نکته ۳: در روابط اگر قرار شد زاویه فازها برحسب درجه بیان گردد، می‌توانیم از گذاشتن علامت درجه در فرم نمایش برحسب رادیان صرف‌نظر کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

$$\left[\sin(\omega t+\frac{\pi}{۲})=\sin(\omega t+۹۰^\circ)\right]$$

مثال ۲: فرم فازوری توابع زیر که برحسب زمان بیان شده‌اند را بنویسید.

۱) $\mathbf{V(t)=۲\cos ۴t \Rightarrow V=۲\angle ۰^\circ}$

۲) $\mathbf{V(t)=۳\cos(۲t+۴۵^\circ) \Rightarrow V=۳\angle ۴۵^\circ}$

۳) $\mathbf{V(t)=۵\sin ۱۰t}=۵\cos(۱۰t-۹۰^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}=۵\angle -۹۰^\circ$

۴) $\mathbf{V(t)=۵\sin(۳۷۷t+۱۵۰^\circ)}=۵\cos(۳۷۷t+۱۵۰^\circ-۹۰^\circ)=۵\cos(۳۷۷t+۶۰^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}=۵\angle ۶۰^\circ$

جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس

برای جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس می‌توانیم معادلات را به صورت فازوری نمایش داده و سپس فرم دکارتی آنها را نوشته (چون جمع دو عدد مختلط در فرم دکارتی به راحتی صورت می‌گیرد) و جمع را به راحتی انجام دهیم. در نهایت مجدداً با استفاده از تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی و سپس نوشتن آن در حوزه زمان جواب نهایی را بدست آوریم. دقت کنید برای جمع دو فازور، باید فرکانس دو فازور با یکدیگر برابر باشد. (می‌توانیم آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی هم رسم کنیم و سپس بردارها را با هم جمع برداری کنیم.)

مثال ۳: اگر $\mathbf{I_1(t)=۲۵\sin(\omega t)}$ و $\mathbf{I_2(t)=۲۵\cos(\omega t-۳۰^\circ)}$ و $\mathbf{I_3(t)=۲۵\cos(\omega t+۳۰^\circ)}$ باشد، حاصل $\mathbf{I(t)=I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)}$ را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** چون یکی از موج‌ها سینوسی می‌باشد، لذا لازم است آن را به فرم کسینوسی تبدیل کنیم:

$$I_1(t)=۲۵\sin(\omega t)=۲۵\cos(\omega t-۹۰^\circ) \Rightarrow \vec{I}_1=۲۵\angle -۹۰^\circ$$

$$\vec{I}_2=۲۵\angle -۳۰^\circ \quad , \quad \vec{I}_3=۲۵\angle +۳۰^\circ$$

$$\vec{I}=\vec{I}_1+\vec{I}_2+\vec{I}_3=-j۲۵+۲۵\cos(-۳۰^\circ)+j۲۵\sin(-۳۰^\circ)+۲۵\cos(+۳۰^\circ)+j۲۵\sin(+۳۰^\circ)$$

$$=-j۲۵+۲۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-j۲۵\times\frac{۱}{۲}+۲۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+j۲۵\times\frac{۱}{۲}=-j۲۵+۲۵\sqrt{۳}=۲۵\sqrt{۳}-j۲۵$$

$$I\ \text{اندازه}=\sqrt{(۲۵)^۲+(۲۵\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲۵^۲+۲۵^۲\times ۳}=\sqrt{۴\times ۲۵^۲}=۲\times ۲۵=۵۰\,A$$

$$I\ \text{زاویه فاز}=\text{Arctg}(\frac{-۲۵}{۲۵\sqrt{۳}})=\text{Arctg}(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})=-۳۰^\circ \Rightarrow I=۵۰\angle -۳۰^\circ \Rightarrow I(t)=۵۰\cos(\omega t-۳۰^\circ)$$

نکته ۴: جمع تعدادی تابع سینوسی با فرکانس‌های یکسان و هر تعدادی از مشتق‌های آنها در انتها یک تابع سینوسی با همان فرکانس اولیه خواهد شد. همچنین روابط زیر نیز برقرار خواهد بود.

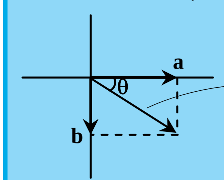
$$\mathbf{a\cos\omega t+b\sin\omega t=\sqrt{a^۲+b^۲}\cos(\omega t-\theta)=\sqrt{a^۲+b^۲}\angle -\theta}$$

$$\mathbf{tg\theta=\frac{b}{a},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad , \quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

علت:

$$a\cos\omega t=a\measuredangle ۰$$
$$b\sin\omega t=b\cos(\omega t-۹۰^\circ)=b\measuredangle -۹۰^\circ$$

جمع در مختصات قطبی:



$$\text{بردار برآیند:}\begin{cases}\text{اندازه}=\sqrt{a^۲+b^۲}\\ \text{زاویه}=-\tan^{-۱}(\frac{b}{a})\end{cases} \xrightarrow{\text{در حوزه زمان}} \sqrt{a^۲+b^۲}\cos(\omega t-\theta)\ \text{و}\ \theta=\tan^{-۱}(\frac{b}{a})$$

چکیده مطالب محاسبات فازوری

۱) برای نوشتن فازوری به شکل $k=|k|\angle\varphi$ به فرم مختلط داریم: $k=|k|\angle\varphi=k(\cos\varphi+j\sin\varphi)$

و بر عکس برای نوشتن یک عدد مختلط به صورت $A=a+jb$ به صورت فازور $A=|A|\angle\varphi$ از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\text{زاویه فاز } A=\varphi=\mathrm{Arctg}\frac{b}{a} \qquad \text{و} \qquad \text{اندازه } A=|A|=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

۲) رابطه ضرب دو فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ و $k_۲\angle\varphi_۲$ به صورت مقابل است: $(k_۱\angle\varphi_۱)\times(k_۲\angle\varphi_۲)=k_۱.k_۲\angle(\varphi_۱+\varphi_۲)$

۳) رابطه تقسیم فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ بر فازور $k_۲\angle\varphi_۲$، به شکل مقابل است: $\dfrac{k_۱\angle\varphi_۱}{k_۲\angle\varphi_۲}=\dfrac{k_۱}{k_۲}\angle(\varphi_۱-\varphi_۲)$

۴) در محاسبات زاویه فاز، هر زاویه‌ای مثل α را می‌توانیم به صورت $\alpha=\pm۳۶۰^\circ+\beta$ بنویسیم و در نهایت مقدار β را به جای α در محاسبات قرار دهیم. (با توجه به این که چرخش $۲k\pi(k\in\mathbb{Z})$ در دستگاه مثلثاتی تغییری ایجاد نمی‌کند، در محاسبات تأثیری نمی‌گذارد.)

$$\underbrace{-۲۴۰^\circ}=\underbrace{-۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ}=۱۲۰^\circ \qquad , \qquad \underbrace{+۲۴۰^\circ}=\underbrace{۳۶۰^\circ-۱۲۰^\circ}=-۱۲۰^\circ$$

دقت شود که عموماً زاویه را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ بیان می‌کنند.

۵) برای نوشتن معادلات جریان و ولتاژ که به فرم مختلط دکارتی هستند، در حوزه زمان، ابتدا فرم قطبی (فازوری) آنها را نوشته و سپس به راحتی معادله زمانی آنها را می‌نویسیم. برای مثال برای یک ولتاژ مختلط که مرجع آن به **فرم سینوسی** در نظر گرفته شده داریم:

$$V=a+jb\xrightarrow{\text{فازور}}V_m\angle\varphi_V\xrightarrow{\text{معادله زمانی}}V(t)=V_m\sin(\omega t+\varphi_V)$$

یادآوری چند رابطه مفید:

$$\cos(۳۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۸۶۶ \qquad \sin(۳۰^\circ)=\cos(۶۰^\circ)=۰/۵$$

$$\cos(۳۷^\circ)=\sin(۵۳^\circ)=۰/۸ \qquad \sin(۳۷^\circ)=\cos(۵۳^\circ)=۰/۶$$

$$\sin(\omega t+\varphi)=\cos(\omega t+\varphi-۹۰^\circ) \qquad \cos(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+۹۰^\circ)$$

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b \qquad \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

$$\cos a-\cos b=۲\sin(\frac{a+b}{۲})\sin(\frac{b-a}{۲}) \qquad \cos a+\cos b=۲\cos(\frac{a+b}{۲})\cos(\frac{a-b}{۲})$$

$$\sin a\pm\sin b=۲\sin(\frac{a\pm b}{۲})\cos(\frac{a\mp b}{۲})$$

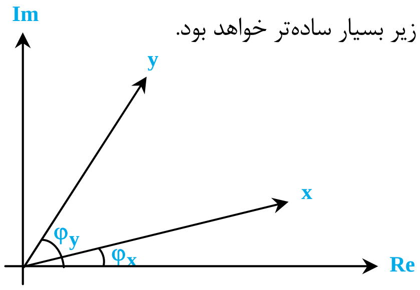
چند نکته برای بالا بردن سرعت در محاسبات:

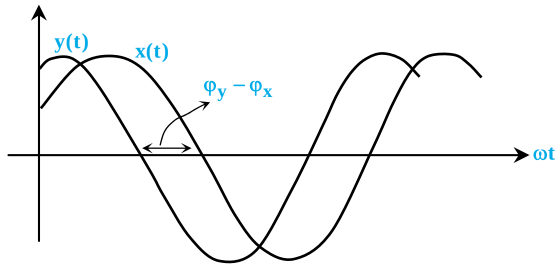
$$۱)A=A\angle۰^\circ \qquad ۲)-A=A\angle۱۸۰^\circ \qquad ۳)jA=A\angle۹۰^\circ$$

$$۴)-jA=A\angle-۹۰^\circ \qquad ۵)A+jA=A\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ \qquad ۶)A-jA=A\sqrt{۲}\angle-۴۵^\circ$$

مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز

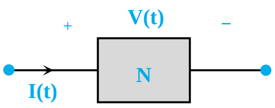
دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس $x(t)=\cos(\omega t+\varphi_x)$ و $y(t)=\cos(\omega t+\varphi_y)$ را با فرض $|\varphi_y-\varphi_x|<\pi$ در نظر بگیرید. اگر $\varphi_y>\varphi_x$ باشد، اصطلاحاً می‌گوییم سیگنال $y(t)$ نسبت به سیگنال $x(t)$ به اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پیش‌فاز است، و یا در بیان دیگر سیگنال $x(t)$ نسبت به سیگنال $y(t)$ به اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پس‌فاز است. درک مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز از طریق نمودارهای فازوری زیر بسیار ساده‌تر خواهد بود.





تعریف امپدانس و ادمیتانس و راکتانس

در صورتی‌که یک شبکه تک‌قطبی با اجزای خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد، آنگاه امپدانس و ادمیتانس شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود.

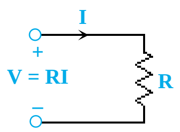


$$\begin{cases}V(t)=V_m\angle\theta_V\\ I(t)=I_m\angle\theta_I\end{cases}\Rightarrow\ Z=\frac{V(t)}{I(t)}=\frac{V_m\angle\theta_V}{I_m\angle\theta_I}=\frac{V_m}{I_m}\angle\theta_V-\theta_I$$

$$Y=\frac{I(t)}{V(t)}=\frac{I_m\angle\theta_I}{V_m\angle\theta_V}=\frac{I_m}{V_m}\angle\theta_I-\theta_V\quad,\quad Y=\frac{۱}{Z}\quad,\quad \cos\theta=\cos(\theta_V-\theta_I)$$

در روابط بالا Z امپدانس و Y ادمیتانس سیستم می‌باشد و $\frac{V_m}{I_m}$ اندازه امپدانس و $\theta=\theta_V-\theta_I$ را زاویه امپدانس می‌نامند و $\cos\theta$ ضریب توان یا ضریب قدرت سیستم است. همچنین لازم به ذکر است که برای اندازه امپدانس ظاهری سلف و خازن یا همان X_L و X_C عبارت راکتانس نیز به کار می‌رود. در واقع راکتانس اندازه قسمت موهومی امپدانس است.

« مقاومت در حالت دائمی سینوسی»

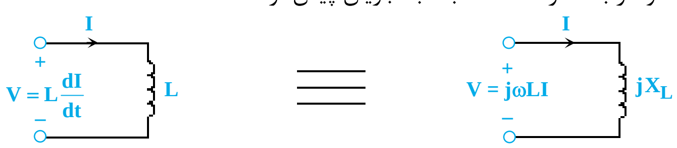


رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حالت فازوری مانند رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حوزه زمان است.

لازم به ذکر است که ولتاژ و جریان یک مقاومت همیشه هم‌فاز هستند.

« سلف در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ ـ جریان در سلف، $(V_L=jX_LI_L)$ ملاحظه می‌گردد که ولتاژ به اندازه ۹۰° نسبت به جریان پیش‌فاز است.



$$,\quad X_L=L.\omega$$

اثبات: $I(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ و $V(t)=L\frac{dI}{dt}=-L\omega A\sin(\omega t+\varphi)=L\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{۲})$

$$\Rightarrow I=A\angle\varphi\ \text{و}\ V=L\omega A\angle(\varphi+\frac{\pi}{۲})=j\omega LA\angle\varphi=j\omega LI$$

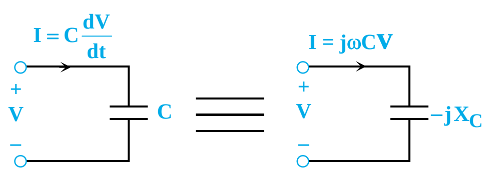
اگر رابطه فازوری جریان به صورت $\mathbf{I}=I_m\angle\varphi$ بیان گردد، چون $j=۱\angle۹۰^\circ$ است، آنگاه رابطه ولتاژ آن به صورت زیر است:

$$V=jX_LI_m\angle\varphi=۱\angle۹۰^\circ\times\omega LI_m\angle\varphi=\omega LI_m\angle(\varphi+۹۰^\circ)$$

« خازن در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ ـ جریان در خازن $(V_C=-jX_CI_C)$، ملاحظه می‌گردد که جریان خازن به اندازه ۹۰° نسبت به ولتاژ دو سر خازن پیش‌فاز است.

یعنی اگر فازور ولتاژ خازن به صورت $\mathbf{V}=V_m\angle\varphi$ بیان گردد، آنگاه داریم:



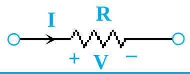
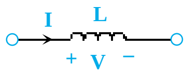
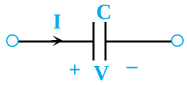
$$I=\frac{V_m\angle\varphi}{-jX_C}=\frac{V_m\angle\varphi}{X_C\angle-۹۰}=\frac{V_m\angle\varphi}{\frac{۱}{C\omega}\angle-۹۰}=V_mC\omega\angle\varphi+۹۰$$

اثبات:

$$V(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \quad \text{و} \quad I(t)=C\frac{dV}{dt}=-C\omega A\sin(\omega t+\varphi)=C\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow V=A\angle\varphi \quad \text{و} \quad I=C\omega A\angle(\varphi+\frac{\pi}{۲})=j\omega CA\angle\varphi=j\omega CV\Rightarrow V=\frac{۱}{j\omega C}I$$

در جدول زیر رابطه بین ولتاژ و جریان سه عنصر در حوزه‌های زمان و فرکانس به طور خلاصه بیان گردیده است:

امپدانس	در حالت فازوری	در حوزه زمان	عنصر
R	$V=RI$	$V=R\,I$	
$j\omega L$	$V=jX_L.I$	$V=L\frac{dI}{dt}$	
$\frac{۱}{j\omega C}$	$V=-jX_C.I$	$I=C\frac{dV}{dt}$	

نکته۵: ادمیتانس عناصر C و L و R که عکس امپدانس‌های آنها می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$Y_R=\frac{۱}{R} \quad , \quad Y_L=\frac{۱}{j\omega L} \quad , \quad Y_C=j\omega C$$

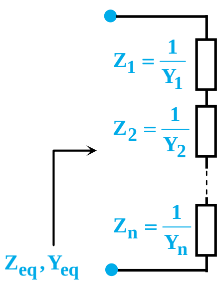
نکته۶: با توجه به اینکه $\omega=۲\pi f$ می‌باشد، لذا در فرکانس‌های خیلی زیاد $Z_L=\infty$ و $Z_C=۰$ می‌باشد، یعنی سلف در فرکانس‌های خیلی زیاد (مثلاً تحریک ضربه‌ای) مدار باز و خازن در فرکانس‌های خیلی زیاد اتصال کوتاه می‌باشد و در فرکانس‌های خیلی پایین (مثلاً تحریک DC)، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

نکته۷: در مدارهای ترکیبی امپدانس مدار معمولاً خود یک عدد مختلط می‌شود و لذا امپدانس را در اینگونه مدارها به صورت $Z=|Z|\angle\varphi$ و یا $Z=R+jX$ نمایش می‌دهیم که $|Z|=\sqrt{R^۲+X^۲}$ و $\varphi=tg^{-۱}\frac{X}{R}$ می‌باشد. توجه شود R مقاومت اهمی مدار و X راکتانس مدار می‌باشد (که ممکن است خاصیت القائی و یا خاصیت خازنی داشته باشد). بحث مشابهی نیز در مورد ادمیتانس مدار قابل طرح است، یعنی ادمیتانس مدار در حالت کلی به شکل $Y=G+jB$ یا $Y=|Y|\angle\theta$ نمایش داده می‌شود که البته داریم:

$$|Y|=\frac{۱}{|Z|} \quad , \quad \theta=-\varphi$$

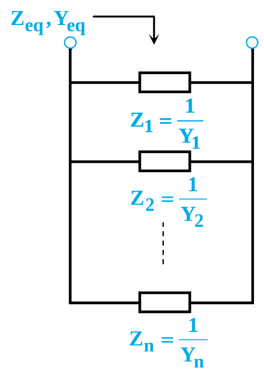
لازم به ذکر است در شکل نمایش دکارتی Y، G یا بخش حقیقی Y، **کندوکتانس و** B در بخش موهومی Y، **سوسپتانس** نامیده می‌شود. واحد اندازه‌گیری ادمیتانس، کندوکتانس و سوسپتانس، مهو ($\mho$) می‌باشد.

نکته۸: توجه شود وقتی تمامی عناصر در یک مدار برحسب امپدانس‌های خود بیان شده باشند، آنگاه برای محاسبه امپدانس کل می‌توانیم اینگونه فرض کنیم که هر یک از امپدانس‌ها مانند یک مقاومت هستند و با استفاده از روابط سری و موازی بودن مقاومت‌های اهمی، مقدار امپدانس کل را با در نظر گرفتن روابط فازوری بدست آوریم. (در واقع با استفاده از مفهوم فازور، مدار را از حالت پیچیده‌ی سلفی و خازنی به حالت ساده‌ی مقاومتی (شبیه به مقاومتی) تبدیل می‌کنیم.) برای محاسبه ادمیتانس کل نیز می‌توانیم عیناً از روش‌هایی استفاده کنیم که برای محاسبه رسانایی معادل در مدارهای مقاومتی استفاده می‌کردیم.



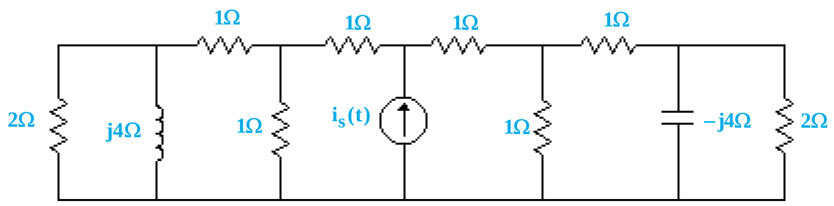
$$Z_{eq}=Z_۱+Z_۲+\cdots+Z_n$$

$$Y_{eq}=\frac{۱}{\frac{۱}{Y_۱}+\frac{۱}{Y_۲}+\cdots+\frac{۱}{Y_n}}$$



$$Z_{eq}=\frac{۱}{\frac{۱}{Z_۱}+\frac{۱}{Z_۲}+\cdots+\frac{۱}{Z_n}}$$

$$Y_{eq}=Y_۱+Y_۲+\cdots+Y_n$$



محاسبه مقدار RMS

اگر موجی، ترکیبی از چند موج مختلف با فرکانس‌های متفاوت (و یا اشکال مختلف) باشد، آنگاه مقدار مؤثر کل آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_{rms} = \sqrt{(y_{rms_1})^2 + (y_{rms_2})^2 + (y_{rms_3})^2 + \cdots}$$

برای معادله موجی به شکل زیر:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \cdots + a_n \cos(n\omega_1 t) + b_1 \sin\omega_2 t + b_2 \sin 2\omega_2 t + \cdots + b_n \sin n\omega_2 t$$

مقدار مؤثر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_{rms} = \sqrt{a_0^2 + (\frac{a_1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a_2}{\sqrt{2}})^2 + \cdots + (\frac{a_n}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b_1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b_2}{\sqrt{2}})^2 + \cdots + (\frac{b_n}{\sqrt{2}})^2}$$

توجه شود که a_0 عدد ثابت می‌باشد.

هرگاه دو موج کسینوسی (یا سینوسی) هم‌فرکانس داشته باشیم، ابتدا باید آنها را به صورت یک موج بنویسیم و آنگاه از رابطه فوق استفاده کنیم، که برای این کار ابتدا موجها را به صورت فازوری می‌نویسیم؛ سپس با تبدیل به فرم دکارتی، آنها را با هم جمع کرده و در نهایت با تبدیل مجدد به فرم قطبی و نوشتن معادله در حوزه زمان مقدار مؤثر را حساب می‌کنیم.

نکته ۱۴: طبق مطالب بیان شده در این بخش می‌توان نتیجه گرفت که برای محاسبه توان مصرفی یک عنصر مدار اگر فرکانس تمام منابع ورودی مدار متفاوت باشد، می‌توان از قضیه جمع آثار به شکل مقابل استفاده کرد: $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$

در این رابطه P_i توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تنها منبع iام فعال باشد و P_T توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تمامی n منبع موجود در مدار فعال باشند. لازم به ذکر است در یک حالت خاص می‌توان در مدارهای با منابع ورودی هم‌فرکانس از قضیه جمع آثار برای محاسبه توان استفاده کرد. اگر مدار تنها دارای دو منبع ورودی هم‌فرکانس باشد و جریان‌های ناشی شده از این دو منبع در عنصر موردنظر، دارای اختلاف فاز ۹۰ درجه باشند، در این صورت خواهیم داشت: $P_T = P_1 + P_2$

این نکته را می‌توان با بکارگیری رابطه $|a\angle\theta^\circ + b\angle(\theta+90)^\circ| = \sqrt{a^2+b^2}$ اثبات نمود.

مثال ۵۸: در یک مقاومت، معادله جریان عبوری به صورت زیر است. توان مصرفی توسط مقاومت کدام است؟

$$I(t) = 10 + 6\sin 2t + 8\cos(3t+\theta) \quad , \quad R = 10\Omega$$

۱) $1/5\,kW$ ۲) $1/25\,kW$ ۳) $2\,kW$ ۴) $1/6\,kW$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار مؤثر سیگنال جریان را محاسبه می‌کنیم و سپس برای محاسبه توان از آن استفاده می‌کنیم.

$$I(rms) = \sqrt{10^2 + (\frac{6}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{8}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{150}\,A \Rightarrow P_R = [I(rms)]^2 \times R = 150 \times 10 = 1/5\,kW$$

مثال ۵۹: دو سر یک مقاومت $(R = 1/5\Omega)$، ولتاژی به معادله $V(t)$ موجود می‌باشد. توان مصرفی مقاومت مذکور کدام است؟

$$(V(t) = 2\cos 2t - \cos(2t+60^\circ))$$

۱) $1\,w$ ۲) $2/5\,w$ ۳) $1/5\,w$ ۴) $3\,w$

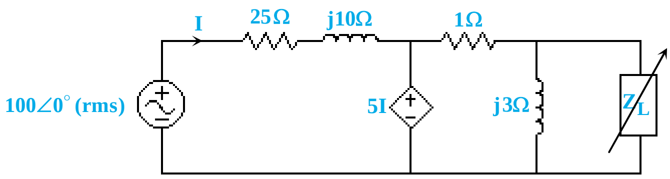
پاسخ: گزینه «۱» به دلیل اینکه دو موج کسینوسی دارای فرکانس $2(\frac{rad}{sec})$ داریم، لذا باید ابتدا آنها را ترکیب کنیم؛ بدین منظور از فازورها استفاده می‌کنیم:

$$V(t) = 2\cos 2t - \cos(2t+60^\circ) \Rightarrow V = 2\angle 0^\circ - 1\angle 60^\circ \Rightarrow V = 2 - (\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = 2 - 0/5 - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$V = 1/5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1/5^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\angle\theta = \sqrt{3}\angle\theta \Rightarrow V(t) = \sqrt{3}\cos(2t+\theta)$$

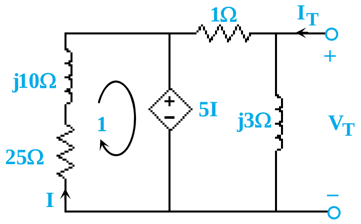
$$V_{rms} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v \Rightarrow P_R = \frac{(V_{rms})^2}{R} = \frac{1/5}{1/5} = 1w$$

مثال ۷۲: در مدار شکل زیر Z_L را طوری تنظیم می‌کنیم که حداکثر توان متوسط به آن برسد. در این صورت حدوداً چند درصد از تــوان تولیــدی مدار به Z_L می‌رسد؟



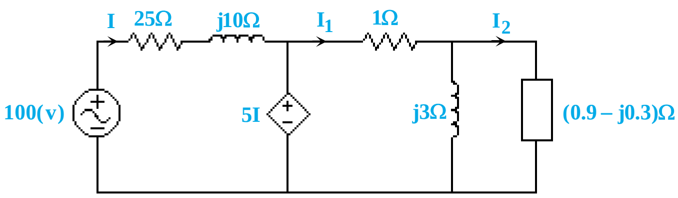
۱) ۳۳/۳
۲) ۱۶/۶
۳) ۲۵/۵
۴) ۱۳/۳

پاسخ: گزینه «۲» حل این تست را با پیـدا کـردن امپـدانس معـادل مدار از دید Z_L شروع می‌کنیم تا بتوانیم مقـدار بهینـه Z_L را پیـدا کنـیم. بدین منظور مدار معادل روبرو را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده در حلقه (۱) مشخص است که $I=۰$ خواهد بود. پس امپدانسی که از دید Z_L دیده می‌شود برابر است با: $\frac{۱\times j۳}{۱+j۳}=۰/۹+j۰/۳$

بنابراین Z_L باید برابر $۰/۹-j۰/۳$ باشـد تـا تـوان حـداکثر بـه آن برسـد. اکنـون می‌خواهیم ببینیم با فرض $Z_L=۰/۹-j۰/۳$، چند درصد از تـوان متوسـط مـدار روی Z_L مصرف می‌شـود. مـی‌دانـیم کـه تـوان متوسط یـا تـوان اکتیـو تنهـا روی مقاومت‌های مدار مصرف می‌شود و مقـدار ایـن تـوان را مـی‌تـوان بـا داشـتن مقـدار مقاومت و جریان آن محاسبه کرد؛ پس به سراغ محاسبه جریان سه مقاومت موجـود در مدار می‌رویم. بار دیگر شکل مدار را با تعریف جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ در نظر بگیرید:



می‌خواهیم جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را بر حسب جریان I بدست آوریم. امپدانسی که منبع 5I در سمت راست خود می‌بیند برابر ۲ اهم است؛ پس داریم:

$$I_۱=\frac{۵I}{۲}=۲/۵I$$

و حالا با تکنیک تقسیم جریان می‌توان نوشت:

$$I_۲=\frac{j۳}{j۳+۰/۹-j۰/۳}\times ۲/۵I=(۲/۵+j\frac{۵}{۶})I$$

اکنون می‌توان توان مصرفی روی سه مقاومت $R_۱$ (مقاومت ۲۵ اهمی)، $R_۲$ (مقاومت ۱ اهمی) و R_L را بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} W_۱=۲۵I^۲ \\ W_۲=۱\times ۲/۵^۲\times I^۲=۶/۲۵I^۲ \\ W_L=۰/۹\times\left|۲/۵+j\frac{۵}{۶}\right|^۲\times I^۲=۶/۲۵I^۲ \end{cases}$$

در نهایت می‌توان نسبت توان مصرف شده در Z_L را به توان مصرفی کل مدار بدست آورد:

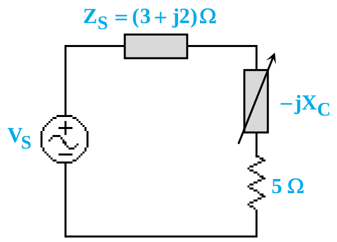
$$\frac{W_L}{W_t}=\frac{۶/۲۵I^۲}{۲۵\times I^۲+۶/۲۵I^۲+۶/۲۵I^۲}=\frac{۱}{۶}=۱۶/۶\%$$

دقت کنید که در عمل نیازی به محاسبه جریان $I_۲$ نیز نداشتیم، چرا که با تطبیق امپدانسی که انجام داده بودیم مشخص بود توانی که مقاومت $R_۲$ مـصرف می‌کند برابر توانی است که مقاومت R_L مصرف می‌کند.

نکته ۱۶: برای اینکه حداکثر توان به بار منتقل شود، به طور کلی می‌توان گفت اگر در قسمت بار راکتانس **قابل تغییر** وجود داشته باشد، باید ایـن راکتانس خنثی شود؛ به این شکل که اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود نداشته باشد، باید مقـدار راکتـانس بـار برابـر صـفر باشـد و اگـر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود داشته باشد، باید راکتانس بار از لحاظ عددی با راکتانس مدار برابر ولی از لحاظ علامت مخالف آن باشد.

نکته ۱۷: دقت کنید که تطبیق امپدانس در یک مدار به معنای حداکثر نمودن توان تولیـدی منبـع ورودی مـدار نیـست؛ در واقـع بـرای ایـن کـه تـوان تولیـدی یـک منبـع ولتـاژ در مـدار بیـشینه گـردد، بایـد راکتـانس دیـده شـده از دو سـر منبـع کمینـه گـردد (در صـورت ممکـن برابـر صفر شود)؛ در این حالت مقدار بهینه برای مقاومت مدار از دید منبع برابر اندازه راکتانس دیده شده از دو سر منبع خواهد بود. برای منـابع جریـان نیـز باید سوسپتانس (بخش موهومی ادمیتانس) دیده شده از دو سر منبع کمینه بوده و رسانایی یا کندوکتانس مدار (بخش حقیقی ادمیتـانس) از دیـد منبع برابر اندازه سوسپتانس مدار باشد.

مثال ۷۳: به ازای چه مقدار از X_C برحسب اهم، منبع V_S حداکثر توان را به شبکه تحویل می‌دهد؟



۱) صفر

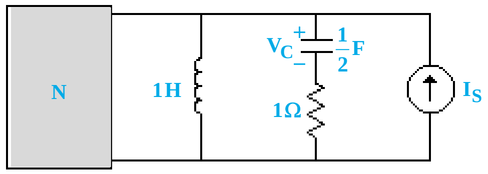
۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» در این تست عنوان شده منبع حداکثر توان را تحویل شبکه دهد و این در شرایطی اتفاق می‌افتد که اثری از قسمت‌های موهومی نباشد؛ لذا داریم:
$j۲ - jX_C = ۰ \Rightarrow j(۲ - X_C) = ۰ \Rightarrow X_C = ۲\Omega$

مثال ۷۴: در مدار شکل زیر N یک مدار LTI و فاقد منابع مستقل است. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس $\omega = ۱(\frac{rad}{sec})$، توان N ماکزیمم می‌شود. اگر مدار در $t = ۰$ بدون شرایط اولیه و $I_S = ۳\delta(t)$ باشد، $V_C(۰^+)$ برابر کدام گزینه است؟



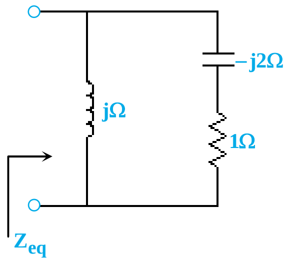
۱) $-۶v$

۲) $۶v$

۳) $-۲v$

۴) $۲v$

پاسخ: گزینه «۴» اگر در $\omega = ۱\frac{rad}{sec}$ توان شبکه N حداکثر شود، باید Z_n برابر Z_{eq}^* در مدار سمت راست باشد. حال مقدار Z_{eq} مدار سمت راست را محاسبه می‌کنیم.

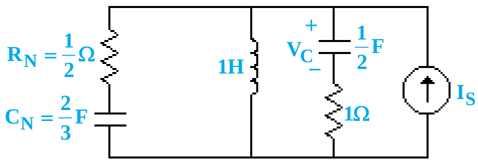


$$Z_{eq} = j \,\|\, (۱ - j۲) \Rightarrow Z_{eq} = (\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}j)\Omega$$

$$\Rightarrow Z_n = Z_{eq}^* = (\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲}j)\Omega$$

با توجه به امپدانس Z_n، شبکه N، یک مدار RC سری است که مقادیر R_N و C_N در آن به صورت زیر است:

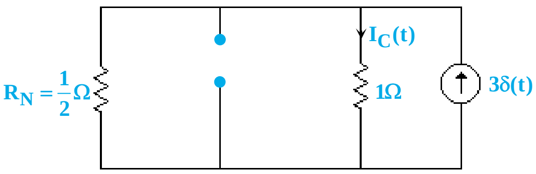
$$R_N = \frac{۱}{۲}\Omega \quad , \quad X_{C_N} = \frac{۳}{۲}\Omega \Rightarrow \frac{۱}{C_N\omega} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{C_N} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow C_N = \frac{۲}{۳}F$$



حال با جایگذاری شبکه N، مدار به صورت روبرو خواهد شد. برای محاسبه مقدار $V_C(۰^+)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. در این حالت با توجه به اعمال ضربه، سلف‌ها را مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم.

$$V_C(۰^+) = V_C(۰^-) + \frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+} I_C(t)dt$$

با نوشتن قانون تقسیم جریان داریم:



$$I_C(t) = ۳\delta(t) \times \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}} = \delta(t) \quad , \quad V_C(۰^-) = ۰$$

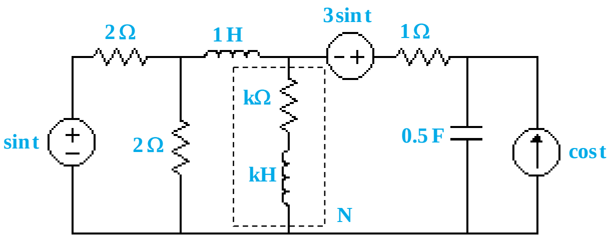
$$\Rightarrow V_C(۰^+) = ۰ + \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)dt \Rightarrow V_C(۰^+) = ۲v$$

نکته ۱۸: زمانی که بار $Z_L = Re^{j\theta}$ با زاویه فاز معین (یعنی مقدار θ_L مشخص باشد) به شبکه‌ای با امپدانس معادل Z_N متصل گردد، شرط آن که حداکثر توان توسط Z_L جذب گردد این است که اندازه Z_L برابر اندازه Z_N باشد:

$$|Z_L| = R = |Z_N|$$

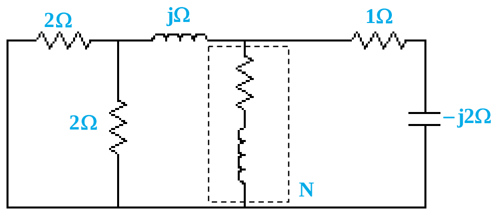
جهت درک بهتر این نکته می‌توانید آن را اثبات کنید.

مثال ۷۵: در مدار شکل زیر مقدار سلف و مقاومت سری شده با آن با هم یکسان و برابر k می‌باشند. هدف تعیین k به نحوی است که توان جذب شده توسط N حداکثر شود. k چقدر است؟



۱) $k=\frac{۷}{۵}$ ۲) $k=\sqrt{۲}$ ۳) $k=\sqrt{۵}$ ۴) $k=۱$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر N $(Z_{\bar N})$ را بدست می‌آوریم.



$$Z_N = k + jk$$

$$Z_{\bar N} = (۱+j)\parallel(۱-۲j) = \frac{(۱+j)\times(۱-۲j)}{۱+j+۱-۲j} = \frac{۳-j}{۲-j} = \frac{۷+j}{۵}$$

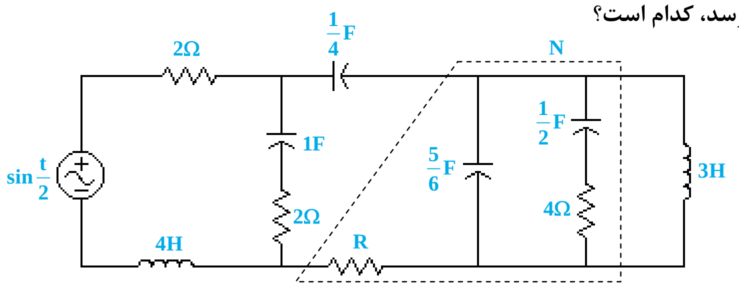
امپدانس دیده شده از دو سر N

در این مسأله امکان تطبیق امپدانس وجود ندارد زیرا بخش حقیقی و موهومی مقاومت بار به هم وابسته هستند. همچنین نمی‌توانیم با بهینه‌سازی مقدار مقاومت بار از طریق رابطه $R_L = |Z_{\bar N} + jX_L|$، مقدار توان جذب شده بار را حداکثر کنیم چرا که مقدار راکتانس بار نیز متغیر است.

در این مسأله ما با فاز ثابت امپدانس بار مواجه هستیم و شرط تحقق توان ماکزیمم در صورت ثابت بودن فاز امپدانس بار این است که $|Z_N| = |Z_{\bar N}|$.

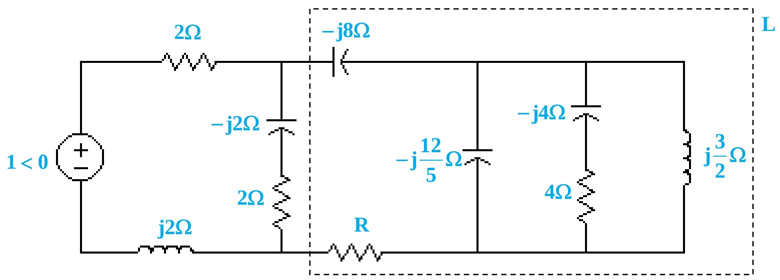
$$\left.\begin{aligned}|Z_N| &= k\sqrt{۲}\\ |Z_{\bar N}| &= \sqrt{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow k = ۱$$

مثال ۷۶: در مدار زیر مقدار R برای این که حداکثر توان به بار N برسد، کدام است؟

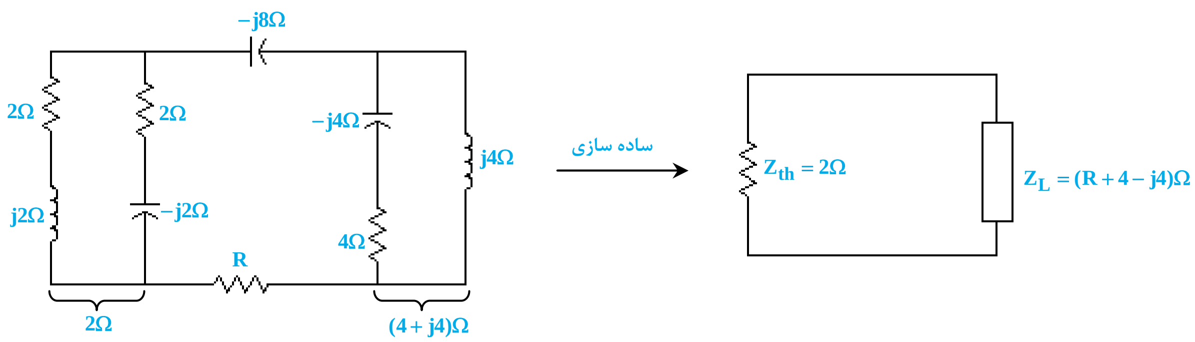


۱) صفر اهم
۲) ۰/۵ اهم
۳) ۴/۵ اهم
۴) ۷/۲ اهم

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار را مطابق شکل زیر با فرض $\omega = ۰/۵$ به حالت فازوری می‌بریم:



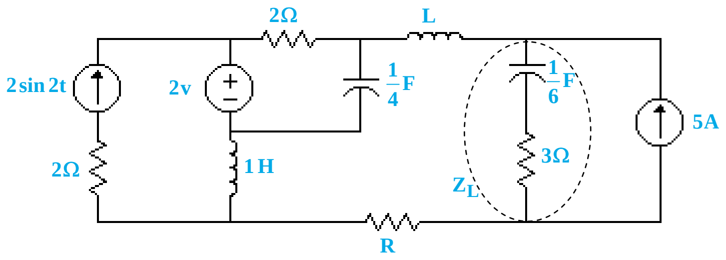
دقت کنید اگر توان بار N ماکزیمم گردد، توان بار L نیز بیشینه خواهد شد، زیرا بار L هیچ مقاومتی افزون بر مقاومت‌های بار N ندارد. پس می‌توان به جای حداکثر نمودن توان بار N، توان بار L را حداکثر نمود. حال مطابق با شکل زیر می‌توان Z_L و Z_{th} را با غیرفعال نمودن منبع تغذیه سینوسی محاسبه نمود: (دقت کنید که در این شکل خازن و سلف موازی در سمت راست مدار، با امپدانس معادلشان که برابر j۴ می‌باشد، جایگزین شده‌اند)



اکنون با توجه به این که تنها مقاومت بار قابل تنظیم است باید داشته باشیم $R_L = |Z_{th} + jX_L|$؛ یعنی:

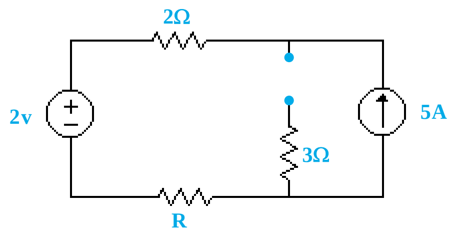
$$R + ۴ = |۲ - j۴| = \sqrt{۲۰} \cong ۴/۵ \Rightarrow R = ۰/۵\Omega$$

مثال ۷۷: در مدار زیر مقدار R و L به ترتیب چند اهم و چند هانری باشد تا در حالت دائمی حداکثر توان به Z_L برسد؟

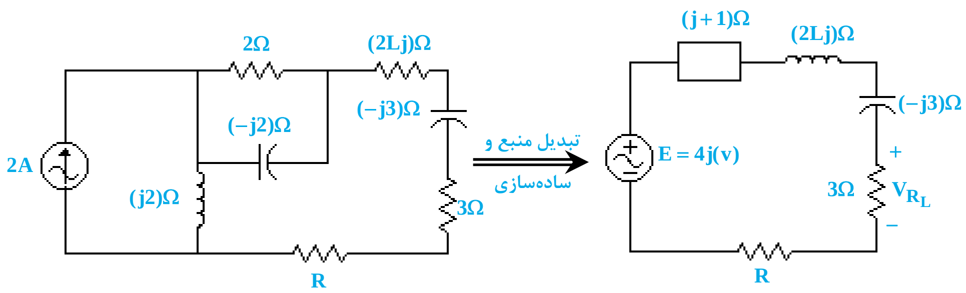


۱) صفر اهم و ۱ هانری
۲) صفر اهم و ۲ هانری
۳) ۲ اهم و ۱ هانری
۴) ۲ اهم و ۲ هانری

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بیایید تنها منابع DC مدار را در نظر گرفته و ببینیم چه توانی در اثر این منابع به بار Z_L می‌رسد. بدین منظور منبع جریان سینوسی و خازن‌های مدار را مدار باز و سلف‌های موجود در مدار را اتصال کوتاه می‌کنیم:



با توجه به شکل بالا مشخص است که توان اکتیوی که در این حالت به بار می‌رسد فارغ از مقادیر R و L، برابر صفر است.
حال می‌خواهیم اثر منبع جریان سینوسی را در نظر بگیریم. بدین منظور مطابق شکل زیر منابع DC را غیرفعال کرده و مقدار المان‌ها را در حالت فازوری با در نظر گرفتن فرکانس $\omega = 2$ لحاظ می‌کنیم:



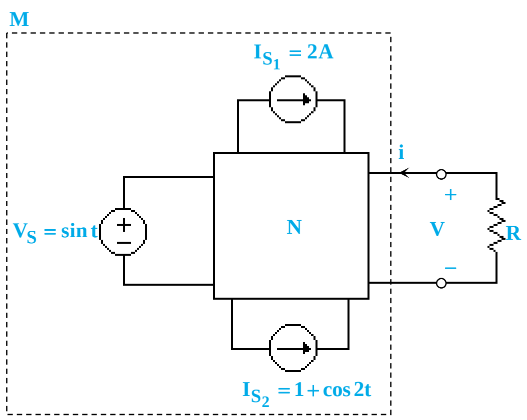
نکته مهمی که در اینجا باید مورد توجه قرار گیرد، این است که ما در این تست نمی‌توانیم از صورت معمول قضیه تطبیق امپدانس استفاده کرده و بگوییم $Z_n = Z_L^*$، چرا که در قضیه تطبیق امپدانس، این امپدانس بار است که تعیین می‌گردد و نه امپدانس شبکه، و در این تست امپدانس بار ثابت بوده و ما به دنبال یافتن امپدانس بهینه شبکه هستیم. بنابراین برای حل این تست بهتر است مستقیماً توان مصرفی بار Z_L را بیشینه کنیم. برای بیشینه ساختن این توان کافی است ولتاژ دو سر مقاومت بار بیشینه گردد (دقت کنید که مقدار مقاومت بار ثابت و مشخص است). حال با توجه به شکل قبلی داریم:

$$V_{R_L} = \frac{3}{3-3j+(2L+1)j+1+R}\times E = \frac{3E}{4+R+(2L-2)j} \Rightarrow \left|V_{R_L}\right| = \frac{3E}{\sqrt{(4+R)^2+(2L-2)^2}}$$

برای حداکثر نمودن مقدار $\left|V_{R_L}\right|$ باید مخرج کسر فوق مینیمم گردد:

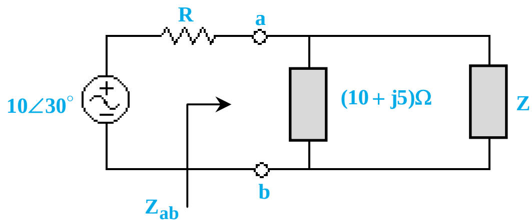
$$\begin{cases} 2L-2=0 \Rightarrow L=1H \\ R=0 \end{cases} \Rightarrow \left|V_{R_L}\right| \to \max \Rightarrow P_{Z_L} \to \max$$

مثال ۷۸: در مدار زیر شبکه N متشکل از مقاومت‌های خطی بوده و رابطه ولتاژ ـ جریان برای شبکه M به صورت $2V-6i+4\sin t-\cos 2t-5=0$ می‌باشد. اگر جای دو منبع جریان موجود در مدار عوض شده (با حفظ جهت جریان آنها) و اندازه منبع ولتاژ نصف شود، حداکثر توان جذبی ممکن توسط مقاومت R چند وات خواهد بود؟



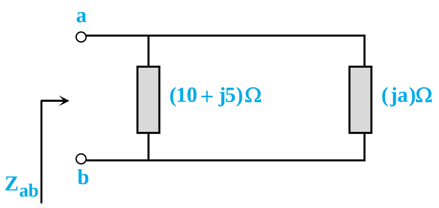
۱) $\frac{5}{12}$ وات
۲) $\frac{5}{24}$ وات
۳) $\frac{1}{4}$ وات
۴) $\frac{1}{2}$ وات

مثال۸۹: در مدار شکل زیر، حداکثر توان از منبع به سمت راست سرهای a و b منتقل می‌شود. اگر Z فقط شامل یک عنصر مداری (خازن، سلف یا مقاومت) باشد و شبکه‌ی سمت راست دو سر a و b، به ازای فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2(\frac{rad}{s})$ به حالت تشدید برود، مقاومت R باید چند اهم باشد؟



۱) ۲۵
۲) ۲۱
۳) ۱۰/۵
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه «۴» سؤال اصلاً سخت نیست! کلید حل سؤال این است که بدانیم عنصر Z قطعاً موهومی است. چرا؟ چون Z فقط شامل یک عنصر مداری است؛ پس یا به صورت $Z = ja$ است و یا به صورت $Z = a$ می‌باشد. (یعنی یا موهومی محض یا مقاومتی محض) اگر $Z = a$، آن‌گاه امکان ندارد شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود، (هنوز که حواستان به صورت سؤال هست؟ قرار است شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود!) پس $Z = ja$.
برای حل سؤال باید a را حساب کنیم. برای پیدا کردن a لازم است از این موضوع که شبکه‌ی سمت راست در حالت تشدید است، استفاده کنیم:



$$Z_{ab} = \frac{(10+j5)\times ja}{10+j5+ja} = \frac{j10a-5a}{10+j(5+a)} = \frac{(j10a-5a)[10-j(5+a)]}{10^2 - j^2(5+a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{j100a - j^2 10a(5+a) - 50a + j5a(5+a)}{100+(5+a)^2} \quad (*)$$

باید قسمت موهومی Z_{ab} برابر با صفر باشد؛ لذا داریم:

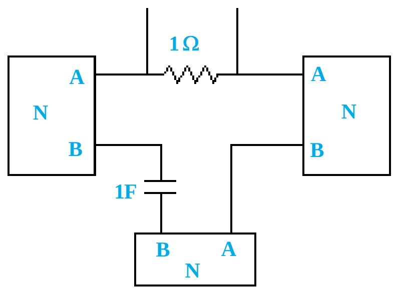
$$j(100a + 25a + 5a^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a^2 + 125a = 0 \quad \Rightarrow \quad 5a(a+25) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0\ (\text{غق}) \ ,\ a = -25\Omega\ (\text{قابل قبول})$$

پس Z_{ab} برابر با مقدار زیر است: (دقت کنید Z_{ab} دیگر قسمت موهومی ندارد و باید در رابطه‌ی (*) فقط قسمت‌های حقیقی را حساب کنیم.)

$$Z_{ab} = \frac{10(-25)(5-25) - 50\times(-25)}{100+(5-25)^2} = \frac{-250(-20)+1250}{100+400} = \frac{6250}{500} = 12/5\Omega$$

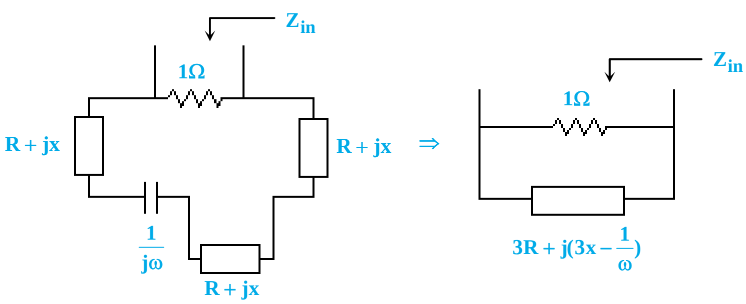
پس برای این که حداکثر توان به سمت راست سرهای a و b منتقل شود، باید $R = 12/5\Omega$ باشد.

مثال۹۰: شبکه N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است که آن را ω_r می‌نامیم. در مورد فرکانس یا فرکانس‌های تشدید مدار روبرو چه می‌توان گفت؟



۱) دقیقاً یک فرکانس تشدید دارد.
۲) به علت وجود خازن تعداد فرکانس‌های تشدید آن از یک بیشتر است.
۳) می‌تواند صفر، یک و یا تعداد بیشتری فرکانس تشدید داشته باشد و با هر مقدار دلخواهی بدون توجه به ω_r.
۴) اگر فرکانس تشدیدی کوچکتر از ω_r داشته باشد، نمی‌تواند فرکانس تشدیدی بزرگتر از ω_r داشته باشد.

پاسخ: گزینه «۴» اگر امپدانس دیده شده از دو سر A و B را $Z = R + jx$ در نظر بگیریم، مدار به شکل زیر درمی‌آید:

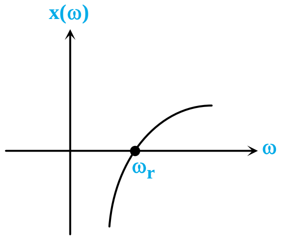


$$Y_{in} = 1 + \frac{1}{3R + j(3x - \frac{1}{\omega})} = 1 + \frac{3R + j(\frac{1}{\omega} - 3x)}{9R^2 + (3x - \frac{1}{\omega})^2}$$

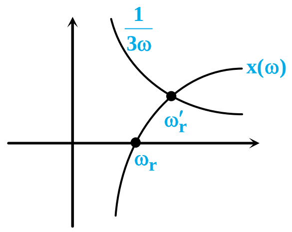
در حالت تشدید $\text{Im}\{Y_{in}\}$ باید مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\frac{1}{\omega} = 3x(\omega) \Rightarrow x(\omega) = \frac{1}{3\omega}$$

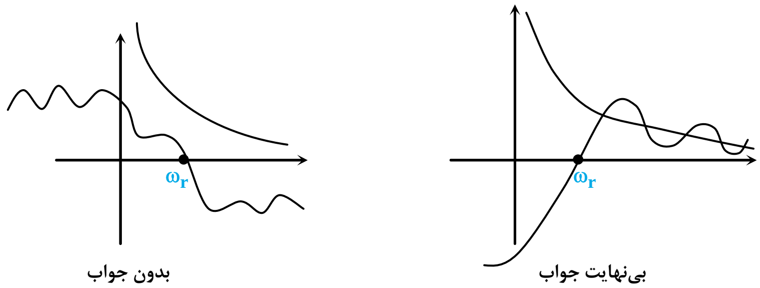
اکنون از اطلاعات داده شده در صورت سؤال استفاده می‌کنیم. از آنجا که N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است، معادله $x(\omega)=0$ تنها دارای یک جواب است؛ لذا $x(\omega)$ تنها یک بار محور ω را قطع خواهد کرد. فرض کنید نمودار $x(\omega)$ به صورت شکل روبرو باشد:



برای اینکه فرکانس تشدید شبکه کلی را بیابیم، باید این نمودار را با نمودار تابع $\frac{1}{3\omega}$ تقاطع دهیم.



اما بسته به اینکه $x(\omega)$ چه نموداری داشته باشد، جواب‌های متفاوتی حاصل خواهد شد:



بی‌نهایت جواب — بدون جواب

لذا به ازای هر $N \in \{0,1,2,...\}$، می‌توان $x(\omega)$ای را یافت که شبکه دارای N فرکانس تشدید باشد. اما در عین حال یک محدودیت روی تمام این فرکانس‌ها خواهد بود و آن اینکه یا همه از ω_r کوچکترند و یا همه از ω_r بزرگتر. در غیر این صورت با موجود بودن تنها یک فرکانس تشدید برای N منافات خواهد داشت.

ضریب کیفیت (Q)

در فصل قبل، تعریف خاصی از ضریب کیفیت که معمولاً در سؤالات کنکور مدنظر است، ارائه گردید و روند ریاضیاتی محاسبه آن نیز بیان شد. در اینجا تعریف دیگری از ضریب کیفیت ارائه می‌گردد که گاهی ممکن است در سؤالات کنکور مورد توجه قرار گیرد. در این تعریف که مشخصاً نمودی از وضعیت میرایی یک مدار الکتریکی نوسانی می‌باشد، بر انرژی ذخیره شده و انرژی تلف شده در دوره نوسانات مدار، در یک مدار در حال رزونانس تمرکز می‌شود:

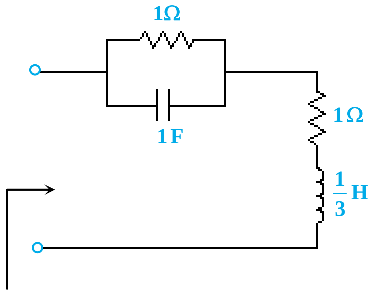
$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در هر سیکل در حال رزونانس}} = \omega_r \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{تلفات توان در حال رزونانس}}$$

ماکزیمم انرژی ذخیره شده در یک مدار مرتبه دوم شامل سلف و خازن مثلاً یک مدار RLC ساده با استفاده از رابطه $E_s = \frac{1}{2}LI_L^2 = \frac{1}{2}CV_C^2$ (پیک انرژی ذخیره شده در خازن یا سلف) و یا $E_s = \frac{1}{4}LI_L^2 + \frac{1}{4}CV_C^2$ (مجموع متوسط انرژی‌های ذخیره شده در سلف و خازن) قابل محاسبه می‌باشد که در این روابط V_C و I_L به ترتیب پیک ولتاژ خازن و پیک جریان سلف هستند. برای توجیه این روابط دقت کنید که در یک مدار RLC در حال رزونانس، پیک جریان سلف زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ خازن برابر صفر است و همینطور پیک ولتاژ خازن زمانی رخ می‌دهد که جریان سلف برابر صفر است و از طرفی پیک انرژی سلف برابر پیک انرژی خازن است. مشخص است که طبق تعریف صورت گرفته، انتظار می‌رود پاسخ ورودی صفر یک سیستم نوسانی با ضریب کیفیت بالاتر نسبت به سیستمی مشابه با ضریب کیفیت پایین‌تر، دوام بیشتری داشته باشد.

طبق این تعریف همچون تعریف اول در فصل قبل، نوسان‌سازهای ایده‌آل (مثلاً مدارهای LC)، دارای ضریب کیفیت بینهایت هستند. دقت کنید که در تعریف ارائه شده برای ضریب کیفیت، فرکانس تحریک مدار تأثیرگذار نیست و مهم فرکانس رزونانس مدار است.

مثال۹۱: ضریب کیفیت مدار روبرو کدام است اگر ضریب کیفیت (Q) به صورت زیر برای مدار در حال رزونانس تعریف شود؟

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}}$$



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) به فرکانس بستگی دارد.

☑ **پاسخ** گزینه «۲» این مدار یک مدار RLC ساده سری یا موازی نیست و استفاده از روابط ضریب کیفیت آن‌ها، در اینجا کاربرد ندارد. طبق صورت سؤال در اینجا ضریب کیفیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}} = \omega_r \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

$$Z_{in} = \frac{۱}{۱+j\omega} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} = \frac{۱-j\omega}{۱+\omega^۲} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{۲} \quad \text{فرکانس تشدید}$$

در مورد متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار، باید دانست که در حالت دائمی، انرژی ذخیره شده در سلف $\frac{۱}{۴}LI_m^۲$ و در خازن $\frac{۱}{۴}CV_m^۲$ است و همچنین باید این نکته را به خاطر داشت که در فرکانس تشدید این دو با هم برابر هستند. به عبارتی متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار با $۲\varepsilon_M$ یا $۲\varepsilon_E$ برابر است که ε_M و ε_E به ترتیب متوسط انرژی ذخیره شده در المان‌های سلفی و خازنی مدار هستند. لذا $Q = \omega_r \frac{۲\varepsilon_M}{P_{av}}$.

$$P_{av} = \text{توان متوسط اتلافی مقاومت‌ها} = \frac{۱}{۲}RI_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+\omega^۲}+۱\right)\Bigg|_{\omega=\sqrt{۲}} I_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+۲}+۱\right)I_m^۲ = \frac{۲}{۳}I_m^۲$$

$$\varepsilon_M = \frac{۱}{۴}LI_m^۲ = \frac{۱}{۱۲}I_m^۲ \qquad \text{و} \qquad Q = \sqrt{۲} \times \frac{۲ \times \frac{۱}{۱۲}I_m^۲}{\frac{۲}{۳}I_m^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از فازورها

در صورتی که یک مدار توسط یک تابع سینوسی تحریک شود، می‌توان معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از روش فازورها حل کرده و جواب خصوصی معادله را بدست آورد. برای توضیح مطلب فوق، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$b_n \frac{d^n(X)}{dt^n} + b_{n-۱}\frac{d^{n-۱}(X)}{dt^{n-۱}} + \dots + b_۱ \frac{d(X)}{dt} + b_\circ X = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

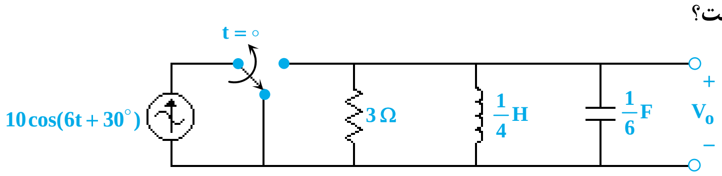
درصورتی که ضرایب b_n و θ اعداد حقیقی باشند، برای حل معادله فوق می‌توان به جای $\frac{d^n}{dt^n}$ عبارت $(j\omega)^n$ را به صورت زیر جایگزین کرد. (چنانچه با فوریه آشنا باشید این نکته را بهتر متوجه خواهید شد.) حال داریم:

$$b_n.(j\omega)^n . X + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} . X + \cdots + b_۱(j\omega) . X + b_\circ . X = V_m \angle\theta$$

$$X.[b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \dots + b_۱(j\omega) + b_\circ] = V_m\angle\theta \Rightarrow \boxed{X = \frac{V_m\angle\theta}{b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \cdots + b_۱(j\omega) + b_\circ}}$$

نکته۲۳: در صورت جایگزینی $j\omega$ در معادله دیفرانسیل و صفر شدن معادله به ازای $j\omega$، می‌توان چنین نتیجه گرفت که $j\omega$ فرکانس طبیعی سیستم بوده و پاسخ خصوصی مدار به صورت $X(t) = V_m t \sin(\omega t + \theta)$ یا به صورت $X(t) = V_m t \cos(\omega t + \alpha)$ خواهد بود.

مثال۹۲: در مدار زیر معادله V_o در حالت ماندگار سینوسی کدام است؟



۱) $۴۲/۴\cos(۶t - ۱۵^\circ)$ ۲) $۴۲/۴\cos(۶t + ۷۵^\circ)$

۳) $۲۱/۲\cos(۶t - ۱۵^\circ)$ ۴) $۲۱/۲\cos(۶t + ۷۵^\circ)$