روش تجزیه کسر به صورت کسرهای جزئی برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس

در صورتی که بخواهیم کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ را به صورت کسرهای جزئی تجزیه کنیم، پس از اطمینان از این‌که درجه $P(S)$ از $Q(S)$ کمتر است، به مخرج کسر که همان $Q(S)$ باشد توجه می‌کنیم. حال برحسب نوع ریشه‌های $Q(S)$ حالت‌های زیر طبقه‌بندی می‌شوند.

حالت اول: مخرج کسر دارای دو یا چند ریشه حقیقی از مرتبه ۱ باشد.

در این حالت به تعداد عبارت‌های درجه اول، کسر جزئی در سمت راست تساوی قرار می‌دهیم و در صورت هر یک از این کسرها، ضریب مجهولی که یک عدد ثابت است را قرار می‌دهیم. در صورتی که $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به صورت زیر فرض شود، داریم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{P(S)}{\prod_{i=۱}^{n}(S+S_i)}=\frac{P(S)}{(S+S_۱)(S+S_۲)(S+S_۳)...(S+S_n)}$$

حال برای تجزیه کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به کسرهای جزئی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{k_i}{(S+S_i)}=\frac{k_۱}{S+S_۱}+\frac{k_۲}{S+S_۲}+\frac{k_۳}{S+S_۳}+\cdots+\frac{k_n}{S+S_n}$$

در روابط بالا k_iها، مانده $F(S)$ در $S=-S_i$ بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_i=\lim_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S)$$

برای مثال تابع $V(S)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. اگر بخواهیم $V(S)$ را به کسرهای جزئی تجزیه کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$V(S)=\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=\frac{k_۱}{S+۱}+\frac{k_۲}{S+۲}+\frac{k_۳}{S+۳}$$

$$k_۱=\lim_{S\to -۱}(S+۱)V(S)=\lim_{S\to -۱}(S+۱)\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=۱$$

$$k_۲=\lim_{S\to -۲}(S+۲)V(S)=\lim_{S\to -۲}(S+۲)\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=-۵$$

$$k_۳=\lim_{S\to -۳}(S+۳)V(S)=\lim_{S\to -۳}(S+۳)\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=۵$$

$$\Rightarrow V(S)=\frac{S^۲+۱}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=\frac{۱}{S+۱}+\frac{-۵}{S+۲}+\frac{۵}{S+۳}$$

حال می‌توانیم به سادگی عکس تبدیل لاپلاس $V(S)$ را به صورت مقابل بنویسیم: $V(t)=L^{-۱}[V(S)]=(e^{-t}-۵e^{-۲t}+۵e^{-۳t})u(t)$

حالت دوم: مخرج کسر دارای ریشه حقیقی مکرر از مرتبه n باشد.

در این حالت نیز مشابه با همان روش قبل، کسر را تفکیک می‌کنیم و برای پرانتزی که به توان m رسیده است، m کسر را در نظر می‌گیریم؛ بدین صورت که یک بار کسری با عددی مجهول در صورت کسر و عبارتی با توان m در مخرج و یک بار دیگر کسری با عدد مجهول در صورت کسر و عبارتی با توان $m-۱$ در مخرج کسر خواهیم داشت. این روند را تا یک شدن توان مخرج کسر ادامه می‌دهیم. در صورت وجود ریشه‌های غیرتکراری در کنار ریشه‌های تکراری در مخرج کسر، روش تجزیه کسر برای ریشه‌های غیرتکراری مانند حالت اول انجام می‌شود.

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{P(S)}{(S+S_j)^m\prod_{i=۱}^{n}(S+S_i)}=\frac{P(S)}{(S+S_j)^m(S+S_۱)(S+S_۲)(S+S_۳)...(S+S_n)}$$

برای تجزیه کسر بالا به صورت کسرهای جزئی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{A_m}{(S+S_j)^m}+\frac{A_{m-۱}}{(S+S_j)^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_۱}{(S+S_j)}+\frac{k_۱}{(S+S_۱)}+\frac{k_۲}{(S+S_۲)}+\cdots+\frac{k_i}{(S+S_i)}$$

در این حالت، ضرایب A_m تا A_1 و k_1 تا k_i به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_i = \lim_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S) \quad \text{و} \quad A_m = \lim_{S\to -S_j}(S+S_j)^m F(S)$$

$$A_{m-1} = \lim_{S\to -S_j}\frac{d}{dS}[(S+S_j)^m F(S)] \quad \text{و} \quad A_{m-2} = \frac{1}{2!}\lim_{S\to -S_j}\frac{d^2}{dS^2}[(S+S_j)^m F(S)]$$

مرتبه‌ی مشتق‌گیری برابر با اختلاف m و درجه‌ی مخرج A_{m-i} است.

$$A_{m-i} = \frac{1}{i!}\lim_{S\to -S_j}\frac{d^i}{ds^i}[(S+S_j)^m F(S)]$$

به عنوان مثال، تابع $I(S)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. برای تجزیه تابع $I(S)$ به صورت کسرهای جزئی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$I(S) = \frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2} = \frac{k_1}{S}+\frac{k_2}{S+1}+\frac{A_2}{(S+2)^2}+\frac{A_1}{(S+2)}$$

$$k_1 = \lim_{S\to 0} SI(S) = \lim_{S\to 0} S\frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2} = 1$$

$$k_2 = \lim_{S\to -1}(S+1)I(S) = \lim_{S\to -1}(S+1)\frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2} = -14$$

$$A_2 = \lim_{S\to -2}(S+2)^2 I(S) = \lim_{S\to -2}(S+2)^2\frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2} = 22$$

$$A_1 = \lim_{S\to -2}\frac{d}{dS}[(S+2)^2 I(S)] = \lim_{S\to -2}\frac{d}{dS}[(S+2)^2\frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2}] = \lim_{S\to -2}\frac{d}{dS}[\frac{10S^2+4}{S(S+1)}]$$

$$\Rightarrow A_1 = \lim_{S\to -2}[\frac{(S^2+S)(20S)-(10S^2+4)(2S+1)}{(S^2+S)^2}] = 13$$

با قرار دادن ضرایب k_1 و k_2 و A_1 و A_2 در رابطه اصلی داریم:

$$I(S) = \frac{10S^2+4}{S(S+1)(S+2)^2} = \frac{1}{S}+\frac{-14}{S+1}+\frac{22}{(S+2)^2}+\frac{13}{(S+2)}$$

با تجزیه شدن $I(S)$ به صورت کسرهای جزئی، می‌توانیم عکس تبدیل لاپلاس آن را به سادگی بدست آوریم.

$$I(t) = L^{-1}[I(S)] = L^{-1}[\frac{1}{S}]+L^{-1}[\frac{-14}{S+1}]+L^{-1}[\frac{22}{(S+2)^2}]+L^{-1}[\frac{13}{(S+2)}] \Rightarrow I(t) = (1-14e^{-t}+22te^{-2t}+13e^{-2t})u(t)$$

مثال ۱۰: اگر تبدیل لاپلاس ولتاژ $V(t)$ به صورت $V(S) = \frac{1}{S^2(S+1)}$ بیان شده باشد، آنگاه معادله زمانی ولتاژ آن کدام است؟

۱) $V(t) = (t+e^{-t}-1)u(t)$ ۲) $V(t) = (t+e^{-t}+1)u(t)$ ۳) $V(t) = (t-e^{-t}+1)u(t)$ ۴) $V(t) = (t-e^{-t}-1)u(t)$

پاسخ : گزینه «۱» با تجزیه کسر $V(S)$ به صورت مقابل داریم:

$$V(S) = \frac{1}{S^2(S+1)} = \frac{A}{S^2}+\frac{B}{S}+\frac{C}{S+1}$$

حال ضرایب A و B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \lim_{S\to 0} S^2 V(S) = \lim_{S\to 0} S^2\frac{1}{S^2(S+1)} = 1$$

$$B = \lim_{S\to 0}\frac{d(S^2V(S))}{dS} = \lim_{S\to 0}\frac{d}{dS}(S^2\times\frac{1}{S^2(S+1)}) = \lim_{S\to 0}(-\frac{1}{(S+1)^2}) = -1$$

$$C = \lim_{S\to -1}(S+1)V(S) = \lim_{S\to -1}(S+1)\frac{1}{S^2(S+1)} = 1 \Rightarrow V(S) = \frac{1}{S^2(S+1)} = \frac{1}{S^2}-\frac{1}{S}+\frac{1}{S+1} \Rightarrow \mathbf{V(t) = L^{-1}[V(S)] = (t-1+e^{-t})u(t)}$$

نکته۱: برای بدست آوردن ضرایب مجهول در روش تجزیه کسرها، می‌توان از روش متحد قرار دادن نیز استفاده کرد. در این روش، ابتدا کسر را به صورت کسرهای جزیی با ضرایب ثابت تجزیه می‌کنیم. سپس از قسمت تجزیه شده، مخرج مشترک می‌گیریم و آن را برابر با کسر اصلی قرار می‌دهیم. حال در طرفین رابطه بدست آمده با قرار دادن چند عدد به جای S، چند معادله برای بدست آوردن ضرایب ثابت بدست آورده و از حل آنها ضرایب ثابت را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱۱: تابع زمانی $f(t)$ که تبدیل لاپلاس آن $F(S)=\dfrac{S^2+3S+5}{(S+1)(S+2)(S+3)}$ است، را بدست آورید.

۱) $[1/5e^{-t}-e^{-2t}+2/5e^{-3t}]u(t)$
۲) $[1/5e^{-t}-3e^{-2t}+2/5e^{-3t}]u(t)$
۳) $[e^{-t}-3e^{-2t}+2/5e^{-3t}]$
۴) $[-e^{-t}-e^{-2t}+2/5e^{-3t}]$

پاسخ : گزینه «۲» در این حالت کسر را با توجه به مواردی که بیان شد، تفکیک کرده و سپس با ضرایب مجهول، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$F(S)=\frac{S^2+3S+5}{(S+1)(S+2)(S+3)}=\frac{A}{(S+1)}+\frac{B}{(S+2)}+\frac{C}{(S+3)}$$

پس از مخرج مشترک گرفتن و حذف مخرج از طرفین تساوی، داریم:

$$\Rightarrow\quad S^2+3S+5=A(S+2)(S+3)+B(S+1)(S+3)+C(S+1)(S+2)$$

تساوی فوق به ازای تمامی Sها برقرار است؛ لذا با انتخاب Sهای مناسب (که معمولاً از عامل‌های صفرشونده عبارت انتخاب می‌شوند)، می‌توانیم ضرایب مجهول را تعیین کنیم:

$$S=-2\ \Rightarrow\ (-2)^2+3(-2)+5=B(-2+1)(-2+3)\ \Rightarrow\ B=-3$$

$$S=-3\ \Rightarrow\ (-3)^2+3(-3)+5=C(-3+1)(-3+2)\ \Rightarrow\ C=2/5$$

$$S=-1\ \Rightarrow\ (-1)^2+3(-1)+5=A(-1+2)(-1+3)\ \Rightarrow\ A=1/5$$

$$f(t)=L^{-1}[F(S)]=L^{-1}[\frac{1/5}{S+1}-\frac{3}{S+2}+\frac{2/5}{S+3}]=[1/5e^{-t}-3e^{-2t}+2/5e^{-3t}]u(t)$$

حالت سوم: مخرج کسر شامل یک عبارت درجه دوم با ریشه‌های مختلط باشد.

در این حالت باید متناظر با عبارت درجه دوم در مخرج کسر اصلی، یک کسر که در صورت آن عبارتی به شکل $AS+B$ قرار دارد و مخرج آن شامل همان عبارت درجه دوم است، قرار دهیم و برای بقیه کسرها که دارای ریشه‌های حقیقی هستند، از دو حالت قبل استفاده کنیم. به مثال پارامتری زیر دقت کنید:

$$F(S)=\frac{M}{(S^2+\beta S+\alpha)(S+S_i)}=\frac{AS+B}{S^2+\beta S+\alpha}+\frac{k}{S+S_i}$$

در اینجا ضریب k مانند حالت اول، محاسبه می‌شود.

$$k=\lim_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S)$$

پس از بدست آمدن ضریب k، برای محاسبه ضرایب B و A می‌توانیم دو عدد (مثلاً $S=1$ و $S=0$) را به جای S در طرفین رابطه قرار دهیم و با تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول، ضرایب A و B را بدست آوریم. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید:

$$F(S)=\frac{20}{(S^2+8S+25)(S+3)}=\frac{AS+B}{S^2+8S+25}+\frac{k}{S+3}$$

برای محاسبه k، مانند حالت اول عمل می‌کنیم.

$$k=\lim_{S\to -3}(S+3)F(S)=\lim_{S\to -3}\frac{20}{(S^2+8S+25)}=2$$

با قرار دادن k در روابط بالا داریم:

$$\frac{20}{(S^2+8S+25)(S+3)}=\frac{AS+B}{S^2+8S+25}+\frac{2}{S+3}$$

حال $S=0$ را در طرفین رابطه بالا قرار می‌دهیم.

$$\frac{20}{25\times 3}=\frac{B}{25}+\frac{2}{3}\quad\Rightarrow B=-10$$

با قرار دادن $S=1$ در طرفین رابطه بالا داریم:

$$\frac{20}{(1+8+25)(1+3)}=\frac{A+(-10)}{1+8+25}+\frac{2}{1+3}\quad\Rightarrow A=-2$$

با قرار دادن ضرایب B و A در رابطه اصلی داریم:

$$F(S)=\frac{20}{(S^2+8S+25)(S+3)}=\frac{-2S-10}{S^2+8S+25}+\frac{2}{S+3}$$

حال پس از تفکیک کسر اصلی به دو کسر جزئی، دیده می‌شود که عکس تبدیل لاپلاس برای عبارت $\dfrac{2}{S+3}$ به صورت $2e^{-3t}u(t)$ است، ولی برای بدست آوردن عکس تبدیل لاپلاس $\dfrac{-2S-10}{S^2+8S+25}$ هنوز مشکل داریم. بنابراین به روش زیر توجه کنید:

زمانی که کسری را به صورت $\dfrac{P(S)}{S^2+aS+b}$ با ریشه‌های مختلط در مخرج کسر داشته باشیم، ابتدا ریشه‌های مختلط مخرج کسر را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$S^2+aS+b=0\quad\Rightarrow\quad S_1,S_2=-\alpha\pm j\beta$$

در ادامه کسر را به صورت مقابل تفکیک می‌کنیم:

$$F_1(S)=\frac{P(S)}{S^2+aS+b}=\frac{P(S)}{(S+\alpha+j\beta)(S+\alpha-j\beta)}=\frac{k_1}{(S+\alpha+j\beta)}+\frac{k_2}{(S+\alpha-j\beta)}$$

حال با روشی که قبلاً شرح داده‌ایم، مقادیر k_1 و k_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$k_1=\lim_{S\to-\alpha-j\beta}(S+\alpha+j\beta)F_1(S)=|k_1|\angle k_1$$

$$k_2=\lim_{S\to-\alpha+j\beta}(S+\alpha-j\beta)F_1(S)=|k_2|\angle k_2$$

دقت کنید که همیشه k_1 و k_2 مزدوج یکدیگر هستند. بنابراین داریم:

$$|k_1|=|k_2| \quad \text{و} \quad \angle k_1=-\angle k_2$$

حال تبدیل معکوس لاپلاس $F(S)$ را بدست می‌آوریم.

$$f_1(t)=k_1e^{(-\alpha-j\beta)t}+k_2e^{(-\alpha+j\beta)t} \Rightarrow f(t)=e^{-\alpha t}[k_1e^{-j\beta t}+k_2e^{j\beta t}]$$

$$\Rightarrow f_1(t)=e^{-\alpha t}[k_1[\cos(-\beta t)+j\sin(-\beta t)]+k_2[\cos(\beta t)+j\sin(\beta t)]]$$

با توجه به اینکه k_1 و k_2 مزدوج یکدیگرند، داریم:

$$f_1(t)=2|k_1|e^{-\alpha t}[\cos(\beta t+\angle k_1)]$$

برای مثال، اگر بخواهیم لاپلاس معکوس قسمت اول کسر $F(S)$ را بدست آوریم، داریم:

$$X(S)=\frac{-2S-10}{S^2+8S+25}=\frac{-2S-10}{(S+4-j3)(S+4+j3)} \Rightarrow X(S)=\frac{k_1}{(S+4-j3)}+\frac{k_2}{(S+4+j3)}$$

$$k_1=\lim_{S\to-4+j3}(S+4-j3)X(S)=\lim_{s\to-4+j3}(S+4-j3)\left(\frac{-2S-10}{(S+4-j3)(S+4+j3)}\right)=\frac{-2(-4+j3)-10}{(-4+j3+4+j3)}=-1+j\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}\angle 161/5^\circ$$

حال با استفاده از رابطه گفته شده در قبل داریم:

$$X(t)=2|k_1|e^{-\alpha t}[\cos(\beta t+\angle k_1)]$$

$$\alpha=4 \ , \ \beta=3 \ , \ |k_1|=\frac{\sqrt{10}}{3} \ , \ \angle k_1=161/5^\circ \Rightarrow X(t)=\frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-4t}[\cos(3t+161/5^\circ)]$$

به غیر از روش فوق، روش دیگری نیز برای محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس $F(S)=\frac{P(S)}{S^2+aS+b}$ وجود دارد. در این روش باید $F(S)$ را به صورت $\frac{k_1(S+\alpha)+k_2\omega}{(S+\alpha)^2+\omega^2}$ درآورده و سپس از روابط موجود برای محاسبه $L^{-1}[F(S)]$ استفاده کنیم. به عنوان نمونه برای مثال قبلی داریم:

$$X(S)=\frac{-2S-10}{S^2+8S+25}=\frac{-2(S+4)-2}{(S+4)^2+9}=\frac{-2(S+4)}{(S+4)^2+9}-\frac{\frac{2}{3}\times 3}{(S+4)^2+9}$$

$$\Rightarrow X(t)=L^{-1}[X(S)]=-2e^{-4t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t=\frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-4t}\cos(3t+161/5^\circ)$$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

فرض کنید می‌خواهیم مقادیر اولیه یا نهایی پاسخ یک مدار را صرفاً با داشتن $F(S)$ (پاسخ مدار در حوزه لاپلاس) و بدون محاسبه $f(t)$ به دست آوریم؛ در این‌صورت می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم. لازم به ذکر است که قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی زمانی صادق است که $f(t)$ شامل تابع ضربه یا مشتقات تابع ضربه نباشد. همچنین $f(t)$ باید علّی باشد یعنی در $t<0$ برابر صفر باشد.

قضیه مقدار اولیه : $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{S\to\infty}SF(S)$

قضیه مقدار نهایی : $f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{S\to 0}SF(S)$

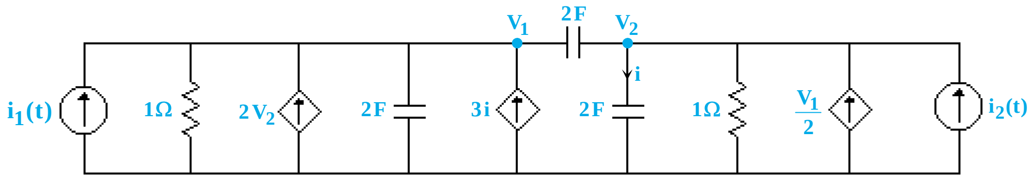
مثال ۱۲: اگر تبدیل لاپلاس $V(t)$ به شکل $V(S)=\frac{10(S^2+1)}{(S+2)(4S^2+S+1)}$ باشد، مقدار $V(t=0^+)$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۵
۳) ۲/۵
۴) صفر

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم:

$$V(t=0^+)=\lim_{S\to\infty}SV(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{10S(S^2+1)}{(S+2)(4S^2+S+1)}=\lim_{S\to\infty}\frac{10S^3}{4S^3}=2/5$$

مثال ۳۰: به ازای کدام تساوی مدار شکل زیر بی‌شمار جواب خواهد داشت؟



۱) $2i_2(t)=i_1(t)$
۲) $i_2(t)=-i_1(t)$
۳) $i_2(t)=i_1(t)$
۴) $2i_2(t)=-i_1(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این مثال، ابتدا روابط مربوط به متغیرهای V_1 و V_2 را نوشته تا مشخص شود چه رابطه‌ای باید میان i_1 و i_2 برقرار باشد تا این روابط، بی‌شمار جواب داشته باشند. قبل از نوشتن روابط KCL، مشخص است که داریم $i=2SV_2$. در نوشتن روابط KCL بطـور مـستقیم $2sV_2$ را جایگزین i می‌کنیم. حال به سراغ روابط KCL می‌رویم. مدار دارای دو گره است و باید برای این دو گره روابط KCL نوشته شود. ابتدا از گره سمت چپ مدار آغاز می‌کنیم:

$$i_1-\frac{V_1}{1}+2V_2-2SV_1+3\times 2SV_2=2SV_1-2SV_2 \Rightarrow (4S+1)V_1-(8S+2)V_2=i_1$$

و در مورد گره سمت راست مدار داریم:

$$2SV_1-2SV_2=2SV_2+\frac{V_2}{1}-\frac{V_1}{2}-i_2 \Rightarrow (2S+\frac{1}{2})V_1-(4S+1)V_2=-i_2 \xrightarrow{\times 2}(4S+1)V_1-(8S+2)V_2=-2i_2$$

بنابراین دستگاه معادلاتی بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(4S+1)V_1-(8S+2)V_2=i_1\\(4S+1)V_1-(8S+2)V_2=-2i_2\end{cases}$$

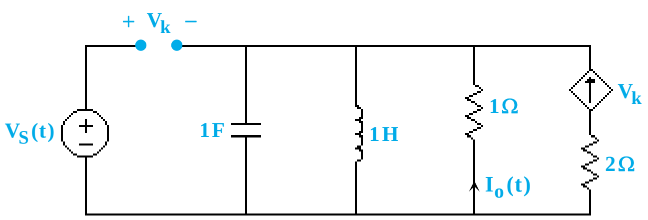
همان‌طور که می‌بینید ضرایب متغیرهای مجهول در دو معادله یکی است؛ بنابراین برای این که این معادلات دارای بی‌شمار جواب باشند، باید مقـدار سـمت راست تساوی‌ها نیز یکی باشند، یعنی $i_1=-2i_2$. لازم بذکر است اگر $i_1\neq -2i_2$ باشد، این مدار هیچ پاسخی نـدارد؛ پـس در ایـن وضـعیت منـابع جریـان به‌درستی کار نخواهند کرد؛ در واقع از نظر فیزیکی تحقق‌پذیر نیست و مدار می‌سوزد.

دقت کنید که برای حل این مثال از نکته گفته شده در فصل (۳) کتاب مدار (۱) نیز می‌توانستیم استفاده کنیم.

محاسبه پاسخ پله با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

برای محاسبه پاسخ پله در یک مدار، ابتدا منبع ورودی مدار را که ممکن است منبع ولتاژ یا منبع جریان باشد، به صورت تـابع پلـه واحـد فـرض مـی‌کنـیم. سپس مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. برای ترسیم مدار در حوزه فرکانس ابتدا لاپـلاس تـابع ورودی مـدار (کـه همـان $u(t)$ باشـد) را جـایگزین می‌کنیم و در ادامه مدار معادل المان‌های مدار را برطبق روش گفته شده در ابتدای فصل، در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. دقت کنید کـه بـرای محاسـبه پاسخ پله مدار، لازم است که همه شرایط اولیه (ولتاژ خازن و جریان سلف) صفر فرض شود یا به عبارتی مدار در حالت صفر تحلیل گردد. حال با اسـتفاده از قوانین فصل اول مدار مانند قوانین حلقه و گره، پاسخ خروجی مدار را محاسبه می‌کنیم. پس از محاسبه پاسخ پله در حـوزه فرکـانس، بـا اسـتفاده از قـانون عکس تبدیل لاپلاس، پاسخ پله را در حوزه زمان بدست می‌آوریم.

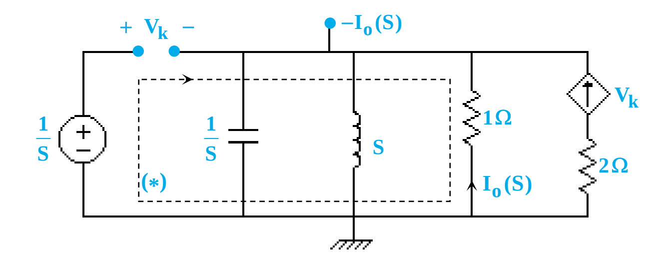
مثال ۳۱: در مدار زیر پاسخ پله مدار کدام گزینه است؟



۱) $te^{-t}u(t)$
۲) $-te^{-t}u(t)$
۳) $-tu(t)$
۴) $tu(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

برای محاسبه پاسخ در مـدار بـه جـای منبـع $V_S(t)$ تـابع $u(t)$ را قـرار می‌دهیم. حال شرایط اولیه را صفر فرض کرده و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.



با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$-\frac{I_o(S)}{1}+\frac{-I_o(S)}{S}+\frac{-I_o(S)}{\frac{1}{S}}=V_k \Rightarrow I_o(S)[-1-S-\frac{1}{S}]=V_k \Rightarrow I_o(S)=V_k[\frac{1}{-1-S-\frac{1}{S}}] \quad (1)$$

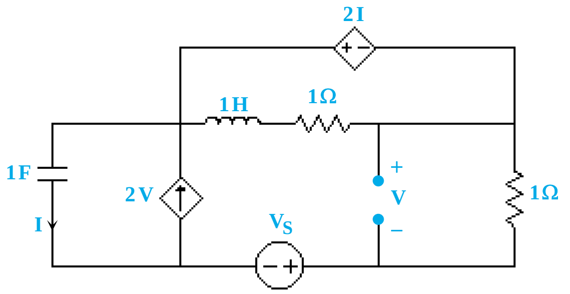
با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$-\frac{1}{S}+V_k-I_o(S)\times 1=0 \Rightarrow V_k=I_o(S)+\frac{1}{S} \quad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

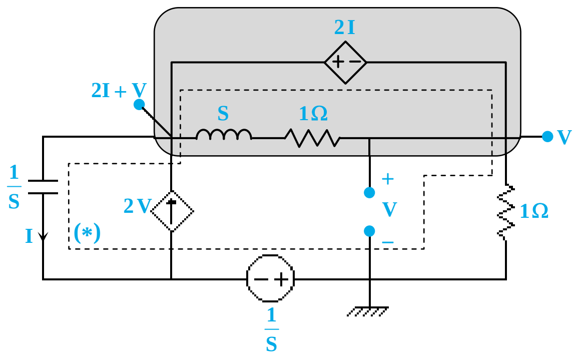
$$I_o(S)=[I_o(S)+\frac{1}{S}][\frac{1}{-1-S-\frac{1}{S}}] \Rightarrow I_o(S)=\frac{-1}{S^2+2S+1}=\frac{-1}{(S+1)^2} \Rightarrow I_o(t)=-te^{-t}u(t)$$

مثال ۳۲: در مدار زیر پاسخ پله برای جریان I در کدام گزینه وجود دارد؟



۱) $-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}u(t)$
۲) $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}u(t)$
۳) $\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}u(t)$
۴) $-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}u(t)$

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه پاسخ پله، شرایط اولیه مدار را صفر فرض کرده و منبع V_S را برابر تابع $u(t)$ قرار می‌دهیم، در ادامه مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم:



با نوشتن KCL در ابرگره بالای مدار داریم:

$$I+\frac{V}{1}=2V \Rightarrow I=V \quad (1)$$

با نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:

$$-\frac{1}{S}-V-2I+I(\frac{1}{S})=0 \Rightarrow -\frac{1}{S}-V+I(-2+\frac{1}{S})=0 \quad (2)$$

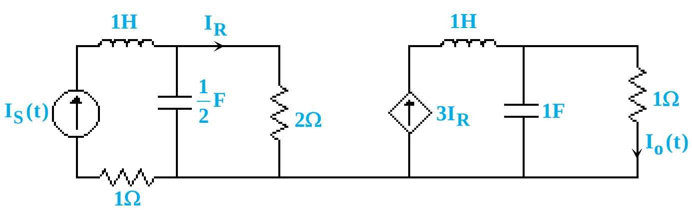
با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-\frac{1}{S}-I-2I+\frac{1}{S}I=0 \Rightarrow I(-3+\frac{1}{S})=\frac{1}{S} \Rightarrow I=\frac{\frac{1}{S}}{-3+\frac{1}{S}}=\frac{1}{1-3S} \Rightarrow I=\frac{1}{-3(S-\frac{1}{3})}=\frac{-\frac{1}{3}}{S-\frac{1}{3}} \Rightarrow \mathbf{I(t)=-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}u(t)}$$

محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

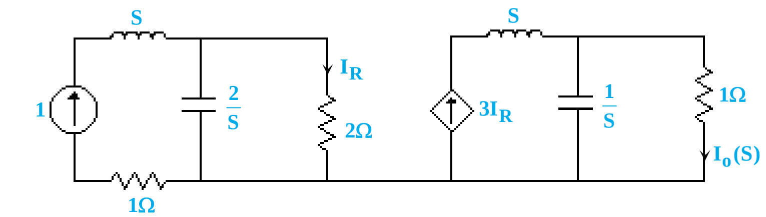
برای محاسبه پاسخ ضربه در یک مدار، ابتدا منبع ورودی مدار را به صورت تابع ضربه در نظر می‌گیریم. در این حالت شرایط اولیه (ولتاژ خازن و جریان سلف) را صفر فرض می‌کنیم؛ به عبارت بهتر می‌توان گفت که برای محاسبه پاسخ ضربه، مدار را در حالت صفر فرض می‌کنیم. در ادامه برای ترسیم مدار در حوزه فرکانس، ابتدا لاپلاس تابع ورودی (که همان $\delta(t)$ باشد) را محاسبه کرده و به عنوان منبع ورودی مدار در حوزه فرکانس در نظر می‌گیریم. سپس بقیه المان‌های مدار را با استفاده از قوانین ذکر شده در ابتدای فصل، در حوزه فرکانس معادل‌گذاری می‌کنیم. حال با تحلیل مدار در حوزه فرکانس، و با استفاده از قضیه عکس تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه را در حوزه زمان محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳۳: پاسخ ضربه مدار زیر کدام گزینه است؟



۱) $e^{-t}u(t)$
۲) $te^{-t}u(t)$
۳) $2e^{-t}u(t)$
۴) $2te^{-t}u(t)$

پاسخ: گزینه «۴» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن قانون تقسیم جریان در سمت چپ داریم:

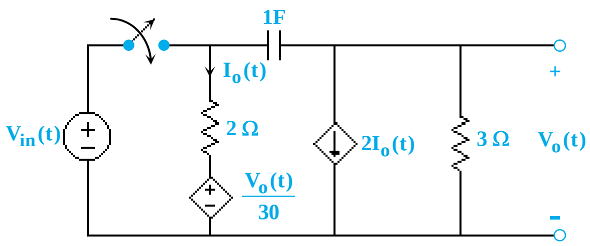


$$I_R(S)=۱\times\frac{\frac{۲}{S}}{۲+\frac{۲}{S}}=\frac{۱}{۱+S}$$

حال با نوشتن قانون تقسیم جریان برای مقاومت و خازن در سمت راست مدار داریم:

$$I_o(S)=۳I_R(S).\frac{\frac{۱}{S}}{۱+\frac{۱}{S}}=\frac{۳}{S+۱}.\frac{۱}{S+۱}=\frac{۳}{(S+۱)^۲}\Rightarrow \mathbf{I_o(t)=۳te^{-t}u(t)}$$

مثال ۳۴: در مدار زیر پاسخ ضربه واحد کدام است؟



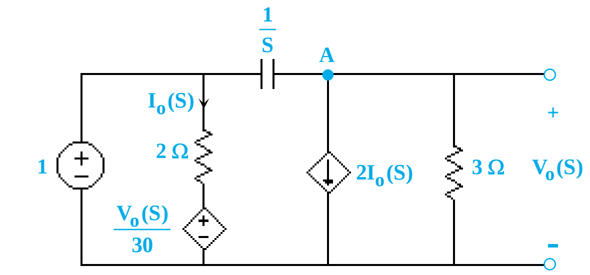
۱) $\delta(t)-۱/۳e^{۰/۳t}u(t)$

۲) $\delta(t)-۱/۳^{-۰/۳t}u(t)$

۳) $\delta(t)+۱/۳e^{۰/۳t}u(t)$

۴) $\delta(t)+۱/۳e^{-۰/۳t}u(t)$

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن پاسخ ضربه، تابع $\delta(t)$ را به عنوان ورودی به مدار وصل می‌کنیم و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.



حال با اعمال KCL در گره A داریم: $(V_A=V_o(S))$

$$\frac{V_o(S)}{۳}+\frac{V_o(S)-۱}{\frac{۱}{S}}+۲I_o(S)=۰ \qquad (۱)$$

با توجه به قانون اهم جریان I_o را بدست می‌آوریم:

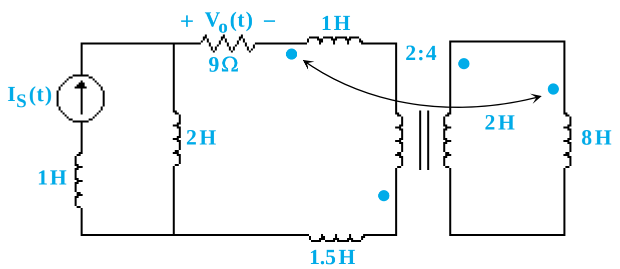
$$I_o(S)=\frac{۱-\frac{V_o(S)}{۳۰}}{۲} \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{V_o(S)}{۳}+S(V_o(s)-۱)+۲(\frac{۱-\frac{V_o(S)}{۳۰}}{۲})=۰\Rightarrow V_o(S)[\frac{۱}{۳}+S-\frac{۱}{۳۰}]=S-۱$$

$$\Rightarrow V_o(S)=\frac{S-۱}{S+۰/۳}=\frac{S+۰/۳-۰/۳-۱}{S+۰/۳}\Rightarrow V_o(S)=۱-\frac{۱/۳}{S+۰/۳}\Rightarrow \mathbf{V_o(t)=\delta(t)-۱/۳e^{-۰/۳t}u(t)}$$

مثال ۳۵: در مدار زیر پاسخ ضربه واحد کدام است؟



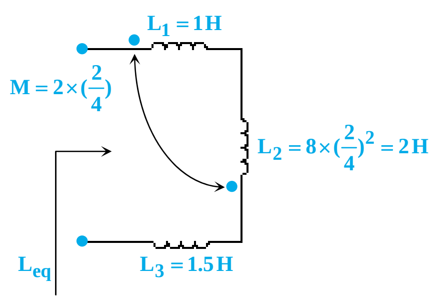
۱) $۴\delta(t)-۸e^{-۲t}u(t)$

۲) $۴u(t)-۸e^{-۲t}u(t)$

۳) $\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

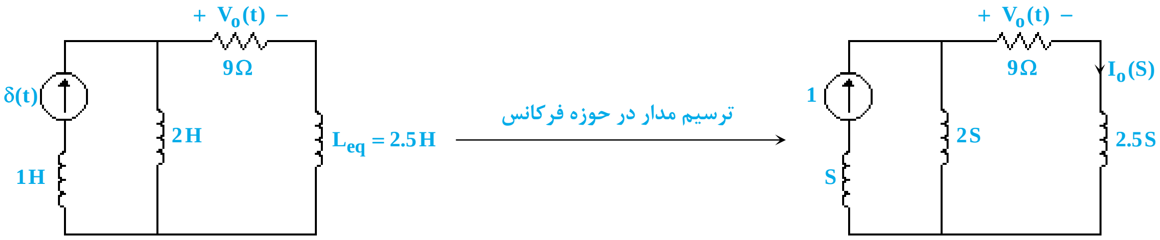
۴) $\frac{۴}{۹}u(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

پاسخ: گزینه «۱» برای محاسبه پاسخ ضربه، منبع جریان $I_S(t)$ را به صورت تابع $\delta(t)$ فرض می‌کنیم. قبل از ترسیم مدار در حوزه فرکانس، ابتدا سلف‌های سمت راست مدار را معادل‌گذاری می‌کنیم. ابتدا سلف ۸H را با نسبت تبدیل ترانس به سمت اولیه منتقل می‌کنیم. دقت کنید که با توجه به نقطه‌های ترانس بعد از انتقال سلف ۸H به سمت اولیه، نقطه مربوط به سلف ۸H باید برعکس شده و در پایین آن قرار گیرد. حال داریم:



$$L_{eq}=L_۱+L_۲-۲M+L_۳=۱+۲-۲\times۱+۱/۵=۲/۵H$$

حال با جایگذاری L_{eq} در مدار داریم:

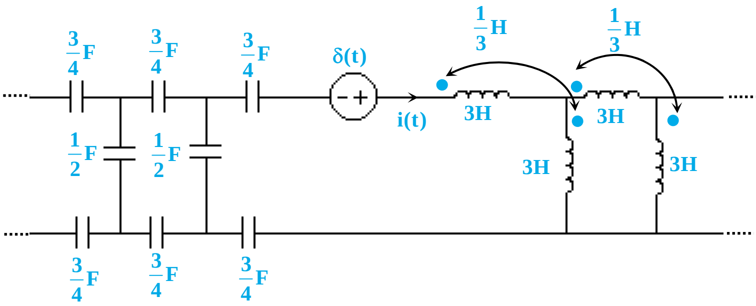


با استفاده از قانون تقسیم جریان، مقدار جریان $I_o(S)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$I_o(S)=۱\times\frac{۲S}{۹+۲/۵S+۲S}=\frac{۲S}{۴/۵S+۹}\ \Rightarrow\ I_o(S)=\frac{۴/۵S}{۴/۵S+۹}\times\frac{۱}{۲/۲۵}=\frac{۱}{۲/۲۵}[۱-\frac{۲}{S+۲}]\Rightarrow\ I_o(S)=\frac{۱}{۲/۲۵}[\delta(t)-۲e^{-۲t}u(t)]$$

$$V_o(t)=۹\times I_o(t)=\frac{۹}{۲/۲۵}[\delta(t)-۲e^{-۲t}u(t)]\ \Rightarrow\ \mathbf{V_o(t)=۴\delta(t)-۸e^{-۲t}u(t)}$$

مثال ۳۶: **مدار شکل زیر متشکل از دو شبکه نامتناهی است. اگر شرایط اولیه مدار صفر باشد، چه جریانی از منبع ولتاژ ضربه‌ای عبور می‌کند؟**



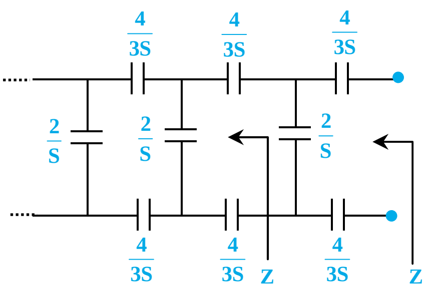
۱) $i(t)=\frac{۳}{۱۶}\cos(\sqrt{\frac{۴}{۳}}t)$

۲) $i(t)=\frac{۱۶}{۳}\cos(\sqrt{\frac{۴}{۳}}t)$

۳) $i(t)=\frac{۱۶}{۳}\cos(\sqrt{\frac{۳}{۴}}t)$

۴) $i(t)=\frac{۳}{۱۶}\cos(\sqrt{\frac{۳}{۴}}t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این مثال، باید شبکه‌های نامتناهی موجود در مدار را با امپدانس‌های معادلشان جایگزین کنیم. بدین ترتیب ابتدا امپدانس معادل شبکه خازنی سمت چپ را محاسبه می‌کنیم. اگر این قسمت از مدار را در فضای لاپلاس مدل کنیم، به مدار روبرو می‌رسیم:



حال با استفاده از مدار معادل ترسیم شده داریم:

$$Z=(Z\,||\,\frac{۲}{S})+۲\times\frac{۴}{۳S}=\frac{Z\times\frac{۲}{S}}{Z+\frac{۲}{S}}+\frac{۸}{۳S}=\frac{۲Z}{SZ+۲}+\frac{۸}{۳S}\xrightarrow{\times ۳S(SZ+۲)}۳S^۲Z^۲+۶SZ=۶SZ+۸SZ+۱۶\ \Rightarrow\ ۳S^۲Z^۲-۸SZ-۱۶=۰$$

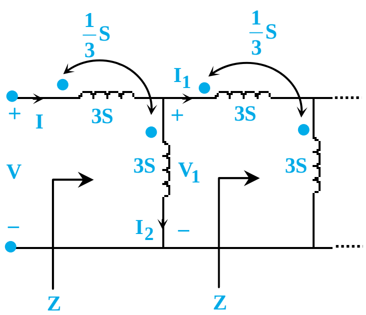
$$\Rightarrow Z=\frac{۸S\pm\sqrt{۶۴S^۲+۴\times ۳S^۲\times ۱۶}}{۶S^۲}=\frac{۸S\pm ۱۶S}{۶S^۲}\Rightarrow\begin{cases}Z=\frac{۴}{S}\\ Z=-\frac{۸}{۳S}\end{cases}$$

از مقادیر بدست آمده برای Z ، فقط مقدار $Z=\frac{۴}{S}$ قابل قبول است و این یعنی شبکه نامتناهی سمت چپ، معادل با یک خازن $\frac{۱}{۴}$ فارادی می‌باشد.

حال به سراغ شبکه سلفی مطابق شکل زیر می‌رویم:

در اینجا به دلیل وجود تزویج میان سلفها، محاسبه امپدانس معادل کمی پیچیده‌تر از حالت قبلی می‌باشد.

با توجه به نامتناهی بودن مدار برای شکل روبرو می‌توان نوشت:



$$V=ZI\quad ,\quad V_۱=ZI_۱$$

از طرفی داریم:

$$V_۱=\frac{۱}{۳}SI+۳SI_۲\qquad\qquad V=۳SI+\frac{۱}{۳}SI_۲+\frac{۱}{۳}SI+۳SI_۲=\frac{۱۰}{۳}SI+\frac{۱۰}{۳}SI_۲$$