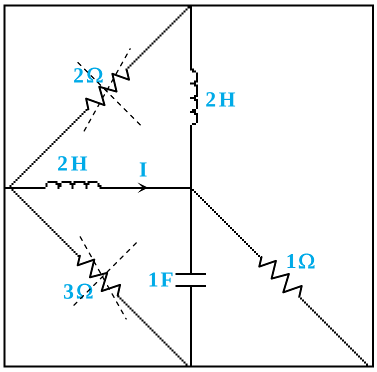
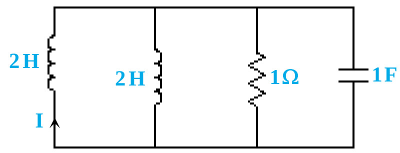
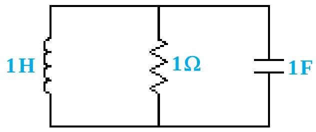
پاسخ: گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل ولتاژ را با اتصال کوتاه و منابع مستقل جریان را با مدار باز جایگزین می‌کنیم. در این حالت مقاومت ۲ اهمی و ۳ اهمی موازی با اتصال کوتاه حذف می‌شوند و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



$\Rightarrow$

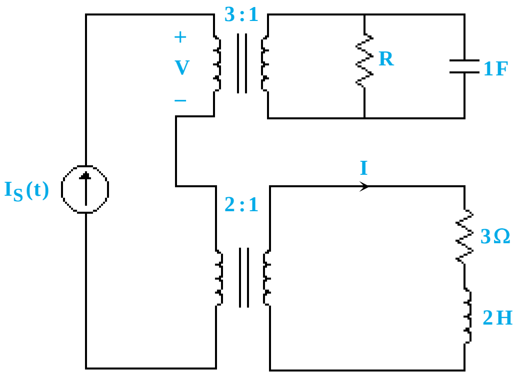


در این حالت مدار به صورت یک RLC موازی است. بنابراین فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مربوط به هر متغیر دلخواه مدار را می‌توانیم از معادله مشخصه مدار RLC موازی که در فصل مدارهای مرتبه دوم یاد گرفتیم، محاسبه کنیم. دقت کنید که با نوشتن یک KCL در گره بالای مدار نیز می‌توان معادله مشخصه مدار و فرکانس‌های طبیعی متغیر I را بدست آورد.



$$\Rightarrow \begin{cases} S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}=0 \\ S^2+\frac{1}{1\times1}S+\frac{1}{1\times1}=0 \end{cases} \Rightarrow S^2+S+1=0 \Rightarrow S_1,S_2=-\frac{1}{2}\pm j0/86$$

مثال ۹: در مدار زیر R بر حسب اهم کدام باشد تا فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد؟



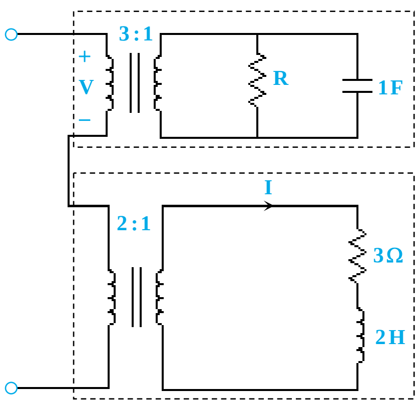
۱) $\frac{9}{2}$

۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{10}{3}$

۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه مدار شامل دو قسمت مجزا و مرتبه اول است، می‌توان فرکانس طبیعی مربوط به هر متغیر را در هر قسمت به طور جداگانه محاسبه کرد. در این حالت انتخاب نوع متغیر در هر قسمت تأثیری در فرکانس طبیعی ندارد و فرکانس طبیعی بدست آمده برای هر قسمت، به ازای انتخاب هر نوع متغیر ولتاژ و یا جریان یکسان می‌باشد. حال ابتدا منبع جریان مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم و معادله مشخصه هر قسمت را جداگانه می‌نویسیم. در این حالت با توجه به این که انتخاب متغیر در هر قسمت اختیاری است، نیازی به انتقال المان‌ها به سمت اولیه ترانس‌ها نمی‌باشد.



$$\Rightarrow \begin{cases} S_1+\frac{1}{RC}=0 \\ S_1+\frac{1}{R}=0 \Rightarrow S_1=-\frac{1}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_2+\frac{R}{L}=0 \\ S_2+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow S_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

با توجه به این که در صورت سؤال گفته شده که فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد، داریم: $S_1=-\frac{1}{R} \quad , \quad S_2=-\frac{3}{2}$

$$S_1=3S_2 \Rightarrow -\frac{1}{R}=3\times(-\frac{3}{2}) \Rightarrow \mathbf{R=\frac{2}{9}\Omega}$$

سلف‌های سری با مقادیر معادلشان جایگزین شده باشند اما خازن‌های سری و سلف‌های موازی بدون ساده‌سازی در مجموعه متغیرهای حالت سیستم وارد شده باشند). با این تفاسیر می‌توان فرکانس‌های طبیعی مدار را به طور جامع‌تر به شکل‌های مختلف زیر تعریف نمود:

۱ـ مجموعه کلیه فرکانس‌های طبیعی تمامی متغیرهای شبکه یا متناظراً مجموعه کلیه قطب‌های تمامی توابع شبکه

۲ـ مجموعه ریشه‌های دترمینان ماتریس‌های توصیف کننده شبکه همچون ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانس به همراه فرکانس‌های طبیعی صفر شبکه

۳ـ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم

روش بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کل مدار

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار، ابتدا لازم است که معادله مشخصه ساده شده مدار را بدست آوریم. ریشه‌های این معادله مشخصه، همان فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار می‌باشند. برای بدست آوردن معادله مشخصه و به دنبال آن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ کلیه منابع مستقل ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم.

۲ـ کلیه منابع مستقل جریان را مدار باز می‌کنیم.

۳ـ جهت ساده‌تر شدن محاسبات مدار را ساده می‌کنیم؛ در این ساده‌سازی می‌توان خازن‌های سری و موازی و سلف‌های سری و موازی را با مقادیر معادلشان جایگزین کرد.

۴ـ با استفاده از قوانین حلقه یا گره و یا قضایای تونن و نورتن، ماتریس امپدانس و یا ماتریس ادمیتانس و یا ماتریس A در معادلات حالت را بدست می‌آوریم.

۵ـ با صفر قرار دادن دترمینان یکی از ماتریس‌های زیر، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار بدست می‌آید.

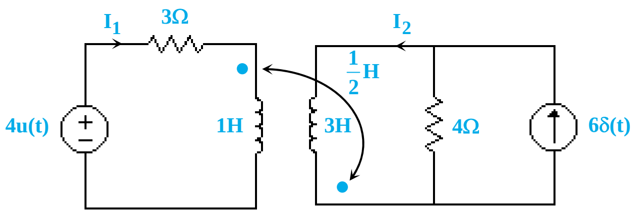
$$\det[Z(S)]=۰\ ,\ \det[Y(S)]=۰\ ,\ \det[SI-A]=۰$$

۶ـ ریشه‌های معادله مشخصه بدست آمده، همان فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار هستند.

تذکر۱: دقت داشته باشید که ممکن است میان ریشه‌های بدست آمده مقادیر صفر نیز موجود باشد؛ در این حالت در صورتی که از ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانس برای محاسبه معادله مشخصه استفاده شده، فرکانس طبیعی صفر بدست آمده مشخصه ذاتی یک یا تعدادی از متغیرهای شبکه بوده که از وجود منابع وابسته نشأت گرفته و ناشی از وجود حلقه سلفی یا کاتست خازنی نمی‌باشد.

تذکر۲: اگر در محاسبه ماتریس A و مقادیر ویژه آن، ساده‌سازی خازن‌های سری و سلف‌های موازی صورت گیرد، فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار همراه با تعدادی از فرکانس‌های طبیعی صفر بدست خواهد آمد که این تعداد حداقل برابر مجموع تعداد کاتست‌های خازنی و حلقه‌های سلفی در مدار ساده شده نهایی است. همچنین اگر ماتریس حالت سیستم بدون این ساده‌سازی‌ها محاسبه گردد، مقادیر ویژه حاصله، کل فرکانس‌های طبیعی سیستم اعم از فرکانس‌های صفر و غیرصفر خواهد بود.

مثال۱۱: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



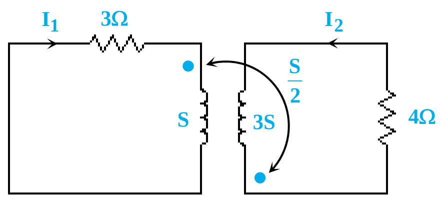
۱) $S_۱=-۳/۴\ ,\ S_۲=-۲$

۲) $S_۱=-۳/۴\ ,\ S_۲=-۱/۲$

۳) $S_۱=-۲\ ,\ S_۲=-۲/۲$

۴) $S_۱=-۱/۴\ ,\ S_۲=-۲$

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم و ماتریس امپدانس را بدست می‌آوریم. لازم به ذکر است که در این حالت منابع مستقل مدار غیرفعال می‌شوند. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس Z، معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم.



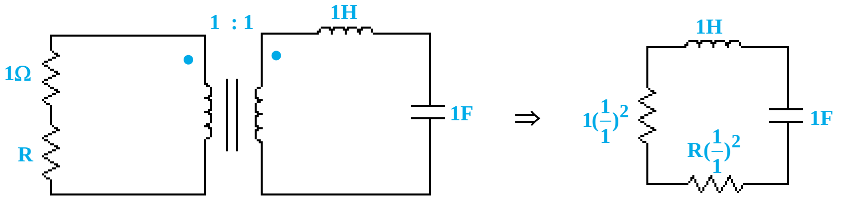
با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:
$$۳I_۱+SI_۱-\frac{S}{۲}I_۲=۰$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:
$$۴I_۲+۳SI_۲-\frac{S}{۲}I_۱=۰$$

با توجه به معادلات بالا، ماتریس امپدانس به صورت زیر تشکیل می‌شود. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس امپدانس Z، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار بدست می‌آید.

$$Z=\begin{bmatrix} ۳+S & -\frac{S}{۲} \\ -\frac{S}{۲} & ۴+۳S \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳+S & -\frac{S}{۲} \\ -\frac{S}{۲} & ۴+۳S \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow (S+۳)(۴+۳S)-\frac{S^۲}{۴}=۰ \Rightarrow ۲/۷۵S^۲+۱۳S+۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱=-۳/۴ \\ S_۲=-۱/۲ \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به وجود ترانسفورمر با نسبت (۱:۱) از مقاومت ۳- اهمی جریان عبور نمی‌کند، زیرا ولتاژ در دو طرف ترانسفورمر یکسان بوده و $V=0$ است و در نتیجه $I=\frac{-V}{-3}=0$ می‌شود. حال منبع ولتاژ V را با اتصال کوتاه و منبع جریان I را با مدار باز مدل می‌کنیم. لازم بـه ذکـر است که مقاومت ۳- اهمی نیز حذف می‌شود. با استفاده از قانون انعکاس امپدانس مقاومت‌های 1Ω و R به ثانویـه تـرانس منتقـل مـی‌شـود و معادلـه مشخصـه مدار RLC سری به صورت زیر خواهد شد.



$$S^2+2\alpha S+\omega_0^2=0$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{1\times 1}=1(\frac{rad}{sec})^2$$

$$2\alpha=\frac{1+R}{L}=\frac{1+R}{1}=1+R \Rightarrow S^2+(1+R)S+1=0$$

حال اگر $S=-1$ فرکانس طبیعی باشد، باید در معادله بالا صادق باشد. لذا داریم:

$$(-1)^2+(1+R)(-1)+1=0 \Rightarrow -1-R+2=0 \Rightarrow \mathbf{R=1\Omega}$$

مثال۲۱: **معادلات حالت یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است. پاسخ ضربه واحد برای ولتاژ خازن کدام گزینه می‌تواند باشد؟**

$$\begin{bmatrix}\frac{dV_C}{dt}\\ \frac{dI_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ I_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}E(t)$$

۱) $V_C(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}$

۲) $V_C(t)=(K_1+K_2t)e^{-t}$

۳) $V_C(t)=Ke^{-t}\cos(2t+\theta)$

۴) $V_C(t)=K_1+K_2te^{-2t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم که با داشتن ماتریس حالت سیستم یا A، می‌توان فرکانس‌های طبیعی سیستم را از رابطه $\det[SI-A]=0$ محاسبه کرد و با توجه به نوع ریشه‌های بدست آمده، فرم پاسخ مدار را حدس زد. حال داریم:

$$[SI-A]=S\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S & 2\\ -1 & S+3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}S & 2\\ -1 & S+3\end{bmatrix}=0 \Rightarrow S(S+3)+2=0 \Rightarrow S^2+3S+2=0 \Rightarrow S_1=-1 \quad S_2=-2$$

با توجه به ریشه‌های بدست آمده فرم پاسخ به صورت حالت فوق میرا است. بنابراین فقط گزینه «۱» صحیح است.

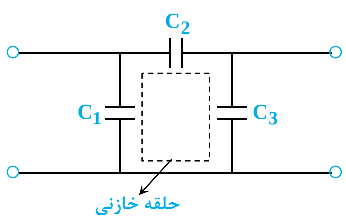
درجه یا مرتبه مدار

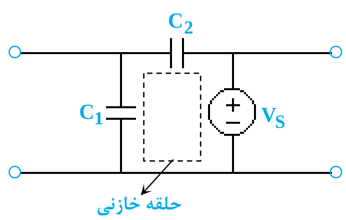
درجه یا مرتبه یک مدار برابر با تعداد شرایط اولیه مستقل موجود در آن است. با توجه به این که شرایط اولیه مدار شامل ولتاژ اولیه خازن‌ها و جریـان اولیـه سلف‌ها است، می‌توان گفت که درجه یا مرتبه مدار برابر با تعداد المان‌های ذخیره‌کننده مـستقل موجـود در مـدار یـا بـه عبـارتی همـان تعداد سـلف‌هـا و خازن‌های مدار است. اما در برخی شرایط برخی از خازن‌ها یا سلف‌های مدار را نمی‌توان به عنوان یک المان ذخیره‌کننده مستقل در مـدار فـرض کـرد و در این حالت‌ها نباید سلف یا خازن مورد نظر را برای شمارش مرتبه مدار در نظر گرفت. حال این موارد را به طور کامل توضیح می‌دهیم.

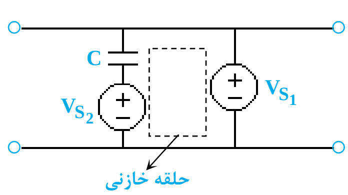
مراحل محاسبه درجه یا مرتبه مدار به قرار زیر است:

۱) ابتدا بدون تغییر یا ساده‌سازی مدار، تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار را شمارش می‌کنیم.

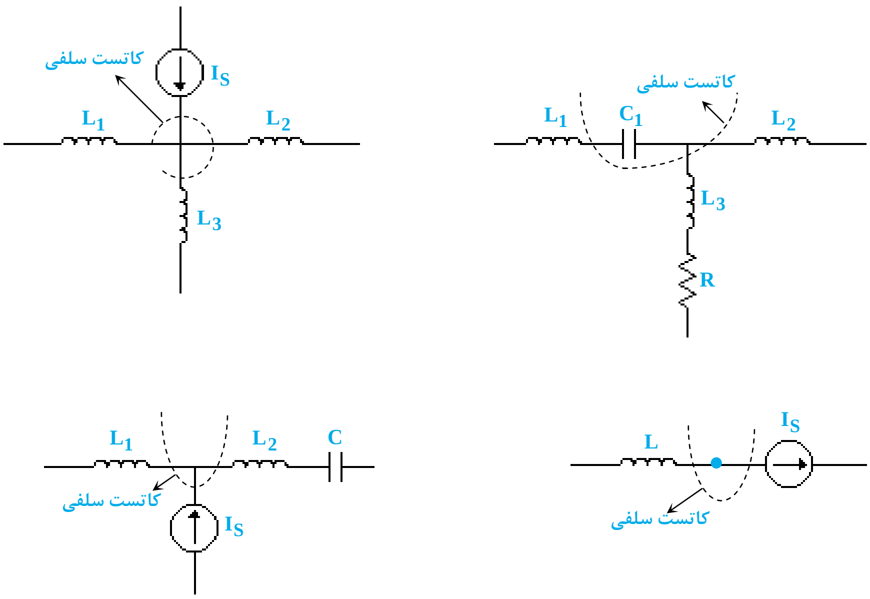
۲) در صورت وجود حلقه خازنی در مدار می‌توان ولتاژ یکی از خازن‌ها را بر حسب ولتاژ خازن‌های دیگر موجود در حلقه نوشت. لذا ولتاژ یکی از خازن‌هـای حلقه نسبت به بقیه ولتاژهای خازن‌ها دارای استقلال نمی‌باشد. بنابراین در صورت وجود حلقه خازنی در مدار به ازای هـر حلقـه خـازنی یکـی از تعـداد شمارش شده برای سلف‌ها و خازن‌ها کم می‌شود. در اشکال زیر چند نمونه حلقه خازنی را آورده‌ایم. دقت کنید که وجود منبع ولتـاژ مـستقل در حلقـه خازنی موردی ندارد و همچنان حلقه خازنی خواهیم داشت.



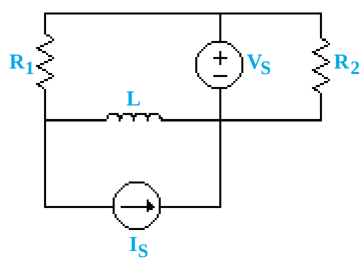




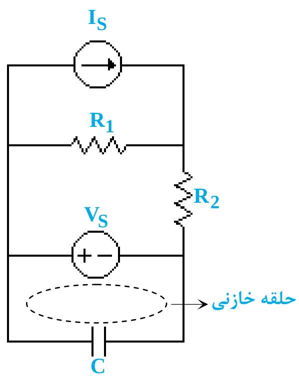
۳) در صورت وجود یک کاتست سلفی در مدار، می‌توان جریان یکی از سلف‌های موجود در کاتست را بر حسب جریان بقیه سلف‌ها نوشت. در این حالت جریان سلف مورد نظر، دارای استقلال نسبت به بقیه جریان‌های سلف‌های موجود در کاتست نمی‌باشد. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت که به ازای هر کاتست سلفی در مدار، از تعداد شمارش شده سلف‌ها و خازن‌ها برای مرتبه مدار، یکی کم می‌شود. دقت کنید که وجود منابع جریان مستقل در کاتست‌های سلفی اشکالی ندارد و همچنان کاتست سلفی خواهیم داشت. در اشکال زیر چند نمونه کاتست سلفی را آورده‌ایم.



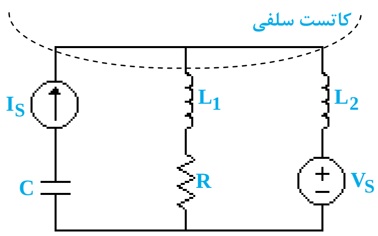
برای درک بهتر مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید. در مدار (۱) درجه یا مرتبه مدار یک می‌باشد، زیرا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی یک بوده و حلقه خازنی یا کاتست سلفی نیز در مدار وجود ندارد. در مدار (۲) یک خازن وجود دارد، ولی به علت وجود حلقه خازنی در مدار، مرتبه مدار صفر است. مدار (۳) شامل دو سلف و یک خازن است، ولی به علت وجود یک کاتست سلفی، از تعداد ۳ المان ذخیره‌کننده انرژی، یک واحد کم می‌شود و مدار مرتبه دو می‌باشد.



مدار (۱)

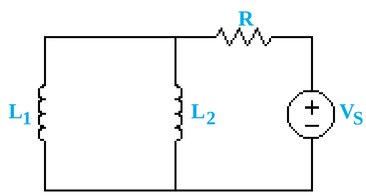


مدار (۲)

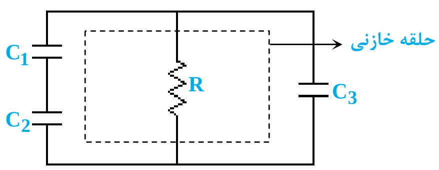


مدار (۳)

در مدار (۴) دو سلف وجود دارد و به علت عدم وجود حلقه خازنی و کاتست سلفی، مدار مرتبه دو می‌باشد. در مدار (۵) سه خازن وجود دارد، ولی به علت وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یکی کم می‌شود و مدار از مرتبه دو می‌باشد.

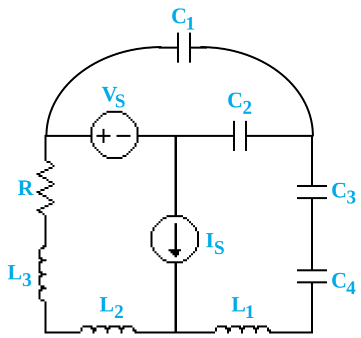


مدار (۴)



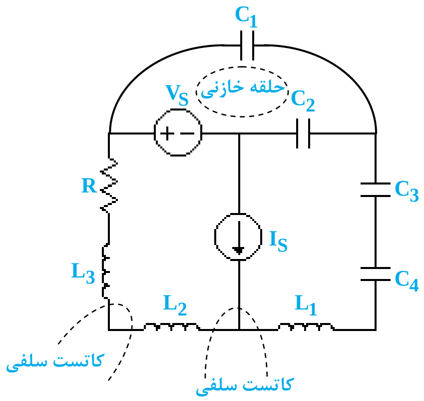
مدار (۵)

مثال ۲۲: مرتبه مدار زیر کدام است؟

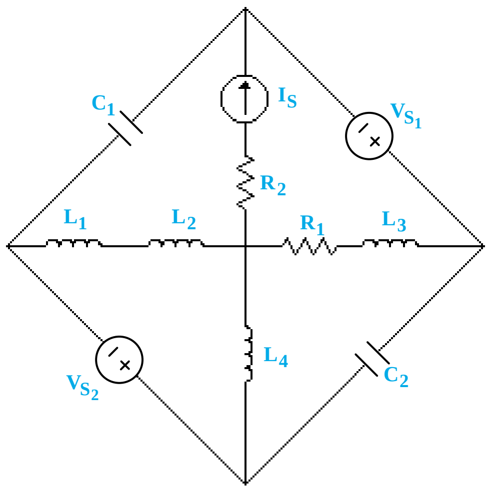


۱) ۷
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن، در مدار، ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. به علت وجود یک حلقه خازنی و دو کاتست سلفی از این تعداد، ۳ عدد کم می‌شود. لذا مرتبه مدار برابر با عدد ۴ می‌باشد.

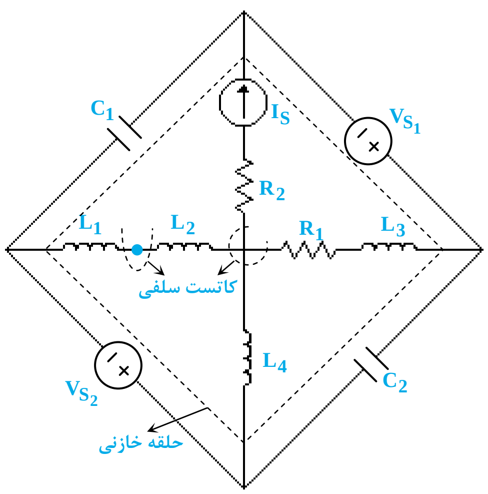


مثال ۲۳: در مدار زیر تعداد شرایط اولیه مستقل کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها در مدار ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود دو کاتست سلفی و یک حلقه خازنی از تعداد شمارش شده ۳ عدد کم می‌شود. بنابراین مدار از مرتبه ۳ می‌باشد. تعداد شرایط اولیه مستقل در مدار برابر با مرتبه مدار است، بنابراین این تعداد نیز برابر با ۳ می‌باشد.



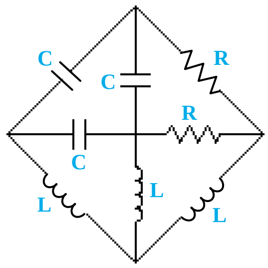
روش بدست آوردن تعداد فرکانس‌های طبیعی در مدار

برای بدست آوردن تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی که همان سلف‌ها و خازن‌ها باشند را شمارش می‌کنیم. برای شمارش خازن‌ها و سلف‌ها به این نکته دقت کنید که مدار نباید ساده شود و سلف‌ها و خازن‌های سری و موازی معادل‌گذاری نشوند. حال در ازای وجود هر حلقه خازنی و هر کاتست سلفی در مدار، از تعداد فوق یکی کم خواهد شد. لازم به ذکر است که در صورتی که ولتاژ یک خازن به جریان سلف یا ولتاژ خازن دیگری وابسته باشد، از تعداد فرکانس‌های طبیعی یکی کم می‌شود. همچنین اگر جریان یک سلف به جریان سلف دیگری و یا به ولتاژ خازن دیگری وابسته باشد، باز از تعداد فرکانس‌های طبیعی یکی کم خواهد شد. مطالب فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

(تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار) = (تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی) − (تعداد کاتست‌های سلفی) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد خازن‌ها یا سلف‌های غیرمستقل)

نکته۶: تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار برابر با مرتبه مدار و برابر با تعداد متغیرهای حالت موجود در مدار است.

مثال۲۴: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار کدام است؟

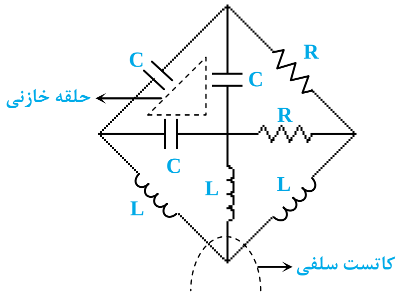


۱) ۶

۲) ۵

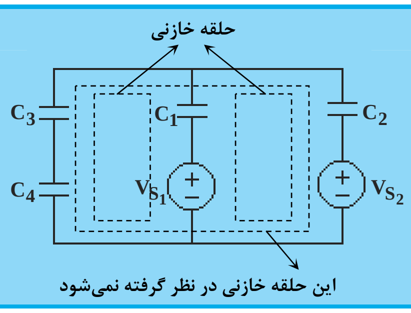
۳) ۴

۴) ۳

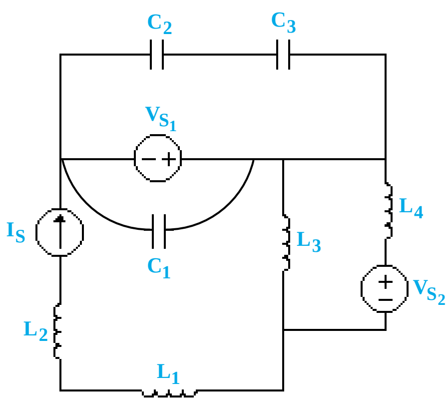


پاسخ: گزینه «۳» با توجه به شکل، در مدار، ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد، ولی به علت وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی، از این ۶ عدد ۲ تا کم می‌شود و تعداد فرکانس‌های طبیعی در مدار ۴ عدد خواهد بود.

نکته۷: در صورتی که درون یک حلقه خازنی بزرگ، بیش از دو حلقه خازنی مستقل وجود داشته باشد، حلقه خازنی بزرگ را در نظر نمی‌گیریم، زیرا معادله حلقه خازنی بزرگ از ترکیب معادلات حلقه‌های خازن‌های درونی قابل محاسبه بوده و نسبت به آنها دارای استقلال خطی نیست.



مثال۲۵: تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟



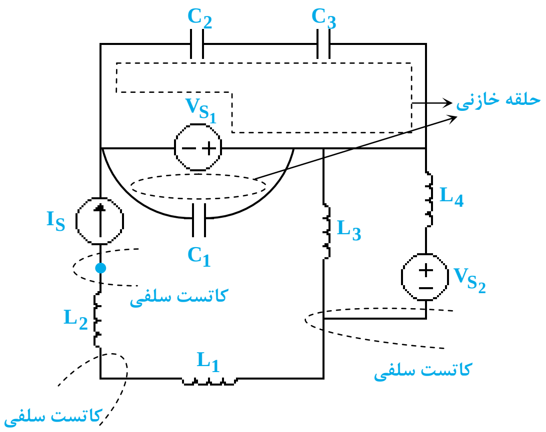
۱) ۳

۲) ۵

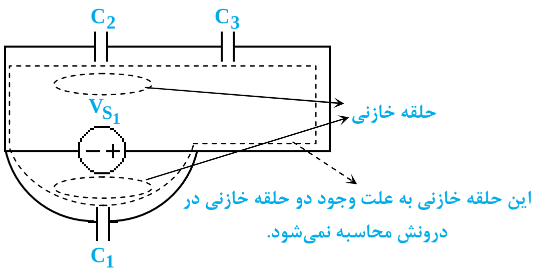
۳) ۷

۴) ۲

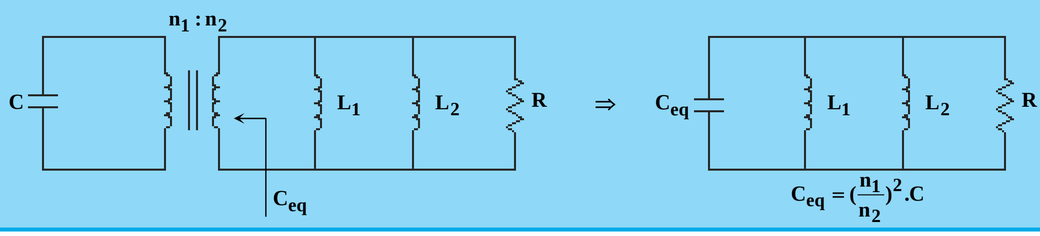
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار را شمارش می‌کنیم. با توجه به مدار، تعداد ۷ سلف و خازن وجود دارد. دقت کنید نباید هیچ نوع ساده‌سازی و معادل‌گذاری برای سلف‌ها و خازن‌های سری و موازی انجام شود. با توجه به وجود دو حلقه خازنی و ۳ کاتست سلفی، از عدد ۷، ۵ واحد کم می‌شود. بنابراین در مدار ۲ فرکانس طبیعی وجود دارد.



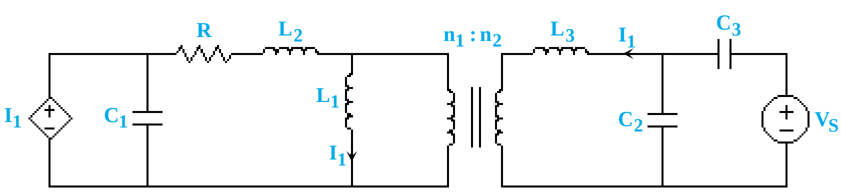
دقت کنید مطابق با نکته گفته شده، حلقه شامل خازن‌های C_1، C_2 و C_3 را به عنوان حلقه خازنی در نظر نمی‌گیریم زیرا درون این حلقه، دو حلقه خازنی مستقل وجود دارد.



نکته ۸: در صورتی که مدار دارای ترانسفورمر باشد، برای شمارش تعداد فرکانس‌های طبیعی، سلف‌های موجود در ترانسفورمر را لحاظ نمی‌کنیم. دقت کنید که می‌توانید با انتقال امپدانس‌ها از ثانویه به سمت اولیه و یا برعکس، ترانسفورمر را از مدار خارج کنید. به مثال زیر توجه کنید. در این مثال با انتقال خازن به سمت راست ترانس، یک مدار RLC موازی ایجاد می‌شود که می‌توان به سادگی فرکانس‌های طبیعی آن را بدست آورد.

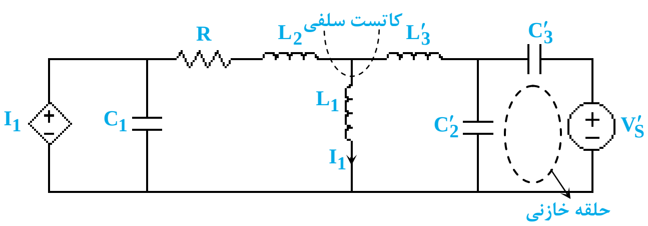


مثال ۲۶: در مدار زیر تعداد متغیرهای حالت مستقل مدار کدام است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۴

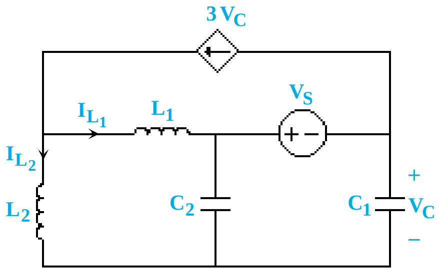
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا تمام المان‌های سمت راست مدار را به سمت چپ ترانسفورمر منتقل می‌کنیم. دقت کنید برای شمارش فرکانس‌های طبیعی، مقدار المان‌ها مهم نیست، بنابراین نیازی به محاسبه مقدار هر المان با قانون انعکاس امپدانس نمی‌باشد.



حال با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها، تعداد ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی در مدار وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه خازنی، از عدد ۶، دو واحد کم می‌شود. همچنین با توجه به این که ولتاژ خازن C_1 به جریان سلف L_1 وابسته است، این خازن نیز نباید در نظر گرفته شود. بنابراین در مدار ۳ فرکانس طبیعی وجود دارد.

نکته۹: ممکن است منابع وابسته در مدار باعث ایجاد وابستگی خطی بین متغیرهای حالت مدار شوند. در این حالت مرتبه مدار یا همان تعداد فرکانس‌های طبیعی، به تعداد وابستگی‌های ایجاد شده کم می‌شود. بنابراین در صورت وجود منابع وابسته در مدار، برای محاسبه تعداد فرکانس‌های طبیعی این مورد حتماً باید در نظر گرفته شود.

مثال۲۷: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر با کدام گزینه است؟

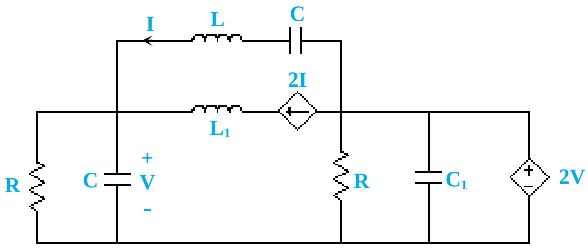


۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی در مدار ۴ عدد می‌باشد. به علت وجود یک حلقه خازنی شامل C_1 و C_2 و V_S از این تعداد یک واحد کم می‌شود. علاوه بر این اگر در گره سمت چپ مدار KCL بزنیم، داریم: $I_{L_1} + I_{L_2} = 3V_C$

حال با توجه به این که رابطه خطی بین ۳ متغیر حالت وجود دارد، جریان یکی از سلف‌ها از مجموعه متغیرهای حالت حذف می‌شود. بنابراین از تعداد ۴ عدد سلف و خازن، یک عدد به علت وجود حلقه خازنی و یک عدد به علت رابطه خطی بین ۳ متغیر حالت مدار کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس طبیعی است.

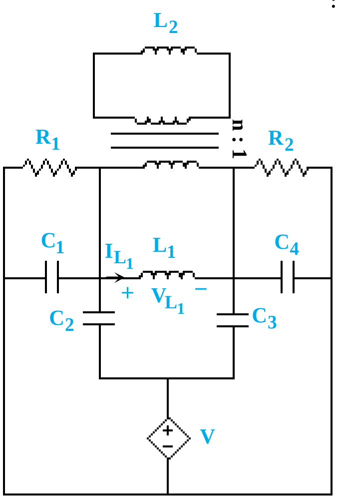
مثال۲۸: تعداد متغیرهای مستقل حالت در مدار زیر کدام است؟



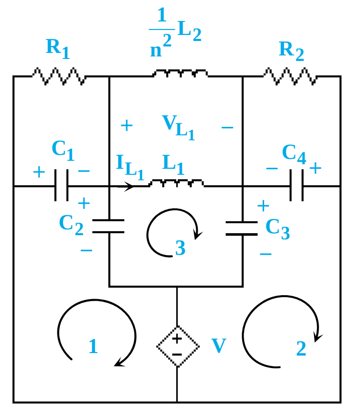
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» با شمارش اولیه تعداد خازن‌ها و سلف‌ها ۵ المان ذخیره‌کننده انرژی دیده می‌شود. با دقت در مدار مشاهده می‌شود که ولتاژ خازن سمت راست توسط منبع وابسته‌ای به ولتاژ خازن دیگری مربوط است و این امر باعث می‌شود که ولتاژ این خازن دارای استقلال نباشد و لذا باید یکی از فرکانس‌های طبیعی کم شود. همچنین دیده می‌شود که جریان سلف L_1 توسط منبع وابسته‌ای به جریان سلف دیگری وابسته است. لذا جریان سلف مذکور نیز دارای استقلال خطی نمی‌باشد و نمی‌توان آن را به عنوان متغیر حالت برگزید. بنابراین از مرتبه مدار باز یکی کم می‌شود. در انتها می‌توان گفت که مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی بوده و لذا تعداد متغیرهای حالت که برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار است، برابر عدد ۳ می‌باشد.

مثال۲۹: در مدار زیر با تغییر منبع وابسته از $V = V_{L_1}$ به $V = I_{L_1}$ درجه مدار (تعداد فرکانس‌های طبیعی):



۱) تغییر نمی‌کند.
۲) از پنج به چهار تغییر می‌کند.
۳) از چهار به پنج تغییر می‌کند.
۴) از سه به چهار تغییر می‌کند.



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در صورتی که $V = V_{L_1}$ باشد، به ترتیب در حلقه‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\text{حلقه ۱} \Rightarrow V_{C_1} + V_{C_2} + V_{L_1} = 0 \qquad (1)$$

$$\text{حلقه ۲} \Rightarrow V_{L_1} + V_{C_3} + V_{C_4} = 0 \qquad (2)$$

$$\text{حلقه ۳} \Rightarrow V_{C_2} - V_{C_3} - V_{L_1} = 0 \qquad (3)$$

از (۱) داریم:

$$V_{L_1} = -(V_{C_1} + V_{C_2})$$

که اگر در (۳) جایگزین کنیم، داریم:

$$V_{C_2} - V_{C_3} + V_{C_1} - V_{C_2} = 0 \Rightarrow -V_{C_3} + V_{C_1} = 0 \qquad (4)$$

و از (۲) داریم:

$$V_{L_1} = -(V_{C_3} + V_{C_4})$$

که اگر در (۳) جایگزین کنیم:

$$V_{C_2} - V_{C_3} + V_{C_3} + V_{C_4} = 0 \Rightarrow V_{C_2} + V_{C_4} = 0 \qquad (5)$$

از (۴) و (۵) دو وابستگی خطی بین ولتاژ خازن‌ها به دست می‌آید. بنابراین از تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی ۲ واحد کم کرده و داریم:

$$\text{تعداد فرکانس‌های طبیعی با } V = V_L \Rightarrow 6 - 2 = 4$$

در صورتی که $V = I_{L_1}$ باشد، با نوشتن KVL در حلقه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\text{حلقه ۱} \Rightarrow V_{C_1} + V_{C_2} + I_{L_1} = 0$$

$$\text{حلقه ۲} \Rightarrow I_{L_1} + V_{C_3} + V_{C_4} = 0$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود وابستگی خطی بین متغیرهای حالت یعنی ولتاژهای خازن‌ها و جریان سلف L_1 وجود دارد که در این صورت ۲ واحد از تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی باید کم شود تا تعداد فرکانس‌های طبیعی بدست آید:

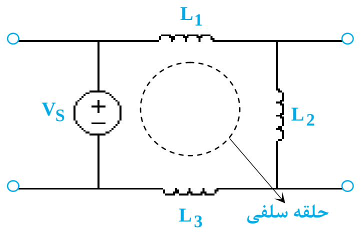
$$\text{تعداد فرکانس‌های طبیعی با } V = I_L \Rightarrow 6 - 2 = 4$$

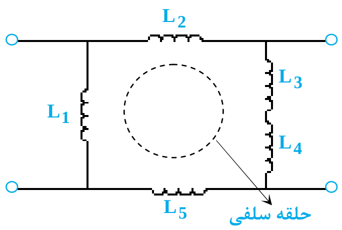
درجه مدار در هر دو حالت برابر است و با تغییر منبع وابسته تغییری نمی‌کند. پس گزینه (۱) صحیح است.

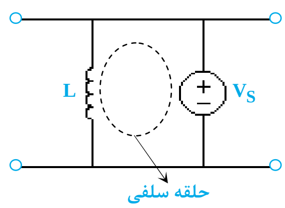
فرکانس‌های طبیعی صفر مدار

همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم، فرکانس‌های طبیعی موجود در مدار به دو دسته فرکانس‌های طبیعی صفر و فرکانس‌های طبیعی غیرصفر تقسیم‌بندی می‌شوند. عواملی که در مدار باعث ایجاد فرکانس‌های طبیعی صفر می‌شوند به قرار زیر هستند:

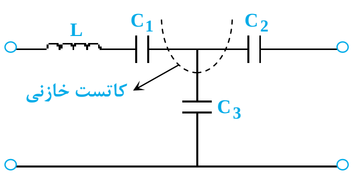
۱) وجود حلقه سلفی در مدار: در صورتی که در مدار حلقه سلفی باشد، به ازای هر حلقه سلفی یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد. دقت کنید که وجود منابع ولتاژ مستقل در حلقه سلفی اشکالی ندارد. در اشکال زیر چند نوع حلقه سلفی نمایش داده شده است:

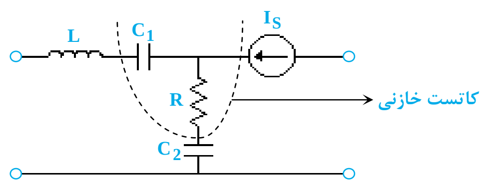


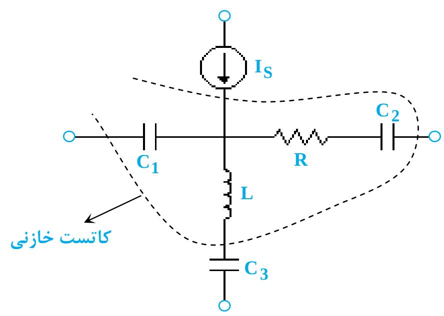


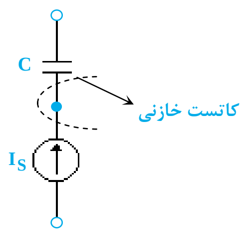


۲) وجود کاتست خازنی در مدار: در صورتی که یک مدار شامل کاتست خازنی باشد، به ازای هر کاتست خازنی، یک فرکانس طبیعی صفر در مدار وجود دارد. دقت کنید که وجود منابع جریان مستقل در کاتست خازنی اشکالی ندارد. تعدادی کاتست خازنی در اشکال زیر نمایش داده شده است:







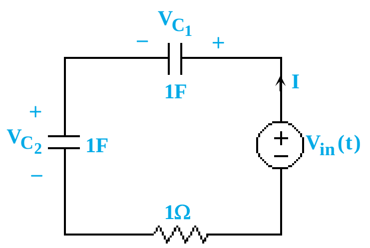


با توجه به موارد گفته شده به صورت خلاصه می‌توان گفت که تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر یک مدار از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

[تعداد حلقه‌های سلفی] + [تعداد کاتست‌های خازنی] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر]

تذکر ۳: وجود منابع وابسته در مدار نیز گاهی ممکن است باعث ایجاد فرکانس‌های طبیعی صفر شود.

نکته۱۰: در صورت وجود کاتست خازنی در مدار، فرکانس طبیعی صفر در ولتاژ خازن‌های درون کاتست و در صورت وجود حلقه سلفی در مدار، فرکانس طبیعی صفر در جریان سلف‌های درون حلقه، ظاهر شده و از طریق پاسخ ورودی صفر خود را نشان می‌دهد؛ با این حال این فرکانس‌های طبیعی صفر در پاسخ حالت صفر و توابع انتقال دیده نخواهند شد. به عنوان مثال مدار ساده روبرو را در نظر بگیرید:



حال به محاسبه پاسخ ورودی صفر مدار با فرض $V_{in} = ۰$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}_{C_۱} &= I = -V_{C_۱} - V_{C_۲}\\ \dot{V}_{C_۲} &= I = -V_{C_۱} - V_{C_۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{V}_{C_۱}\\ \dot{V}_{C_۲}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{C_۱}\\ V_{C_۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}V_{C_۱}(S)\\ V_{C_۲}(S)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S+۱ & ۱\\ ۱ & S+۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}V_{C_۱}(۰)\\ V_{C_۲}(۰)\end{bmatrix} = \frac{۱}{S(S+۲)}\begin{bmatrix}S+۱ & -۱\\ -۱ & S+۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{C_۱}(۰)\\ V_{C_۲}(۰)\end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}\dfrac{V_{C_۱}(۰)-V_{C_۲}(۰)}{S} + \dfrac{V_{C_۱}(۰)+V_{C_۲}(۰)}{S+۲}\\ \dfrac{V_{C_۲}(۰)-V_{C_۱}(۰)}{S} + \dfrac{V_{C_۱}(۰)+V_{C_۲}(۰)}{S+۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{C_۱}(t) = \frac{۱}{۲}[V_{C_۱}(۰) - V_{C_۲}(۰)]e^{۰t} + \frac{۱}{۲}[V_{C_۱}(۰) + V_{C_۲}(۰)]e^{-۲t}\\ V_{C_۲}(t) = \frac{۱}{۲}[V_{C_۲}(۰) - V_{C_۱}(۰)]e^{۰t} + \frac{۱}{۲}[V_{C_۱}(۰) + V_{C_۲}(۰)]e^{-۲t}\end{cases}$$

از رابطه نهایی مشخص است که ولتاژ خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ باید دارای فرکانس طبیعی صفر باشد. با این حال این فرکانس‌های طبیعی صفر در توابع انتقال $\frac{V_{C_۱}(S)}{V_{in}(S)}$ و $\frac{V_{C_۲}(S)}{V_{in}(S)}$ دیده نمی‌شوند:

$$\frac{V_{C_۱}(S)}{V_{in}(S)} = \frac{V_{C_۲}(S)}{V_{in}(S)} = \frac{\frac{۱}{S}}{\frac{۱}{S}+\frac{۱}{S}+۱} = \frac{۱}{S+۲}$$

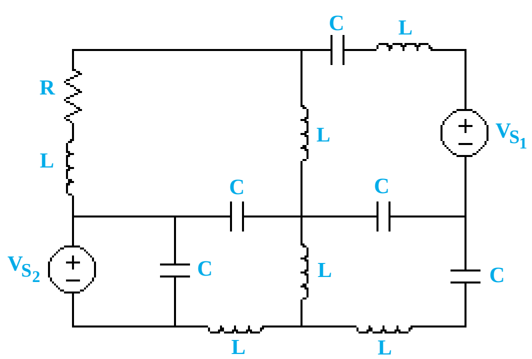
روش محاسبه تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار

با توجه به موارد گفته شده در قبل، ابتدا تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار و سپس تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر را می‌شماریم. حال تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

[تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر] − [تعداد کل فرکانس‌های طبیعی] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر]

[تعداد حلقه‌های سلفی] − [تعداد کاتست‌های خازنی] − [تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر]

مثال۳۰: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر کدام است؟



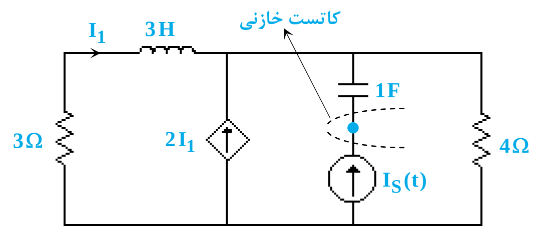
۱) ۷ تا صفر و ۱ عدد غیرصفر

۲) ۸ تا غیرصفر

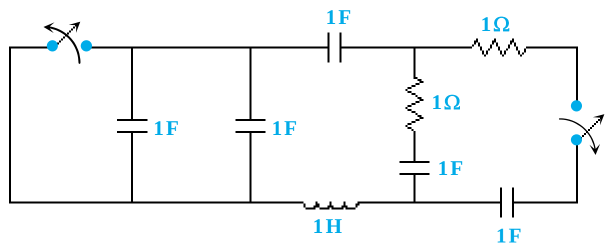
۳) ۷ تا غیرصفر و ۱ عدد صفر

۴) ۶ تا غیرصفر و ۱ عدد صفر

علاوه بر فرکانس $S = -۵$، با توجه به سری بودن خازن با منبع جریان، به علت وجود کاتست خازنی، $S = ۰$ نیز جزو فرکانس‌های طبیعی مدار است.



مثال۳۸: در مدار زیر در دو حالت باز و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟



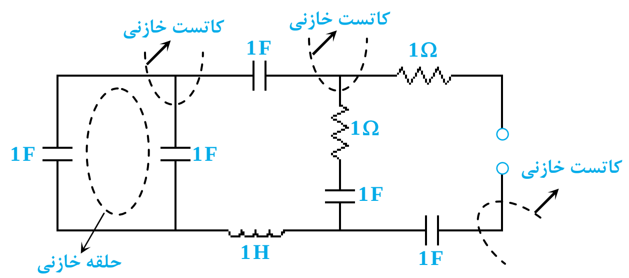
۱) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت باز بودن کلیدها با تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در حالت بسته بودن کلیدها برابر است.

۲) تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر در حالت باز بودن و بسته بودن کلیدها تفاوتی ندارد.

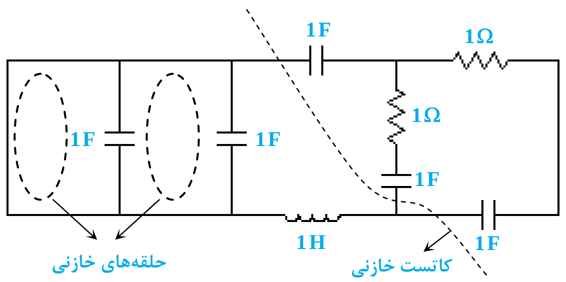
۳) تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر در حالت باز بودن و بسته بودن کلیدها تغییری ندارد.

۴) در هر دو حالت تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار برابر است.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مدار را در حالت باز بودن کلیدها تحلیل می‌کنیم.

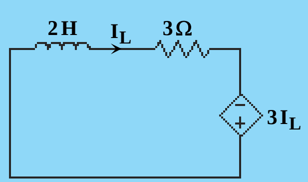


در این حالت مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی (سلف و خازن) است. با توجه به وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۵ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود ۳ کاتست خازنی در مدار، از ۵ فرکانس طبیعی، ۳ فرکانس طبیعی صفر و ۲ فرکانس طبیعی غیرصفر هستند.



حال اگر کلیدهای مدار را ببندیم، مدار به صورت زیر خواهد بود. با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی است. با توجه به وجود دو حلقه خازنی، از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی است. همچنین با توجه به وجود یک کاتست خازنی، مدار دارای یک فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی غیرصفر و یک فرکانس طبیعی صفر است. حال با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) صحیح است.

نکته۱۱: در برخی موارد وجود منابع وابسته باعث ایجاد فرکانس طبیعی صفر می‌شود.



به عنوان مثال به مدار مقابل دقت کنید. اگر در حلقه مدار KVL بنویسیم، داریم:

$$\frac{۲dI_L}{dt} + ۳I_L - ۳I_L = ۰ \Rightarrow \frac{۲dI_L}{dt} = ۰$$

در این صورت اگر معادله مشخصه ناشی از معادله دیفرانسیل بالا را بنویسیم، داریم:

$$۲S = ۰ \Rightarrow S = ۰$$

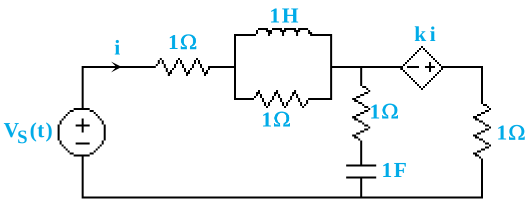
بنابراین تنها فرکانس طبیعی مدار $S = ۰$ است.

نکته۱۲: در هر مدار حداکثر تعداد قطب‌های هر تابع شبکه دلخواه، برابر با مرتبه مدار و برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار است. دقت کنید که به طور کلی هر قطب هر تابع شبکه یا همان فرکانس طبیعی هر متغیر شبکه، حتماً جزو فرکانس‌های طبیعی مدار است، ولی فرکانس‌های طبیعی مدار ممکن است جزو قطب‌های یک تابع شبکه خاص نباشد.

شرایط نوسان‌سازی در مدار

در صورتی که یک مدار در حالت بی‌اتلاف باشد و یا به عبارتی همه فرکانس‌های طبیعی مدار بر روی محور $j\omega$ قرار گیرد (با این شرط که فرکانس‌های طبیعی تماماً از مرتبه ۱ باشند)، مدار نوسان‌ساز خواهد بود. دقت کنید چون مدار در حالت بی‌اتلاف است، دامنه نوسان‌های مدار، میرا نشده و ثابت باقی می‌ماند. در برخی مسائل دیده می‌شود که مقدار پارامتری مانند k برای نوسان‌سازی خواسته شده است. در این حالت ابتدا معادله مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم. سپس ضریب S با توان فرد در معادله مشخصه را برابر صفر قرار می‌دهیم تا همه فرکانس‌های طبیعی مدار روی محور $j\omega$ قرار گیرد. دقت شود که بعد از محاسبه k، آن را در معادله قرار دهید و موهومی بودن ریشه‌ها را تحقیق کنید.

مثال ۵۴: به ازای چه مقدار یا مقادیری از k مدار شکل زیر نوسانی می‌شود؟



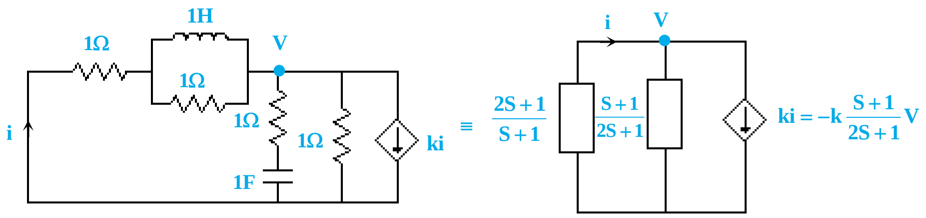
۱) $k < ۲$

۲) $k > ۵$

۳) $k = ۳$

۴) به ازای هیچ مقداری از k، این مدار نوسانی نمی‌شود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» نوسانی شدن یک مدار یا یک سیستم متأثر از فرکانس‌های طبیعی آن مدار یا سیستم است؛ پس در این تست باید ابتدا فرکانس‌های طبیعی مدار را بدست آوریم. فرکانس‌های طبیعی مدار مستقل از ورودی‌های مدار بوده و بنابراین می‌توانیم منبع ولتاژ V_S را صفر کنیم. اکنون مدار معادل زیر را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم فرکانس‌های طبیعی مدار را از طریق محاسبه چندجمله‌ای مشخصه V بدست آوریم: (در این مدار معادل نورتن شاخه سمت راست مدار جایگزین آن شده است)



اکنون در گره مرکزی KCL می‌زنیم تا بتوانیم معادله مشخصه V را که شامل فرکانس‌های طبیعی مدار می‌شود، بدست آوریم:

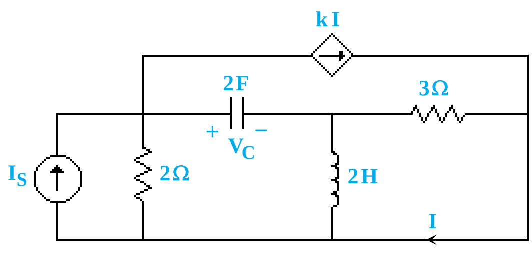
$$\frac{S+۱}{۲S+۱}V+\frac{۲S+۱}{S+۱}V-k\frac{S+۱}{۲S+۱}V=۰\Rightarrow\frac{(۱-k)(S+۱)^۲+(۲S+۱)^۲}{(S+۱)(۲S+۱)}V=۰\Rightarrow\left[(۵-k)S^۲+(۶-۲k)S+۲-k\right]V=۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه $(۵-k)S^۲+(۶-۲k)S+۲-k=۰$ فرکانس‌های طبیعی مدار هستند. برای این که سیستم نوسانی شود، ضریب S در معادله مشخصه باید صفر شود: $۶-۲k=۰\Rightarrow k=۳$

حال به ازای $k=۳$ ریشه‌های معادله مشخصه را محاسبه می‌کنیم: $k=۳\Rightarrow ۲S^۲-۱=۰\Rightarrow S=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مشخص است که ریشه‌های معادله مشخصه در این حالت حقیقی و البته ناپایدار بوده و بنابراین، این مدار نمی‌تواند نوسانی باشد.

مثال ۵۵: در مدار زیر مقدار k کدام باشد تا مدار در حالت صفر بودن I_S، به صورت نوسان‌ساز عمل کند؟



۱) ۸

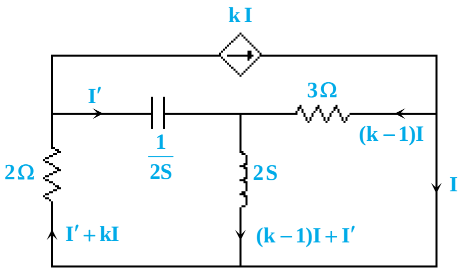
۲) ۱

۳) ۵

۴) مدار به ازای هیچ مقدار k نوسان‌ساز نخواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای برقراری حالت نوسان‌سازی در مدار، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم و ضریب S را مساوی صفر قرار می‌دهیم. در این حالت منابع مستقل را غیرفعال می‌کنیم. حال با نوشتن KVL در حلقه‌های سمت چپ و راست مدار داریم:

$$۳(I(k-۱))+۲S[(k-۱)I+I']=۰ \quad , \quad ۲[I'+kI]+\frac{I'}{۲S}+۲S[(k-۱)I+I']=۰$$



$$\Rightarrow \begin{cases} I'[\frac{۱}{۲S}+۲S+۲]+I[۲S(k-۱)+۲k]=۰ \\ I'[۲S]+I[(k-۱)(۲S+۳)]=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲S}+۲S+۲ & ۲S(k-۱)+۲k \\ ۲S & (k-۱)(۲S+۳) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I' \\ I \end{bmatrix} = ۰$$

برای بدست آوردن معادله مشخصه، دترمینان ماتریس امپدانس بدست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow [\frac{۱}{۲S}+۲S+۲][(k-۱)(۲S+۳)]-۲S[۲S(k-۱)+۲k]=۰ \quad \Rightarrow \quad S^۲[۶k-۱۰]+۷S(k-۱)+\frac{۳}{۲}(k-۱)=۰$$

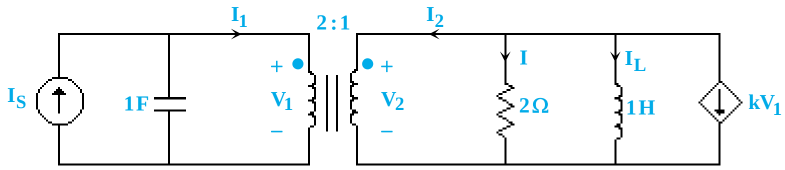
$$\Rightarrow \quad S^۲+\frac{۷(k-۱)}{۶k-۱۰}S-\frac{۳(k-۱)}{۲(۶k-۱۰)}=۰$$

برای برقراری حالت بی‌اتلاف یا همان حالت نوسان‌سازی، فرکانس‌های طبیعی باید روی محور $j\omega$ باشند؛ لذا باید ضریب S در معادله مشخصه صفر شود.

$$۷(k-۱)=۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k=۱} \quad \Rightarrow \quad \text{معادله‌ی مشخصه}: S^۲=۰ \quad \Rightarrow \quad S=۰,۰$$

از آنجایی که فرکانس‌های طبیعی مدار مکرر (از مرتبه ۲) هستند، مدار ناپایدار بوده و نوسانی نیست.

مثال ۵۶: **در مدار شکل زیر به ازای چه مقدار k، فرکانس‌های طبیعی I، موهومی خالص می‌شوند و مدار در حالت بی‌اتلاف کار می‌کند؟**

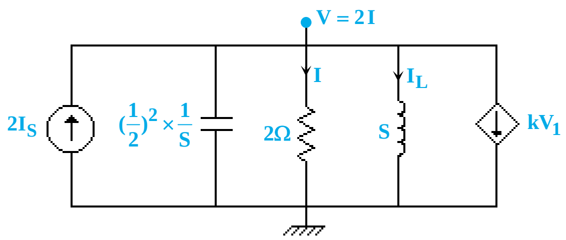


۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) -۱



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این سؤال، ابتدا باید پارامتر I را بر حسب منبع ورودی در حوزه فرکانس محاسبه کرد و فرکانس‌های طبیعی متغیر I را بدست آورد. حال ابتدا المان‌های مدار را از سمت اولیه به سمت ثانویه منتقل می‌کنیم و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

با نوشتن رابطه KCL در گره بالای مدار داریم:

$$I+\frac{۲I}{S}+۸SI+kV_۱=۲I_S \qquad (۱)$$

با توجه به روابط ترانسفورمر داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad V_۱=۲V_۲ \quad , \quad V_۲=۲I$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۱) داریم:

$$I(۱+\frac{۲}{S}+۸S)+k\times۲V_۲=۲I_S \quad \Rightarrow \quad I(۱+\frac{۲}{S}+۸S)+k\times۴I=۲I_S \quad \Rightarrow \quad I=\frac{۲I_S}{۱+\frac{۲}{S}+۸S+۴k}$$

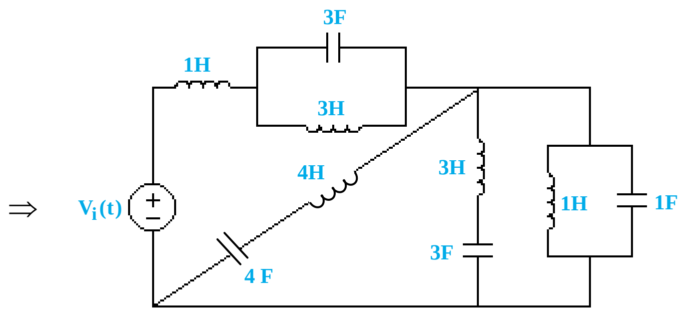
برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مربوط به متغیر I، مخرج رابطه I را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۱+\frac{۲}{S}+۸S+۴k=۰ \quad \Rightarrow \quad ۸S^۲+(۱+۴k)S+۲=۰$$

برای این‌که ریشه‌های معادله مشخصه یا فرکانس‌های طبیعی متغیر I، موهومی خالص شوند، لازم است که ضریب S در معادله مشخصه صفر شود. حال داریم:

$$(۱+۴k)=۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k=-\frac{۱}{۴}} \quad \Rightarrow \quad \text{معادله‌ی مشخصه}=۸S^۲+۲=۰ \quad \Rightarrow \quad S^۲+\frac{۱}{۴}=۰ \quad \Rightarrow \quad S=\pm j\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \text{نوسانی است}$$

دقت شود که می‌توانستیم I_S را برابر صفر فرض کرده و ضریب I را به عنوان معادله‌ی مشخصه در نظر بگیریم؛ در این حالت نیز به معادله‌ی فوق می‌رسیدیم.



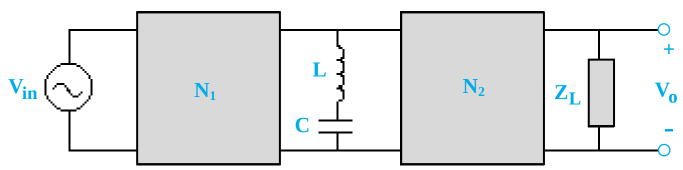
در این حالت مقدار α در گزینه‌ها نیست، پس همان مقدار $\alpha = \frac{۵}{۳}$ صحیح است.

روش بدست آوردن صفرهای تابع انتقال شبکه

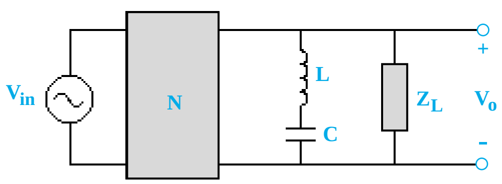
برای بدست آوردن صفرهای تابع شبکه می‌توان به صورت کلاسیک $H(S) = \frac{X_o(S)}{X_i(S)}$ را بدست آورده و از روی آن صفرهای تابع انتقال را مشخص کرد، ولی روش فوق گاهی وقت‌گیر و زمان‌بر است؛ لذا به ارائه یک روش دیگر نیز می‌پردازیم.

در صورتی که در مدار، LC سری در شاخه‌های عمودی قرار گیرد، در صورت رزونانس، با اتصال کوتاه مدل شده و باعث صفر شدن خروجی می‌شود؛ لذا حضور آن باعث ایجاد یک جفت صفر در $S = \frac{\pm j}{\sqrt{LC}}$ روی محور $j\omega$ خواهد شد. این مورد در مدارهای (۱) و (۲) مشخص می‌باشد.

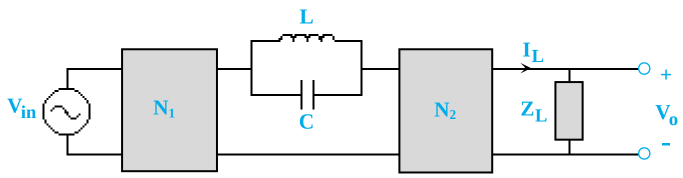
به صورت مشابه اگر مدار LC موازی در شاخه‌های افقی در مدار قرار گیرد، در صورت رزونانس، با مدار باز مدل شده و باعث صفر شدن خروجی می‌شود؛ لذا حضور مدار LC موازی در شاخه‌های افقی، باعث ایجاد یک جفت صفر به صورت $S = \frac{\pm j}{\sqrt{LC}}$ در روی محور $j\omega$ خواهد شد. به مدارهای (۳) و (۴) دقت کنید.



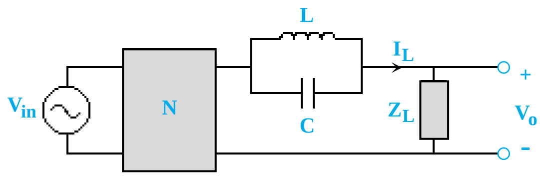
مدار (۲) ($N_۱$ و $N_۲$ شامل عناصر خطی و پسیو هستند)



مدار (۱) (N یک شبکه خطی و پسیو است)

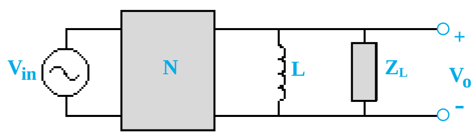


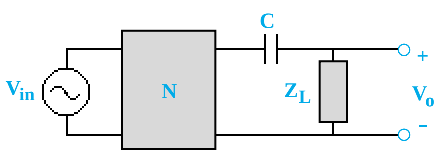
مدار (۳)



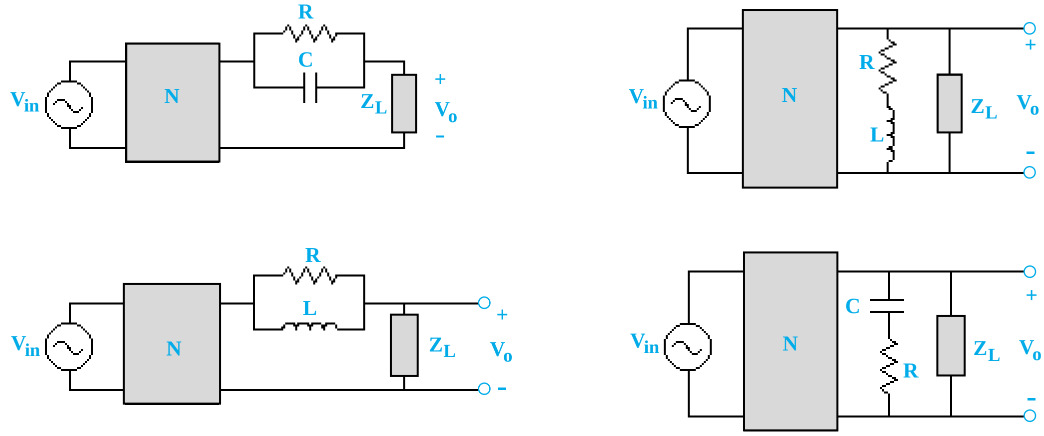
مدار (۴)

لازم به ذکر است که حضور یک سلف تنها در شاخه‌های عمودی و یک خازن تنها در شاخه‌های افقی، باعث ایجاد صفر در $S = ۰$ می‌شود. به مدارهای زیر دقت کنید. در این مدارها اگر فرکانس صفر باشد، مقدار خروجی صفر خواهد بود.

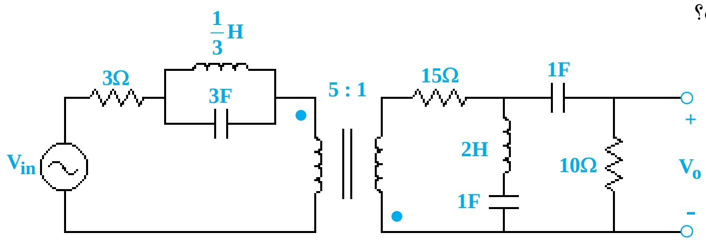




علاوه بر مطالب گفته شده حضور مدارهای RL و RC در حالت سری در شاخه‌های عمودی باعث ایجاد یک صفر به صورت $S_۱ = \frac{-R}{L}$ و یا $S_۱ = \frac{-۱}{RC}$ می‌شود. حال اگر مدارهای RL و RC در حالت موازی در شاخه‌های افقی قرار گیرند نیز صفرهای ذکر شده وجود خواهند داشت. به مدارهای صفحه بعد دقت کنید.



مثال ۵۸: صفرهای تابع انتقال $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ در مدار زیر کدام است؟



۱) $S=\pm j\ ,\ S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

۲) $S=۰\ ,\ S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

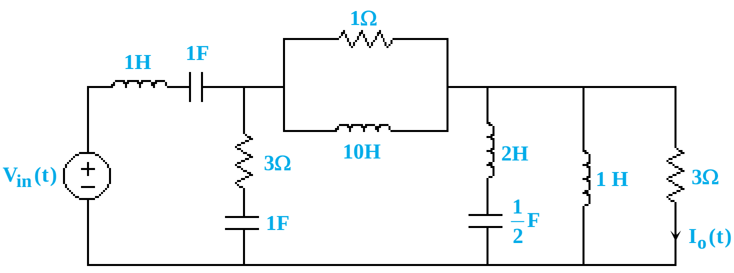
۳) $S=۰\ ,\ S=\pm j\ ,\ S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$

۴) $S=۰\ ,\ S=\pm j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با دقت در شکل دیده می‌شود که یک مدار LC سری با یک سلف ۲H و خازن ۱F در سمت راست مدار وجود دارد؛ لذا یکی از جفت صفرهای تابع انتقال $S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲\times۱}}$ می‌باشد و در حالتی که فرکانس موج ورودی برابر $\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$ شود، به جای LC سری فوق اتصال کوتاه قرار می‌گیرد و V_o صفر می‌شود. همچنین با توجه به شکل مدار دیده می‌شود که یک مدار LC موازی در سمت چپ مدار موجود است و این LC موازی باعث ایجاد یک جفت صفر به صورت $S=\frac{\pm j}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\times۳}}=\pm j$ در تابع شبکه خواهد شد. با بررسی بیشتر در مدار می‌بینیم که یک خازن سری با V_o نیز وجود دارد که در فرکانس $S=۰$ باعث صفر شدن خروجی می‌شود. در نتیجه صفرهای تابع انتقال به صورت روبرو است:

$$S=۰\ ,\ S=\pm j\ ,\ S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲}}$$

مثال ۵۹: در مدار زیر صفرهای تابع انتقال $H(S)=\frac{I_o(S)}{V_i(S)}$ کدام است؟



۱) $S=۰\ ,\ S=\pm j\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}$

۲) $S=۰\ ,\ S=\pm j$

۳) $S=۰\ ,\ S=۰\ ,\ S=\frac{-۱}{۱۰}\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=\pm j$

۴) $S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=۰\ ,\ S=\pm j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل دیده می‌شود که یک LC سری در سمت راست مدار باعث ایجاد دو صفر در $S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲\times\frac{۱}{۲}}}=\pm j$ خواهد شد. با دقت در شکل، یک سلف موازی با مقاومت ۳Ω نیز دیده می‌شود که باعث ایجاد یک صفر در $S=۰$ خواهد شد. با توجه به وجود یک مدار RL موازی و مدار RC سری دو صفر به صورت $S=\frac{-۱}{RC}=\frac{-۱}{۳}$ ، $S=\frac{-R}{L}=\frac{-۱}{۱۰}$ در تابع شبکه موجود می‌باشد. لازم به ذکر است که وجود یک LC سری در سمت چپ مدار نمایان است و نباید این اشتباه صورت گیرد که این LC باعث ایجاد صفر نمی‌شود؛ در واقع به دلیل وجود خازن ۱F یک صفر در $S=۰$ در تابع انتقال وجود دارد. لذا صفرهای تابع شبکه به صورت روبرو است:

$$S=۰\ ,\ S=۰\ ,\ S=-\frac{۱}{۱۰}\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=\pm j$$