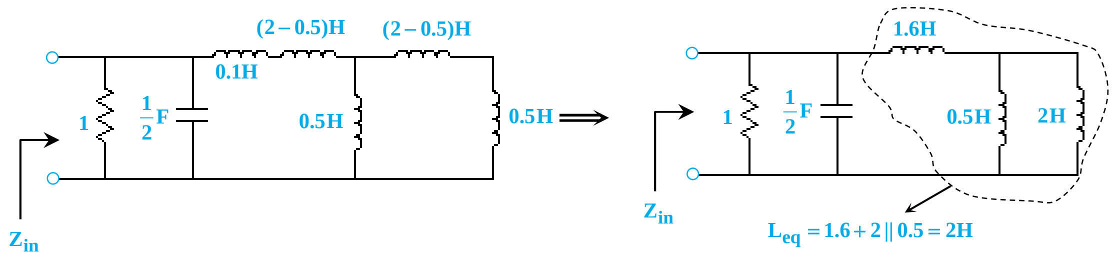
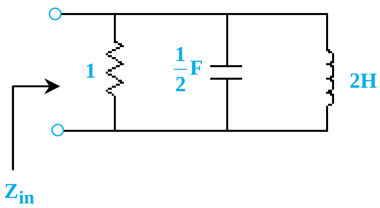
آزمون فصل نهم

۱ـ گزینه «۲» ابتدا مدل T سلف‌های تزویج را به کار می‌بریم: $(M = k\sqrt{L_1 L_2} = \frac{1}{2})$



بنابراین داریم:



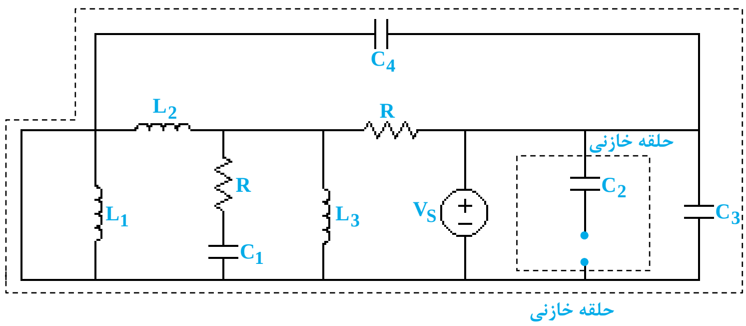
$$Z_{in}(s) = 1 || \frac{2}{s} || 2s = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2s}{(s+1)^2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود Z_{in} دارای یک قطب مکرر در $s = -1$ و یک صفر در $s = 0$ و یک صفر در بی‌نهایت (به دلیل این که درجه‌ی مخرج یک درجه از صورت بیشتر می‌باشد) است.

۲ـ گزینه «۴» ابتدا تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را بدون ساده کردن به دست می‌آوریم.

۳ = تعداد سلف		۴ = تعداد خازن

تعداد کاتست‌های سلفی و حلقه‌های خازنی از روی شکل به صورت زیر است:



کاتست سلفی در مدار وجود ندارد، اما دو حلقه خازنی داریم. بنابراین مرتبه این مدار برابر است با:

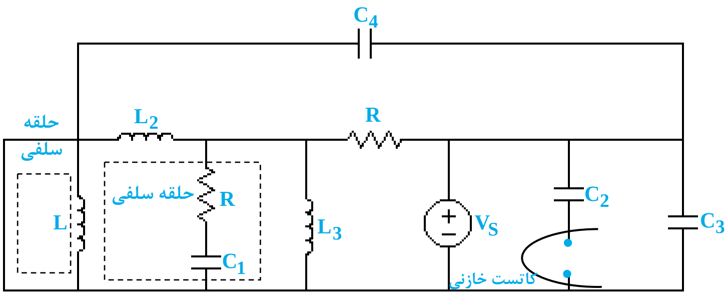
مرتبه مدار = تعداد سلف + تعداد خازن − تعداد کاتست سلفی − تعداد حلقه خازنی

مرتبه مدار = ۳ + ۴ − ۰ − ۲ = ۵

حال تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر مدار را به دست می‌آوریم.

تعداد فرکانس صفر = تعداد کاتست خازنی + تعداد حلقه سلفی

با توجه به مدار زیر ۱ کاتست خازنی و ۲ حلقه سلفی داریم پس:

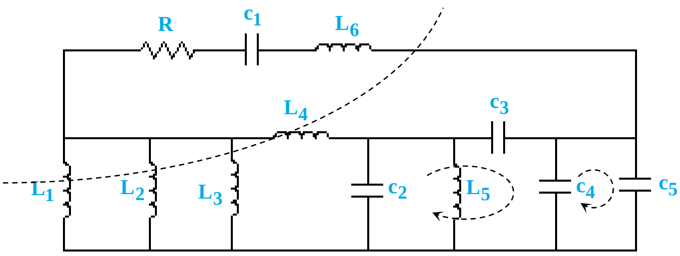


$۳ = ۱ + ۲ =$ تعداد فرکانس صفر

بنابراین تعداد فرکانس غیرصفر برابر است با:

$۲ = ۳ - ۵ =$ تعداد فرکانس صفر − مرتبه مدار = تعداد فرکانس غیرصفر

۳ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی را محاسبه می‌کنیم:

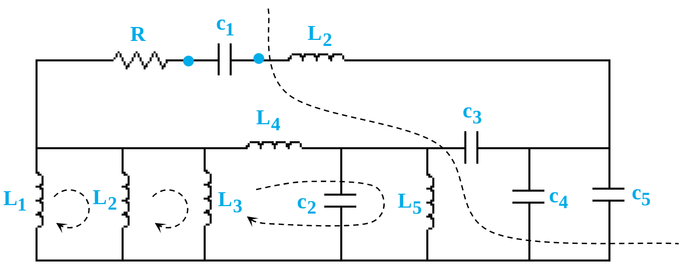


$۱۱ =$ تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی

حال بـه تعـداد حلقـه‌هـای خـازنی و کاتسـت‌هـای سـلفی از تعـداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی کم می‌کنیم تـا درجه‌ی مـدار را بـه دست آوریم:

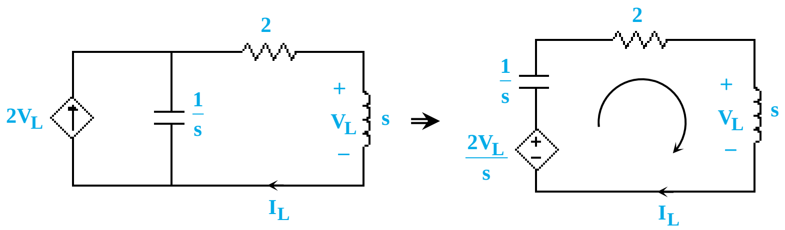
$۸ = ۲ - ۱ - ۱۱ =$ تعداد فرکانس طبیعی = درجه‌ی مدار

۴ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی تعداد فرکانس طبیعی صفر کافی است تعداد حلقه‌های سلفی و کاتست‌های خازنی مدار را به دست آوریم:



$۴ =$ تعداد فرکانس طبیعی صفر

۵ـ گزینه «۳» ابتدا منبع جریان مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



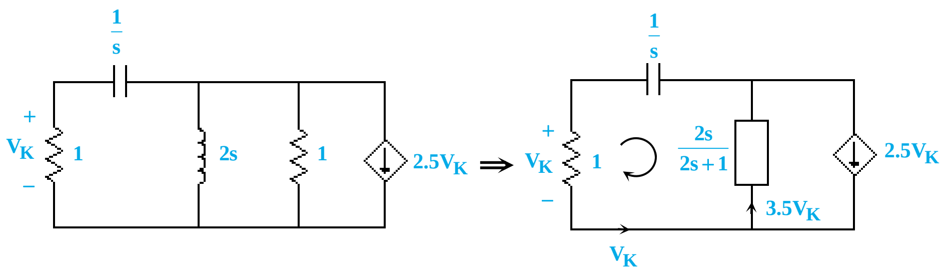
با توجه به مدار مشاهده می‌شود: $V_L = sI_L$

$$KVL: -\frac{۲V_L}{s} + \frac{۱}{s}I_L + ۲I_L + sI_L = ۰ \Rightarrow -۲I_L + \frac{۱}{s}I_L + ۲I_L + sI_L = ۰ \Rightarrow \frac{s^۲+۱}{s}I_L = ۰ \Rightarrow (s^۲+۱)I_L = ۰ \to \alpha = ۰ \to$$ حالت بی‌اتلاف

۶ـ گزینه «۲» ابتدا تبدیل لاپلاس ورودی را به دست می‌آوریم: $e^{-\alpha t} \xrightarrow{L} \frac{۱}{s+\alpha}$

برای اینکه فرکانس $s = -\alpha$ در خروجی ظاهر نشود، باید $(s+\alpha)^{-۱}$ مربوط به ورودی با $s+\alpha$ مربوط به صفر تابع تبدیل مدار ساده شود. از طرفی با توجه به نمودار صفر و قطب مدار، مدار تنها دارای صفر در $s = -۴$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت: $\alpha = ۴$

۷ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

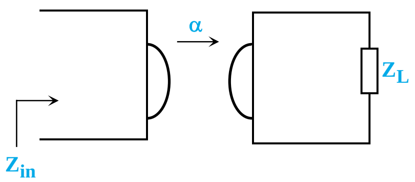


با اعمال KVL داریم:

$$KVL: -V_k - \frac{1}{s}V_k - \frac{2s}{2s+1}\times 3/5\, V_k = 0 \Rightarrow [\frac{s+1}{s} + \frac{7s}{2s+1}]V_k = 0 \Rightarrow [\frac{9s^2+3s+1}{s(2s+1)}]V_k = 0$$

معادله‌ی مشخصه: $9s^2+3s+1=0 \rightarrow s^2+\frac{1}{3}s+\frac{1}{9}=0 \rightarrow$ پهنای باند $=2\alpha=\frac{1}{3}$

۸ـ گزینه «۲» ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر ژیراتور را به دست می‌آوریم. می‌دانیم:

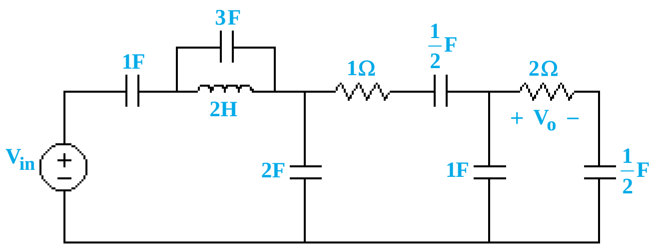


$$Z_{in} = \frac{\alpha^2}{Z_L}$$

در اینجا Z_L ما در حوزه لاپلاس برابر با $4/5S$ می‌باشد. بنابراین Z_{in} برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{(3)^2}{4/5S} = \frac{2}{S} \equiv \frac{1}{2}F$$ یک خازن به ظرفیت

بنابراین مدار به‌صورت شکل زیر ساده می‌شود:



(تعداد کات‌ست سلفی ـ تعداد حلقه خازنی ـ تعداد خازن + تعداد سلف)= تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار بالا

در این مدار ۱ سلف، ۶ خازن، یک حلقه خازنی (شامل خازن 1F و 3F و 2F و منبع V_{in}) و صفر کات‌ست سلفی داریم. بنابراین تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار برابر با $1+6-1=6$ می‌باشد.

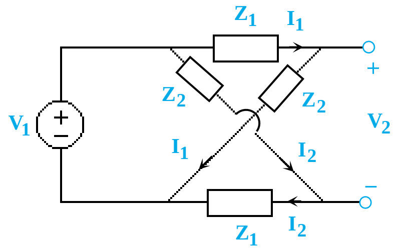
حال سراغ تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر می‌رویم. تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر برابر است با: (تعداد حلقه سلفی + تعداد کات ست خازنی)

در مدار فوق حلقه سلفی نداریم، اما خازن‌های $\frac{1}{2}$F و 1F و $\frac{1}{2}$F و همچنین خازن‌های $\frac{1}{2}$F و 2F و 1F هر کدام تشکیل یک کات‌ست خازنی را می‌دهد.

بنابراین ۶ فرکانس طبیعی داریم که دو تا از آن‌ها صفر است. اما فرکانس‌های طبیعی در حالی قطب‌های تابع تبدیل $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}$ هستند که ریشه صورت $H(S)$ نباشند.

اگر $S=0$ شود به علت وجود خازن چسبیده به منبع V_{in}، خازن مدار باز شده و V_o برابر با صفر می‌شود. پس $S=0$ نمی‌تواند قطب تابع تبدیل $H(S)$ باشد، زیرا باید در صورت $H(S)$ عاملی از توان S باشد. پس ریشه‌های مخرج برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر، یعنی ۴ می‌باشد که هیچ‌کدام از آنها صفر نیست.

۹ـ گزینه «۳» ابتدا تابع تبدیل $\frac{V_2}{V_1}$ را برحسب Z_1 و Z_2 محاسبه می‌کنیم (شکل زیر):



حال با اعمال KVL در حلقه‌های ورودی و خروجی داریم:

$$V_1 = (Z_1 + Z_2)I_2 = (Z_1 + Z_2)I_1 \Rightarrow I_1 = I_2$$

$$V_2 = Z_2 I_1 - Z_1 I_2 = (Z_2 - Z_1)I_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

از طرفی داریم:

$$Z_1 = \frac{1}{s} \| s = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{و} \quad Z_2 = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2+1}{s}$$

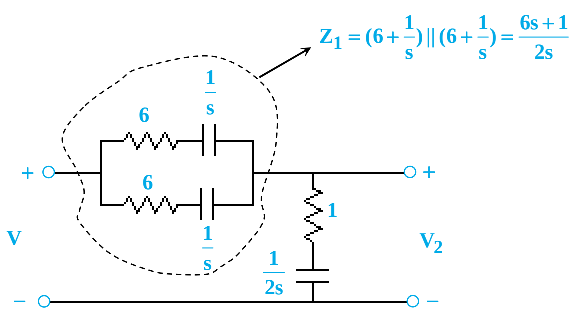
بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{s^2+1}{s} - \frac{s}{s^2+1}}{\frac{s^2+1}{s} + \frac{s}{s^2+1}} = \frac{s^4+s^2+1}{s^4+3s^2+1}$$

معادله‌ی مشخصه: $s^4 + 3s^2 + 1 = 0 \rightarrow s^2 = -0/38, -2/62 \rightarrow s = \pm j\,0/6\,, \pm j1/61$

۱۰ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم (دقت شود به دلیل برقراری پل وتسون از سلف 1H، جریانی عبور نمی‌کند).

حال با تقسیم ولتاژ داریم:



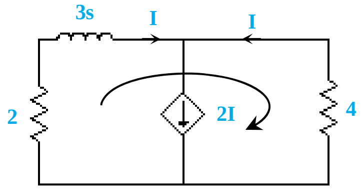
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1+\frac{1}{2s}}{\frac{6s+1}{2s}+1+\frac{1}{2s}} = \frac{\frac{2s+1}{2s}}{\frac{8s+2}{2s}} = \frac{2s+1}{8s+2} \rightarrow P = -\frac{1}{4}\ ,\ Z = -\frac{1}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۱» با توجه به شکل مدار مشاهده می‌شود که سه سلف به صورت موازی با خروجی قرار گرفته‌اند. بنابراین تابع انتقال دارای صفر مرتبه ۳ در فرکانس $s = 0$ می‌باشد. از طرفی ۲ شاخه‌ی LC موازی هم در مدار وجود دارد. بنابراین تابع انتقال دارای ۲ صفر دیگر نیز در فرکانس $s = \pm \frac{j}{\sqrt{1 \times 1}} = \pm j$ می‌باشد.

۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به نمودار قطب و صفر مشاهده می‌شود که تابع شبکه یک صفر در $\omega = 0$ دارد، پس مقدار تابع شبکه در این فرکانس برابر با صفر می‌باشد. از طرفی تابع شبکه دارای یک صفر مزدوج و یک قطب مزدوج با مقدار حقیقی مخالف صفر است. بنابراین تابع شبکه‌ای دارای مینیمم و ماکزیمم نسبی می‌باشد (دقت شود چون صفر مزدوج روی محور موهومی قرار ندارد، بنابراین اندازه‌ی مینیمم تابع شبکه مخالف صفر است). همچنین با توجه به برابر بودن تعداد صفر و قطب اندازه‌ی تابع شبکه در بی‌نهایت محدود به یک مقدار غیرصفر می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه تابع شبکه صفری در $s = 0$ ندارد، بنابراین اندازه‌ی تابع شبکه در $\omega = 0$ مخالف صفر است. همچنین تابع شبکه دارای یک صفر مزدوج روی محور موهومی می‌باشد، پس اندازه‌ی تابع شبکه دارای یک مینیمم نسبی با اندازه‌ی صفر می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به مدار مشاهده می‌شود یک شاخه‌ی LC سری و یک شاخه‌ی LC موازی وجود دارد. بنابراین تابع انتقال به ترتیب دارای صفرهای $s=\frac{\pm j}{\sqrt{۱\times\frac{۱}{۴}}}=\pm۲j$ و $s=\frac{\pm j}{\sqrt{۱\times۱}}=\pm j$ می‌باشد. از طرفی مدار دارای یک شاخه‌ی RL سری می‌باشد که باعث به وجود آمدن صفر در فرکانس $s=-\frac{R}{L}=-۲$ در تابع انتقال می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح این سؤال می‌باشد.



۱۵ـ گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

با اعمال kvl در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$(۲+۳s)I-۴I=۰ \Rightarrow (۳s-۲)I=۰$$

بنابراین $s=\frac{۲}{۳}$ فرکانس طبیعی مدار می‌باشد (دقت شود مدار از مرتبه‌ی ۱ بوده و فقط ۱ فرکانس طبیعی دارد).

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به مدار مشاهده می‌شود یک شاخه‌ی RL سری در سمت راست مدار وجود دارد که باعث ایجاد صفر تابع انتقال در فرکانس $s=-\frac{R}{L}=-۳$ می‌شود. از طرفی شاخه‌ی LC موازی نیز یک صفر با فرکانس $s=\frac{\pm j}{\sqrt{Lc}}=\pm j$ در تابع انتقال موجود می‌آورد. همچنین خازن ۱ F و سلف ۱ H نیز دو صفر با فرکانس $s=۰$ نیز به وجود می‌آورند.

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به تابع تبدیل داده‌شده، اندازه‌ی این تابع به ازای $s=۰$ و $s=\pm aj$ برابر صفر می‌شود. از طرفی اندازه $H(j\omega)$ در فرکانس $s=\pm۲j$ به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۱۸ـ گزینه «۱» تک‌تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

عبارت الف: شکل (۱) نمی‌تواند مجموعه فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد؛ زیرا مزدوج $(-\frac{۱}{۳}+۲j)$ یعنی $(-\frac{۱}{۳}-۲j)$ در شکل وجود ندارد. شکل (۲) می‌تواند مجموعه فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد. پس این گزینه غلط است.

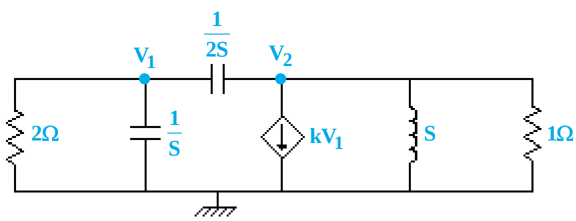
عبارت ب: برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی یک مدار، منابع جریان و ولتاژ مستقل را خاموش می‌کنیم. بنابراین منابع جریان مستقل مدار باز شده و منابع ولتاژ مستقل، اتصال کوتاه. این جابه‌جایی منجر به تغییر ساختار مدار می‌گردد و تعداد فرکانس‌ها تغییر می‌کند. پس عبارت (ب) صحیح است.

عبارت ج: اگر فرکانس‌های طبیعی، سمت چپ و روی محور $j\omega$ به صورت غیرتکراری باشند، پاسخ ورودی صفر کراندار است. پس اگر فرکانس‌های طبیعی روی محور $j\omega$ باشند و در مورد تکراری بودن آن‌ها چیزی گفته نشود، نمی‌توان گفت که همواره پاسخ ورودی صفر کراندار است؛ یعنی ممکن است ریشه‌های روی محور $j\omega$ تکراری بوده و پاسخ کراندار نشود. پس عبارت (ج) هم نادرست است.

عبارت د: ریشه‌های مخرج به شرطی که ریشه‌های صورت تابع تبدیل نباشند، فرکانس طبیعی سیستم هستند. پس این عبارت هم نادرست است.

در بین عبارات بالا فقط یک عبارت درست بود، پس پاسخ تست گزینه (۱) می‌باشد.

۱۹ـ گزینه «۴» می‌دانیم که قطب‌های هر تابع شبکه، زیرمجموعه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند؛ بنابراین ابتدا معادله مشخصه و فرکانس‌های طبیعی را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور معادلات KCL را می‌نویسیم و ماتریس ادمیتانس را به دست می‌آوریم.



$$\frac{V_۱}{۲}+SV_۱+۲S(V_۱-V_۲)=۰ \Rightarrow (۳S+\frac{۱}{۲})V_۱-۲SV_۲=۰$$

$$۲S(V_۲-V_۱)+kV_۱+\frac{V_۲}{S}+V_۲=۰ \Rightarrow (k-۲S)V_۱+(۱+\frac{۱}{S}+۲S)V_۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳S+\frac{۱}{۲} & -۲S \\ k-۲S & ۲S+۱+\frac{۱}{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_۱\\V_۲\end{bmatrix}=۰ \Rightarrow Y=\begin{bmatrix} ۳S+\frac{۱}{۲} & -۲S \\ k-۲S & ۲S+۱+\frac{۱}{S}\end{bmatrix}$$

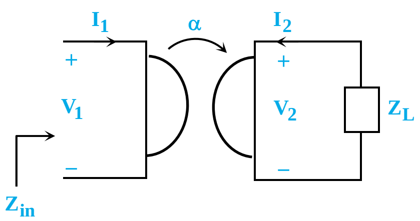
معادله مشخصه $|Y|=(۳S+\frac{۱}{۲})(۲S+۱+\frac{۱}{S})+۲S(k-۲S)=۰ \xrightarrow{\times S} ۲S^۳+(۴+۲k)S^۲+۳/۵S+۰/۵=۰$

با توجه به این که دو قطب تابع شبکه برابر $\frac{-۵\pm j\sqrt{۷}}{۸}$ هستند، پس باید معادله مشخصه بر عبارت $S^{۲}+۱/۲۵S+۰/۵$ بخش‌پذیر باشد. حال داریم:

$$۲S^{۳}+(۴+۲k)S^{۲}+۳/۵S+۰/۵=(S^{۲}+۱/۲۵S+۰/۵)(۲S+۱/۵+۲k)+(k-۰/۲۵)(۱-۲/۵S)$$

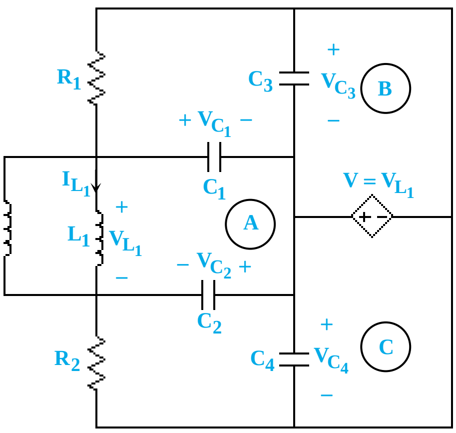
مشخص است که به ازای $k=۰/۲۵$، جمله باقی‌مانده در عبارت فوق برابر صفر شده و معادله مشخصه بر $S^{۲}+۱/۲۵S+۰/۵$ بخش‌پذیر است.

۲۰ــ گزینه «۴» ابتدا اثر ژیراتور را لحاظ می‌کنیم. امپدانس دیده شده از ژیراتور مطابق شکل زیر است:



$$Z_{in}=\frac{\alpha^{۲}}{Z_L}$$

در مدار سؤال $Z_L=\frac{۱}{C_۵S}$ است که طبق رابطه بالا $Z_{in}=\frac{۴}{\frac{۱}{C_۵S}}=۴C_۵S=L$ یعنی معادل با یک سلف به امپدانس $۴C_۵$ هانری است. با خاموش کردن منابع ولتاژ مستقل مدار به صورت مقابل تبدیل می‌شود.



اگر $V=V_{L_۱}$ باشد، تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر است با تعداد جریان سلفها و ولتاژهای خازن‌ها که از هم مستقل‌اند.

با اعمال KVL در حلقه A داریم:
$$V_{L_۱}=V_{C_۱}+V_{C_۲} \qquad (۱)$$

همچنین با KVL در حلقه مشترک B و C داریم:
$$V_{C_۳}+V_{C_۴}=۰ \qquad (۲)$$

با KVL در حلقه B داریم:
$$V_{C_۳}+V_{L_۱}=۰ \qquad (۳)$$

با KVL در حلقه C داریم:
$$-V_{L_۱}+V_{C_۴}=۰ \qquad (۴)$$

با حذف V_L طبق رابطه (۱) از رابطه (۳) و (۴) داریم:

رابطه (۲) $\Rightarrow V_{C_۳}+V_{C_۴}=۰$

رابطه (۳) $\Rightarrow V_{C_۳}+V_{C_۱}+V_{C_۲}=۰$

رابطه (۳) $\Rightarrow -V_{C_۱}-V_{C_۲}+V_{C_۴}=۰$

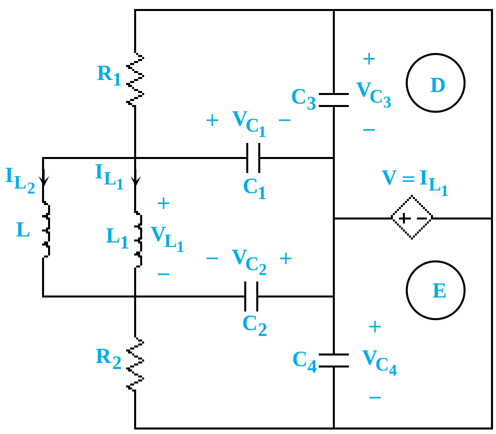
با توجه به معادلات بالا مشخص است که اگر ولتاژ ۲ خازن را داشته باشیم، ولتاژ بقیه خازن‌ها به دست می‌آید.

از طرفی ۲ سلف هم داریم که جریان‌های آنها با هم رابطه‌ای ندارد، پس در حالت $V=V_{L_۱}$ مرتبه مدار ۴ است.

حال اگر $V=I_{L_۱}$ باشد، داریم:

با اعمال KVL در حلقه D و E داریم:

$$-V_{C_۳}-V=۰\Rightarrow -V_{C_۳}-I_{L_۱}=۰ \qquad (۵)$$
$$V-V_{C_۴}=۰\Rightarrow I_{L_۱}-V_{C_۴}=۰ \qquad (۶)$$

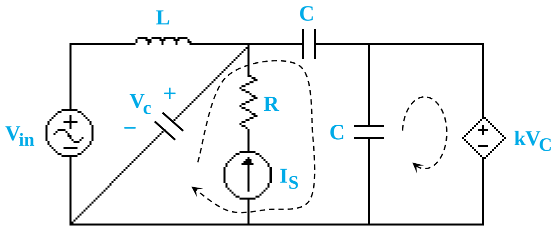


بنابراین با داشتن جریان $I_{L_۱}$ ولتاژ خازن‌های $C_۳$ و $C_۴$ هم به دست می‌آید.

پس مرتبه مدار برابر است با ۴ (ولتاژ $V_{C_۱}$ و $V_{C_۲}$ و $I_{L_۱}$ و $I_{L_۲}$ متغیرهای مستقل ما هستند).

پس نتیجه می‌شود که با تبدیل $V=V_{L_۱}$ به $V=I_{L_۱}$ تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار (مرتبه مدار) تغییر نکند.

۲۱ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی را محاسبه می‌کنیم:



$۴ =$ تعداد المان‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی

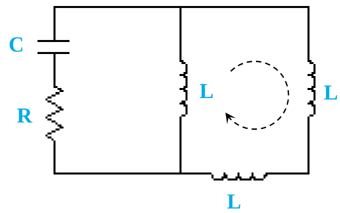
از طرفی با توجه به شکل مدار مشاهده می‌شود ۲ حلقه‌ی خازنی در مدار وجود دارد، بنـابراین مرتبه‌ی مدار برابر است با:

$n = ۴ - ۲ = ۲ \rightarrow$ = مرتبه‌ی مدار ۲ تا فرکانس طبیعی داریم

۲۲ـ گزینه «۲» همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، مدار از هفت المان ذخیره‌کننده‌ی انرژی تشکیل شده است. از طرفی مدار دارای یک حلقه‌ی سلفی و یک کاتست خازنی می‌باشد، بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس طبیعی صفر است. در نتیجه تعداد فرکانس طبیعی غیرصفر برابر است با:

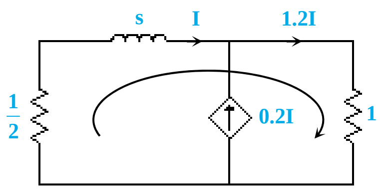
$۷ - ۲ = ۵ =$ فرکانس طبیعی غیرصفر

۲۳ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم:



حال با توجه به مدار مشاهده می‌شود که مدار دارای یک حلقه‌ی سلفی می‌باشد؛ بنابراین یک فرکانس طبیعی صفر در مدار وجود دارد.

۲۴ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر می‌کنیم:



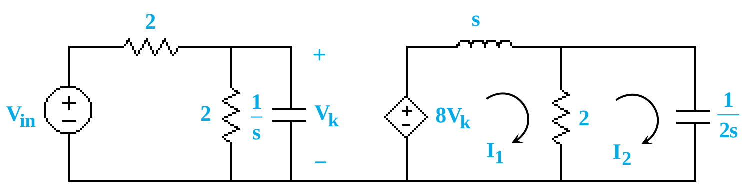
حال با اعمال kvl در مدار داریم:

$$(\frac{۱}{۲}+s)I+۱/۲I=۰ \Rightarrow (s+۱/۷)I=۰ \rightarrow s=-۱/۷$$

دقت شود که خازن $۲F$ به دلیل سری شدن با منبع جریان، بی‌اثر می‌شود. بنابراین تأثیری روی مرتبه‌ی مدار نداشته و مدار از مرتبه‌ی اول می‌باشد.

۲۵ـ گزینه «۳» ابتدا مدارها را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

حال با توجه به مدار داریم:



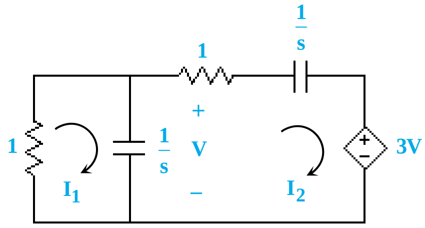
$$V_k=\frac{\frac{۱}{s}\|۲}{\frac{۱}{s}\|۲+۲}V_{in}=\frac{۲}{۲s+۲}V_{in}=\frac{۱}{s+۱}V_{in}$$

بنابراین $s=-۱$ یک فرکانس طبیعی مدار می‌باشد. از طرفی با نوشتن ماتریس مش مدار سمت راست داریم:

$$\begin{bmatrix} s+۲ & -۲ \\ -۲ & \frac{۱}{۲s}+۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸V_k \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}:(s+۲)(\frac{۱}{۲s}+۲)-۴=۰ \Rightarrow ۴s^۲+s+۲=۰ \Rightarrow s=\frac{-۱\pm\sqrt{۳۱}\,j}{۸}=-۰/۱۲\pm j۰/۷$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی مدار برابر است با: $s=-۱,-۰/۱۲\pm j۰/۷$

۲۶ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم. سپس با نوشتن معادلات مش معادله‌ی مشخصه‌ی مدار را بدست می‌آوریم:

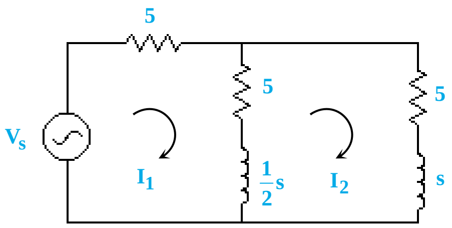


$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & 1+\frac{2}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -3V \end{bmatrix} \xrightarrow{V=(\frac{I_1-I_2}{s})} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \frac{2}{s} & 1-\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله‌ی مشخصه: $\frac{s+1}{s}\times\frac{s-1}{s}+\frac{2}{s^2}=0 \Rightarrow \frac{s^2+1}{s^2}=0 \Rightarrow s^2+1=0 \to \alpha=0$

بنابراین مدار در حالت بی‌اتلاف قرار دارد.

۲۷ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و سپس معادلات مش مدار را می‌نویسیم:



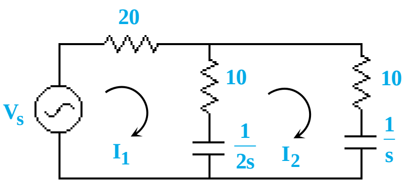
$$\begin{bmatrix} 10+\frac{1}{2}s & -5-\frac{s}{2} \\ -5-\frac{s}{2} & 10+\frac{3s}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌ی مشخصه‌ی مدار برابر است با:

$$(10+\frac{s}{2})(10+\frac{3s}{2})-(5+\frac{s}{2})^2=0 \Rightarrow 100+20s+\frac{3}{4}s^2-25-5s-\frac{s^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{2}+15s+75=0 \to \text{فرکانس‌های طبیعی}: s=\frac{-15\pm 8/66}{2\times\frac{1}{2}}\simeq -23/6\,,\,-6/3$$

۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و معادلات مش مدار را می‌نویسیم:



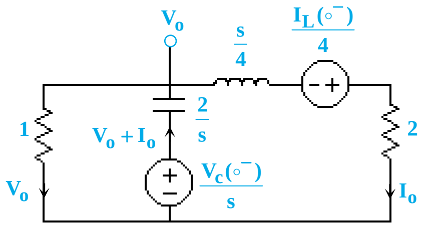
$$\begin{bmatrix} 30+\frac{1}{2s} & -10-\frac{1}{2s} \\ -10-\frac{1}{2s} & 20+\frac{3}{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال معادله‌ی مشخصه مدار را به دست می‌آوریم:

$$(30+\frac{1}{2s})(20+\frac{3}{2s})-(10+\frac{1}{2s})^2=0 \Rightarrow 2000s^2+180s+2=0$$

فرکانس‌های طبیعی: $s=-0/013\,,\,-0/077$

۲۹ـ گزینه «۳» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با نوشتن معادلات KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$KVL\ (\text{حلقه‌ی چپ}): -V_o - \frac{2}{s}(V_o+I_o) + \frac{V_c(0^-)}{s} = 0 \Rightarrow (\frac{2}{s}+1)V_o + \frac{2}{s}I_o = \frac{V_c(0^-)}{s} \Rightarrow (s+2)V_o + 2I_o = V_c(0^-) \quad (1)$$

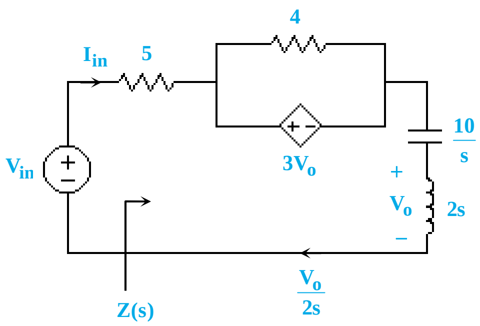
$$KVL\ (\text{حلقه‌ی بیرونی}): -V_o + (2+\frac{s}{4})I_o - \frac{I_L(0^-)}{4} = 0 \Rightarrow (s+8)I_o - 4V_o = I_L(0^-) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (s+2)[\frac{(s+8)I_o - I_L(0^-)}{4}] + 2I_o = V_c(0^-)$$

$$\Rightarrow (s^2+10s+24)I_o = 4V_c(0^-) + (s+2)I_L(0^-) \Rightarrow I_o = \frac{I_L(0^-)(s+2+\frac{4V_c(0^-)}{I_L(0^-)})}{(s+4)(s+6)}$$

برای اینکه فقط فرکانس $s=-4$ در خروجی ظاهر شود، باید $(s+6)$ موجود در مخرج با صورت ساده شود. بنابراین $V_C(0^-) = I_L(0^-)$ می‌باشد.

۳۰ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$KVL: -V_{in} + 5I_{in} + 3V_o + \frac{10}{s}\times I_{in} + V_o = 0$$

$$\xrightarrow[V_o=2sI_{in}]{I_{in}=\frac{V_o}{2s}} -V_{in} + 5I_{in} + 6sI_{in} + \frac{10}{s}I_{in} + 2sI_{in} = 0 \Rightarrow V_{in} = (\frac{10}{s}+8s+5)I_{in}$$

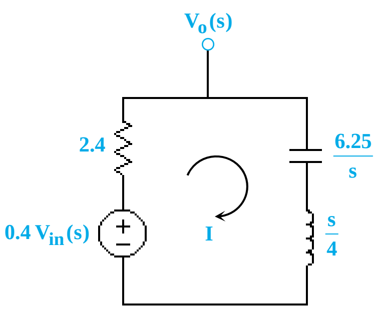
۳۱ـ گزینه «۲» با توجه به معادله‌ی بدست آمده در تست قبل داریم:

$$(8s^2+5s+10)I_{in} = sV_{in}$$

بنابراین داریم:

$$\text{معادله‌ی مشخصه}: s^2 + 0/625s + 1/25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} BW = 0/625 \\ \omega_r = 1/118 \end{cases}$$

۳۲ـ گزینه «۱» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



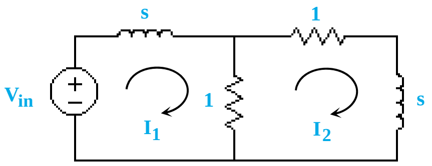
$$kvl: -0/4V_{in} + (2/4 + \frac{6/25}{s} + \frac{s}{4})I = 0$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی مشخصه}: s^2 + 9/6s + 25 = 0$$

بنابراین داریم:

$$BW = 9/6 \quad \text{و} \quad \omega_r = 5$$

۳۳ـ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس برده و سپس معادلات مش آن را می‌نویسیم:



$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

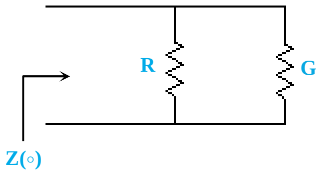
معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم برابر است با:

$$\text{معادله‌ی مشخصه}:(s+1)(s+2)-1=s^2+3s+1=0 \Rightarrow \begin{cases} BW=2\alpha=3 \\ \omega_r=1 \end{cases}$$

۳۴ـ گزینه «۴» به ازای $s=0$ خواهیم داشت:

$$Z(0)=\frac{1000}{2501}\simeq 0/4$$

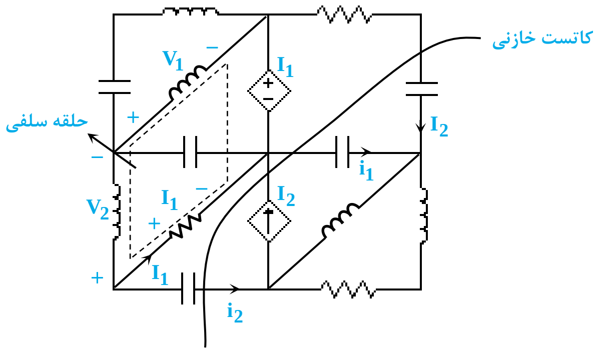
حال به ازای $s=0$ مدار به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow Z(0)=\frac{\frac{R}{G}}{R+\frac{1}{G}}=\frac{R}{RG+1}\simeq 0/4$$

با بررسی گزینه‌ها مشاهده می‌شود که تنها گزینه‌ی ۴ این شرط را ارضا می‌کند.

۳۵ـ گزینه «۲» با توجه به شکل روبه‌رو، به ازای $\beta=1$ مدار دارای یک حلقه سلفی و یک کاتست خازنی است:

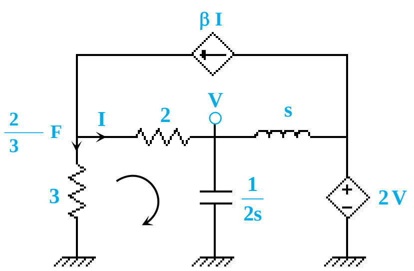


$$i_1+i_2=0$$
$$V_1+V_2=0$$

بنابراین به ازای $\beta=1$ مدار دو فرکانس طبیعی صفر دارد. به ازای $\beta=0$ مدار تنها یک کاتست خازنی و در نتیجه یک فرکانس طبیعی صفر دارد و به ازای $\beta=-1$ مدار فرکانس طبیعی صفر ندارد.

۳۶ـ گزینه «۴» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:

حال با اعمال KVL در گره با پتانسیل V و همچنین اعمال KVL در حلقه‌ی مشخص شده داریم:



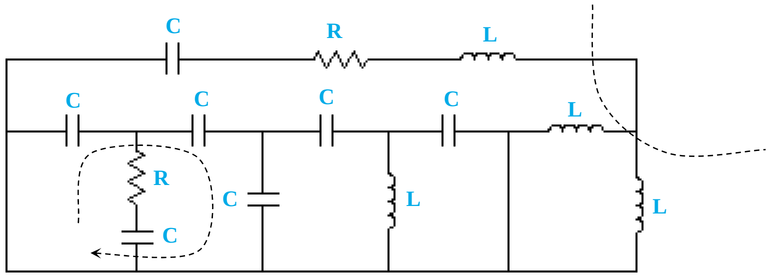
$$KCL: I+\frac{2V-V}{s}=2sV \Rightarrow (2s^2-1)V=sI \qquad (1)$$

$$KVL: -(\beta-1)I\times 3+2I+V=0 \Rightarrow V=I(3\beta-5) \qquad (2)$$

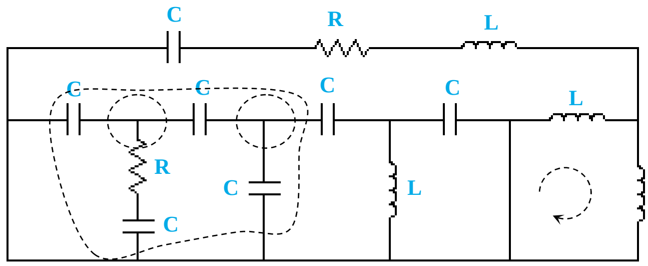
$$(1),(2)\rightarrow ((2s^2-1)(3\beta-5)-s)I=0$$

در نتیجه با توجه به اینکه ضریب s به هیچ عنوان نمی‌تواند صفر شود، بنابراین این مدار هیچ‌گاه نمی‌تواند در حالت بی‌اتلاف باشد.

۳۷ـ گزینه «۳» ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی مدار را محاسبه می‌کنیم (منابع بی‌اثر می‌شوند):



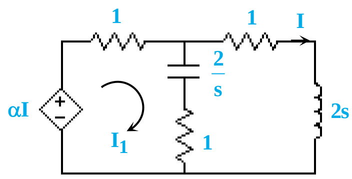
تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی $= n = 11$



حال با توجه به وجود یک حلقه‌ی خازنی و یک کاتست سلفی مدار از مرتبه‌ی ۹ می‌باشد. از طرفی با توجه به وجود ۳ کاتست خازنی و یک حلقه‌ی سلفی، مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی صفر می‌باشد. بنابراین:

تعداد فرکانس طبیعی غیرصفر $= 9 - 4 = 5$

۳۸ـ گزینه «۳» ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با نوشتن معادلات مش داریم:

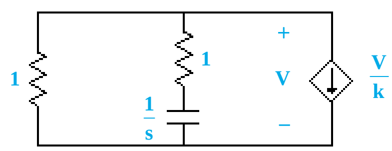
$$\begin{bmatrix} 2+\frac{2}{s} & -1-\frac{2}{s} \\ -1-\frac{2}{s} & 2+2s+\frac{2}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha I \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2s+2}{s} & -\frac{(\alpha+1)s+2}{s} \\ -\frac{(s+2)}{s} & \frac{2s^2+2s+2}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله‌ی مشخصه‌ی مدار برابر است با:

$$\frac{4(s+1)}{s^2}(s^2+s+1)-\frac{(s+2)((\alpha+1)s+2)}{s^2}=0 \Rightarrow 4s^3+(7-\alpha)s^2+(4-2\alpha)s=0 \Rightarrow s(s^2+(7-\alpha)s+4-2\alpha)=0$$

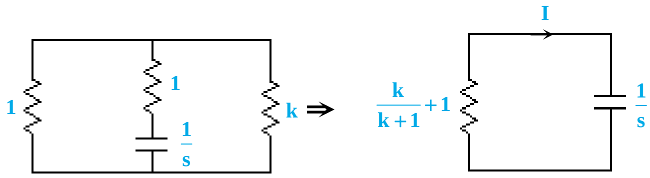
بنابراین به ازای $\alpha = 7$ مدار در حالت بی‌اتلاف خواهد بود.

۳۹ـ گزینه «۴» ابتدا منابع مستقل را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



$$R_{\text{معادل منبع وابسته}}=\frac{V}{\frac{V}{k}}=k\Omega$$

بنابراین داریم:

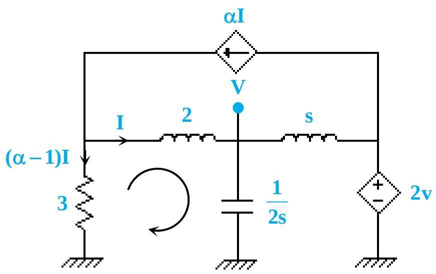


$$\Rightarrow (\frac{1}{s}+\frac{k}{k+1}+1)I=0 \Rightarrow (\frac{2k+1}{k+1}s+1)I=0$$

با توجه به اینکه $s=-\frac{1}{3}$ فرکانس طبیعی مدار است، بنابراین:

$$\frac{2k+1}{k+1}=3 \rightarrow 3k+3=2k+1 \rightarrow k=-2$$

۴۰ـ گزینه «۳» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



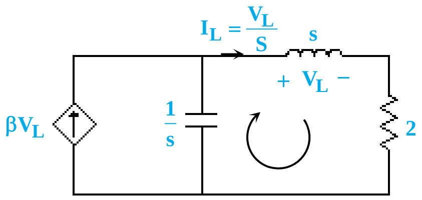
حال با اعمال kcl در گره با پتانسیل V و همچنین اعمال kvl در حلقه‌ی مشخص شده داریم:

$$KCL: I+\frac{2v-v}{s}=2sv \to (2s^2-1)v=sI \qquad (1)$$

$$KVL: -3\times(\alpha-1)I+2I+v=0 \to v=(3\alpha-5)I \qquad (2)$$

$$(1),(2) \to ((2s^2-1)(3\alpha-5)-s)I=0 \to \alpha=\frac{5}{3} \to -sI=0 \to$$ مرتبه یک

۴۱ـ گزینه «۲» ابتدا منابع را بی‌اثر کرده و سپس مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم:



حال با اعمال kvl داریم:

$$KVL: \frac{1}{s}(\frac{v_L}{s}-\beta v_L)+v_L+2\times(\frac{v_L}{s})=0 \Rightarrow (s^2+(2-\beta)s+1)v_L=0$$

بنابراین به ازای $\beta=2$ پاسخ مدار نامیرا خواهد بود.

۴۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس ورودی برابر $\frac{1}{s+\alpha}$ می‌باشد، در نتیجه برای اینکه $ke^{-\alpha t}$ در خروجی ظاهر نشود، باید تبدیل لاپلاس ورودی با صورت تابع تبدیل ساده شود. بنابراین تابع تبدیل باید صفری در $s=-\alpha$ داشته باشد. پس با توجه به نمودار قطب و صفر داریم:

$$\begin{cases}-\alpha=-3\\-\alpha=5\end{cases} \to \begin{cases}\alpha=3\\\alpha=-5\end{cases}$$

۴۳ـ گزینه «۳» برای پاسخ‌گویی به این سؤال درستی تک‌تک عبارت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

عبارت (الف): می‌دانیم که برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی مدار می‌توان منابع ولتاژ مستقل را با اتصال کوتاه و منابع جریان را با مدار باز جایگزین کرد. بر این اساس واضح است که جایگزینی یک منبع ولتاژ توسط یک منبع جریان باعث تغییر ساختار ذاتی مدار و به تبع فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود. لذا این عبارت صحیح است.

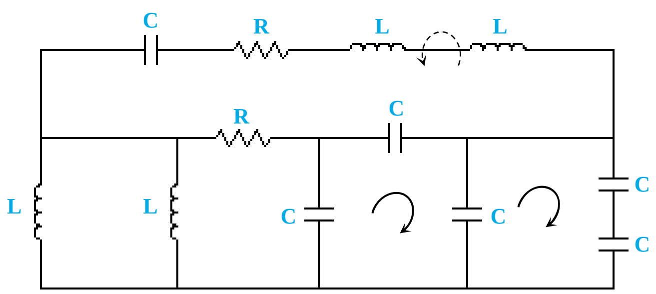
عبارت (ب): با قرار دادن سلف به جای خازن و خازن به جای سلف در مدارهای RLC، مشخصاً کاتست‌ها و حلقه‌های خازنی به کاتست‌ها و حلقه‌های سلفی تبدیل شده و بالعکس. در این پروسه ممکن است یک یا چند فرکانس طبیعی صفر حذف شود یا پدیدار شود؛ اما مطمئناً فرکانس‌های طبیعی غیرصفر بیشتری تولید نشده و حذف هم نخواهد شد، هرچند مقدار این فرکانس‌های طبیعی غیرصفر تغییر خواهد کرد. لذا این عبارت هم صحیح است.

عبارت (پ): برای این که پاسخ ورودی صفر یک مدار کراندار بماند، باید این مدار پایدار مرزی باشد. چنین مداری فرکانس‌های طبیعی در سمت چپ و روی محور $j\omega$ خواهد داشت، با این شرط که فرکانس‌های طبیعیِ روی محور $j\omega$ ساده باشند. به عبارت دیگر هر مداری که صرفاً فرکانس‌های طبیعی‌اش سمت چپ و روی محور $j\omega$ هستند، نمی‌تواند پایدار مرزی باشد و پاسخ ورودی صفر کراندار داشته باشد؛ لذا این عبارت نادرست است.

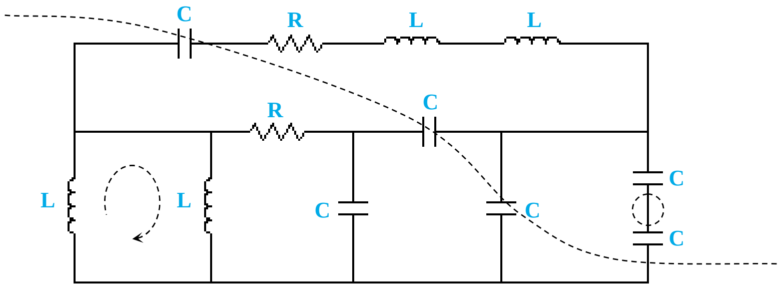
عبارت (ت): می‌دانیم که فرکانس‌های طبیعی یک مدار می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند و فرکانس‌های طبیعی مختلط لزوماً مزدوج هستند؛ لذا دیاگرام شکل (۲) نمی‌تواند نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد، اما دیاگرام شکل (۱) مشکلی نداشته و می‌تواند نماینده فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد که البته ناپایدار است. لذا این عبارت صحیح است.

می‌بینیم که عبارت‌های (الف)، (ب) و (ت) صحیح هستند؛ لذا پاسخ گزینه‌ی (۳) می‌باشد.

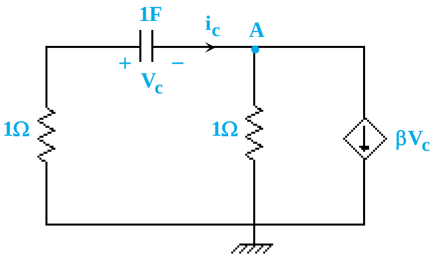
۴۴ـ گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌شود مدار از ۱۰ المان ذخیره‌کننده‌ی انرژی تشکیل شده است اما به دلیل وجود یک کاتست سلفی و دو حلقه‌ی خازنی مدار از مرتبه‌ی ۷ می‌باشد.



۴۵ــ گزینه «۱» با توجه به وجود یک حلقه‌ی سلفی و دو کاتست خازنی مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی صفر می‌باشد.



۴۶ــ گزینه «۱» ابتدا با غیرفعال کردن منابع تغذیه مستقل مدار، فرکانس‌های طبیعی و معادله‌ی مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم:



با نوشتن رابطه KCL در گره A داریم:

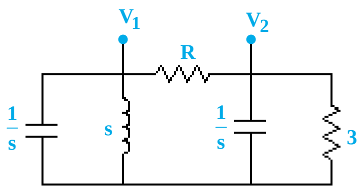
$$i_C = \frac{-i_C \times ۱ - V_C}{۱} + \beta V_C \xrightarrow{i_C = SV_C} (۲S + ۱ - \beta)V_C = ۰$$

برای پایداری مدار باید داشته باشیم:

$$۱ - \beta > ۰ \Rightarrow \beta < ۱$$

با توجه به این که به ازای مقدار مرزی $\beta = ۱$، مدار دارای فرکانس طبیعی $S = ۰$ است و با توجه به این که مدار با منبع پله (با قطب $S = ۰$) تحریک شده است، بنابراین به ازای $\beta = ۱$ مدار ناپایدار بوده و پاسخ گزینه (۱) می‌باشد.

۴۷ــ گزینه «۲» ابتدا مدار را به حوزه‌ی لاپلاس می‌بریم و سپس معادلات گره‌ی مربوطه را می‌نویسیم:



$$\begin{bmatrix} s + \frac{۱}{s} + \frac{۱}{R} & -\frac{۱}{R} \\ -\frac{۱}{R} & s + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = ۰$$

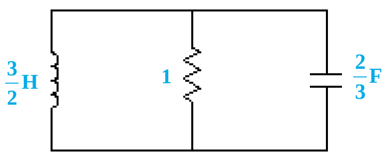
معادله‌ی مشخصه مدار برابر است با:

$$(s + \frac{۱}{s} + \frac{۱}{R})(s + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) - \frac{۱}{R^۲} = ۰ \Rightarrow s^۳ + (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{R})s^۲ + (\frac{۱}{۳R} + ۱)s + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) = ۰$$

حال با توجه به اینکه ke^{-t} در پاسخ ورودی صفر ظاهر شود، باید $s = -۱$ در معادله‌ی مشخصه مدار صدق کند. بنابراین:

$$-۱ + (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{R}) + (\frac{۱}{۳R} + ۱) + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{R}) = ۰ \Rightarrow R = ۲$$

۴۸ــ گزینه «۴» با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مدار دارای ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی است. از طرفی وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه‌ی خازنی باعث می‌شود که مرتبه‌ی مدار برابر ۴ شود. بنابراین گزینه‌های ۲و۳ نادرست می‌باشند. همچنین با توجه به وجود یک حلقه‌ی سلفی و یک کاتست خازنی، ۲ فرکانس طبیعی صفر در مدار داریم. حال برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی غیرصفر سلف و خازن معادل را با ترکیب سری و موازی آن‌ها بدست می‌آوریم. بنابراین:

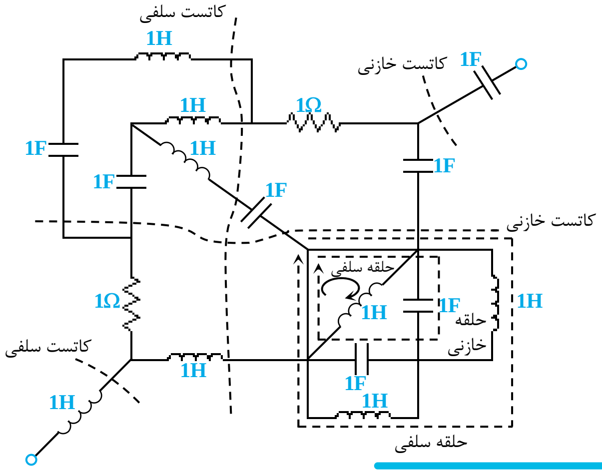


معادله‌ی مشخصه RLC موازی: $s^۲ + \frac{۱}{RC}s + \frac{۱}{LC} = s^۲ + \frac{۳}{۲}s + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲s^۲ + ۳s + ۲ = ۰$

۴۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه می‌خواهیم $Z(s)$ را در حالتی که خروجی مدار باز است بدست بیاوریم، باید از معادله‌های مشخصه‌ی بدست آمده در آزمایش‌های دوم و سوم استفاده کنیم. از طرفی می‌دانیم معادله‌ی مشخصه در مخرج تبدیل لاپلاس هر متغیر ظاهر می‌شود، از آنجا که $Z(s)=\dfrac{V(s)}{I(s)}$ می‌باشد. پس معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به آزمایشی که $I(s)$ محاسبه می‌شود در صورت $Z(s)$ و معادله‌ی مشخصه‌ی آزمایشی که $V(s)$ محاسبه می‌شود در مخرج $Z(s)$ ظاهر می‌شود. بنابراین با توجه به اینکه $V(s)$ از آزمایش دوم و $I(s)$ محاسبه می‌شود، داریم:

$$Z(s)=\frac{s^{۲}+۶s+۲}{s^{۲}+۴s+۱}$$

۵۰ـ گزینه «۲» با توجه به باز بودن کلید $S_۱$ و بسته بودن کلید $S_۲$ می‌توان مدار را به شکل زیر درنظر گرفت:



می‌بینیم که مدار دارای ۱۵ عنصر ذخیره‌کننده انرژی است؛ لذا می‌تواند تا ۱۵ فرکانس طبیعی داشته باشد. از طرفی مدار دارای ۲ کاتست سلفی و یک حلقه خازنی است و درنتیجه تعداد فرکانس‌های طبیعی آن و مرتبه‌ی آن برابر $۱۲=۱-۲-۱۵$ می‌باشد. همچنین مدار به علت داشتن دو کاتست خازنی و دو حلقه سلفی، ۴ فرکانس طبیعی صفر دارد؛ لذا در مجموع مدار از مرتبه‌ی ۱۲ است و تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر آن برابر $۸=۴-۱۲$ می‌باشد.