\frac{1+x^2}{1-x^2})\Rightarrow\text{حاصل سری به ازای } x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{Ln3}$$

مثال ۶۰ (سخت): مقدار حد مجموع سری $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3})$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» خُب برای حل این تستِ نسبتاً سخت، دانستن بسط $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$ کافیست. ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{4n+1}=\int_0^1 x^{4n}dx$ و $\frac{1}{4n+3}=\int_0^1 x^{4n+2}dx$ لذا سری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^1 x^{4n}dx+\int_0^1 x^{4n+2}dx\right](-1)^n=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n}+x^{4n+2})(-1)^n dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}(1+x^2)dx$$

می‌دانیم $\frac{1}{1+x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^4)^n$، لذا داریم: $S=\int_0^1\frac{1}{1+x^4}\times(1+x^2)dx=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

برای محاسبه انتگرال صورت و مخرج کسر را بر x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$S=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^1\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int_0^1\frac{1+\frac{1}{x^2}}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctg}(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}})\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}[\text{Arctg}(0)-\text{Arctg}(\infty)]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

توضیح: در محاسبه‌ی انتگرال توجه کنید که از فرمول $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{Arctg}\frac{u}{a}$ استفاده کردیم که در این سؤال $a=\sqrt{2}$ و $u=x-\frac{1}{x}$ است که مشتق u نیز در صورت کسر وجود داشت $(1+\frac{1}{x^2})$.

بازی با e

سؤالات و تست‌های زیادی را می‌توان با توجه به بسط مک لورن e^x طرح نمود، برای همین، چند نمونه از آن‌ها را در این قسمت ارائه کرده‌ایم.

مثال ۶۱: **حاصل سری $S=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots$ کدام است؟**

۱) $2(e-2)$ ۲) $e-1$ ۳) $1+\frac{e^2+1}{e}$ ۴) $\frac{e^2+1}{2e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با نگاه اولیه (و حتی بدون در نظر گرفتن گزینه‌ها) معلوم است؛ داستان در مورد بسط e^x است. اما ظاهراً جمله‌های توان فرد در بسط e^{+1} را نداریم! چه کار کنیم؟ می‌توانیم بسط e^{-1} را بنویسیم و با بسط e^{+1} جمع کنیم، در این صورت جمله‌های فرد حذف می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned}e^{-1}&=1+\frac{-1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\\e^{+1}&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow e+e^{-1}=(1+\frac{1}{2!}+\cdots)+(1+\frac{1}{2!}+\cdots)=2(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots)$$

ملاحظه می‌کنید در سمت راست تساوی فوق، سری مورد سؤال پدید آمده، بنابراین داریم: $S=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e+e^{-1})=\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})=\mathbf{\frac{1}{2}(\frac{e^2+1}{e})}$

یادداشت: اگر در سؤال حاصل $S=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots$ خواسته شده بود، چکار می‌کردیم؟ معلومه! بسط e^{+1} و e^{-1} را می‌نوشتیم و بعد $e-e^{-1}$ را حساب می‌کردیم، تا جمله‌های با توان زوج حذف شوند! (دقت کردید؛ خودم سؤال می‌کنم، خودم هم جواب می‌دهم!!) البته دقت کنید اگر به بسط‌های مک‌لورن مسلط باشید از همان ابتدا متوجه می‌شدید سری صورت سؤال $\cosh(1)$ است و می‌دانیم $\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ و لذا جواب به راحتی قابل تعیین بود.

مثال ۶۲: **حاصل $S=1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\cdots$، کدام است؟**

۱) e ۲) e^2-4 ۳) $2e-3$ ۴) $\frac{e^2+1}{e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» واقعاً کی فکرشُ میکنه حاصل این سری هم e بشه؟! اما به عملیات ساده و البته زیبای زیر دقت کنید:

$$S=1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\ldots=1+\frac{2+1}{2!}+\frac{4+1}{4!}+\frac{6+1}{6!}+\cdots=1+(\frac{2}{2!}+\frac{1}{2!})+(\frac{4}{4!}+\frac{1}{4!})+(\frac{6}{6!}+\frac{1}{6!})+\cdots$$

می‌دانیم $\frac{1}{1!}=\frac{2}{1!\times2}=\frac{2}{2!}$ و یا مثلاً $\frac{1}{3!}=\frac{4}{3!\times4}=\frac{4}{4!}$، پس داریم:

$$S=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\mathbf{e}$$

مثال ۶۳: **حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n!}$، کدام است؟**

۱) e ۲) $1/5e$ ۳) $2e$ ۴) $2/5e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، بنابراین سری را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2(n-1)!n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2(n-1)!}$

خب حالا به راحتی می‌توانیم، به سؤال جواب بدهیم، همان‌طور که می‌دانیم باید در صورت کسر $(n-1)$ ایجاد کنیم:

$$\text{حاصل سری}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+2}{2(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{2(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

تکلیف سری دوم که مشخص است، (برابر با e است)، بنابراین سراغ تعیین تکلیف سری اول می‌رویم:

$$\text{حاصل سری اول} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(n-۱)}{۲(n-۲)!(n-۱)} \overset{(*)}{=} \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{۲(n-۲)!} = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۲)!} \xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}} \text{حاصل سری اول} = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!} = \frac{۱}{۲}e$$

بنابراین حاصل سری برابر با $e+\frac{۱}{۲}e=\frac{۳}{۲}\mathbf{e}$ است.

توضیح در مورد قسمت (*): ممکن است برای شما این سؤال پیش بیاید چرا در قسمت (*) حد پایین سیگما تغییر کرد. جواب این است که وقتی در مرحله‌ی قبل عبارت «$n-۱$» از صورت و مخرج ساده شد، حتماً باید شرط $n\neq ۱$ لحاظ شود.

مثال ۶۴: **حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲}{(n+۱)!}$، کدام است؟**

۱) $\frac{e+۱}{e}$ ۲) $۲e-۳$ ۳) $e-۱$ ۴) $\frac{e^۲+۱}{e}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم در این نوع سری‌ها باید در صورت کسر $(n+۱)$ را ایجاد کنیم، نوشتن $n^۲$ به‌صورت $(n^۲-۱)+۱$ ما را به خواسته‌ی خود می‌رساند، لذا داریم:

$$\text{جمله‌ی عمومی} = \frac{n^۲}{(n+۱)!} = \frac{(n^۲-۱)+۱}{(n+۱)!} = \frac{(n-۱)(n+۱)}{(n+۱)!}+\frac{۱}{(n+۱)!} = \frac{(n-۱)(n+۱)}{n!(n+۱)}+\frac{۱}{(n+۱)!} = \frac{n-۱}{n!}+\frac{۱}{(n+۱)!}$$

$$= \frac{n}{n!}-\frac{۱}{n!}+\frac{۱}{(n+۱)!} = \frac{n}{(n-۱)!n}-\frac{۱}{n!}+\frac{۱}{(n+۱)!} = \frac{۱}{(n-۱)!}-\frac{۱}{n!}+\frac{۱}{(n+۱)!}$$

حالا به راحتی، حاصل سری را حساب می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲}{(n+۱)!} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)!} = e-(e-۱)+(e-۲) = \mathbf{e-۱}$$

مثال ۶۵ (سخت): **حاصل سری $S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(۳+n)}{(n-۱)!}$، چند برابر e است؟**

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به متن سوال، واضح است؛ سری صرفاً بر حسب e محاسبه خواهد شد. اما ظاهراً سری داده شده خیلی چنین وضعیتی را نشان نمی‌دهد! گفتیم که در این گونه سری‌ها اول باید دنبال ایجاد $(n-۱)$ در صورت کسر باشیم تا بتوانیم، آن را با $(n-۱)$ مخرج ساده کنیم، پس داریم:

$$\frac{۳n+n^۲}{(n-۱)!} = \frac{۳n}{(n-۱)!}+\frac{n^۲}{(n-۱)!} = \frac{۳(n-۱+۱)}{(n-۱)!}+\frac{(n^۲-۱)+۱}{(n-۱)!}$$

تا اینجا خوب پیشرفته‌ایم، با نوشتن $(n-۱)!=(n-۲)!(n-۱)$ و همین‌طور $n^۲-۱=(n-۱)(n+۱)$، داریم:

$$\text{جمله‌ی عمومی} = ۳\left[\frac{(n-۱)}{(n-۲)!(n-۱)}+\frac{۱}{(n-۱)!}\right]+\frac{(n-۱)(n+۱)}{(n-۲)!(n-۱)}+\frac{۱}{(n-۱)!} = ۳\left[\frac{۱}{(n-۲)!}+\frac{۱}{(n-۱)!}\right]+\frac{n+۱}{(n-۲)!}+\frac{۱}{(n-۱)!}$$

خب تا اینجا تمام جملات غیر از جمله‌ی $\frac{n+۱}{(n-۲)!}$ را می‌توان بر حسب e نوشت. پس باید این جمله را با همان قاعده‌ی قبلی و به وجود آوردن $n+۱$ در صورت کسر به شکل $(n-۲)+۳$ بنویسیم:

$$S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(۳+n)}{(n-۱)!} = \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۳}{(n-۲)!}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳}{(n-۱)!}+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(n-۲)+۳}{(n-۲)!}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}$$

$$\Rightarrow S=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۳}{(n-۲)!}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{(n-۱)!}+\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{n-۲}{(n-۳)!(n-۲)}+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۳}{(n-۲)!} = \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۶}{(n-۲)!}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{(n-۱)!}+\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(n-۳)!}$$

پس داریم:

$$\text{حاصل سری} = ۶\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۲)!}+۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}+\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(n-۳)!} = ۶e+۴e+e = \mathbf{۱۱e}$$

مثال ۶۶ (سخت): **حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!(n+۲)}$، کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» به نظر می‌رسد این سری به سری مک‌لورن e^x مربوط باشد؛ اما برای این کار باید کل مخرج را به‌صورت یک فاکتوریل بیان کنیم. برای آن که بتوانیم مخرج را به‌صورت $(n+۲)!$ بنویسیم، عامل $(n+۱)$ را کم داریم، پس صورت و مخرج را در $(n+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!(n+۲)} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+۱}{n!(n+۱)(n+۲)}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا سعی می‌کنیم ضابطه f را به‌صورت $\frac{1}{1+u}$ بنویسیم تا بتوانیم از بسط مک‌لورن کمک بگیریم.

دقت کنید $f(x)$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=\frac{1}{3}(\frac{1}{1+\frac{x^3}{3}})$ نوشت، از طرفی برای $|u|<1$ داریم $\frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=1-u+u^2-u^3+\cdots$. بنابراین در نقطه‌ی $x=0$ می‌توانیم بسط مک‌لورن $f(x)$ را به این صورت بنویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+\frac{x^3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^3}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^{3n}$$

ما به ضریب x^{300} و x^{301} نیاز داریم. در این بسط فقط x^{3n} وجود دارد، پس x^{301} به وجود نمی‌آید؛ یعنی ضریب آن صفر است $(a_{301}=0)$. جمله‌ی x^{300} به ازای $n=100$ به‌دست می‌آید، پس $\frac{1}{3^{101}}x^{300}=\frac{(-1)^{100}}{3^{101}}x^{300}$ را در بسط خواهیم داشت. در نتیجه $a_{300}=\frac{1}{3^{101}}$ است. حالا مشتق‌های موردنظر را حساب می‌کنیم:

$$f^{(300)}(0)=(300)!\times a_{300}=\frac{(300)!}{3^{101}}\ ,\ f^{(301)}(0)=(301)!\times a_{301}=0$$

مثال ۷۹ (سخت): مشتق مرتبه‌ی دهم تابع $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$، در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

(با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم ریاضی عمومی (۱) دانشگاه صنعتی شریف)

۱) $9!\times 2^{-7}$ ۲) $(9!)\times 2^{-6}$ ۳) $(10!)\times 2^{-7}$ ۴) $(10!)\times 2^{-6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» یک سؤال نسبتاً سخت، با کاربردی جالب از بسط مک‌لورن! ابتدا توجه کنید، بسط مک‌لورن $(2-x)^{-1}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{x}{2}})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n\Rightarrow\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}$$

با ضرب طرفین در x^3، به تابع $f(x)$ می‌رسیم:

$$\frac{x^3}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2^{n+1}})x^{n+2}$$

دقت کنید؛ چون مخرج کسر سمت چپ دارای توان زوج است می‌توان آن را برابر با $(x-2)^2$ نیز نوشت، بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2^{n+1}})x^{n+2}$$

خُب، مشتق دهم در نقطه‌ی $x=0$، یعنی در بسط مک‌لورن تابع فوق ضریب x^{10} در $10!$ ضرب شود:

$$\text{ضریب } x^{10}=\frac{f^{(10)}(0)}{10!}\Rightarrow f^{(10)}(0)=(10!)\times(\text{ضریب } x^{10})$$

x^{10} به ازای $n=8$ حاصل می‌شود، بنابراین ضریب آن برابر با $\frac{8}{2^{8+1}}$ می‌شود، پس داریم:

$$f^{(10)}(0)=(10!)\times\frac{8}{2^9}=(10!)\frac{2^3}{2^9}=(10!)\times 2^{-6}$$

سری‌های دوگانه

در این قسمت چند مثال از سری‌های دوگانه را با هم مرور می‌کنیم، دقت کنید این سری‌ها منجر به انتگرال‌های دوگانه نمی‌شوند، به حدود بالای آن دقت کنید که n نیست! و همین‌طور شرایط دیگر نیز برای تبدیل برقرار نیست!

مثال ۸۰: حاصل $S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۲) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ ۳) $\frac{1}{4}(e^2-1)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^2+1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم که $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ است. بنابراین می‌توان تساوی مقابل را نوشت: $e^{2x}=e^x\times e^x=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})\times(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{n+k}}{n!k!}$

اکنون اگر از طرفین تساوی، در بازه‌ی ۰ تا ۱ انتگرال بگیریم، سری مورد نظر ما به دست می‌آید. دقت کنید که $\int_0^1 x^{n+k}dx=\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+k+1}$ است.

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\int_0^1(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{n+k}}{n!k!})dx\Rightarrow\frac{1}{2}(e^2-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!}\int_0^1 x^{n+k}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}$$

مثال۸۱: حاصل $S=\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^i}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $Ln4$ ۴) $Ln2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در سری‌های دوگانه، به شرط آن که جمله‌ی عمومی سری مثبت باشد، جابه‌جا کردن متغیرها ایرادی ندارد، به بیان دقیق‌تر اگر $f(i,k)\ge 0$ باشد، داریم:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f(i,k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}f(i,k)$$

بنابراین می‌توانیم سری را به صورت $S=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^i}$ بنویسیم. حالا توجه کنید که در سریِ داخلی، k ثابت است، بنابراین یک سری هندسی با قدر نسبت $(\frac{1}{2k})$ است، یادآوری می‌کنیم که برای یک سری هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q، فرمول $S=\frac{a}{1-q}$ را داریم در نتیجه:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^i}=\frac{\frac{1}{(2k)^2}}{1-\frac{1}{2k}}=\frac{1}{4k^2-2k}=\frac{1}{2k(2k-1)}$$

حالا به روش تجزیه‌ی کسرها داریم:

$$\frac{1}{2k(2k-1)}=\frac{-1}{2k}+\frac{1}{2k-1}$$

پس مقدار سری داخلی برابر با « $\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$ » است، پس داریم:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k})=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

از طرفی، توجه داشته باشید که بسط مک‌لورن $Ln(1+x)$ در بازه‌ی $-1<x\le 1$ همگراست پس قرار دادن $x=1$ در ان ایرادی ندارد. اگر در بسط مک‌لورن $Ln(1+x)$ مقدار $x=1$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\xrightarrow{x=1}Ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\Rightarrow S=Ln2$$

مثال۸۲: حاصل $S=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4i-1)^{2k}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}Ln2$ ۲) $\frac{1}{16}Ln2$ ۳) $\frac{1}{4}Ln2$ ۴) $\frac{1}{2}Ln2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اولاً توجه کنید که در سری داخلی، $4i-1$ ثابت است پس یک سری هندسی با قدر نسبتِ $\frac{1}{(4i-1)^2}$ و جمله‌ی اول $\frac{1}{(4i-1)^2}$ را داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4i-1)^{2k}}=\frac{\frac{1}{(4i-1)^2}}{1-\frac{1}{(4i-1)^2}}=\frac{1}{16i^2-8i}=\frac{1}{8i(2i-1)}$$

حالا با تجزیه‌ی کسرها خواهیم داشت:

$$\frac{1}{8i(2i-1)}=\frac{-\frac{1}{4}}{2i}+\frac{\frac{1}{4}}{2i-1}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i})$$

مقدار سری داخلی برابر با $\frac{1}{4}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i})$ است. آن را در سری دوم قرار می‌دهیم:

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i})=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots)$$

اکنون به بسط مک‌لورن $Ln(1+x)$ توجه کنید: $Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ این بسط در بازه‌ی $-1<x\le 1$ معتبر است. به ازای $x=1$ خواهیم داشت:

$$Ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

بنابراین $S=\frac{1}{4}Ln(2)$ است.