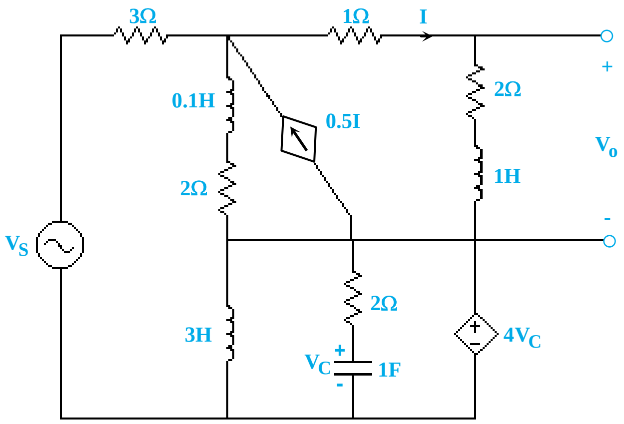
مثال ۲۷: در مدار زیر در صورتی که مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ برابر ۳ ولت باشد، مقدار متوسط سیگنال خروجی کدام است؟



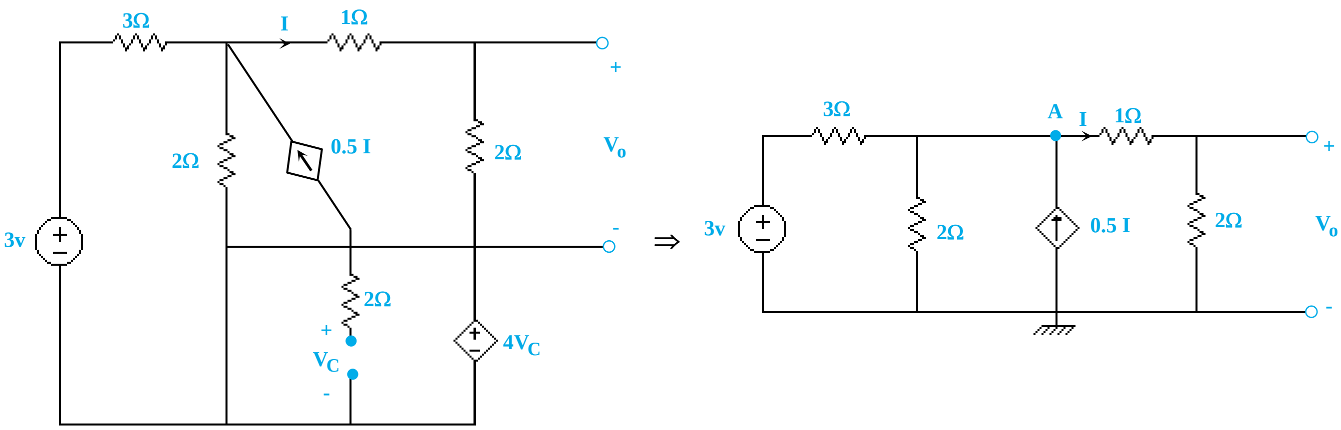
۱) ۱v

۲) ۰/۳۳v

۳) ۰/۶۶v

۴) ۱/۳۳v

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته گفته شده در قبل، مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ را به عنوان ورودی به مدار اعمال می‌کنیم و مدار را در حالت DC تحلیل می‌کنیم. در این حالت سلف‌ها با اتصال کوتاه و خازن‌ها با مدار باز مدل می‌شوند. حال با توجه به صفر شدن V_C در پایین مدار، منبع وابسته $4V_C$ نیز صفر و اتصال کوتاه می‌شود.



برای حل مدار فوق در گره A، KCL نوشته می‌شود.

$$\frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}I \quad , \quad I=\frac{V_A}{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{V_A}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ۲V_A-۶+۳V_A+۲V_A=V_A \quad \Rightarrow \quad V_A=۱v$$

با اعمال تقسیم ولتاژ داریم:

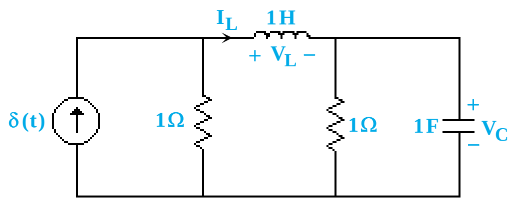
$$V_o=\frac{V_A\times ۲}{۲+۱}=\frac{۱\times ۲}{۳}=۰/۶۶v$$

با توجه به موارد فوق مقدار متوسط ولتاژ خروجی برابر ۰/۶۶v است.

نکته ۴: همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، در صورتی که در مدار منابع شامل تابع ضربه وجود داشته باشد، برای محاسبه $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$ در مدارهای مرتبه دوم نیز می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد. بنابراین توابع ورودی غیرضربه‌ای را غیرفعال کرده و در مدار فقط توابع ضربه‌ای را فعال نگه می‌داریم. در این حالت سلف‌ها را با مدار باز و خازن‌ها را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم و مقادیر $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$ را از فرمول‌های زیر محاسبه می‌کنیم. (در واقع به نحوی داریم جمع آثار استفاده می‌کنیم. وقتی فقط اثر ضربه را می‌خواهیم ببینیم، تمام منابع دیگر صفر می‌شود و لذا جریان سلف و ولتاژ خازن هم صفر در نظر گرفته می‌شود تا ببینیم V_L و I_C چه می‌شوند.)

$$I_L(0^+)=I_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}V_L(t)dt \qquad V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}I_C(t)dt$$

مثال ۲۸: با توجه به مدار شکل زیر، با فرض $V_C(0^-)=1V$ و $I_L(0^-)=1A$ کدام گزینه درست است؟



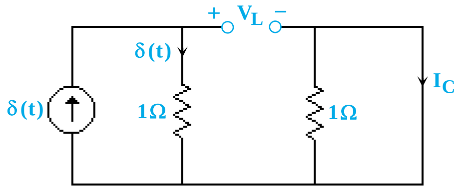
۱) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(0^+)=2A$ می‌شود، ولی روی ولتاژ خازن اثری ندارد و لذا $V_C(0^+)=1V$ باقی می‌ماند.

۲) منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن اثر می‌گذارد و $V_C(0^+)=2V$ می‌شود، ولی روی جریان سلف اثری ندارد و لذا $I_L(0^+)=1A$ باقی می‌ماند.

۳) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(0^+)=2A$ می‌شود و به همین ترتیب بر روی ولتاژ خازن نیز اثر دارد و $V_C(0^+)=2V$ می‌شود.

۴) با توجه به توپولوژی مدار، منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن و جریان سلف اثر نمی‌گذارد و $V_C(0^+)=1V$ و $I_L(0^+)=1A$ خواهد بود.

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه $V_C(0^+)$ و $I_L(0^+)$، ابتدا سلف‌ها را مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم. علاوه بر این، منابع مستقل غیرضربه‌ای را نیز غیرفعال می‌کنیم. حال داریم:



$$V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} I_C\,dt$$

$$I_L(0^+)=I_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} V_L\,dt$$

$$I_C=0 \Rightarrow V_C(0^+)=V_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} I_C\,dt=1+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} 0\,dt=1V$$

$$V_L=\delta(t) \Rightarrow I_L(0^+)=I_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} V_L\,dt \Rightarrow I_L(0^+)=1+\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt=2A$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای $I_L(0^+)$ و $V_C(0^+)$، دیده می‌شود که مقدار $I_L(0^+)$ با تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $2A$ و $V_C(0^+)$ بدون تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $1V$ است. لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

معادله مشخصه و محاسبه آن

هر مدار الکتریکی از مرتبه n دارای معادله مشخصه‌ای به شکل روبرو می‌باشد:

$$F(S)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+a_{n-2}S^{n-2}+\cdots+a_1S+a_0=0$$

در این حالت $F(S)$ را چندجمله‌ای مشخص مدار می‌نامند. ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص که تعداد آنها برابر n یعنی مرتبه مدار است، فرکانس‌های طبیعی مدار نامیده می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی، تعیین‌کننده نوع پایداری مدار و شکل پاسخ گذرای آن بوده و از این لحاظ مقدار آنها بسیار مهم است. در واقع هر فرکانس طبیعی با مقدار S_0 جمله‌ای به شکل e^{S_0t} در پاسخ ورودی صفر و پاسخ عمومی مدار بوجود می‌آورد. پس اگر ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\{S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n\}$ باشد، پاسخ ورودی صفر مدار به شکل زیر خواهد بود:

$$h(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}+\ldots+k_ne^{S_nt}$$

معادله مشخصه مدارهای RLC سری و موازی به راحتی با استفاده از روابط بیان شده در ابتدای فصل قابل محاسبه می‌باشد؛ اما در مورد سایر مدارهای RLC شیوه محاسبه معادله مشخصه متفاوت است. در این مدارها باید معادله مشخصه را با استفاده از روش‌های زیر تعیین کرد:

۱ـ برای بدست آوردن معادله مشخصه در یک مدار می‌توان ابتدا معادلات KCL در گره‌ها و یا معادلات KVL در حلقه‌های مدار را نوشته و سپس با جایگذاری $D=\frac{d}{dt}$ در معادلات بدست آمده، ماتریس امپدانس یا ادمیتانس را محاسبه کرد. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس‌های امپدانس یا ادمیتانس و با جایگزین کردن D با S، معادله مشخصه بدست می‌آید. در حالت خاصی که ماتریس امپدانس حلقه یا ماتریس ادمیتانس گره مدار دارای دترمینان صفر باشد، مدار در یکی از دو حالت خاص زیر قرار داشته و فاقد معادله مشخصه می‌باشد:

۱) اگر بردار منابع ورودی (بردار $[E_S]$ در مورد ماتریس امپدانس حلقه و بردار $[I_S]$ در مورد ماتریس ادمیتانس گره) همراستا با هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس و یا به صورت ترکیبی خطی از آنها باشد، مدار دارای بی‌شمار پاسخ خواهد بود. دقت کنید در این حالت اگر به جای هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس، بردار منابع قرار داده شود، دترمینان ماتریس همچنان صفر باقی خواهد ماند.

۲) در صورت عدم برقراری حالت فوق، مدار بدون پاسخ می‌باشد.