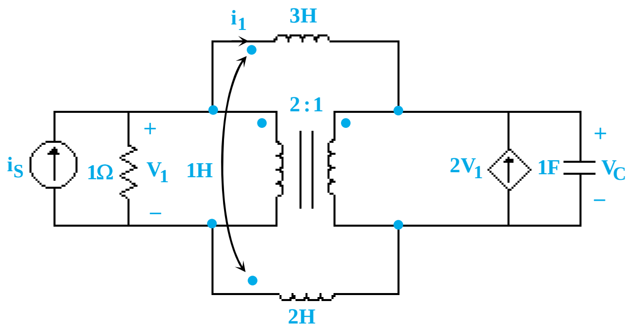
با قرار دادن رابطه (۷) در رابطه (۵) داریم:

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۳}{۴}V_C-\frac{۱}{۴}I_L\right]-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۱}{۲}I_L \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۸}V_C-\frac{۵}{۸}I_L \qquad (۸)$$

با کنار هم قرار دادن روابط (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dV_C}{dt}&=-\frac{۱}{۸}V_C-\frac{۵}{۸}I_L\\ \frac{dI_L}{dt}&=\frac{۳}{۴}V_C-\frac{۱}{۴}I_L\end{aligned} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۸} & -\frac{۵}{۸}\\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

مثال ۱۳: **اگر معادلات حالت مدار روبرو را بر اساس بردار حالت $\begin{bmatrix}V_C\\ i_۱\end{bmatrix}$ بنویسیم، ماتریس ضرایب حالت (A) و ماتریس ضرایب ورودی (B) در کدام گزینه آمده است؟**



۱) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -\frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\end{bmatrix}$

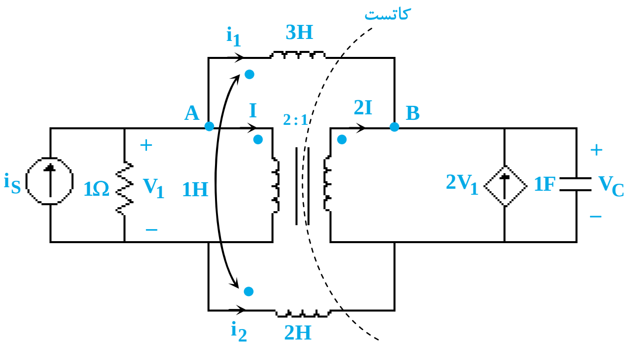
۲) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -\frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\ ۲\end{bmatrix}$

۳) $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\end{bmatrix}$

۴) با توجه به این‌که مدار دارای ۳ عنصر ذخیره‌کننده انرژی است، بردار حالت آن باید دارای ۳ مولفه باشد.

پاسخ: گزینه «۳»

برای حل این مثال در گام اول باید این نکته را مدنظر قرار داد که جریان سلف ۲ هانری وابسته بـه $i_۱$ بـوده و از ایـن رو در مجموعـه متغیرهـای حالـت مـدار وارد نمی‌شود. علت این است که سلف‌های ۲ و ۳ هانری تشکیل یک کاتست می‌دهنـد؛ پس مطابق شکل روبرو می‌توان نوشت:



$$i_۱+i_۲=۰\Rightarrow i_۲=-i_۱ \text{ و } \dot{i}_۲=-\dot{i}_۱ \qquad (۱)$$

با توجه به نسبت دور ترانس داریم:

$$V_۱=۲V_C \qquad (۲)$$

حال در گره‌های A و B روابط KCL را می‌نویسیم:

$$KCL(A): i_S=\frac{۲V_C}{۱}+I+i_۱\Rightarrow I=i_S-۲V_C-i_۱ \qquad (۳)$$

$$KCL(B): i_۱+۲I+۲\times۲V_C=\dot{V}_C\xrightarrow{(۳)}\dot{V}_C=i_۱+۲\times(i_S-۲V_C-i_۱)+۴V_C\Rightarrow\dot{V}_C=-i_۱+۲i_S \qquad (۴)$$

اکنون در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم:

$$-V_۱+V_{۳H}+V_C-V_{۲H}=۰\xrightarrow{(۱)}-۲V_C+۳\dot{i}_۱+(-\dot{i}_۱)+V_C-[۲(-\dot{i}_۱)+\dot{i}_۱]=۰\Rightarrow -V_C+۳\dot{i}_۱=۰\Rightarrow\dot{i}_۱=\frac{V_C}{۳} \qquad (۵)$$

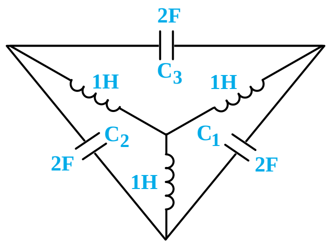
حال روابط (۴) و (۵) را به صورت ماتریسی نوشته و A و B را استخراج می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{i}_۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ i_۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\ ۰\end{bmatrix}i_S\Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ \frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{B}=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\end{bmatrix}$$

نکته۳: در صورتی که در یک مدار حلقه خازنی باشد، برای انتخاب درخت مناسب، یکی از سلف‌ها را وارد درخت کرده و یکی از خازن‌ها را از درخت حذف می‌کنیم و جزو لینک‌ها در نظر می‌گیریم. در این حالت برای خازنی که جزو لینک‌ها است، به جای نوشتن معادله کاتست اساسی، باید معادله حلقه اساسی نوشته شود.

نکته۴: در صورتی که در یک مدار، کاتست سلفی وجود داشته باشد، برای انتخاب درخت مناسب، یکی از سلف‌ها را از لینک‌ها خارج کرده و جزو شاخه‌های درخت در نظر می‌گیریم. در این حالت برای سلف وارد شده در درخت به جای نوشتن معادله حلقه اساسی، باید معادله کاتست اساسی نوشته شود.

مثال۱۴: در مدار شکل زیر، ماتریس A در معادلات حالت کدام است؟



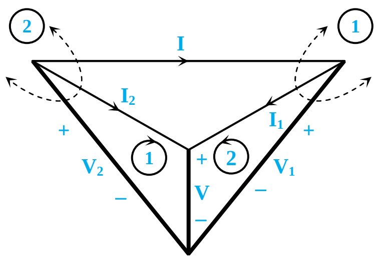
۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید درخت مناسب را انتخاب کنیم، ولی با توجه به حضور یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی در درخت، به جای یک خازن، یک سلف در درخت در نظر گرفته می‌شود و یک خازن از درخت حذف و به جمع لینک‌ها اضافه می‌شود. حال معادلات کاتست‌های اساسی برای خازن‌ها و حلقه‌های اساسی برای سلف‌ها نوشته می‌شود.



$$\text{حلقه اساسی (۱)}:\ L_2\frac{dI_2}{dt} = V_2 - V \qquad \text{کاتست اساسی (۱)}:\ C_1\frac{dV_1}{dt} = -I_1 + I$$

$$\text{حلقه اساسی (۲)}:\ L_1\frac{dI_1}{dt} = V_1 - V \qquad \text{کاتست اساسی (۲)}:\ C_2\frac{dV_2}{dt} = -I_2 - I$$

حال دقت کنید که در معادلات حالت نوشته شده، پارامترهای I و V اضافه بوده و جزو متغیرهای حالت نمی‌باشند. لذا باید با نوشتن روابط KVL یا KCL مناسب، متغیرهای V و I را برحسب متغیرهای حالت بدست آوریم و در معادلات حالت جایگزین کنیم. با توجه به نکته ذکر شده قبل از این مثال، برای خازنی که جزو لینک در نظر گرفته شده است، معادله حلقه اساسی می‌نویسیم.

$$(\text{حلقه اساسی شامل } C_3 \text{ و } C_1 \text{ و } C_2):\ V_{C_3} = V_{C_2} - V_{C_1} = V_2 - V_1 \quad \text{و} \quad I = C_3\frac{dV_{C_3}}{dt} \Rightarrow I = \frac{2dV_{C_3}}{dt}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2d(V_2 - V_1)}{dt} \Rightarrow I = \frac{2dV_2}{dt} - \frac{2dV_1}{dt} \quad (*)$$

با نوشتن رابطه کاتست اساسی برای سلف وارد شده در درخت در گره وسط مدار، داریم:

$$\frac{1}{1H}\int V dt = I_1 + I_2$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم:

$$V = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \quad (**)$$

با جایگذاری رابطه (*) در معادلات کاتست‌های اساسی بدست آمده در ابتدای حل داریم:

$$\text{کاتست اساسی (۱)}:\ \frac{2dV_1}{dt} = -I_1 + \frac{2dV_2}{dt} - \frac{2dV_1}{dt} \Rightarrow \frac{dV_1}{dt} = -\frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2}\frac{dV_2}{dt} \qquad (1)$$

$$\text{کاتست اساسی (۲)}:\ \frac{2dV_2}{dt} = -I_2 - \left(\frac{2dV_2}{dt} - \frac{2dV_1}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dV_2}{dt} = -\frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{2}\frac{dV_1}{dt} \qquad (2)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{dV_۱}{dt}=-\frac{۱}{۳}I_۱-\frac{۱}{۶}I_۲ \qquad (۳)$$

$$\frac{dV_۲}{dt}=-\frac{۱}{۶}I_۱-\frac{۱}{۳}I_۲ \qquad (۴)$$

با جایگذاری معادله (**) در معادله حلقه‌های اساسی بدست آمده در ابتدای حل سؤال داریم:

$$\text{حلقه اساسی (۱)}: \frac{dI_۲}{dt}=V_۲-(\frac{dI_۱}{dt}+\frac{dI_۲}{dt}) \Rightarrow \frac{dI_۲}{dt}=\frac{۱}{۲}V_۲-\frac{۱}{۲}\frac{dI_۱}{dt} \qquad (۵)$$

$$\text{حلقه اساسی (۲)}: \frac{dI_۱}{dt}=V_۱-(\frac{dI_۱}{dt}+\frac{dI_۲}{dt}) \Rightarrow \frac{dI_۱}{dt}=\frac{۱}{۲}V_۱-\frac{۱}{۲}\frac{dI_۲}{dt} \qquad (۶)$$

با ترکیب روابط (۶) و (۵) داریم:

$$\frac{dI_۱}{dt}=\frac{۲}{۳}V_۱-\frac{۱}{۳}V_۲ \qquad (۷)$$

$$\frac{dI_۲}{dt}=-\frac{۱}{۳}V_۱+\frac{۲}{۳}V_۲ \qquad (۸)$$

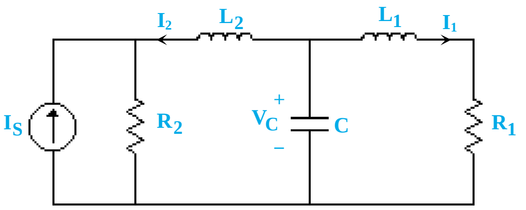
با نوشتن روابط (۷) و (۸) و (۳) و (۴) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix}\frac{dV_۱}{dt}\\ \frac{dV_۲}{dt}\\ \frac{dI_۱}{dt}\\ \frac{dI_۲}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&-\frac{۱}{۳}&-\frac{۱}{۶}\\ ۰&۰&-\frac{۱}{۶}&-\frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۳}&-\frac{۱}{۳}&۰&۰\\ -\frac{۱}{۳}&\frac{۲}{۳}&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_۱\\ V_۲\\ I_۱\\ I_۲\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}۰&۰&-\frac{۱}{۳}&-\frac{۱}{۶}\\ ۰&۰&-\frac{۱}{۶}&-\frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۳}&-\frac{۱}{۳}&۰&۰\\ -\frac{۱}{۳}&\frac{۲}{۳}&۰&۰\end{bmatrix}$$

نکته۵: در صورتی که در مدار به جای ولتاژ خازن، بار خازن و به جای جریان سلف، شار سلف به عنوان متغیر حالت انتخاب شود، برطبق روش ذکر شده در ابتدای فصل، روابط معادلات حالت را برحسب ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها محاسبه کرده و در نهایت از روابط زیر استفاده کرده و به جای ولتاژ خازن، بار خازن و به جای جریان سلف، شار سلف را جایگزین می‌کنیم و معادلات حالت را بازنویسی می‌کنیم.

$$V_L=\frac{d\phi}{dt} \qquad I_L=\frac{\phi}{L} \qquad V_C=\frac{Q}{C} \qquad I_C=\frac{dQ}{dt}$$

مثال۱۵: در مدار زیر کدام گزینه بیانگر معادلات حالت است؟ (شار سلف‌ها و بار خازن به عنوان متغیر حالت انتخاب شود)



$$\begin{cases}\mathbf{R_۱=۳\Omega}\\ \mathbf{R_۲=۴\Omega}\\ \mathbf{L_۱=۲H}\\ \mathbf{L_۲=۱H}\\ \mathbf{C=۲F}\end{cases}$$

(۱
$$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲}&۰&۱\\ ۰&-۱&۲\\ -۱&-\frac{۱}{۲}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۸\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

(۲
$$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲}&۰&\frac{۱}{۲}\\ ۰&-۴&\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲}&-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۴\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

(۳
$$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰&\frac{۱}{۴}\\ -۲&۰&۱\\ ۰&-۱&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸\\ -۱\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

(۴
$$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰&\frac{۱}{۴}\\ -۲&-۱&۱\\ ۰&۱&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}.I_S$$