مدرسان شریف

فصل ششم

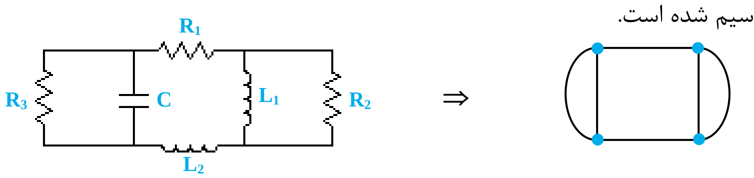
« گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

تعریف گراف

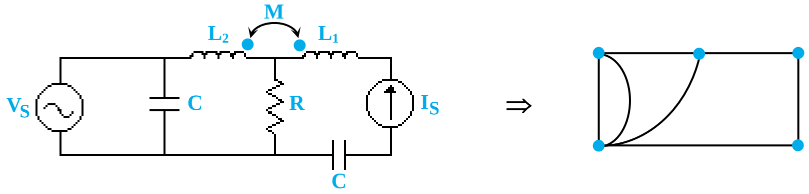
گراف به مجموعه‌ای از گره‌ها و شاخه‌های متصل به آن گفته می‌شود، در صورتی که هر شاخه در ابتدا و انتهایش گره‌ای داشته باشد. برای اینکه گراف معادل یک شبکه را ترسیم کنیم، لازم است که به جای هر المان، یک شاخه به همراه دو گره در انتها و ابتدای شاخه قرار دهیم. لازم به ذکر است که ترسیم گراف‌های مربوط به سلف‌های شامل القای متقابل و یا ترانسفورمر، بدون توجه به القای متقابل آنها صورت می‌گیرد. (یعنی نمایش به صورت گراف، القای متقابل در سلف‌ها را نشان نمی‌دهد، زیرا القای متقابل مربوط به ماهیت شاخه‌های مدار الکتریکی مورد نظر بوده و در تعریف ریاضیاتی گراف بی‌معنا است.)

برای مثال، گراف سه مدار در زیر ترسیم شده است.

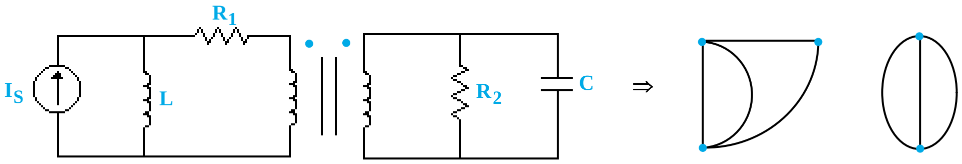
(مدار الف)



(مدار ب)



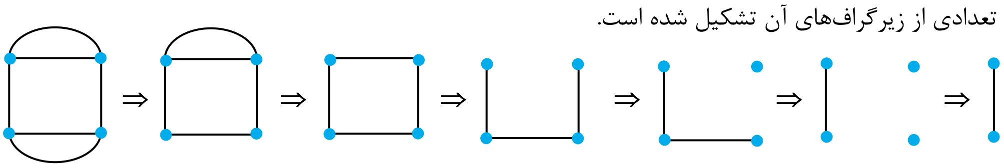
(مدار ج)



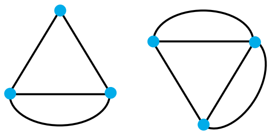
همان‌طور که در مدارهای (ب) و (ج) دیده شد، القای متقابل سلف‌های L_1 و L_2 و تزویج ترانسفورماتور در نمایش گرافی، نشان داده نشده است. لازم به ذکر است که در ترسیم گراف یک مدار، ممکن است گره‌ای وجود داشته باشد که به آن، هیچ شاخه‌ای متصل نباشد و این مورد با تعریف گراف منافاتی ندارد.

تعاریف اولیه در مبحث گراف‌ها

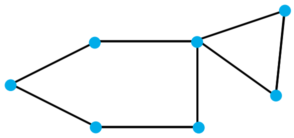
با حذف تعدادی از گره‌ها و شاخه‌های یک گراف، زیرگراف‌های مربوط به آن تشکیل می‌شوند. برای مثال در گراف زیر با حذف مرحله به مرحله گره‌ها و شاخه‌های گراف اصلی، تعدادی از زیرگراف‌های آن تشکیل شده است.



در صورتی که بین هر دو گره دلخواه از یک گراف، حداقل یک شاخه (یا حداقل یک مسیر متصل‌کننده آن دو گره) وجود داشته باشد، گراف مذکور پیوسته بوده و در غیر این صورت گراف ناپیوسته است. برای مثال گراف (الف) یک گراف پیوسته و گراف (ب) یک گراف ناپیوسته است.

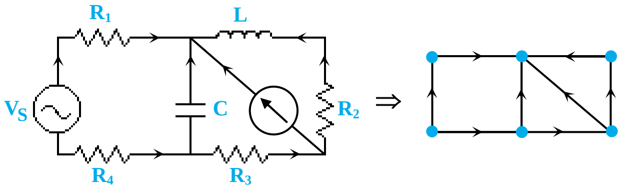


(گراف ب)

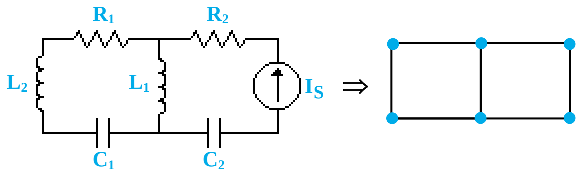


(گراف الف)

در صورتی که در یک مدار جریان المان‌ها دارای جهت قراردادی باشد، شاخه‌های گراف معادل آن نیز دارای همان جهت‌ها خواهند بود. لذا گرافی را که شامل شاخه‌های جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار و گرافی را که شامل شاخه‌های بدون جهت باشد، گراف بدون جهت می‌نامند. برای مثال گراف معادل مدار (الف) جهت‌دار و گراف معادل مدار (ب) بدون جهت است.



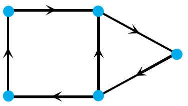
(مدار الف)



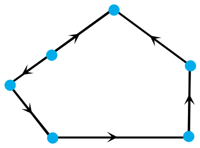
(مدار ب)

تعریف حلقه و قانون KVL

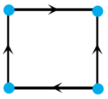
اگر زیرگرافی از یک گراف در نظر گرفته شود، به صورتی که اولاً زیرگراف مورد نظر پیوسته بوده و ثانیاً در آن هر گره فقط به دو شاخه متصل باشد، آنگاه زیرگراف مذکور تشکیل یک حلقه خواهد داد. برای مثال، چند زیرگراف زیر را در نظر بگیرید:



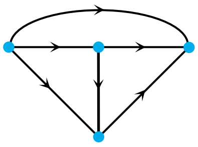
(الف)



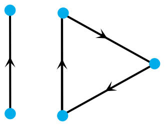
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

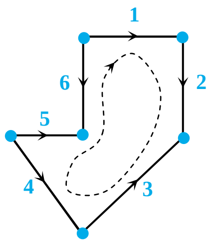
گراف‌های (ب) و (ج) هر دو شرط را دارا بوده و حلقه هستند؛ ولی گراف‌های (الف) و (د) شرط دوم را ندارند و حلقه نمی‌باشند. همچنین گراف (هـ) نیز شرط اول و دوم را ندارد (زیرا برخی از گره‌ها تنها به یک شاخه وصلند). لذا گراف‌های (الف)، (د) و (هـ) حلقه نمی‌باشند.

پس از تعریف حلقه به ارائه قانون KVL در هر حلقه می‌پردازیم. قانون ولتاژ کیرشهف یا همان قانون KVL در مورد هر حلقه مطلب زیر را بیان می‌کند:

«برای هر حلقه از یک گراف، حاصل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها برابر صفر است.»

برای نوشتن KVL به این نکته باید دقت شود که اگر جهت شاخه‌ها با جهت حرکت برابر باشد، ولتاژ شاخه با ضریب مثبت و در غیر این صورت با ضریب منفی نوشته می‌شود. لازم به ذکر است که انتخاب جهت حرکت اختیاری است.

مثال۱: **در گراف مقابل کدامیک از گزینه‌های زیر مربوط به قانون KVL است؟**



۱) $V_۱ + V_۲ - V_۳ + V_۴ - V_۵ + V_۶ = ۰$

۲) $V_۱ + V_۲ - V_۳ - V_۴ + V_۵ - V_۶ = ۰$

۳) $V_۱ - V_۲ - V_۳ + V_۴ + V_۵ - V_۶ = ۰$

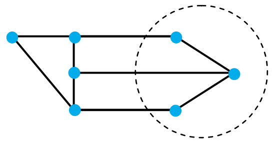
۴) $V_۱ - V_۲ - V_۳ - V_۴ + V_۵ + V_۶ = ۰$

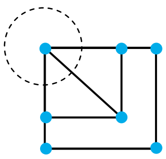
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای نوشتن معادله KVL در درون حلقه فوق، از یک نقطه و در یک جهت اختیاری حرکت می‌کنیم. اگر جهت حرکت، با فلش شاخه یکی بود، ولتاژ شاخه را مثبت و اگر جهت حرکت با فلش شاخه یکی نبود، ولتاژ شاخه را منفی لحاظ می‌کنیم. بدین ترتیب داریم:

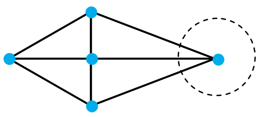
$$V_۱ + V_۲ - V_۳ - V_۴ + V_۵ - V_۶ = ۰$$

تعریف کاتست و قانون KCL

برای مشخص شدن مفهوم کاتست، یک زیرگراف شامل چند شاخه را در نظر بگیرید. اگر با حذف کلیه شاخه‌های این زیرگراف، گراف اصلی به دو قسمت کاملاً جدا از هم و منفصل تبدیل شود، و با بازگرداندن هر یک از شاخه‌های این زیرگراف به گراف اصلی، این قسمت‌های مجزا دوباره متصل گردند، این زیرگراف که مجموعه‌ای از شاخه‌هاست، یک کاتست نامیده می‌شود. برای مثال در شکل‌های زیر چند کاتست از یک گراف ترسیم شده است.





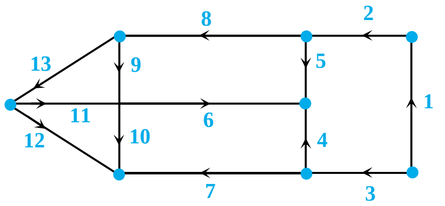


تفسیر قانون جریان کیرشهف یا همان قانون KCL در مورد هر کاتست به این صورت است:

«در هر کاتست مجموع جریان‌های شاخه‌های مختلف کاتست (با در نظر گرفتن جهت مناسب برای جریان‌ها) برابر صفر است.»

برای یافتن جهت مناسب جریان‌ها کافی است زیرمدار یا زیرگراف‌های ایجاد شده با حذف کاتست مورد نظر را در نظر بگیریم. در این صورت جهت جریان‌ها را به شکلی در نظر می‌گیریم که همگی به یکی از این دو زیرگراف خاص وارد شده و یا همگی از آن خارج شوند.

مثال ۲: در گراف زیر کدامیک از دسته معادلات، مربوط به کاتست در گراف است؟



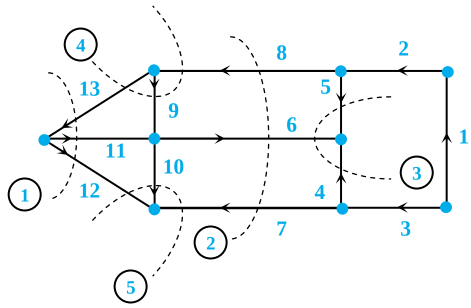
۱) $\begin{cases} I_۶ = I_۷ + I_۸ \\ I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} I_۴ = I_۵ + I_۶ \\ I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} I_۷ + I_{۱۰} = I_{۱۲} \\ I_۷ + I_۹ + I_{۱۳} = ۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} I_۴ = I_۵ + I_۶ \\ I_{۱۰} + I_۶ + I_۸ = ۰ \end{cases}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با نوشتن معادلات کاتست‌های نشان داده شده داریم:



کاتست ۱ : $I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲}$

کاتست ۴ : $I_۸ = I_۹ + I_{۱۳}$

کاتست ۲ : $I_۶ = I_۸ + I_۷$

کاتست ۵ : $I_۷ + I_{۱۰} + I_{۱۲} = ۰$

کاتست ۳ : $I_۴ + I_۵ + I_۶ = ۰$

لازم به ذکر است که برای گراف بالا کاتست‌های دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت.

ماتریس تلاقی شاخه با مش (M_a)

برای حل مدارها به صورت ساده‌تر با قانون KVL و بیان ارتباط حلقه‌های مدار با شاخه‌های موجود در آن، ماتریس تلاقی شاخه با مش یا در حالت کلی حلقه، M_a را تعریف می‌کنیم. برای نوشتن این ماتریس تمام حلقه‌ها یا مش‌های درونی را ساعتگرد و حلقه بیرونی گراف را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. ماتریس تلاقی شاخه با مش یا M_a مستطیلی بوده و به تعداد شاخه‌های گراف یعنی b، دارای ستون می‌باشد. همچنین تعداد سطرهای آن برابر با مجموع تعداد مش‌های درونی و بیرونی مدار یعنی $L+۱$ است. در صورتی که L تعداد مش‌های درونی گراف باشد، روابط زیر برقرار است و درایه‌های این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} L = b - n_t + ۱ \\ L: \text{تعداد مش‌های درونی} \\ b: \text{تعداد شاخه‌ها} \\ n_t: \text{تعداد گره‌های گراف} \end{cases}$$

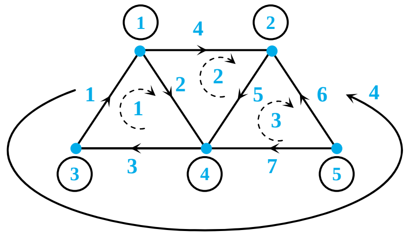
$$m_{ij} = \begin{cases} ۰ & \text{اگر شاخه j در مش i موجود نباشد.} \\ ۱ & \text{اگر شاخه j در مش i بوده و جهت قراردادی آنها یکی باشد.} \\ -۱ & \text{اگر شاخه j در مش i بوده و جهت قراردادی آنها یکی نباشد.} \end{cases}$$

> **نکته۱:** در ماتریس تلاقی شاخه با مش، جمع جبری کلیه ستون‌های ماتریس M_a باید برابر صفر باشد. همچنین هر سطر از این ماتریس، بیانگر این است که چند شاخه درون مش مورد نظر بوده و چه شاخه‌هایی با مش هم‌جهت و چه شاخه‌هایی با مش غیرهم‌جهت هستند. هر ستون از این ماتریس، بیانگر این است که هر شاخه با چه مش‌هایی تلاقی دارد و آیا با آنها هم‌جهت است یا خیر. بنابراین چون هر شاخه حتماً با یک مش هم‌جهت و حتماً با یکی غیر هم‌جهت است، پس جمع درایه‌های هر ستون حتماً صفر است. (یعنی حتماً یک ۱+ و یک ۱- دارد.)

ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده (M)

در صورتی که سطر مربوط به مش بیرونی از ماتریس M_a حذف شود، ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده M تشکیل می‌شود.

مثال ۳: برای گراف مقابل ماتریس‌های M_a و M را بدست آورید.



☑ **پاسخ:** طبق نکات گفته شده، برای مش درونی جهت را ساعتگرد و برای مش بیرونی جهت را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ذکر شده برای بدست آوردن ماتریس‌های M_a و M داریم:

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{\substack{۱\ \ ۲\ \ ۳\ \ ۴\ \ ۵\ \ ۶\ \ ۷ \\ \text{تعداد شاخه‌ها}}} \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix}\right\} \text{مش‌های درونی}$$

$$M_a = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}}_{\substack{۱\ \ ۲\ \ ۳\ \ ۴\ \ ۵\ \ ۶\ \ ۷ \\ \text{تعداد شاخه‌ها}}} \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{matrix}\right\} L+۱ = \text{تعداد مش‌ها}$$

نکته۲: در صورتی که در یک سؤال ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده داده شده باشد و در گزینه‌ها ماتریس تلاقی شاخه با مش اصلی خواسته شده باشد، بدین صورت عمل می‌شود که یک سطر در انتهای ماتریس تلاقی شاخه با مش خلاصه شده M به صورتی اضافه می‌شود که جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a تشکیل شده صفر شود.

مثال۴: کدامیک از ماتریس‌های زیر مربوط به ماتریس تلاقی شاخه با مش M زیر به صورت M_a هستند؟

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

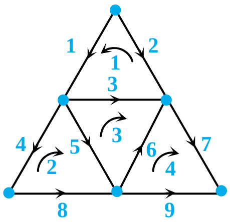
۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

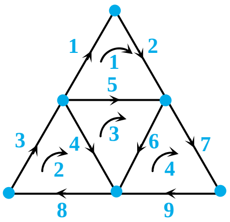
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه جمع جبری عناصر هر ستون ماتریس M_a صفر است، یک سطر در انتهای ماتریس M، به صورتی اضافه می‌کنیم که جمع جبری هر ستون برابر صفر شود. دقت کنید که سطر اضافه شده، مربوط به مش بیرونی خواهد بود.

$$M_a=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} \longleftarrow \text{سطر اضافه شده}$$

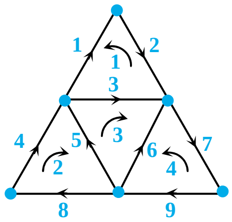
مثال۵: با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبل، کدامیک از گراف‌های زیر مربوط به ماتریس M_a هستند؟



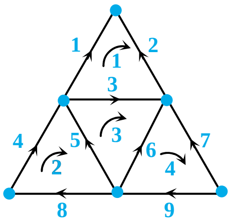
(۱)



(۲)



(۳)



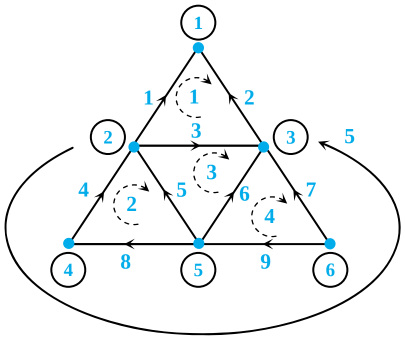
(۴)

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» با توجه به ماتریس M_a بدست آمده در مثال قبل، دیده می‌شود که تعداد مش‌ها به اندازه سطرهای ماتریس M_a یعنی ۵ است که از این تعداد، ۴ عدد مش درونی و یک عدد مش بیرونی است و تعداد شاخه‌ها با توجه به ستون‌های ماتریس ۹ عدد است. لذا داریم:

تعداد شاخه‌ها $b=۹$ و تعداد مش‌های درونی $L=۴ \Rightarrow L+۱=۵$

تعداد گره‌ها $n_t=۶ \Rightarrow ۴=۹-n_t+۱ \Rightarrow L=b-n_t+۱$

با توجه به اطلاعات بدست آمده گراف مذکور به صورت مقابل ترسیم می‌شود:



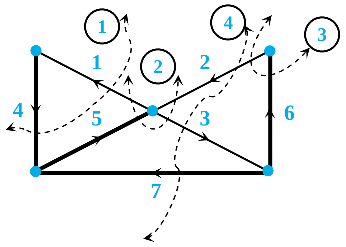
(با توجه به درایه‌های ماتریس M_a در مثال قبل، جهت شاخه‌ها و نیز مش‌ها باید مطابق گزینه‌ی (۴) باشد، زیرا مثلاً سطر اول می‌گوید که جهت مش ۱ باید با شاخه‌ی ۱ هم‌جهت و با شاخه‌های ۲ و ۳ مخالف جهت باشد که تنها گزینه‌ی (۴) این‌گونه است.)

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا مشخصات ابتدایی گراف را بدست می‌آوریم.

$b = ۷ \quad , \quad n = n_t - ۱ = ۴$

$n_t = ۵ \quad , \quad L = b - n = ۷ - ۴ = ۳$

در صورتی که بخواهیم ماتریس $Q_۱$ را بدست آوریم، با توجه بـه اینکـه قسمت آخـر مـاتریس $Q_۱$ ماتریس واحد ۴×۴ است، لذا لینک‌های گراف ۳ تا می‌باشند و با توجه به اینکه کاتست‌های اساسی همگی باید فقط دارای یک شاخه درخت باشنـد، بنـابراین شـاخه‌هـای ۷ و ۶ و ۵ و ۴ شـاخه‌هـای درخت اصلی هستند و به ازای هر کدام از آنها یک کاتست اساسی به صورت مقابل موجود است:



$\{۱,۴\}\ \{۲,۶\}\ \{۱,۵,۳,۲\}\ \{۲,۳,۷\}$

حال معادلات کاتست‌های اساسی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} I_۴ - I_۱ = ۰ \\ I_۵ + I_۲ - I_۳ - I_۱ = ۰ \\ I_۶ - I_۲ = ۰ \\ I_۲ + I_۷ - I_۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow Q_۱ = \left[\begin{array}{ccc:cccc} -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}$$

$$\underbrace{۱ \quad ۲ \quad ۳}_{E_{n\times L}=E_{۴\times ۳}} \quad \underbrace{۴ \quad ۵ \quad ۶ \quad ۷}_{I_{n\times n}=I_{۴\times ۴}}$$

مثال ۲۶: در گراف مثال قبل اگر ماتریس کاتست‌های اساسی به صورت $Q_۲ = [I \vdots E]$ باشد، آنگاه کدام گزینه $Q_۲$ را نمایش می‌دهد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

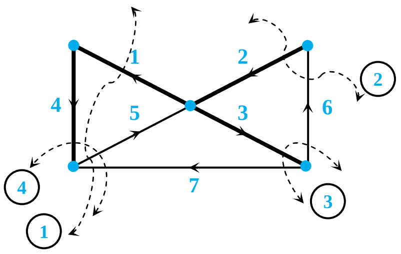
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» در صورتی که بخواهیم ماتریس $Q_۲ = [I \vdots E]$ را بدست آوریم، باید قسمت اول ماتریس $Q_۲$ ماتریس واحـد ۴×۴ باشـد. بنـابراین لینـک‌ها شامل شاخه‌های ۷ و ۶ و ۵ بوده و درخت اصلی شامل شاخه‌های ۴ و ۳ و ۲ و ۱ می‌باشد و کاتست‌های اساسی و معادلات آن به صورت زیر است:

$\{۲,۶\}\ \{۶,۳,۷\}\ \{۴,۵,۷\}\ \{۱,۵,۷\}$



$$\begin{cases} I_۱ + I_۷ - I_۵ = ۰ \\ I_۲ - I_۶ = ۰ \\ I_۳ - I_۶ - I_۷ = ۰ \\ I_۴ + I_۷ - I_۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow Q_۲ = [I \vdots E] = \left[\begin{array}{cccc:ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}$$

$$\underbrace{۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴}_{I_{۴\times ۴}} \quad \underbrace{۵ \quad ۶ \quad ۷}_{E_{۴\times ۳}}$$

روش بدست آوردن حلقه‌های اساسی و کاتست‌های اساسی با داشتن ماتریس‌های B و Q

۱ـ در صورتی که ماتریس Q یا همان ماتریس کاتست‌های اساسی را داشته باشیم، از رابطه $Q.j = ۰$ می‌توان کاتست‌های اساسی را بدست آورد. لازم به ذکر است که بردار j بردار جریان شاخه‌های مدار است.

۲ـ در صورتی که ماتریس حلقه‌های اساسی یا همان ماتریس B را داشته باشـیم، از رابطـه $B.V = ۰$ مـی‌تـوان حلقـه‌هـای اساسـی گـراف را بدسـت آورد. بدیهی است که بردار V همان بردار ولتاژ شاخه‌ها می‌باشد.

۳ـ در صورتی که ماتریس حلقه‌های اساسـی یـا همـان مـاتریس B را داشـته باشـیم و بخـواهیم کاتسـت‌هـای اساسـی گـراف را بدسـت آوریـم، بایـد ابتـدا از رابطه $Q = [-F^T \vdots I] = [E \vdots I]$، ماتریس کاتست‌های اساسی را محاسبه نموده و سپس با رابطه $Q.j = ۰$، کاتست‌های اساسی گراف را بدست آوریم.

۴ـ در صورتی که بخواهیم حلقه‌های اساسی مدار یا گراف را بدست آوریم و ماتریس Q یا همان ماتریس کاتست‌های اساسی را داشته باشیم، باید ابتدا از رابطه $B=[I\vdots -E^T]=[I\vdots F]$، ماتریس حلقه‌های اساسی مدار را محاسبه کرده و سپس با استفاده از رابطه $B.V=0$، حلقه‌های اساسی گراف را بدست آوریم.

نکته۵: در صورتی که ماتریس‌های B و Q به صورت استاندارد $[F\vdots I]$ یا $[I\vdots F]$ و $[I\vdots E]$ یا $[E\vdots I]$ نباشد، ابتدا ماتریس را به حالت استاندارد تبدیل نموده و سپس مراحل بعدی را اجرا می‌کنیم. برای تشکیل ساختار استاندارد به دنبال ستون‌هایی می‌گردیم که عدد ۱، یک بار در آنها آمده باشد و بقیه ستون عدد صفر باشد. حال ستون‌های مذکور را طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که ماتریس مربعی I تشکیل شود. در ادامه ماتریس E (یا F) نیز خود به خود ساخته می‌شود.

مثال۲۷: با فرض داشتن ماتریس حلقه‌های اساسی به صورت زیر، تعداد لینک‌ها و شاخه‌های درخت مربوطه کدام است؟

$$B=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&1\\1&-1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}$$

۱) ۴ لینک و ۳ شاخه درخت
۲) ۵ لینک و ۳ شاخه درخت
۳) ۳ لینک و ۴ شاخه درخت
۴) ۳ لینک و ۵ شاخه درخت

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا باید ماتریس B را به حالت استاندارد $B=[I\vdots F]$ تبدیل کنیم؛ لذا به دنبال ستون‌هایی می‌گردیم که عبارت ۱، یک بار در آنها باشد و بقیه ستون عدد صفر باشد. حال ستون‌های مذکور را طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که ماتریس مربعی I تشکیل شود.
با دقت در ماتریس B دیده می‌شود که گراف مذکور دارای ۴ لینک بوده و درخت آن شامل ۳ شاخه می‌باشد.

$$B=\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&-1&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1&-1\end{array}\right]$$
$$\qquad I_{4\times4}\qquad\qquad F_{4\times3}$$

مثال۲۸: در گراف مثال قبل کدام یک از گزینه‌های زیر معادلات حلقه‌های اساسی هستند؟

۱) $\begin{cases}V_1+V_5-V_7=0\\V_3-V_6=0\end{cases}$
۲) $\begin{cases}V_3+V_6=0\\V_1-V_5+V_7=0\end{cases}$
۳) $\begin{cases}V_4+V_5+V_6-V_7=0\\V_3+V_6=0\end{cases}$
۴) $\begin{cases}V_1+V_3=0\\V_4+V_5+V_6=0\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به ماتریس B و با استفاده از رابطه $B.V=0$ داریم:

$$B.V=0\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&-1&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\\V_7\end{bmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}V_1+V_5+V_7=0\\V_2-V_5-V_6=0\\V_3+V_6=0\\V_4+V_5+V_6-V_7=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}\{1,5,7\}\ ,\ \{2,5,6\}\\\{3,6\}\ ,\ \{4,5,6,7\}\end{matrix}$$

معادلات حلقه‌های اساسی

مثال۲۹: با فرض وجود ماتریس کاتست‌های اساسی Q به صورت زیر، کدامیک از گزینه‌های زیر ماتریس F در ماتریس حلقه‌های اساسی B گراف مذکور است؟

$$\mathbf{Q}=\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&-1&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

۱) $F=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&1&-1\\1&0&-1&-1\end{bmatrix}$
۲) $F=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&-1&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$
۳) $F=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\-1&0&1&0\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$
۴) $F=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&-1&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ماتریس واحد قسمت اول Q ماتریس ۴×۴ بوده و بیانگر این است که شاخه‌های درخت در گراف ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و لینک‌ها ۵ و ۶ و ۷ هستند. حال با توجه به ساختار ماتریس Q داریم:

$$Q=[I\vdots E]\quad,\quad F=-E^T\quad,\quad B=[F\vdots I]$$

$$E=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow F=-E^T=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&-1&1&-1\\1&0&-1&-1\end{bmatrix}\qquad B=[F\vdots I]=\left[\begin{array}{cccc:ccc}0&0&-1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&0&1&0\\1&0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

دقت کنید که ماتریس‌های B و Q همواره باید شروط $BQ^T = ۰$ و $QB^T = ۰$ را برآورده کنند و بنابراین در این تست ساختار B بـه شـکل $B = [F \vdots I]$ در نظر گرفته شد:

$$BQ^T = [F \vdots I]\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ E^T \end{bmatrix} = F + E^T = ۰$$

مثال۳۰: در گراف مثال قبل کدام دسته از گزینه‌های زیر جزو حلقه‌های اساسی گراف هستند؟

۱) $\{۲,۳,۴,۶\},\{۱,۲\}$
۲) $\{۳,۵\},\{۱,۳,۴,۷\}$
۳) $\{۲,۳,۴,۶\},\{۳,۲\}$
۴) $\{۱,۲\},\{۱,۳,۴,۷\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به تشکیل ماتریس B در مثال قبل و با استفاده از رابطه $B.V = ۰$، حلقه‌های اساسی گراف به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$B.V = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ V_۳ \\ V_۴ \\ V_۵ \\ V_۶ \\ V_۷ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -V_۳ + V_۵ = ۰ & \Rightarrow \{۳,۵\} \\ -V_۲ + V_۳ - V_۴ + V_۶ = ۰ & \Rightarrow \{۲,۳,۴,۶\} \\ V_۱ - V_۳ - V_۴ + V_۷ = ۰ & \Rightarrow \{۱,۳,۴,۷\} \end{cases}$$

مثال۳۱: درگراف k اگر ماتریس حلقه‌های اساسی به صورت زیر باشد، آنگاه کدام دسته از گزینه‌های زیر مربوط به کاتست‌های اساسی گراف k هستند؟

$$B = \left[\begin{array}{ccc:cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

۱) $\{۲,۳,۵\},\{۳,۷\}$
۲) $\{۳,۷\},\{۲,۱,۴\}$
۳) $\{۱,۳,۶\},\{۲,۷\}$
۴) $\{۱,۳,۵\},\{۱,۲,۶\}$

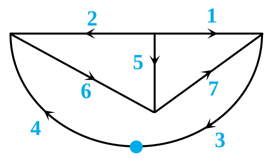
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ماتریس واحد قسمت اول B ماتریس ۳×۳ بوده و بیانگر این است که لینک‌های گراف، شاخه‌های ۳ و ۲ و ۱ و درخـت آن شـامل شاخه‌های ۴ و ۵ و ۶ و ۷ می‌باشد. حال داریم: $\mathbf{Q = [-F^T \vdots I] = [E \vdots I]}$

$$E = -F^T \Rightarrow F = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow E = -F^T = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \left[\begin{array}{ccc:cccc} ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

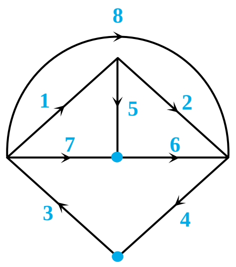
$$Q.j = ۰ \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:cccc} ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \\ j_۶ \\ j_۷ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -j_۲ - j_۳ + j_۴ = ۰ & \Rightarrow \{۲,۳,۴\} \\ -j_۱ + j_۳ + j_۵ = ۰ & \Rightarrow \{۱,۳,۵\} \\ j_۱ + j_۲ + j_۶ = ۰ & \Rightarrow \{۱,۲,۶\} \\ -j_۳ + j_۷ = ۰ & \Rightarrow \{۳,۷\} \end{cases}$$

مثال۳۲: اگر ماتریس کات‌ست اساسی یک گراف به صورت $Q = [E|I]$ نوشته شود که در آن زیر ماتریس E معلوم می‌باشد. گراف ماتریس مقابل، برابر با کدام گزینه است؟

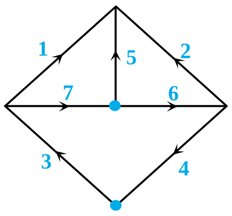
$$E = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$



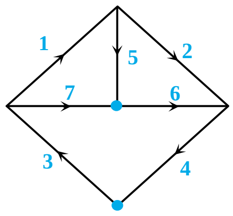
(الف)



(ب)



(ج)



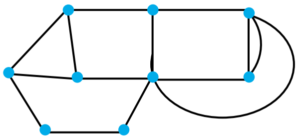
(د)

۱) الف و ب
۲) ب و ج
۳) الف و د
۴) الف و ج

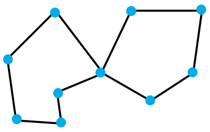
مدار دوگان

برای بررسی مفهوم مدار دوگان ابتدا باید با چند تعریف جدید در مبحث گراف آشنا شویم. این تعاریف مربوط به گراف مسطح و غیرمسطح و گراف لولادار و گراف بدون لولا خواهد بود.

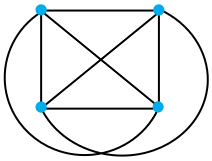
اگر در یک گراف بتوان گراف را به صورتی به دو قسمت تجزیه کرد که دو قسمت گراف در یک گره مشترک باشند، گراف لولادار و در غیر این صورت گراف بدون لولا خواهد بود. همچنین در صورتی که بتوان گرافی را روی یک صفحه به صورتی نمایش داد که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند، گراف مذکور مسطح و در غیر این صورت گراف غیرمسطح است. برای مشخص شدن تعاریف، به اشکال زیر دقت کنید:



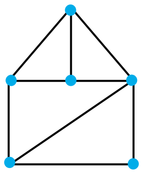
گراف بدون لولا



گراف لولادار



گراف غیرمسطح



گراف مسطح

تعریف دو شبکه دوگان

دو گراف یا دو شبکه را در صورتی دوگان می‌نامند که شرایط زیر برای آنها برقرار باشد:

۱ـ هر دو گراف مسطح و بدون لولا باشند.

۲ـ بین گره‌های گراف اول و مش‌های گراف دوم با در نظر گرفتن مش بیرونی یک تناظر یک به یک برقرار باشد.

۳ـ بین شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک برقرار باشد به صورتی که اگر در گراف اول بین دو گره یک المان مشترک موجود بود، در گراف دوم نیز مابین حلقه‌های متناظر با گره‌های مذکور، المان متناظری وجود داشته باشد.

۴ـ معادله هر شاخه از این گراف‌ها با جایگزینی زیر در گراف دوگان در شاخه متناظر بدست آید.

$\boxed{j \to V \quad , \quad V \to j}$ $\boxed{q \to \phi \quad , \quad \phi \to q}$

مراحل ترسیم مدار دوگان

برای یک گراف مسطح و بدون لولا، مراحل ترسیم دوگان گراف یا مدار به صورت زیر است:

۱ـ ابتدا درون هر مش از گراف یک گره قرار می‌دهیم و بیرون گراف در زیر آن نیز یک گره مبنا متناظر می‌کنیم.

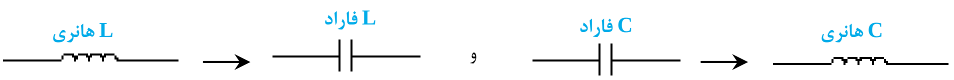
۲ـ به ازای وجود شاخه‌هایی که فقط در یک مش گراف هستند، یک شاخه بین گره درون مش و گره مبنا قرار می‌دهیم.

۳ـ به ازای هر شاخه که بین دو مش درونی در گراف وجود دارد، یک شاخه بین دو گره موجود در مش‌ها قرار می‌دهیم.

۴ـ امپدانس‌ها را به ادمیتانس و ادمیتانس‌ها را به امپدانس تبدیل می‌کنیم. همچنین عناصر سری را به عناصر موازی و عناصر موازی را به عناصر سری تبدیل می‌کنیم.

$R \to \frac{1}{R} \quad , \quad Z \to \frac{1}{Z}$

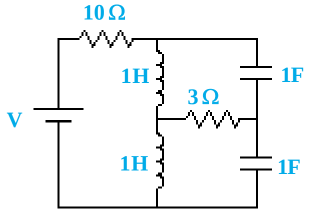
۵ـ سلف‌ها را به خازن و خازن‌ها را به سلف تبدیل می‌کنیم.



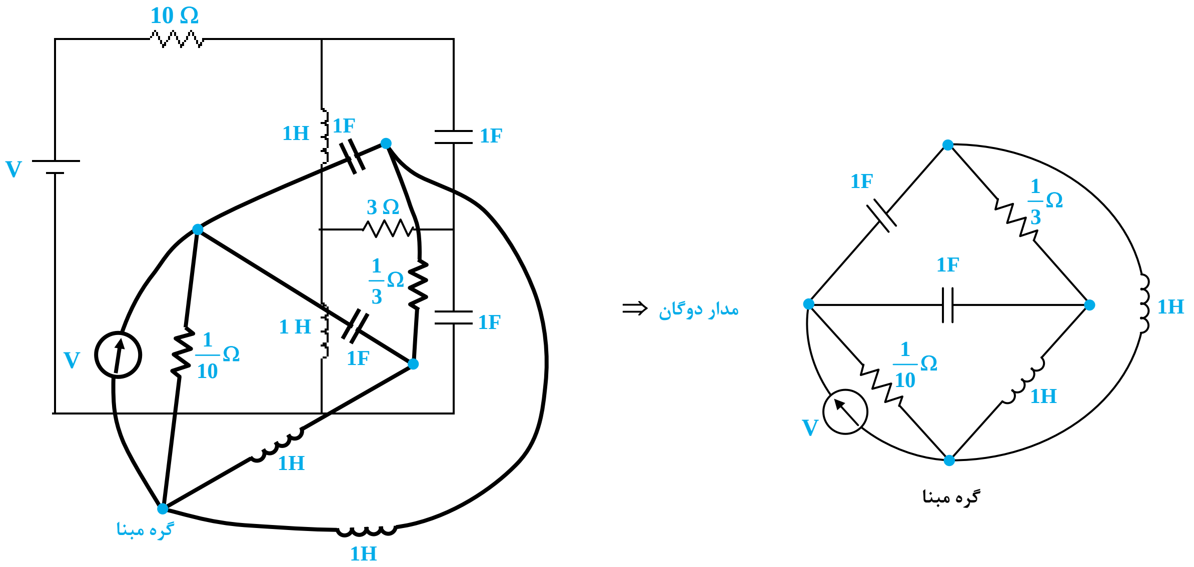
۶ـ منابع جریان را به منابع ولتاژ و منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم. (به جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان با همان مقدار منبع ولتاژ قرار می‌دهیم و برعکس)

پلاریته منبع ولتاژ و جهت منبع جریان دوگان و همچنین ولتاژ و جریان دوگان سایر شاخه‌ها باید با تحلیل‌های مداری (تحلیل جریان مش، ولتاژ گره و ...) مشخص گردد. در این راستا مهمترین نکته‌ای که باید مدنظر قرار گیرد این است که جریان مش‌ها در مدار اصلی برابر ولتاژ گره‌های متناظر در مدار دوگان است.

مثال ۳۷: دوگان مدار زیر را ترسیم کنید.

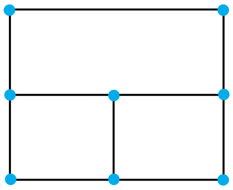


☑ **پاسخ:** برای ترسیم مدار دوگان، ابتدا درون هر مش یک گره در نظر می‌گیریم و سپس بقیه مراحل ذکر شده در قبل را اجرا می‌کنیم.

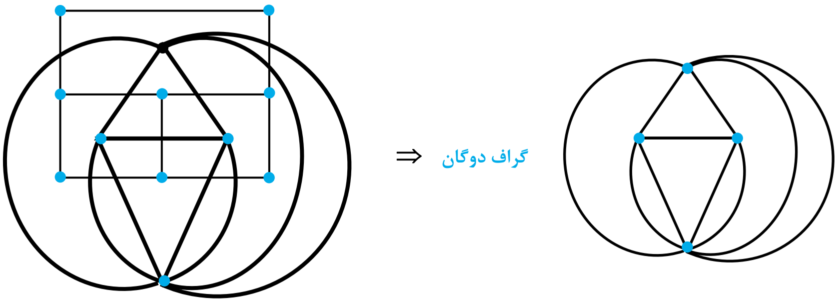


دقت کنید با توجه به این که منبع ولتاژ V یک جریان مثبت (ساعتگرد) در مش سمت چپ مدار اصلی به وجود می‌آورد، منبع جریان دوگان آن باید یک ولتاژ مثبت در گره متناظر تولید کند و از این رو جهت آن از گره مبنا به سمت گره متناظر در نظر گرفته شده است.

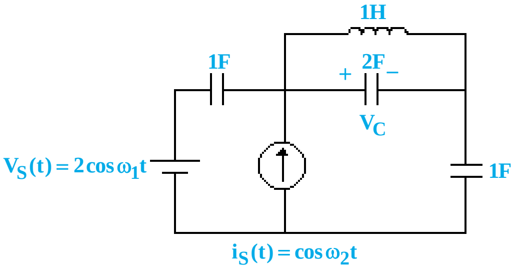
مثال۳۸: دوگان گراف زیر را ترسیم کنید.



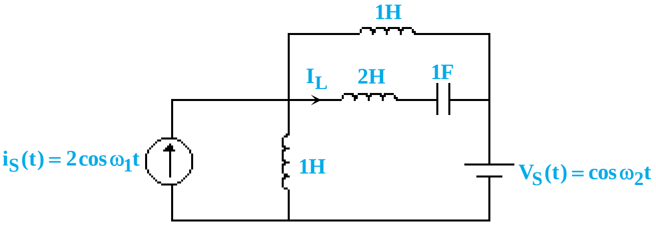
☑ **پاسخ:** برای ترسیم مدار دوگان، درون هر مش یک گره در نظر می‌گیریم و مطابق با مراحل ذکر شده در قبل عمل می‌کنیم.



مثال۳۹: در مدار شکل (۱)، مقدار جریان سلف ۲H در جهت نشان داده شده و در حالت دائمی برابر $۲\cos\omega_۱ t + \cos\omega_۲ t$ است. مقدار ولتاژ خازن ۲F در مدار شکل (۲) در حالت دائمی چقدر خواهد بود؟



(2)



(1)

۱) $V_C = ۲\cos\omega_۱ t + \cos\omega_۲ t$

۲) $V_C = -۲\cos\omega_۲ t + \cos\omega_۱ t$

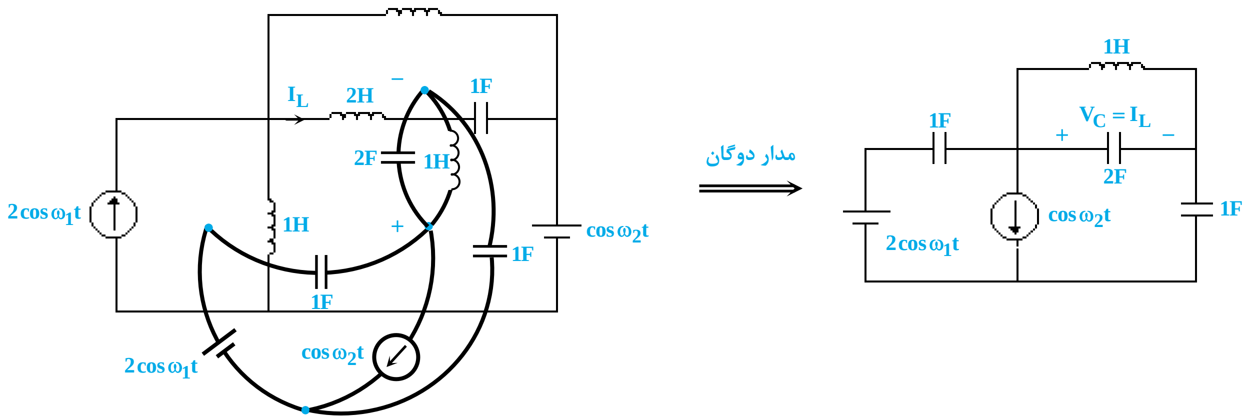
۳) $V_C = ۲\cos\omega_۱ t - \cos\omega_۲ t$

۴) $V_C = ۲\cos\omega_۲ t + \cos\omega_۱ t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مدار اول سه سلف و یک منبع جریان داریم که تشکیل گره داده‌اند و در مدار دوم سه خازن و یک منبع ولتاژ که تشکیل حلقه داده‌اند. همچنین یک خازن و منبع ولتاژ در شکل اول داریم که متعاقباً یک سلف و منبع جریان در شکل دوم نیز قرار گرفته است. اگر مدار دوگان شکل (۱) را رسم کنیم به شکل (۲) خواهیم رسید، لذا نکته سؤال در یافتن رابطه دوگانی دو مدار با یکدیگر است. بر اساس روابط دوگانی ولتاژ خازن در مدار دوگان برابر جریان سلف در مدار اصلی است. همچنین سلف و خازن مطرح شده در سؤال دقیقاً دوگان هم هستند، لذا ولتاژ خازن V_C همان I_L خواهد بود. البته این به معنای صحیح بودن گزینه (۱) نیست، زیرا جهت منبع جریان در مدار دوگان با جهت منبع جریان در مدار مورد سؤال یکسان نیست؛ با این حال به راحتی با در نظر گرفتن قانون جمع آثار می‌توان ولتاژ خازن را محاسبه کرد:

$$V_C = ۲\cos\omega_۱ t - \cos\omega_۲ t$$

بنابراین گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.



تعیین پلاریته منابع دوگان و ولتاژ خازن:

گراف مدار (۱) و دوگان آن را در نظر بگیرید. جریان I_L در این گراف برابر جریان مش (۲) منهای جریان مش (۳) است. ولتاژ V_C نیز برابر ولتاژ گره (۲) منهای ولتاژ گره (۳) در مدار دوگان است، پس $V_C = I_L$. از طرفی منبع ولتاژ موجود در مدار (۱) جریانی در خلاف جهت I_L در سلف ۲ هانری تولید می‌کند؛ بنابراین دوگان آن در مدار (۲) باید ولتاژی با پلاریته مخالف V_C در خازن ۲ فارادی به وجود آورد؛ از این رو منبع جریان در مدار دوگان از پلاریته مثبت V_C خارج شده است. با استدلال مشابهی می‌توان پلاریته درست منبع ولتاژ در مدار دوگان را تعیین کرد.