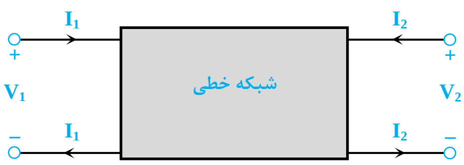
فصل یازدهم

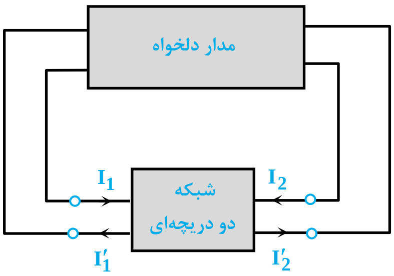
«شبکه‌های دو دریچه‌ای»



بنا به تعریف، یک شبکه دو دریچه‌ای را می‌توان به عنوان یک شبکه، داخل یک جعبه سیاه در نظر گرفت که تنها دو دریچه ورودی و خروجی آن قابل دسترس است. در حالت کلی ما شبکه‌های دو دریچه‌ای را متشکل از عناصری مانند R، L، C، ترانسفورماتورها و منابع وابسته می‌دانیم و همواره یک زوج ترمینال به عنوان ورودی و یک زوج ترمینال به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است که یک شبکه دو دریچه‌ای، منبع مستقل ندارد.

تذکر ۱: در سؤالات کنکور و کتاب‌های مرجع، شبکه‌های دو دریچه‌ای را **شبکه‌های دوقطبی** (Two Pole) و شبکه‌های **چهارقطبی**(Four terminal) نیز می‌نامند. در این کتاب، هر سه مورد آنها را به کار برده‌ایم که دانشجویان عزیز دچار مشکل نشوند و بدانند هر سه این موارد، با هم یکی هستند.

تذکر ۲: ممکن است شبکه دو دریچه‌ای طوری تحریک گردد که جریان پایه‌های ورودی و خروجی در یک دریچه شبکه برابر نباشند. در این حالت این شبکه دیگر شبکه دو دریچه‌ای به حساب نیامده و نمی‌توان از خواص کلی این شبکه‌ها در تحلیل آن استفاده نمود:



$\underbrace{I_1 \neq I_1'}$ یا $\underbrace{I_2 \neq I_2'}$

شبکه دو دریچه‌ای خواص خود را از دست می‌دهد.

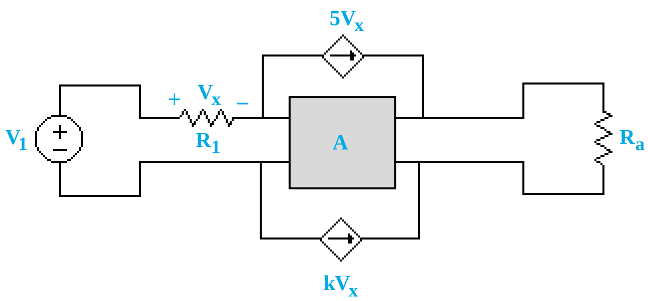
مثال ۱: اگر بخواهیم شبکه A یک دوقطبی باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱۰

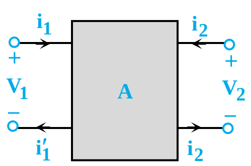
۲) ۵

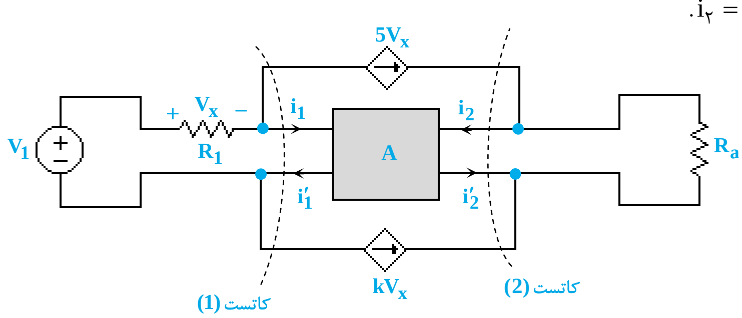
۳) ۵−

۴) ۱۰−



پاسخ: گزینه «۳» برای این که یک مجموعه ۴ سر، یک دوقطبی باشد، باید جریان‌های ورودی و خروجی از قطب‌ها برابر باشند؛ یعنی در شکل‌های زیر باید $i_1 = i_1'$ و $i_2 = i_2'$.





با در نظر گرفتن کاتست‌های (۱) و (۲) در شکل فوق می‌توان نوشت:

$$i_1 + kV_x + 5V_x = i_1' \xrightarrow{i_1 = i_1'} k = -5 \qquad i_2 = i_2' + kV_x + 5V_x \xrightarrow{i_2 = i_2'} k = -5$$

پس اگر k برابر ۵- باشد، شبکه A یک دوقطبی خواهد بود.

انواع پارامترهای شبکه‌های دو دریچه‌ای

چهار نوع از پارامترهای شبکه‌های دو دریچه‌ای مرسوم عبارتند از:

۱) پارامترهای امپدانس (Z) ، ۲) پارامترهای ادمیتانس (Y) ، ۳) پارامترهای هایبرید (H) ، ۴) پارامترهای انتقال (T)

پارامترهای امپدانس

در صورتی که شبکه دوقطبی N به شکل زیر در نظر گرفته شود که در آن جریان‌های I_1 و I_2، متغیرهای مستقل و ولتاژهای V_1 و V_2 متغیرهای وابسته باشند، همواره روابط زیر برای آنها برقرار است: (به جهت جریان‌ها دقت شود)

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

روش محاسبه پارامترهای Z به صورت زیر است:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2 = 0}$$ **(امپدانس ورودی در حالت مدار باز بودن خروجی)**

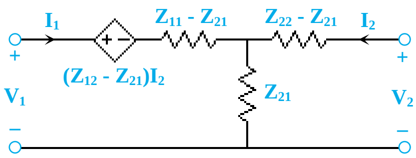
$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1 = 0}$$ **(امپدانس تبدیل مستقیم)**

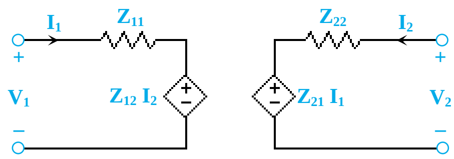
$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = 0}$$ **(امپدانس تبدیل معکوس)**

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1 = 0}$$ **(امپدانس خروجی در حالت ورودی مدار باز)**

پارامترهای امپدانس همگی برحسب اهم (Ω) بیان می‌شوند.

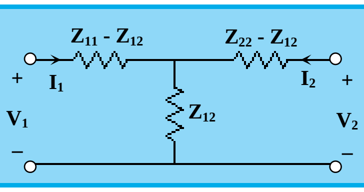
با استفاده از پارامترهای Z، مدارهای معادل زیر را در حالت کلی می‌توان جایگزین شبکه N نمود:





نکته ۱: در صورت تساوی Z_{12} و Z_{21}، دوقطبی را متقابل می‌گویند و در این صورت مدار معادل ذکر شده با پارامترهای Z، به صورت مقابل ساده می‌شود:

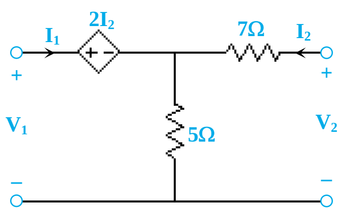
مدار معادل بدست آمده همان مدار معادل T برای شبکه‌های متقابل است.



تذکر ۳: به دانشجویان توصیه می‌شود روابط فوق را حفظ نکنند و فقط معادلات اصلی پارامترها را به خاطر بسپارند. واضح است که از روی معادلات به راحتی می‌توان هر کدام از پارامترها را بیان نمود.

تذکر ۴: در حل بعضی مسائل که معمولاً بیش از یک پارامتر مدنظر است، بهتر است با نوشتن معادلات KCL و KVL مناسب در ورودی و خروجی دوقطبی، فرم معادلات اصلی را بنویسیم و از روی این معادلات، مقادیر پارامترها را تعیین نمائیم.

مثال ۲: در دوقطبی شکل زیر، مقدار $Z_{11} + Z_{21}$ چند اهم است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۰
۳) ۵
۴) ۷

پاسخ : گزینه «۲» **روش اول:** با نوشتن KVL در مش‌های سمت چپ و راست داریم:

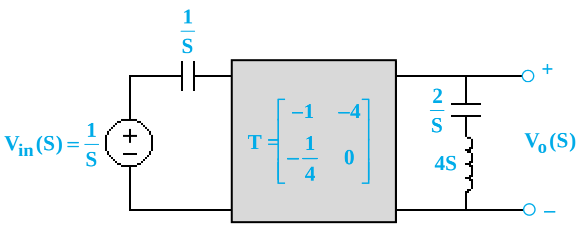
$$\begin{cases} V_1 = 2I_2 + 5(I_1 + I_2) \\ V_2 = 7I_2 + 5(I_1 + I_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 5I_1 + 7I_2 \\ V_2 = 5I_1 + 12I_2 \end{cases}$$

لذا $Z_{11} = 5\Omega$ و $Z_{21} = 5\Omega$ است و $Z_{11} + Z_{21} = 5 + 5 = 10\Omega$ خواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جدول ارائه شده در متن درس برای ماتریس‌های T مربوط به مدارات ژیراتور و ترانسفورمر و المان سری، ماتریس T مربوط به آنها را در هم ضرب کرده و مدار را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$T\ (\text{ترانسفورماتور})=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\ ,\ T_{1\Omega}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\ ,\ T_G=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow T_T=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ -\frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ -\frac{۱}{۴} & ۰\end{bmatrix}$$

حال با توجه به فرمول بهره ولتاژ با وجود ماتریس T داریم:

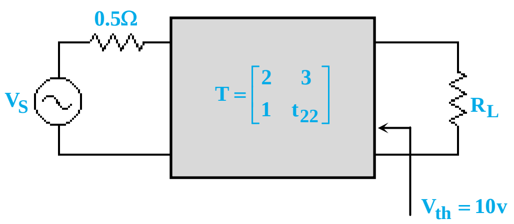


$$T=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\ ,\ \frac{V_o}{V_{in}}=\frac{Z_L}{(A+CZ_S)Z_L+B+DZ_S}$$

$$H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{\frac{۲}{S}+۴S}{(-۱-\frac{۱}{۴S})(\frac{۲}{S}+۴S)+(-۴)}=\frac{۴S^۳+۲S}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}\quad \text{و}\quad V_{in}=u(t)\Rightarrow V_{in}(S)=\frac{۱}{S}$$

$$V_o(S)=H(S).V_{in}(S)=\frac{۴S^۳+۲S}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{S}\Rightarrow V_o(t=۰^+)=\lim_{S\to\infty}S\,V_o(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{S(۴S^۳+۲S)}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{S}\Rightarrow \mathbf{V_o(t=۰^+)=-۱v}$$

مثال ۶۳: در مدار زیر بار R_L توان حداکثر ۲۰ w را جذب می‌کند. حال درایه $t_{۲۲}$ از ماتریس T کدام است؟



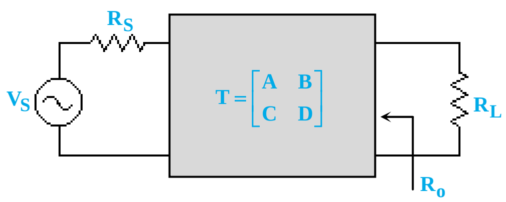
۱) ۱/۲۵

۲) ۱

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در صورت جذب توان حداکثر توسط بار، مقدار R_L با مقدار R_{th} از دو سر آن یعنی R_o برابر است. حال داریم:



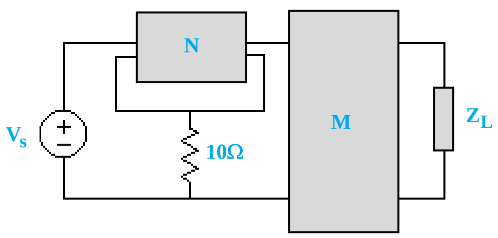
$$P(\max)=\frac{V_{th}^۲}{۴R_{th}}\Rightarrow ۲۰=\frac{۱۰^۲}{۴\times R_{th}}\Rightarrow R_{th}=۱/۲۵\Omega$$

$$R_o=\frac{DR_S+B}{CR_S+A}=R_{th}=۱/۲۵\Omega\Rightarrow ۱/۲۵=\frac{D\times ۰/۵+۳}{۱\times ۰/۵+۲}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{D=t_{۲۲}=۰/۲۵}$$

مثال ۶۴: ماتریس امپدانس دوقطبی N به صورت $\begin{bmatrix}۷S & ۶S\\ ۶S & ۸S\end{bmatrix}$ و ماتریس انتقال دوقطبی M به صورت $\begin{bmatrix}۲۰S^۲+۱ & ۱۰S\\ ۴۰S^۳+۲S & ۲۰S^۲+۱\end{bmatrix}$ داده شده است.

اگر منبع مستقل در حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega=۰/۵\ \frac{Rad}{sec}$ کار کند، امپدانس مدار از دو سر منبع مستقل برابر است با: $(Z_L\to\infty)$

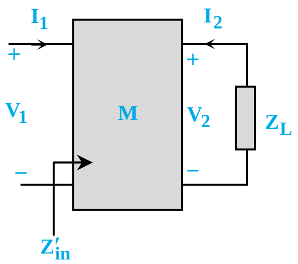


۱) ۰/۵ j اهم

۲) ۵ j اهم

۳) ۰/۵ j+۱۰ اهم

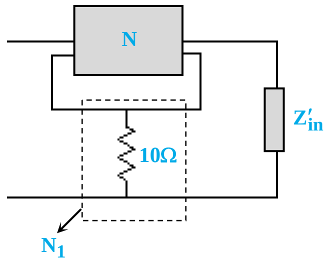
۴) ۵ j+۱۰ اهم



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا امپدانس ورودی از دو سر دوقطبی M به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} = -\frac{V_2}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_1 = t_{11} V_2 \\ I_1 = t_{21} V_2 \end{cases} \Rightarrow Z'_{in} = \frac{t_{11}}{t_{21}}$$

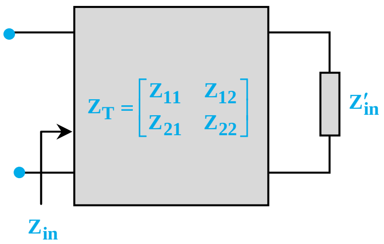
$$\Rightarrow Z'_{in} = \frac{20S^2+1}{40S^3+2S} = \frac{1}{2S}$$



حال دقت شود که دوقطبی‌های N و N_1 با هم سری هستند. پس داریم:

$$Z_{N_1} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[Z_T] = [Z_N] + [Z_{N_1}] = \begin{bmatrix} 7S+10 & 6S+10 \\ 6S+10 & 8S+10 \end{bmatrix}$$



حال با توجه به نکته‌ی زیر داریم:

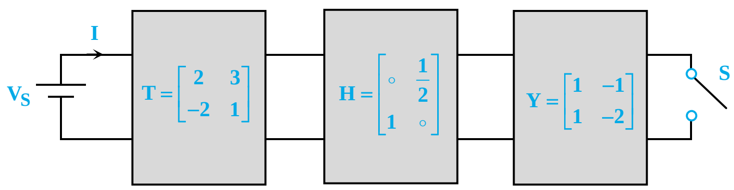
$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z'_{in}}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = (7S+10) - \frac{(6S+10)^2}{8S+10+\frac{1}{2S}}$$

در حالت دائمی سینوسی داریم: $(S = 0.5j)$

$$Z_{in} = (3.5j+10) - \frac{(3j+10)^2}{4j+10-j} = 3.5j+10-3j-10 = 0.5\,j\Omega$$

مثال ۶۵: در مدار زیر هنگامی که کلید S بسته است، جریان I برابر $\frac{1}{2}$ آمپر می‌باشد. اگر کلید باز شود، جریان I چند آمپر خواهد بود؟



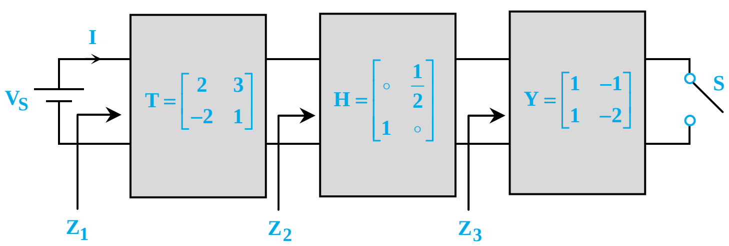
۱) $-\frac{2}{3}$

۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست باید امپدانس ورودی را از دید منبع ولتاژ در دو حالت مورد نظر محاسبه کنیم. در محاسبه اول مقدار مجهول منبع ولتاژ به دست می‌آید و در محاسبه بعدی می‌توان جریان I را با استفاده از مقدار منبع ولتاژ و امپدانس مدار به دست آورد. برای حل سریع‌تر تست از روابط بیان شده برای محاسبه امپدانس ورودی شبکه‌های دوقطبی استفاده می‌کنیم. ابتدا با فرض بسته بودن کلید، مقادیر Z_1 ، Z_2 و Z_3 را محاسبه می‌کنیم:



$$Z_3 = \left(y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+Z_L^{-1}}\right)^{-1} \xrightarrow{Z_L=0} Z_3 = \left(1 - \frac{-1\times 1}{-2+\infty}\right)^{-1} = 1\Omega$$

$$Z_2 = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}+Z_L^{-1}} \xrightarrow{Z_L=Z_3=1\Omega} Z_2 = 0 - \frac{\frac{1}{2}\times 1}{0+1} = -\frac{1}{2}\Omega$$

$$Z_1 = \frac{AZ_L+B}{CZ_L+D} \xrightarrow{Z_L=Z_2=-\frac{1}{2}\Omega} Z_1 = \frac{2\times -\frac{1}{2}+3}{-2\times -\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{2} = 1\Omega$$

حال می‌توانیم مقدار V_S را محاسبه کنیم:

$$V_S = Z_1 I = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,v$$

اکنون با فرض باز بودن کلید دوباره مقادیر Z_1، Z_2 و Z_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_3 = \left(y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+Z_L^{-1}}\right)^{-1} \xrightarrow{Z_L=\infty} Z_3 = \left(1-\frac{-1\times 1}{-2+0}\right)^{-1} = 2\Omega$$

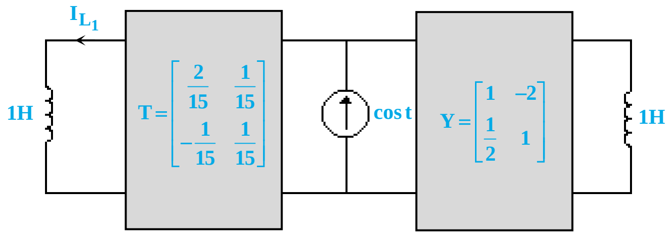
$$Z_2 = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}+Z_L^{-1}} \xrightarrow{Z_L=Z_3=2\Omega} Z_2 = 0-\frac{\frac{1}{2}\times 1}{0+\frac{1}{2}} = -1\Omega$$

$$Z_1 = \frac{AZ_L+B}{CZ_L+D} \xrightarrow{Z_L=Z_2=-1\Omega} Z_1 = \frac{2\times -1+3}{-2\times -1+1} = \frac{1}{3}\Omega$$

در نهایت می‌توان جریان I را به شکل روبرو محاسبه نمود:

$$\mathbf{I} = \frac{V_S}{Z_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\mathbf{A}$$

مثال ۶۶: در مدار زیر، جریان I_{L_1} در حالت دائمی بر حسب آمپر کدام است؟



۱) ۰/۱cos t

۲) ۰/۱sin t

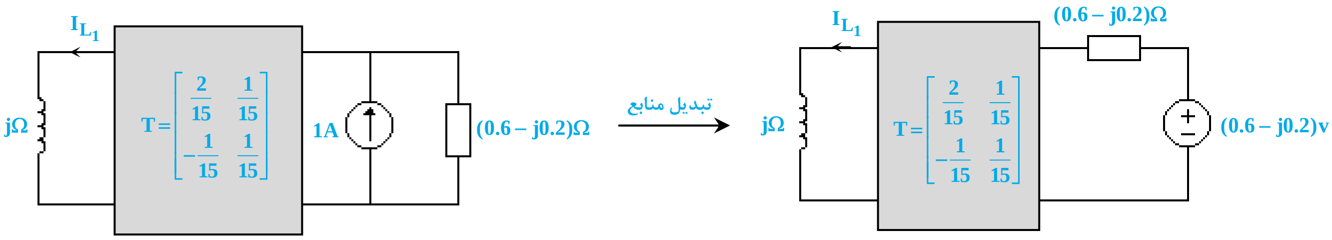
۳) −۰/۱cos t

۴) −۰/۱sin t

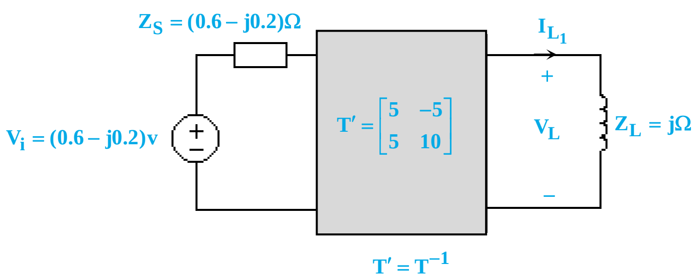
پاسخ: گزینه «۲» از آنجایی که می‌خواهیم جریان سلف سمت چپ مدار را محاسبه کنیم، ابتدا مدار سمت راست منبع جریان را با امپدانس معادلش جایگزین می‌کنیم. این امپدانس از طریق رابطه زیر در حالت فازوری قابل محاسبه است:

$$Z = \left[y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+\frac{1}{Z_L}}\right]^{-1} \xrightarrow{Z_L=j\Omega} Z = \left[1-\frac{-2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{j}}\right]^{-1} = \left[\frac{j2+1}{j+1}\right]^{-1} = \frac{j+1}{j2+1} = (0/6 - j0/2)\Omega$$

بنابراین مداری به صورت زیر خواهیم داشت (در حالت فازوری):



مدار فوق را می‌توان به مدار زیر تبدیل نمود:



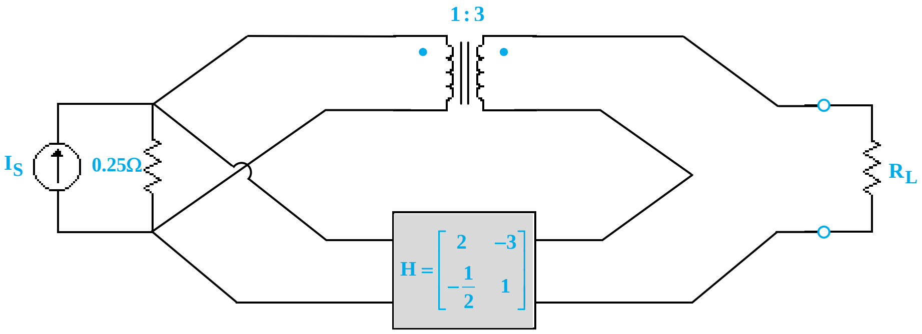
در این مدار جای ورودی و خروجی‌ها عوض شده و ماتریس انتقال دو قطبی با معکوسش جایگزین شده است.

حال طبق روابطی که قبل از این دیدیم، با محاسبه بهره ولتاژ مدار، ولتاژ و به دنبال آن جریان سلف را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{V_L}{V_i}=\frac{Z_L}{(A+CZ_S)Z_L+B+DZ_S}\xrightarrow{Z_L=j\Omega\,,\,Z_s=(۰/۶-j۰/۲)\Omega}\frac{V_L}{V_i}=\frac{j}{[۵+۵\times(۰/۶-j۰/۲)]\times j-۵+۱۰\times(۰/۶-j۰/۲)}=\frac{j}{۲+j۶}$$

$$\Rightarrow V_L=\frac{j}{۲+j۶}\times V_i=\frac{j}{۲+j۶}\times(۰/۶-j۰/۲)=۰/۱(v)\;\Rightarrow\; I_L=\frac{V_L}{j}=-j۰/۱\,(A)\;\Rightarrow\; \mathbf{I_L(t)=۰/۱\sin t\,(A)}$$

مثال ۶۷: در مدار زیر، مقدار R_L برای این که حداکثر توان ممکن را جذب کند، کدام است؟



۱) ۰/۵ اهم

۲) ۱ اهم

۳) ۲ اهم

۴) ۴ اهم

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این تست باید مقاومت معادل مدار را از دید R_L به دست آوریم. برای این کار می‌توانیم از ماتریس هایبرید کل شبکه که متشکل از دو عدد دوقطبی شامل یک ترانسفورمر و یک دوقطبی دیگر با ماتریس هایبرید معلوم است، استفاده کنیم. با توجه به این که این دوقطبی‌ها در ورودی موازی و در خروجی سری شده‌اند، روابط زیر برقرار می‌باشد:

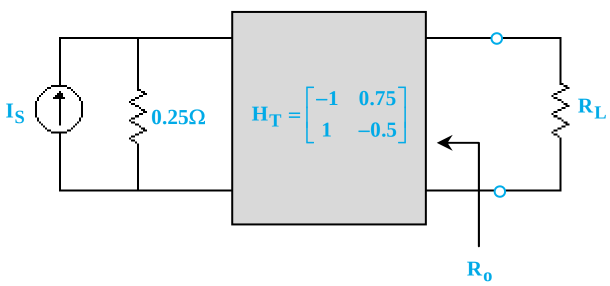
$$G_T=G_۱+G_۲\;\Rightarrow\; H_T^{-۱}=H_۱^{-۱}+H_۲^{-۱}$$

$H_۱$: ماتریس هایبرید ترانسفورمر ، $H_۲$: ماتریس هایبرید دوقطبی پایینی

حال با داشتن ماتریس هایبرید دوقطبی‌ها، ماتریس هایبرید شبکه را محاسبه می‌کنیم: (ماتریس هایبرید ترانسفورمر در جدول مربوطه، ارائه شده است)

$$H_۱=\begin{bmatrix}۰ & \frac{۱}{۳}\\ -\frac{۱}{۳} & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow H_۱^{-۱}=\begin{bmatrix}۰ & -۳\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\quad,\quad H_۲=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -\frac{۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow H_۲^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_T=[H_۱^{-۱}+H_۲^{-۱}]^{-۱}=\left(\begin{bmatrix}۰ & -۳\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\right)^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۴\end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰/۷۵\\ ۱ & -۰/۵\end{bmatrix}$$



حال با استفاده از رابطه زیر مقاومت معادل شبکه را از دید R_L محاسبه می‌کنیم:

$$R_o=\left[h_{۲۲}-\frac{h_{۱۲}h_{۲۱}}{h_{۱۱}+Z_S}\right]^{-۱}=\left[-۰/۵-\frac{۰/۷۵\times۱}{-۱+۰/۲۵}\right]^{-۱}=(۰/۵)^{-۱}=۲\Omega$$

بنابراین R_Lای که حداکثر توان را جذب می‌کند، برابر ۲ اهم می‌باشد.