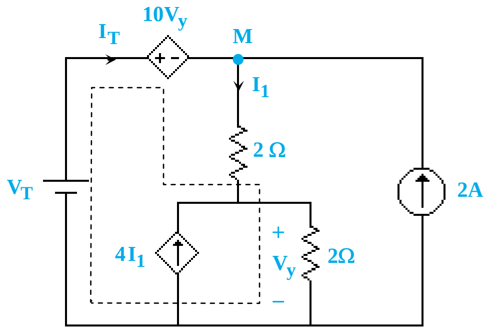
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** برای بدست آوردن V_{th} و R_{th}، منبع V_T را به مدار اعمال می‌کنیم. با نوشتن KVL در حلقه نشان داده شده داریم:



$$V_T = 10V_y + 2I_1 + V_y = 11V_y + 2I_1 \qquad (1)$$

با نوشتن KCL در گره M داریم:

$$2 + I_T = I_1 \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V_T = 11V_y + 2(2 + I_T) \qquad (3)$$

$$V_y = (4I_1 + I_1)\times 2 = 10I_1 \qquad (4)$$

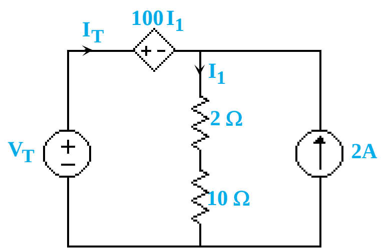
از ترکیب روابط (۲) و (۳) و (۴) داریم:

$$V_T = 11\times 10I_1 + 2(2+I_T) = 11\times 10(2+I_T) + 2(2+I_T)$$

$$\Rightarrow \quad V_T = 112(2+I_T) \quad \Rightarrow \quad V_T = 112I_T + 224$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R_{th} = 112\Omega} \quad \text{و} \quad \mathbf{V_{th} = 224v}$$

روش دوم: با دقت در مدار دیده می‌شود که $V_y = 2\times(I_1 + 4I_1) = 10I_1$ و لذا مقاومت معادل منبع جریان وابسته بـه صـورت $R = \frac{10I_1}{-4I_1} = -2/5\Omega$ اسـت. پس مدار به صورت زیر ساده می‌شود:

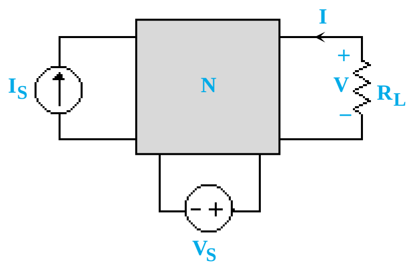


$$2\Omega \,\|\, (-2/5\Omega) = \frac{2\times(-2/5)}{2-2/5} = \frac{-5}{-0/5} = 10\Omega$$

$$V_T = 100I_1 + (12\times I_1) = 112I_1 \quad , \quad I_T = I_1 - 2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_T + 2$$

$$\Rightarrow \quad V_T = 112(I_T + 2) = 112I_T + 224 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_{th} = 112\Omega \\ V_{th} = 224\,V \end{cases}$$

مثال ۱۶: یک شبکه شامل مقاومت‌های خطی و مثبت می‌باشد. به این شبکه یک منبع جریان و یک منبع ولتاژ متصل اسـت. در ایـن حالـت بـرای مقاومت متصل به شبکه رابطه زیر برقرار است. حداکثر توان انتقالی به مقاومت چند وات است؟



$$(\mathbf{3V + 4\sin 2t = 2 + 3I})$$

۱) ۰/۳۳

۲) ۰/۲۲

۳) ۰/۱۱

۴) ۰/۴۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن حداکثر توان انتقالی به بار R_L، باید مقدار آن با R_{th} دیده شده از دو سرش برابر باشد و در این حالت می‌توان از فرمول‌های $I_{rms}^2.R_L$ یا $\frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$ برای بدست آوردن توان حداکثر استفاده کرد.

$$3V + 4\sin 2t = 2 + 3I \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{3}I + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sin 2t$$

با توجه به رابطه $\mathbf{V = R_{th}.I + V_{th}}$ داریم:

$$\mathbf{R_{th} = \frac{3}{3} = 1\Omega} \quad , \quad \mathbf{V_{th} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sin 2t}$$

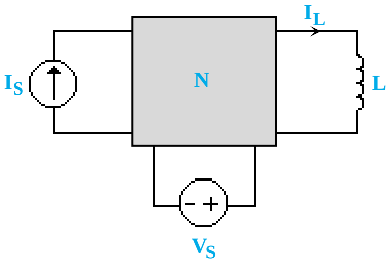
برای بدست آوردن مقدار rms ولتاژ تونن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad \Rightarrow \quad rms(f(t)) = \sqrt{rms(f_1(t))^2 + rms(f_2(t))^2}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{3} \quad , \quad f_2(t) = -\frac{4}{3}\sin 2t \quad \text{و} \quad rms\,[f_1(t)] = \frac{2}{3}A \quad , \quad rms[f_2(t)] = \frac{4}{3\sqrt{2}}A$$

$$\Rightarrow \quad V_{th}(rms) = rms(f(t)) = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{4+8}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_L(max) = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} = \frac{\frac{4}{3}}{4\times 1} = \frac{1}{3} = 0/33w}$$

مثال ۱۷: شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی و مثبت می‌باشد. اگر $I_S = ۴A$ و $V_S = ۶v$ باشد، آنگاه معادله جریان سلف به صورت $I_L = ۷ - ۳e^{-at}$ خواهد بود. حال اگر $I_S = ۸A$ و $V_S = ۱۲v$ شود، معادله جریان سلف کدام است؟



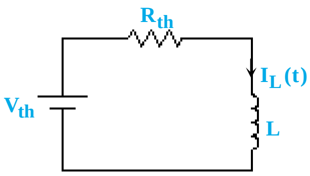
۱) $۷ - ۱۲e^{-at}$

۲) $۷ - ۶e^{-at}$

۳) $۱۴ - ۱۰e^{-at}$

۴) $۱۴ - ۸e^{-at}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر معادل تونن شبکه N جایگزین شود، داریم:



$$I_L(t) = I_L(\infty) + [I_L(0^+) - I_L(\infty)]e^{-at}$$

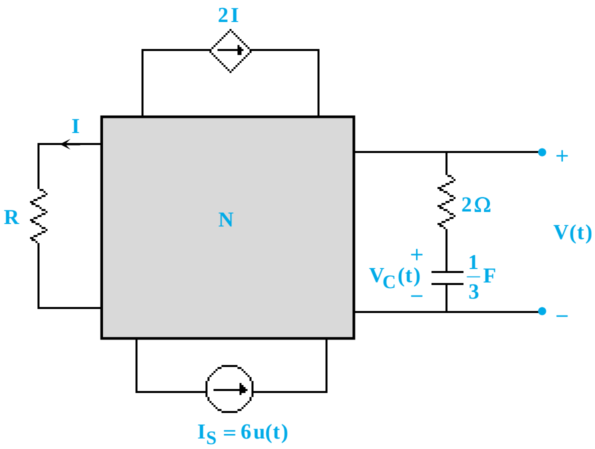
$$I_L(\infty) = \frac{V_{th}}{R_{th}} = ۷A \quad و \quad I_L(0^+) - I_L(\infty) = -۳ \Rightarrow I_L(0^+) = ۴A$$

در صورت دو برابر شدن منابع ورودی، مقدار R_{th} ثابت و مقدار V_{th} دو برابر می‌شود. اما دقت کنید که این مسأله تأثیری در جریان اولیه سلف ندارد و جریان اولیه سلف ثابت باقی می‌ماند. لذا داریم:

$$V_{th}' = ۲V_{th} \Rightarrow I_L'(\infty) = \frac{V_{th}'}{R_{th}} = ۷ \times ۲ = ۱۴A$$

$$\Rightarrow I_L(t) = I_L'(\infty) + [I_L(0^+) - I_L'(\infty)]e^{-at} \Rightarrow \mathbf{I_L(t) = ۱۴ + [۴ - ۱۴]e^{-at} = ۱۴ - ۱۰e^{-at}}$$

مثال ۱۸: در مدار زیر شبکه N از المان‌های مقاومتی خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. در صورتی که مقاومت ۲ اهمی با مقاومت ۴ اهمی جایگزین شود، معادله $V(t)$ مطابق با کدام گزینه است؟ $(V_C(t) = ۴ - ۲e^{-t})$



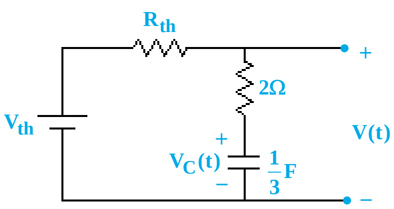
۱) $۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-۳t}$

۲) $۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$

۳) $۴ - ۴e^{-۳t}$

۴) $۴ - ۴e^{-\frac{۳}{۵}t}$

پاسخ: گزینه «۲» با تغییر مقاومت ۲ اهمی فقط مقدار τ عوض می‌شود و مقادیر $V_C(\infty)$ و $V_C(0^-)$ تغییری ندارند. در این مرحله ابتدا τ را در حالت اولیه محاسبه می‌کنیم:



$$\tau_{old} = R_{eq}.C = (۲ + R_{th}) \times \frac{۱}{۳} = ۱ \Rightarrow R_{th} = ۱\,\Omega$$

$$\tau_{new} = R_{eq}.C = (۴ + ۱) \times \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

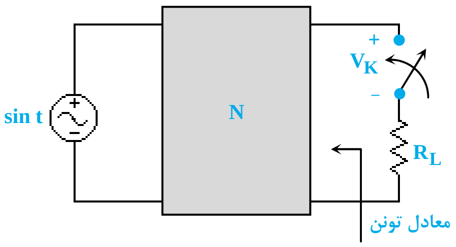
حال در صورت تغییر مقاومت ۲ اهمی به ۴ اهمی داریم:

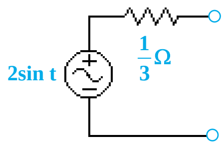
$$V_C(t)(new) = ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t} \quad و \quad V(t) = ۴I_C + V_C \;,\; I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\Rightarrow I_C = \frac{۱}{۳}\frac{d\left[۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t}\right]}{dt} = \frac{۱}{۳}\left[\frac{۶}{۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}\right] \Rightarrow I_C = \frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} \Rightarrow V(t) = ۴I_C + V_C = ۴ \times \frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} + ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

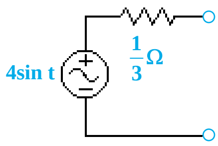
$$\Rightarrow V(t) = \frac{۲۴}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t} + ۴ - ۲e^{-\frac{۳}{۵}t} = ۴ - \frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

مثال ۱۹: در شبکه مقاومتی و خطی زیر حداکثر توان انتقالی به بار R_L در حالتی که کلید بسته باشد، برابر ۶w می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید K در $t=\frac{\pi}{۳}$ برابر $۲\sqrt{۳}$ ولت باشد، مدار معادل تونن شبکه کدام است؟

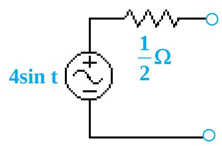




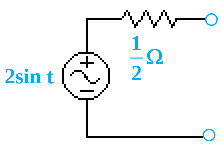
(۱)



(۲)



(۳)



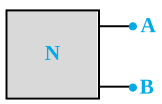
(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مقدار توان حداکثر از فرمول $\frac{V_{th}^{۲}(rms)}{۴R_{th}}$ محاسبه می‌شود. لذا ابتدا مقدار V_{th} باید محاسبه شود. ولتاژ دو سر کلید در حالتی که کلید باز باشد، همان ولتاژ تونن شبکه بوده و تابعی از $\sin t$ خواهد بود. حال داریم:

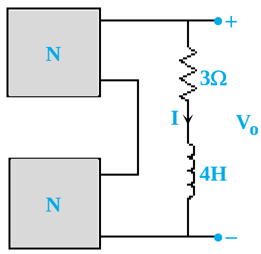
$$V_{th}=A\sin t \quad , \quad V_{th}(t=\frac{\pi}{۳})=V_k(t=\frac{\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow A\sin(\frac{\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow A=۴ \Rightarrow V_{th}=۴\sin t$$

$$rms(V_{th})=\frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow P_{max}=\frac{V_{th}^{۲}(rms)}{۴R_{th}} \Rightarrow ۶=\frac{(\frac{۴}{\sqrt{۲}})^{۲}}{۴R_{th}} \Rightarrow \mathbf{R_{th}}=\frac{۱}{۳}\Omega$$

مثال ۲۰: در مدار زیر شبکه N شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان است. اگر در مدار (الف) بین پایه‌های (A,B) یک سلف یک هانری قرار گیرد، جریان سلف به صورت $e^{-۲t}$ خواهد بود و اگر به جای سلف یک هانری، یک مقاومت یک اهمی قرار گیرد، ولتاژ V_{AB} به صورت e^{-t} می‌شود. حال در مدار (ب) مقدار جریان مدار در $t=۰^{+}$ برابر با چند آمپر است؟



(الف)



(ب)

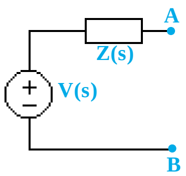
۱) ۰

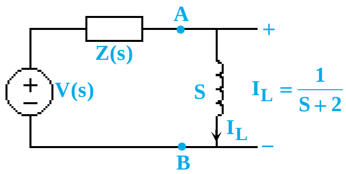
۲) ۲

۳) ۱

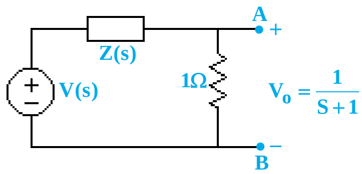
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در صورتی که مدار معادل شبکه N در حوزه فرکانس به صورت زیر باشد، داریم:





(1)



(2)

با نوشتن رابطه جریان در مدار (۱) داریم:

$$I_L(S)=\frac{V(S)}{Z(S)+S}=\frac{۱}{S+۲} \qquad (۱)$$

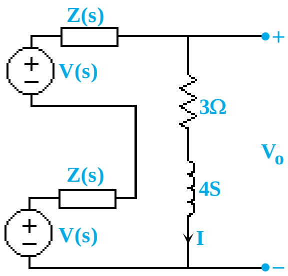
با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ از مدار (۲) داریم:

$$V_o(S)=\frac{۱}{۱+Z(S)}\times V(S)=\frac{۱}{S+۱} \qquad (۲)$$

از حل دستگاه معادلات شامل روابط (۱) و (۲) داریم:

$$V(S)=S-۱ \qquad Z(S)=S^{۲}-۲$$

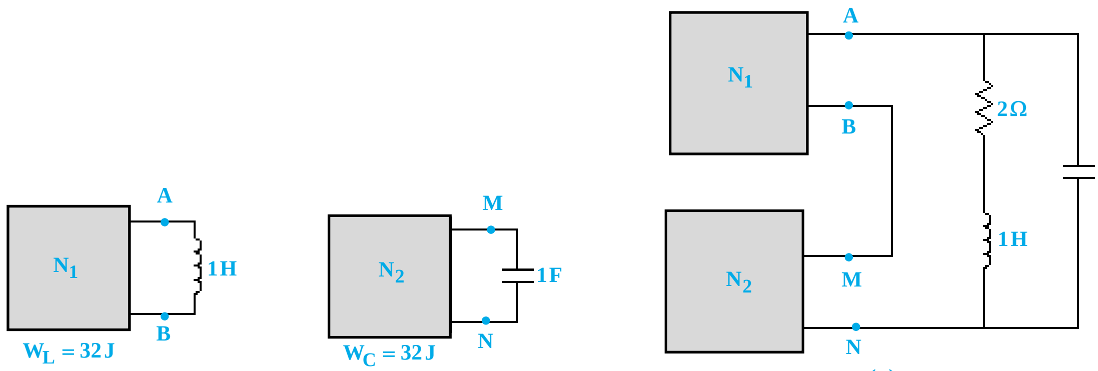
با قرار دادن مدار معادل شبکه N در مدار (ب) داریم:



$$I=\frac{۲V(S)}{۲Z(S)+۳+۴S}=\frac{۲(S-۱)}{۲(S^{۲}-۲)+۳+۴S}=\frac{۲(S-۱)}{۲S^{۲}+۴S-۱}$$

$$I(t=۰^{+})=\lim_{s\to\infty} SI(S)=\frac{S(۲(S-۱))}{۲S^{۲}+۴S-۱}=۱A$$

مثال ۲۱: در مدار زیر شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ از مقاومت‌های خطی و مثبت و منابع مستقل DC تشکیل شده‌اند. در صورتی که مقاومت تونن هر دو شبکه یکسان و برابر با ۲ اهم باشد، در مدار (ج) مقدار انرژی ذخیره شده در مدار چند ژول است؟



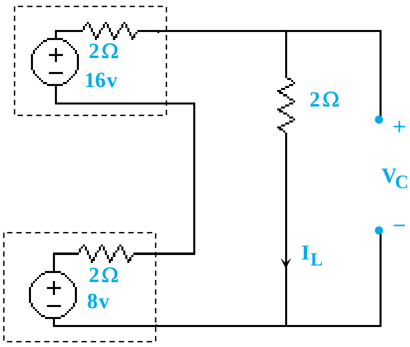
۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جریان عبوری از سلف ۱ هانری در حالت ماندگار همان جریان نورتن شبکه $N_۱$ و ولتاژ دو سر خازن ۱ فارادی در حالت ماندگار همان ولتاژ تونن شبکه $N_۲$ می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{۱}{۲}LI_{SC_۱}^{۲}=۳۲\Rightarrow I_{SC_۱}=۸A \qquad و \qquad R_{th_۱}=۲\Omega\Rightarrow V_{th_۱}=R_{th_۱}.I_{SC_۱}=۲\times۸=۱۶v$$

$$\frac{۱}{۲}CV_{OC_۲}^{۲}=۳۲\Rightarrow V_{OC_۲}=۸v \qquad و \qquad R_{th_۲}=۲\Omega$$

حال در مدار (ج) مدار معادل شبکه‌ها را قرار می‌دهیم. در حالت ماندگار مدار به شکل زیر خواهد بود:

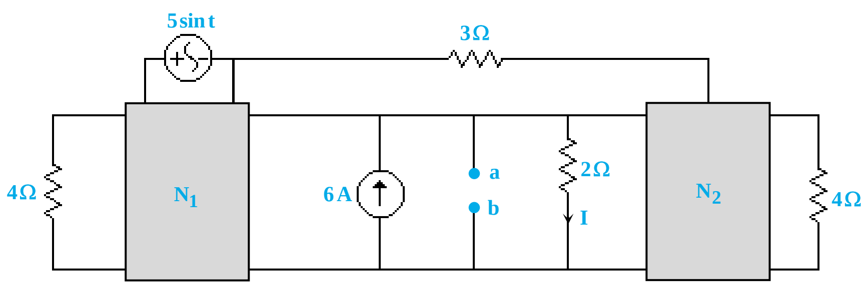


$$I_L=\frac{۱۶+۸}{۲+۲+۲}=۴A$$

$$V_C=I_L\times۲=۴\times۲=۸v$$

$$W_T=\frac{۱}{۲}CV^{۲}+\frac{۱}{۲}LI^{۲}=\frac{۱}{۲}\times۱\times۸^{۲}+\frac{۱}{۲}\times۱\times۴^{۲}\Rightarrow W_T=۴۰J$$

مثال ۲۲: در مدارشکل زیر $N_۱$ و $N_۲$، شبکه‌های مقاومتی خطی و فاقد منابع مستقل هستند و معادله جریان I به صورت $I=۴-۳\sin t$ می‌باشد. در این حالت مقاومت تونن دیده شده از پایه‌های a و b بر حسب اهم کدام است؟



۱) ۳

۲) ۱

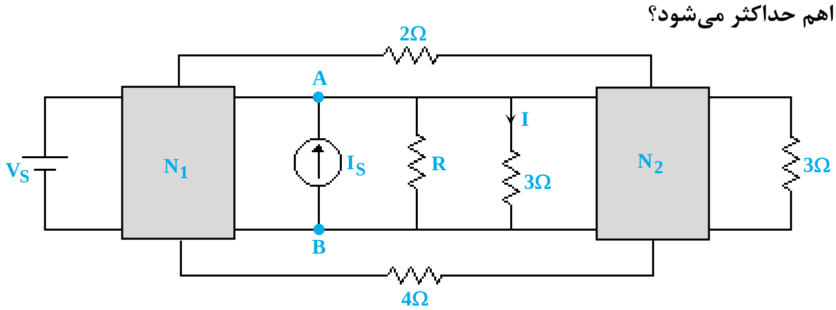
۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای بدست آوردن مقاومت تونن از دو سر b و a، می‌توان یک منبع جریان در نقاط a و b قرار داد و ولتاژ دو سر آن را به جریان آن تقسیم کرد. در این سؤال، می‌توان این منبع جریان را همان منبع جریان ۶ آمپر فرض کرد. لازم به ذکر است که در این حالت، بقیه منابع مستقل ولتاژ و جریان (که در اینجا فقط منبع ولتاژ $5\sin t$است) باید حذف شوند، زیرا فقط R_{th} را می‌خواهیم حساب کنیم و با V_{th} کاری نداریم. بنابراین قسمت سینوسی I نیز صفر خواهد شد. حال داریم:

$$I=۴A \Rightarrow V_{ab}=۲I=۲\times۴=۸v \Rightarrow \mathbf{R_{th}}=\frac{\mathbf{V_{ab}}}{۶}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\Omega$$

مثال ۲۳: **در مدار زیر، شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ به صورت خطی و شامل مقاومت‌های مثبت می‌باشند. به ازای $R=۳\Omega$ رابطه $I=\frac{۱}{۶}I_S+\frac{۱}{۷}V_S$ برقرار است. به ازای چه مقدار R، توان جذبی مقاومت R برحسب اهم حداکثر می‌شود؟**



۱) ۰/۶
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴
۴) ۰/۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اعمال منبع جریان بین پایه‌های B و A، می‌توان مقاومت تونن از دو سر B و A را از تقسیم ولتاژ دو سر منبع جریان، بر مقدار جریان منبع جریان محاسبه کرد. ولتاژ دو سر منبع جریان با توجه به موازی بودن مقاومت ۳ اهمی با آن، به صورت ۳I است. بنابراین مقاومت تونن از دو سر B و A به صورت روبرو است:

$$R_{th}=\frac{V_{AB}}{I_S}=\frac{۳I}{I_S}$$

برای محاسبه مقاومت تونن، باید منابع مستقل غیرفعال شوند. (زیرا به دنبال یافتن مقاومت تونن شبکه هستیم و با V_{th} کاری نداریم و لذا تمامی منابع مستقل به جز I_T و V_T (که خودمان قرار می‌دهیم و در اینجا با I_S برابر است) را بی‌اثر می‌کنیم.) بنابراین با صفر شدن V_S در رابطه I داریم:

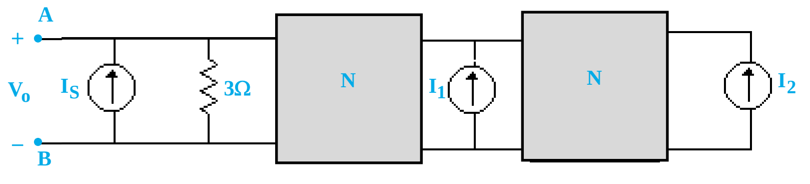
$$I=\frac{۱}{۶}I_S \Rightarrow R_{th}=\frac{۳I}{I_S}=\frac{۳\times\frac{۱}{۶}I_S}{I_S}=\frac{۱}{۲}\Omega$$

با توجه به موازی بودن R با پایانه‌های B و A، در صورتی که مقاومت تونن شبکه در حالت نبودن مقاومت R را R'_{th} نامگذاری کنیم، داریم:

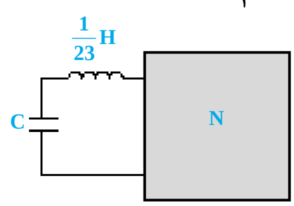
$$R'_{th}\parallel R=R_{th} \Rightarrow R_{th}=R'_{th}\parallel ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}=R'_{th}\parallel ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۳R'_{th}}{۳+R'_{th}} \Rightarrow R'_{th}=۰/۶\Omega$$

برای اینکه توان تلفاتی مقاومت R حداکثر شود، باید مقدار R برابر مقاومت تونن از دو سر آن در حالت عدم وجود خود R باشد. بنابراین R باید برابر R'_{th} باشد. $\mathbf{R=R'_{th}=۰/۶\Omega}$

مثال ۲۴: **در مدار (الف) شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی، موازی با هم، مثبت و تغییرناپذیر با زمان است. در صورتی که معادله ولتاژ V_o به صورت $\frac{۳}{۲}I_۲+\frac{۴}{۹}I_s+۲I_۱$ باشد، در مدار (ب) پهنای باند مدار بر حسب رادیان بر ثانیه مطابق با کدام گزینه است؟**



مدار (الف)

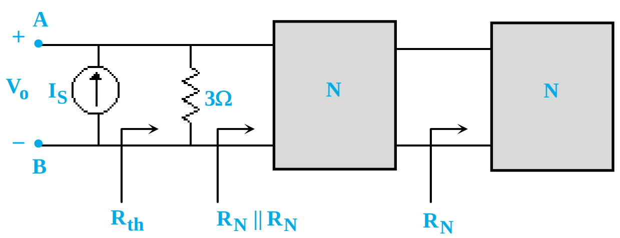


مدار (ب)

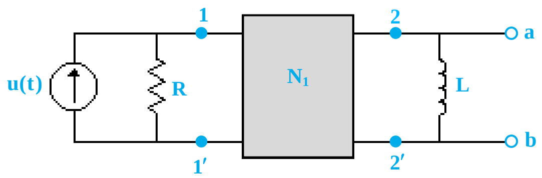
۱) ۲۴
۲) ۲۳
۳) $\frac{۲۳}{۲۴}$
۴) $\frac{۲۴}{۲۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در صورتی که بخواهیم مقاومت تونن را از پایه‌های A و B بدست آوریم، منابع مستقل $I_۱$ و $I_۲$ را صفر می‌کنیم و ولتاژ دو سر منبع جریان I_S را به مقدار جریان آن تقسیم می‌کنیم.

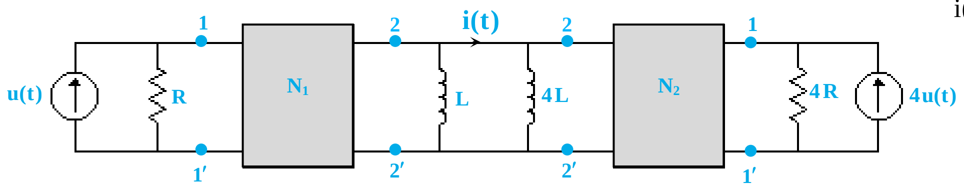
$$V_o=\frac{۴}{۹}I_S \Rightarrow R_{th}=\frac{V_o}{I_S}=\frac{\frac{۴}{۹}I_S}{I_S}=\frac{۴}{۹}\Omega$$



مثال ۲۹: در مدار شکل زیر اگر بین نقاط a و b یک مقاومت ۲ اهمی وصل کنیم، $i_{ab}=(۲+۲e^{-t})u(t)$ می‌شود و اگر بین همین نقاط یک مقاومت یک اهمی وصل شود، $i_{ab}=(۲+۴e^{-t})u(t)$ می‌شود. حال در مدار شکل (ب) که در آن $N_۲$ همان $N_۱$ می‌باشد که تمام امپدانس‌های آن چهار برابر شده‌اند، جریان $i(t)$ کدام می‌شود؟



(الف)



(ب)

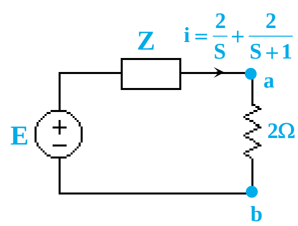
۱) $i(t)=(-\frac{۶}{۵}-۶e^{-t}+\frac{۱۲}{۵}te^{-t})u(t)$

۲) $i(t)=(-۲-۱۰e^{-t}+۴te^{-t})u(t)$

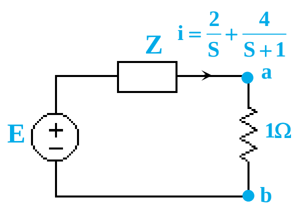
۳) $i(t)=۰$

۴) $i(t)=(-۶-۳۰e^{-t}+۱۲te^{-t})u(t)$

پاسخ: گزینه «۴» با اطلاعاتی که از صورت سوال داریم، می‌توانیم مدار معادل تونن شبکه را از دید دو سر a و b بدست آوریم. برای این کار مدار معادل شبکه را همراه بار آن در دو آزمایش انجام گرفته، در نظر می‌گیریم:



آزمایش ۱



آزمایش ۲

برای آزمایش اول می‌توان نوشت:

$$V_{ab}=\frac{۲}{۲+Z}E=\frac{۸S+۴}{S(S+۱)}\Rightarrow E=\frac{۴S+۲}{S(S+۱)}(Z+۲)$$

و به همین ترتیب برای آزمایش دوم داریم:

$$V_{ab}=\frac{۱}{۱+Z}E=\frac{۶S+۲}{S(S+۱)}\Rightarrow E=\frac{۶S+۲}{S(S+۱)}(Z+۱)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۴S+۲}{S(S+۱)}(Z+۲)=\frac{۶S+۲}{S(S+۱)}(Z+۱)\Rightarrow ۲SZ=۲S+۲\Rightarrow Z=\frac{S+۱}{S}$$

$$E=\frac{۶S+۲}{S(S+۱)}(Z+۱)=\frac{۶S+۲}{S(S+۱)}\times\frac{۲S+۱}{S}=\frac{(۶S+۲)(۲S+۱)}{S^۲(S+۱)}$$

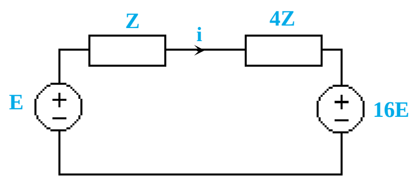
با پیدا کردن مقدار E و Z باید ببینیم چگونه می‌توانیم مدار جدید را با بکارگیری Z و E مدل کنیم. در مدلسازی شبکه $N_۲$ (همراه با مقاومت، سلف و منبع جریان متصل به آن) باید دو نکته را در نظر بگیریم:

۱ـ از آنجایی که تمامی امپدانس‌های موجود در این مدار ۴ برابر شده‌اند، امپدانس معادل خروجی این مدار برابر ۴Z خواهد بود.

۲ـ از آنجایی که هم منبع جریان ورودی به شبکه و هم امپدانس‌های شبکه ۴ برابر شده‌اند، ولتاژ مدار بازِ معادل، برابر ۱۶E خواهد بود.

با توجه به توضیحات ارائه شده، مدار معادل زیر را می‌توان برای مدار جدید در نظر گرفت:

حال جریان i را می‌توان حساب نمود:



$$i(s)=-\frac{۱۵E}{۵Z}=-۳\frac{E}{Z}=-۳\frac{(۶S+۲)(۲S+۱)}{S^۲(S+۱)}\times\frac{S}{S+۱}$$

$$=-۳\frac{(۶S+۲)(۲S+۱)}{S(S+۱)^۲}=-۳\times[\frac{۲}{S}+\frac{۱۰}{S+۱}-\frac{۴}{(S+۱)^۲}]$$

$$\Rightarrow i(t)=(-۶-۳۰e^{-t}+۱۲te^{-t})u(t)$$

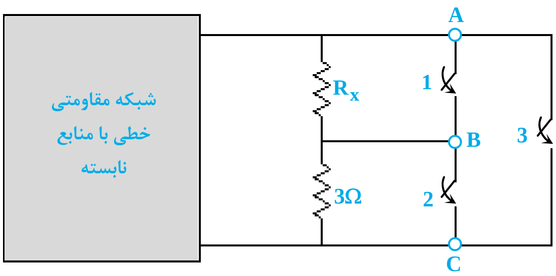
مثال۳۰: در مدار شکل زیر آزمایش‌های زیر انجام شده است: (در حالت اولیه تمام کلیدها باز هستند و همچنین از مقاومت کلیدها صرف‌نظر می‌کنیم)

۱. اگر تنها کلید ۱ را ببندیم، جریان $3A$ از کلید ۱ عبور خواهد کرد.

۲. اگر تنها کلید ۲ را ببندیم، جریان $2A$ از کلید ۲ عبور خواهد کرد.

۳. اگر تنها کلید ۳ را ببندیم، جریان $6A$ از کلید ۳ عبور خواهد کرد.

با فرض باز بودن تمام کلیدها، شبکه معادل تونن دیده شده (V_{th}, R_{th}) از دو سر کلید ۱ (سرهای A و B) به ترتیب از راست به چپ چند اهم و چند ولت است؟



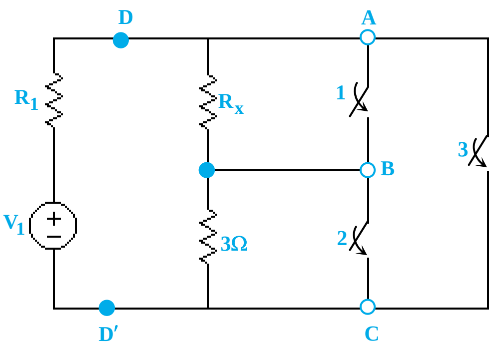
۱) ۱۲،۳

۲) ۹،۳

۳) ۱۸،۳

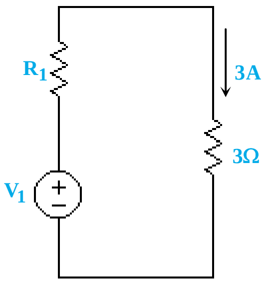
۴) ۱۸،۶

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا از سرهای D و D′ مشخص شده در شکل، شبکه معادل تونن با مقاومت R_1 و V_1 را مشخص می‌کنیم که در این صورت مطابق با شکل خواهیم داشت:



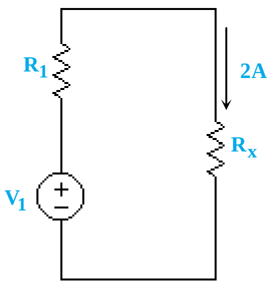
حال باید مقادیر V_1، R_1 و R_x را پیدا کنیم.

مطابق با آزمایش (۱) و در صورت بسته بودن کلید ۱ داریم:



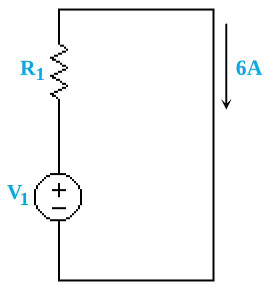
$$\Rightarrow V_1 = 3R_1 + 9 \qquad (1)$$

مطابق با آزمایش (۲) و در صورت بسته بودن کلید ۲ داریم:



$$\Rightarrow V_1 = 2R_1 + 2R_x \qquad (2)$$

و مطابق با آزمایش (۳) و در صورت بسته بودن کلید ۳ داریم:



$$\Rightarrow V_1 = 6R_1 \qquad (3)$$

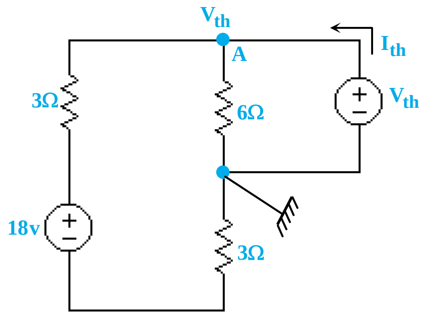
از معادلات (۱) و (۳) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 3R_1 + 9 \\ V_1 = 6R_1 \end{array}\right\} \Rightarrow R_1 = 3\Omega\ ,\ V_1 = 18\,v$$

با جایگذاری مقادیر بالا در (۲) داریم:

$$18 = 2 \times 3 + 2R_x \Rightarrow R_x = 6\Omega$$

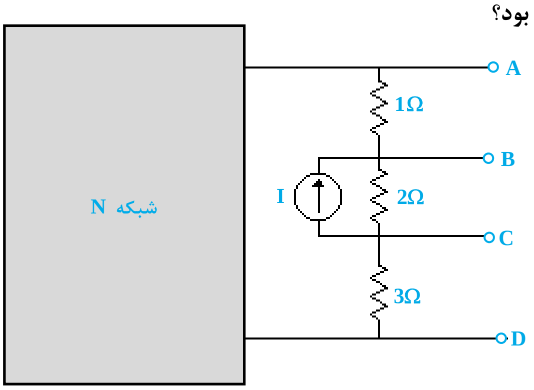
حال با داشتن مقادیر V_1 و R_1 و R_X ، مدار معادل تونن از دو سر کلید ۱ را به دست می‌آوریم:



با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_{th}-18}{6}+\frac{V_{th}}{6}-I_{th}=0 \Rightarrow 2V_{th}-18=6I_{th} \Rightarrow V_{th}=3I_{th}+9 \rightarrow \begin{cases} R_{th}=3\Omega \\ V_{th}=9v \end{cases}$$

مثال۳۱: مدار زیر را که در آن شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی با منابع مستقل است، در نظر بگیرید. اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۵ آمپر از A به D برقرار می‌شود. اگر سرهای B و C را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۱ آمپر از C به B برقرار شده و ولتاژ V_{AD} برابر ۸ ولت خواهد شد. اگر سرهای A و C و سرهای B و D را اتصال کوتاه کنیم، ولتاژ V_{BC} چند ولت خواهد بود؟



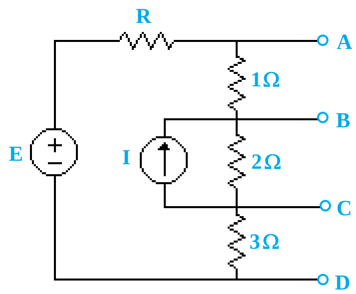
۱) $\frac{9}{7}$ ولت

۲) $-\frac{27}{7}$ ولت

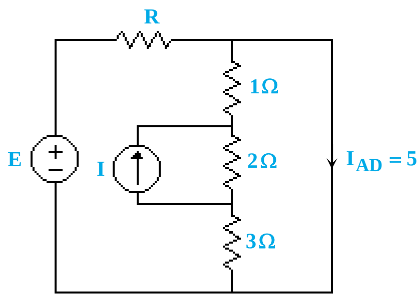
۳) $-\frac{9}{7}$ ولت

۴) ۰ ولت

پاسخ: گزینه «۲» اگر مدار معادل تونن شبکه N را در نظر بگیریم، مداری به شکل زیر خواهیم داشت:

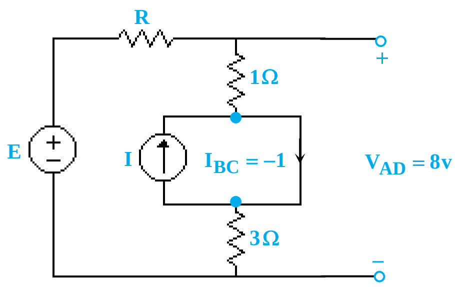


حال باید مقادیر نامعلوم E ، R و I را بر اساس اطلاعات صورت سؤال محاسبه کنیم. در آزمایش اول اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، با مدار روبرو سر و کار خواهیم داشت: در این حالت داریم:



$$I_{AD}=\frac{E}{R}+\frac{2}{2+4}\times I=5 \Rightarrow \frac{E}{R}+\frac{I}{3}=5 \qquad (1)$$

در آزمایش دوم با اتصال کوتاه شدن سرهای B و C مداری به شکل زیر خواهیم داشت:



برای بدست آوردن توان مصرفی مقاومت 3Ω باید ولتاژ V' بدست آورده شود. با توجه به قضیه هم‌پاسخی برای شبکه N_2 در صورتی که $I_{S_2}=0$ شود، معادله V به صورت زیر خواهد بود:

$$V=4I_{S_2}+I_{S_1}=I_{S_1}=2(A)$$

حال اگر $I_{S_1}=0$ شود و با فرض $I_{S_2}=2\cos t$ داریم:

$$\begin{cases}I_{S_2}=0\\V=2v\\I_{S_1}=2A\end{cases},\quad\begin{cases}I'_{S_1}=0\\I'_{S_2}=2\cos t\\V'=?\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{V}{I_{S_1}}=\frac{V'}{I'_{S_2}}\ \Rightarrow\ \frac{2}{2}=\frac{V'}{2\cos t}\ \Rightarrow\ V'=2\cos t\ \Rightarrow\ P_{3\Omega}=\frac{V'^2}{3\Omega}=\frac{4\cos^2 t}{3\Omega}=\frac{4}{3}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\ \Rightarrow\ \mathbf{P_{3\Omega}(ave)=\frac{2}{3}w}$$

در نوشتن روابط فوق از بیان دوم قضیه هم‌پاسخی استفاده شده است.

لازم به ذکر است توان متوسط مصرفی مقاومت 3Ω از رابطه مقابل نیز قابل محاسبه است:

$$\mathbf{P_{3\Omega}=\frac{(V'(rms))^2}{3\Omega}=\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{3}=\frac{2}{3}w}$$

نکته۵: نکته‌ای جالب و کاربردی در قضیه‌ی هم‌پاسخی: اغلب دانشجویان در تشخیص این که دو درگاه ورودی و خروجی در شبکه دقیقاً کجا هستند و نیز این که در یک مثال معین، از کدام بیان هم‌پاسخی استفاده کنند، دارای مشکل هستند. در این‌جا به عنوان یک روش ساده، راحت‌ترین روش استفاده از قضیه هم‌پاسخی را بیان می‌کنیم. در هر صورت روش‌های دیگری هم ممکن است موجود باشد، ولی این روش بسیار کاربردی و ساده است:

الف) تعیین درگاه‌های ورودی و خروجی: برای این کار درگاه‌های ورودی و خروجی را همان محل اعمال ورودی در دو طرف مدار در نظر بگیرید (مثلاً اعمال ورودی در سمت چپ مدار «الف» را با درگاه $A-B$ به عنوان درگاه ورودی و محل اعمال ورودی در سمت راست مدار «ب» را به عنوان درگاه $C-D$ در نظر بگیرید.) کاری نداشته باشید که چه مجهولی از شما و در کجا خواسته شده است. با تقسیم ولتاژ یا جریانی ساده می‌توانید این مجهول را به ولتاژ یا جریان درگاهی که مشخص کرده‌اید، ارتباط دهید.

ب) تعیین این که از کدام بیان استفاده کنیم: برای این کار به نوع ورودی‌ها نگاه می‌کنیم.

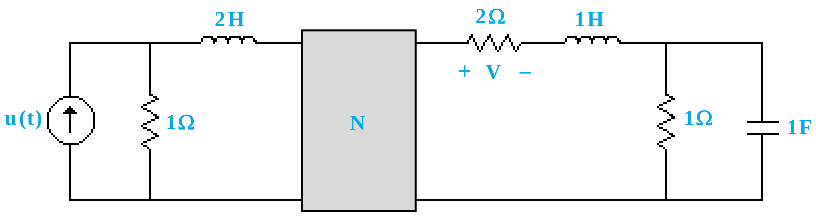
۱) در بیان $Z_{12}=Z_{21}$، $\frac{V_1}{I_2}=\frac{V_2}{I_1}$ می‌باشد؛ بنابراین هر دو ورودی جریان هستند.

۲) در بیان $Y_{12}=Y_{21}$، $\frac{I_1}{V_2}=\frac{I_2}{V_1}$ می‌باشد؛ بنابراین هر دو ورودی ولتاژ هستند.

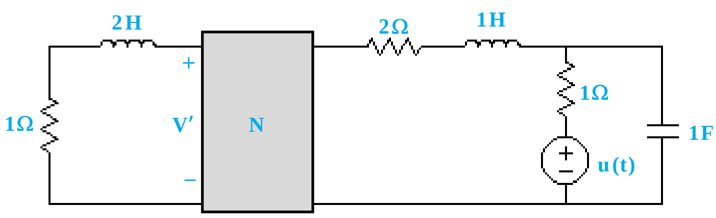
۳) در بیان $H_{12}=-H_{21}$، $\frac{I_2}{I_1}=-\frac{V_1}{V_2}$ می‌باشد، و در بیان $G_{12}=-G_{21}$، $\frac{I_1}{I_2}=-\frac{V_2}{V_1}$ می‌باشد؛ بنابراین در این حالات یکی از ورودی‌ها ولتاژ و دیگری جریان است.

برای درک بهتر این توضیحات مثال بعدی را با هم بررسی می‌کنیم.

مثال ۵۷: مدارهای (الف) و (ب) مدارهای هم‌پاسخ هستند. اگر پاسخ حالت صفر V در مدار (الف) به صورت $V=(1-e^{-2t})$ باشد، آنگاه در شکل (ب) معادله V' کدامیک از گزینه‌های زیر است؟



(الف)



(ب)

۱) $[\frac{1}{2}+e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}]u(t)$

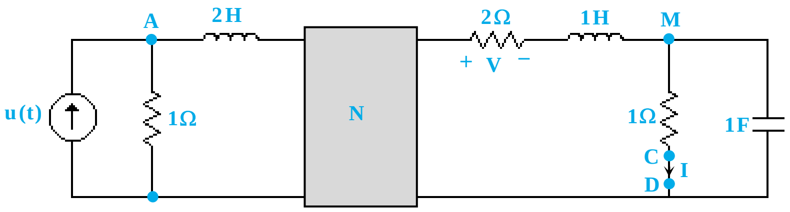
۲) $[\frac{1}{2}-e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}]u(t)$

۳) $[\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}]u(t)$

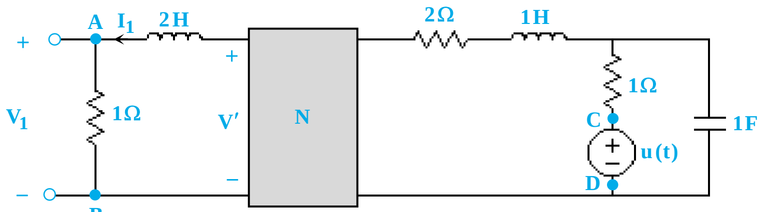
۴) $[\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}]u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

روش اول: با توجه به اینکه هر دو مدار (الف) و (ب) مدارهای هم‌پاسخ هستند، در حالات قضیه هم‌پاسخی نیز صادق می‌باشند. از آن‌جایی که ورودی اعمال شده به سمت چپ مدار (الف) به دو سر مقاومت 1Ω اعمال شده، پس درگاه $A-B$ را مطابق شکل رسم شده در دو سر مقاومت 1Ω در نظر می‌گیریم و چون ورودی اعمال شده به سمت راست مدار (ب) سری با مقاومت 1Ω است، پورت $C-D$ مربوط به طرف دوم را هم مطابق شکلی که مجدداً رسم شده در نظر می‌گیریم. حال با معلوم شدن محل پورت‌ها باید بفهمیم که از کدام بیان هم‌پاسخی استفاده کنیم. طبق نکته گفته شده با توجه به این که یکی از ورودی‌ها ولتاژ و دیگری جریان است، از بیان سوم یعنی $H_{12}=-H_{21}$ استفاده می‌کنیم.



(الف)



(ب)

حال سراغ تحلیل مدار می‌رویم و برطبق قضیه هم‌پاسخی اگر در مدار (الف) منبع $u(t)$ بین پایه‌های A و B قرار گیرد و جریان I را در شاخه شامل نقاط C و D بسازد، می‌توان گفت که در مدار (ب) اگر منبع ولتاژی به همان اندازه $u(t)$ بین نقاط D و C قرار گیرد، بین نقاط B و A ولتاژ V_1 ای به اندازه I در مدار (الف) ایجاد می‌کند. لذا ابتدا در مدار (الف) جریان I را محاسبه می‌کنیم. با نوشتن KCL در گره M در مدار (الف) و در حوزه فرکانس داریم:

$$V=\frac{1}{S}-\frac{1}{S+2} \quad \text{و} \quad I+\frac{I}{\frac{1}{S}}=\frac{V}{2} \Rightarrow I(1+S)=\frac{V}{2} \Rightarrow I=\frac{V}{2(S+1)} \Rightarrow I=\frac{\frac{1}{S}-\frac{1}{S+2}}{2(S+1)}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2(S)(S+1)}-\frac{1}{2(S+1)(S+2)} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{S}-\frac{2}{S+1}+\frac{1}{S+2}\right] \Rightarrow I(t)=\frac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]u(t)$$

برطبق قضیه هم‌پاسخی، رابطه $I(t)$ در مدار (الف)، برابر با معادله V_1 در مدار (ب) است. حال در مدار (ب) داریم:

$$V_1(t)=I(t)=\frac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]u(t)$$

$$V'(t)=\frac{2dI_1(t)}{dt}+V_1(t) \quad \text{و} \quad I_1(t)=\frac{V_1(t)}{1} \Rightarrow V'(t)=2\left[\frac{1}{2}[0+2e^{-t}-2e^{-2t}]\right]+\frac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]$$

$$\Rightarrow V'(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \Rightarrow \mathbf{V'(t)=\left[\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}\right]u(t)}$$

روش دوم: مدارهای ۲ آزمایش را به صورت زیر رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از قضیه‌ی تلگان سؤال را حل می‌کنیم.