مدرسان شریف

فصل اول

«مبانی و قضایای اولیه مدارهای الکتریکی و قضایای تونن و نورتن»

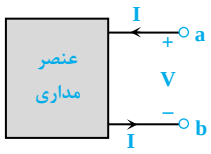
جریان

حرکت الکترون‌ها در یک مسیر مشخص، باعث ایجاد جریان الکتریکی می‌شود. به طور خلاصه مقدار بار جابجا شده در واحد زمان را جریان می‌نامند. در صورتی که dq مقدار بار مشخصی باشد که در زمان dt از سطح مقطع فرضی یک رسانا عبور می‌کند، جریان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

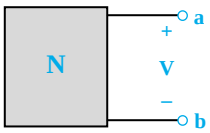
حال اگر زمان حرکت بارها از t_1 تا t_2 در نظر گرفته شود، مقدار بار جابجا شده در این بازه زمانی برابر $q = \int_{t_1}^{t_2} I.dt$ خواهد بود. یکای جریان در سیستم SI، آمپر (A) است و یک آمپر جریان، طبق تعریف، معادل با جابجایی باری به اندازه یک کولن در هر ثانیه می‌باشد. در صورتی که جهت و اندازه جریان با زمان تغییر نکند، جریان فوق را جریان مستقیم (DC) می‌نامند و مقدار آن را با $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ نمایش می‌دهند.

ولتاژ



قبل از تعریف ولتاژ، عنصر مداری را به صورت یک جسم که دارای دو پایانه است، تعریف می‌کنیم. مطابق شکل مقابل فرض می‌کنیم جریان I به پایانه a عنصر مداری وارد شود و پس از گذشتن از آن، از پایانه b خارج شود. جهت برقرار ساختن چنین جریانی باید مقداری انرژی مصرف کنیم (کار انجام دهیم). طبق تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر مداری، انرژی مورد نیاز برای جابه‌جایی بار مثبت ۱ کولن از یک پایانه تا پایانه دیگر (a تا b) می‌باشد. یکای ولتاژ، ولت (V) است.

تذکر۱: در تعریف ولتاژ، پلاریته آن بسیار مهم است. اگر یک شبکه با پایانه‌های b و a موجود باشد، برای بدست آوردن ولتاژ بین پایانه‌ها، ولتاژ پایانه مثبت منهای ولتاژ پایانه منفی می‌شود، لذا داریم:

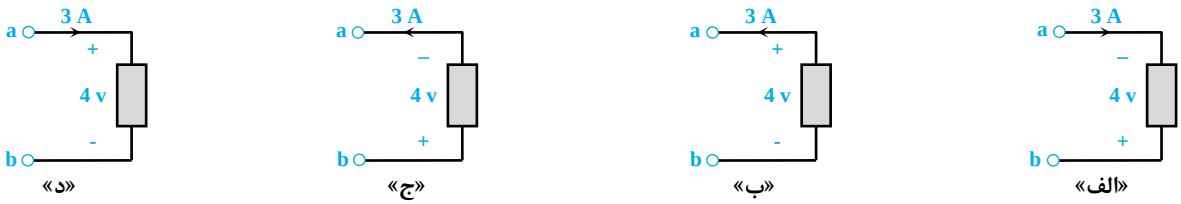


$$V = V_a - V_b = V_{ab} = -V_{ba}$$

تذکر۲: رابطه ولتاژ برحسب انرژی به صورت $V = \frac{W}{q}$ می‌باشد که W انرژی مورد نیاز برای جابجایی بار q در دو سر عنصر مداری است.

توان

توان در واقع آهنگ مصرف انرژی است. تعریف توان جذب شده و یا تولید شده توسط هر عنصر مداری برحسب ولتاژ و جریان آن، حتماً باید با مشخص شدن جهت جریان و پلاریته ولتاژ دو سر آن صورت گیرد. رابطه توان در هر عنصر که ولتاژ دو سر آن V و جریان عبوری از آن I است، به صورت $P = V.I$ تعریف می‌گردد. واحد توان **ژول بر ثانیه** و یا همان **وات** (w) است. بعضی عناصر مداری توان مصرف می‌کنند که به آنها **عناصر غیرفعال یا پسیو** می‌گوییم (مانند مقاومت) و بعضی عناصر، توان تولید می‌کنند که به آنها **عناصر فعال یا اکتیو** می‌گوییم (مانند منابع ولتاژ و جریان مستقل، البته گاهی اوقات این عناصر هم به صورت مصرف کننده عمل می‌کنند). اگر مقدار توان در محاسبات عددی منفی شود، می‌گوییم آن عنصر توان تولید می‌کند و اگر مقدار توان مثبت بدست آید، می‌گوییم آن عنصر توان جذب (تلف) می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید:



در شکل‌های «الف» و «ب» عناصر توان تولید می‌کنند ($P=-4\times3=-12\,w$) و در شکل‌های «ج» و «د» عناصر توان تلف می‌کنند ($P=+4\times3=+12\,w$).

نکته۱: هرگاه جریان به ترمینال مثبت (منظور ترمینال ولتاژ عنصر است) المان مداری وارد و یا از ترمینال منفی آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P=+V.I$ در نظر گرفته می‌شود و هرگاه جریان به ترمینال منفی المان مداری وارد و یا از ترمینال مثبت آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P=-V.I$ بیان می‌گردد.

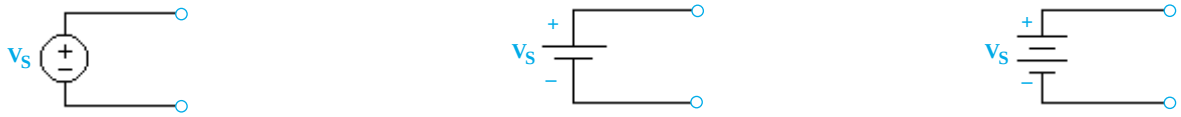
تذکر۳: توان هر عنصر مداری برحسب انرژی به صورت $P=\frac{\Delta w}{\Delta t}$ نیز تعریف می‌شود.

قضیه پایستگی توان

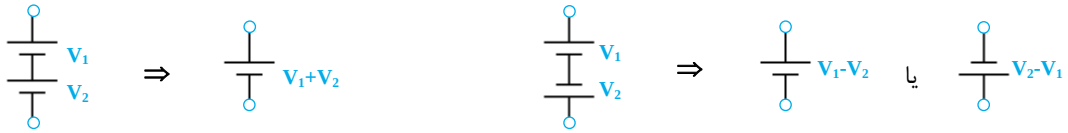
طبق قضیه پایستگی توان، مجموع توان مصرفی عناصر مختلف مدار، برابر صفر است. به عبارت دیگر مجموع توان تولیدی عناصر اکتیو مدار برابر مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار است. دقت داشته باشید اگر توان مصرفی مداری مورد سؤال باشد بطور پیش فرض باید مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار را محاسبه و به عنوان پاسخ در نظر گرفت.

منبع ولتاژ مستقل (نابسته)

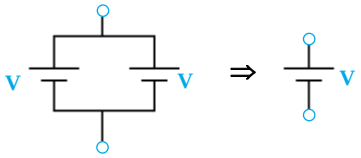
منبع ولتاژ مستقل یا نابسته اولین عنصر مداری است که بررسی می‌کنیم و معمولاً تولیدکننده توان می‌باشد. در تحلیل مدارهای الکتریکی منابع ولتاژ مستقل اغلب بصورت ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند. مقدار ولتاژ یک منبع ولتاژ مستقل ایده‌آل، صرف‌نظر از جریان آن عددی ثابت است و توان تولیدی آن محدودیتی ندارد. منابع ولتاژ مستقل DC را به یکی از سه صورت زیر نمایش می‌دهیم و باید توجه شود که چون منبع ولتاژ معمولاً تأمین‌کننده توان مصرفی مدار است، معمولاً جریان از پایانه مثبت آن خارج می‌شود تا طبق تعریف توان، مقدار توان منبع ولتاژ عددی منفی بدست آید.



تذکر۴: در صورت سری شدن دو منبع ولتاژ مستقل در صورتی که پلاریته‌های غیرهمنام در کنار هم باشند، دو منبع با یکدیگر جمع و در غیر این صورت دو منبع از یکدیگر کم می‌شوند.

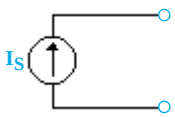


تذکر۵: موازی شدن دو منبع ولتاژ مستقل با مقادیر مختلف از نظر تئوری مدارهای الکتریکی غیرمجاز و غلط است و این مورد فقط در صورت یکی بودن مقادیر و پلاریته آنها امکان‌پذیر است و معادل آنها به صورت مقابل بدست می‌آید:

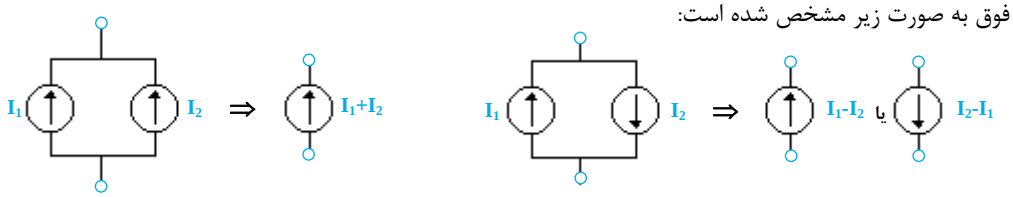


منبع جریان مستقل (نابسته)

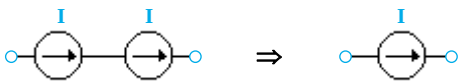
دومین عنصر مداری که تعریف می‌کنیم، منبع جریان مستقل یا نابسته است. این منبع نیز مستقل از ولتاژ دو سر خود، جریان ثابتی دارد. معمولاً منبع جریان مستقل هم مثل منبع ولتاژ مستقل در تحلیل مدارهای الکتریکی، ایده‌آل در نظر گرفته می‌شود و از لحاظ تئوری، می‌تواند توان نامحدودی تولید کند. منبع جریان مستقل DC را به شکل مقابل نمایش می‌دهیم:



تذکر۶: در صورت موازی شدن دو یا چند منبع جریان مستقل، اگر منابع جریان هم‌جهت باشند، با هم جمع می‌شوند و در غیر این صورت از هم کم خواهند شد. موارد فوق به صورت زیر مشخص شده است:



تذکر۷: لازم به ذکر است که برآیند دو منبع جریان سری با مقادیر و جهت‌های یکسان، برابر با یکی از آنها بوده و در صورت مساوی نبودن مقادیر یا جهت آنها، سری کردن آنها غلط است.

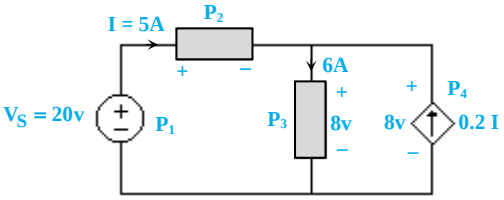


منابع جریان و ولتاژ وابسته (کنترل شونده)

دو منبع تأمین‌کننده انرژی که قبلاً بررسی شد، منابع مستقل بودند و جریان و یا ولتاژ آنها به هیچ نقطه‌ای از مدار بستگی نداشت. اما منابع ولتاژ و جریان وابسته نیز در ترکیب مدارها کاربرد دارند و مقادیر ولتاژ یا جریان این منابع، به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر از مدار بستگی دارد. منابع وابسته برای این‌که با منابع مستقل اشتباه نشوند، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

(منبع جریان وابسته به جریان) (منبع جریان وابسته به ولتاژ) (منبع ولتاژ وابسته به جریان) (منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ)

مثال۱: در مدار شکل زیر توان هر یک از عناصر را پیدا کنید.



پاسخ:

$$\begin{cases} P_1 = -20\times5 = -100\,w \\ P_3 = 8\times6 = 48\,w \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} P_2 = 12\times5 = 60\,w \\ P_4 = (-8)(0/2I) = -8\times0/2\times5 = -8\,w \end{cases}$$

منبع ولتاژ مستقل و منبع جریان وابسته هر کدام به ترتیب ۱۰۰ و ۸ وات توان تولید و دو عنصر مداری دیگر هر دو توان مصرف می‌کنند. توجه شود که اندازه مجموع توان تولید شده با اندازه مجموع توان مصرفی برابر است. بنابراین جمع توان‌ها در یک شبکه صفر است.

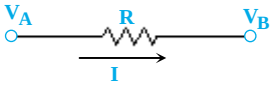
مقاومت و قانون اهم

طبق قانون اهم هرگاه دمای یک رسانای فلزی ثابت باشد، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر رسانا به شدت جریانی که از آن عبور می‌کند، مقدار ثابتی است که این نسبت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامیم. مقاومت از جمله عناصر غیرفعال (پسیو) مدار است.

یکای مقاومت الکتریکی در SI، ولت بر آمپر است که اهم نامیده شده و با Ω نشان داده می‌شود.

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \text{قانون اهم}$$

با توجه به قانون اهم، جریان یک مقاومت و توان مصرفی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$V = V_A - V_B \;,\; I = \frac{V}{R} \;,\; P = V.I = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

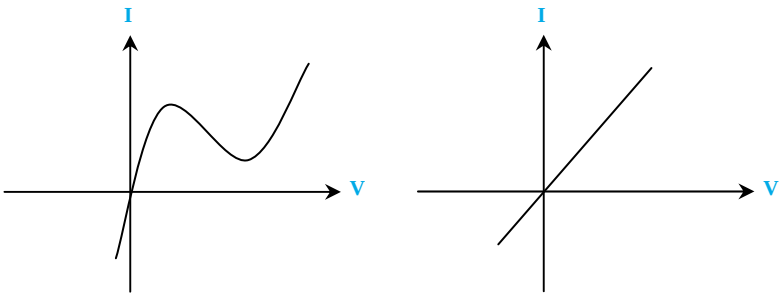
توجه کنید در صورتی که $R > 0$ باشد، توان مقاومت همواره مثبت خواهد بود که با مفهوم مصرف‌کننده بودن مقاومت هم‌خوانی دارد.

انواع مقاومت‌ها

رابطه‌ای که در قسمت قبل تحت عنوان قانون اهم برای ولتاژ و جریان یک مقاومت بیان شد، مختص مقاومت‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان است. اما مقاومت‌ها انواع دیگری نیز دارند که در آنها صورت کلی رابطه ولتاژ ـ جریان ممکن است متفاوت باشد.

مقاومت‌های خطی و غیرخطی

مقاومت‌ها را بسته به این که رابطه لحظه‌ای ولتاژ ـ جریان آنها خطی (به شکل کلی $V(t) = R(t)\,I(t)$) و یا غیرخطی (به شکل کلی $V(t) = F(I,t)$) باشد، می‌توان به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم نمود. در واقع اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت را ترسیم کنیم، مقاومتی که شیب مشخصه در آن ثابت است، مقاومتی خطی بوده و مقاومتی که شیب مشخصه در آن متغیر است، مقاومت غیرخطی نامیده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان یک مقاومت معمولی و یک دیود تونلی را با مشخصه‌های ولتاژ ـ جریان روبرو در نظر گرفت:



مشخصه ولتاژ ـ جریان یک دیود تونلی

مشخصه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت معمولی

شیب مشخصه ولتاژ ـ جریان در مقاومت معمولی ثابت و در دیود تونلی متغیر است؛ پس مقاومت معمولی یک مقاومت خطی و دیود تونلی یک مقاومت غیرخطی است.

مقاومت‌های تغییرپذیر با زمان و تغییرناپذیر با زمان

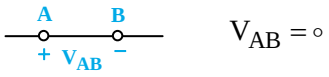
اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت با زمان تغییر کند، آن را مقاومت تغییرپذیر با زمان (یا متغیر با زمان) و در غیر این صورت آن را مقاومت تغییرناپذیر با زمان (یا نامتغیر با زمان) می‌نامند. رابطه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به شکل $V(t) = R(t)\,I(t)$ می‌باشد و این یعنی مشخصه ولتاژ ـ جریان به شکل یک خط راست بوده که شیب آن با زمان تغییر می‌کند.

مقاومت‌های پسیو و اکتیو

اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت در ربع اول و سوم باشد، مقاومت پسیو و مصرف‌کننده‌ی توان است و اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت در ربع دوم و چهارم باشد، مقاومت اکتیو و تولیدکننده‌ی توان است. در مقاومت‌های خطی، پسیو بودن معادل با مثبت بودن R و اکتیو بودن معادل با منفی بودن R می‌باشد.
بحث کامل‌تر در مورد انواع مقاومت‌ها در فصل دوازدهم از کتاب مدار (۲) ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است که در سؤالات کنکور، تمام مقاومت‌ها بطور پیش‌فرض مقاومت‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان و پسیو می‌باشند.

مفاهیم اتصال کوتاه، مدار باز و کلید

در اینجا به معرفی چند مفهوم بسیار مصطلح در بحث مدارهای الکتریکی می‌پردازیم:

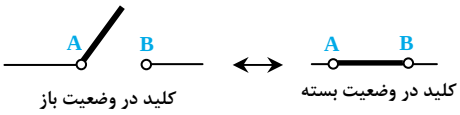


$V_{AB} = 0$

اتصال کوتاه: اگر دو نقطه در یک مدار الکتریکی توسط مقاومتی با مقدار صفر اهم (یا در اصطلاح فیزیکی با سیم) به هم متصل شده باشند، اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه اتصال کوتاه هستند. اختلاف ولتاژ دو نقطه اتصال کوتاه همواره برابر صفر است.

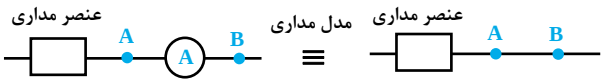
$I_{AB} = 0$

مدار باز: اگر بین دو نقطه از یک مدار الکتریکی هیچ مسیری برای برقراری جریان وجود نداشته باشد (یا به بیان دیگر دو نقطه صرفاً از طریق یک مقاومت با مقدار بی‌نهایت اهم به هم متصل باشند) اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه مدار باز هستند. جریان الکتریکی میان دو نقطه مدار باز همواره برابر صفر است.

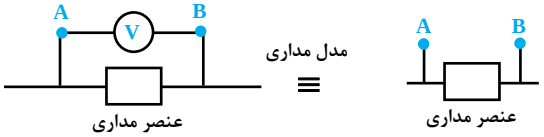


کلید: کلید یک ابزار الکتریکی است که وضعیت اتصال میان دو نقطه را از حالت مدار باز به حالت اتصال کوتاه تغییر می‌دهد و بالعکس. در بحث مدارهای الکتریکی معمولاً کلیدها را ایده‌آل در نظر می‌گیرند. یک کلید ایده‌آل می‌تواند در زمان صفر ثانیه و به صورت آنی تغییر وضعیت دهد و مقاومت معادل آن در حالت اتصال کوتاه برابر صفر و در حالت مدار باز برابر بی‌نهایت است.

آمپرمتر و ولت‌متر



آمپرمتر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری جریان در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. آمپرمتر را در مدار به صورت سری با عنصری که می‌خواهند جریان آن را مشخص کنند، قرار می‌دهند. لازم به ذکر است که آمپرمترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی صفر هستند. (مانند اتصال کوتاه)



ولت‌متر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری ولتاژ در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولت‌متر را به صورت موازی با عنصری که می‌خواهند ولتاژ دو سر آن را بسنجند، قرار می‌دهند. ولت‌مترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی بینهایت هستند. (مانند مدار باز)

مدارهای خطی و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)

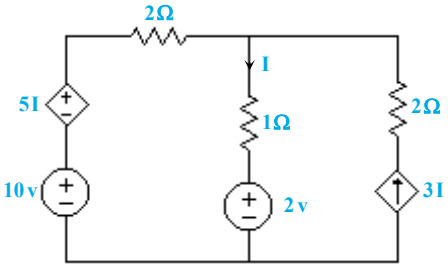
مدارهای خطی، مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی است و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد؛ در این راستا باید نکات مهم زیر را در نظر داشت:

۱ـ خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن عناصر در حالت کلی با توجه به مشخصه ولتاژ ـ جریان آنها تعریف می‌شود (مشابه بحثی که برای مقاومت‌ها انجام گرفت). در مورد منابع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن با توجه به رابطه توصیف‌کننده متغیر خروجی منبع تعریف می‌شود. مثلاً در مورد یک منبع ولتاژ وابسته به جریان، اگر ولتاژ دو سر منبع به صورت $V = \alpha I_x$ باشد (که در آن α مقداری ثابت است)، در این صورت منبع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.

۲ـ در سنجش خطی و یا LTI بودن یک مدار الکتریکی، منابع تغذیه مستقل به طور کامل نادیده گرفته می‌شوند؛ علت این است که منابع تغذیه مستقل ماهیتاً مشابه یک متغیر ورودی برای یک سیستم یا یک تابع هستند. کاملاً مشخص است که خصوصیات ذاتی سیستم یا تابع مستقل از ورودی آن است و این یعنی نوع منبع تغذیه مستقل نباید در خصوصیات ذاتی مدار از جمله خطی و LTI بودن آن دخیل باشد.

دقت کنید از آنجایی که بسیاری از مباحث مدارهای الکتریکی تنها در مدارهای خطی و یا LTI کاربرد دارد، بنابراین تشخیص خطی یا LTI بودن یک مدار الکتریکی بسیار مهم می‌باشد.

مثال ۳۳: در مدار زیر مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



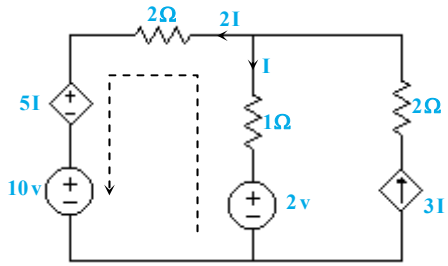
۱) -1

۲) 1

۳) 2

۴) -2

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود منبع جریان وابسته در حلقه سمت راست، فقط حلقه سمت چپ برای KVL مناسب است. بنابراین با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

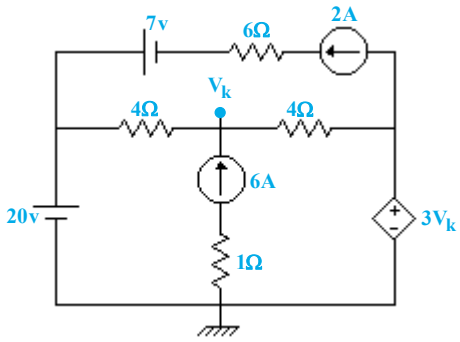


$$-2-I+2I\times 2+5I+10=0 \Rightarrow \mathbf{I=-1A}$$

تشخیص روش مناسب برای تحلیل مدار

سؤال مهمی که دانشجویان معمولاً می‌پرسند، این است که کدام یک از دو روش «تحلیل گره» یا روش «تحلیل مش» مناسب‌تر است. واضح است انتخاب روش مناسب به شکل مدار و منابع موجود در آن مدار بستگی دارد. برای انتخاب بهترین و ساده‌ترین راه حل برای یک مسأله با حداقل عملیات، باید ابتدا تعداد حلقه‌ها و گره‌های مدار را شمارش کنیم. حال در مدار به تعداد گره‌ها، معادله KCL و به تعداد حلقه‌ها، معادله KVL موجود است. لازم به ذکر است که گره‌ای برای KCL مناسب است که محل تقاطع بیش از دو المان بوده و دارای ولتاژ معین نسبت به زمین نباشد. همچنین حلقه‌ای که شامل منبع جریان وابسته یا مستقل باشد، برای KVL مناسب نیست. با شمارش تعداد حلقه‌ها و گره‌های مفید مدار، اگر تعداد حلقه‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KVL و اگر تعداد گره‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KCL است. در صورتی که تعداد مجهولات ناشی از حلقه‌ها و گره‌ها و یا به عبارتی تعداد حلقه‌ها و گره‌ها برابر باشد، یک توصیه غیررسمی این است که ببینید مجهول مسأله کدام است؛ اگر جریان مجهول باشد، از روش تحلیل مش و اگر ولتاژ مجهول بود از روش تحلیل گره برای حل مدار استفاده می‌شود.

مثال ۳۴: در مدار زیر مقدار V_k برحسب ولت کدام است؟



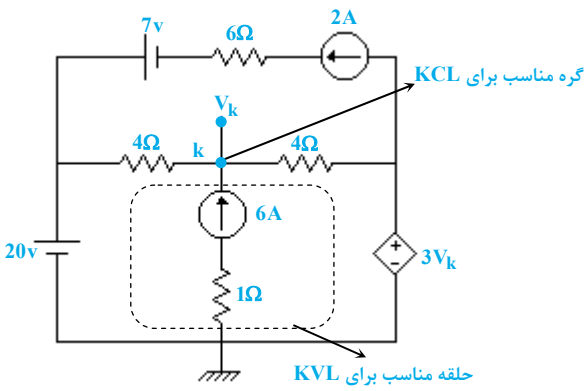
۱) -22

۲) -44

۳) 22

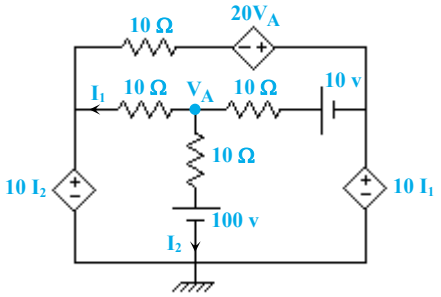
۴) 44

پاسخ: گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۳ گره است. با توجه به این‌که ولتاژ گره‌های سمت راست و چپ به ترتیب $3V_k$ و $20v$ است، لذا در گره‌های فوق اعمال KCL مناسب نمی‌باشد و برای حل مدار از روش گره فقط باید در گره وسط مدار اعمال KCL شود. با توجه به وجود منبع جریان در شاخه وسطی در مدار، حلقه‌های سمت راست و چپ در پایین مدار برای KVL مناسب نیست. همچنین به علت وجود یک منبع جریان در شاخه بالای مدار، حلقه بالای مدار برای اعمال KVL مناسب نیست. بنابراین مدار دارای فقط یک حلقه به صورت نشان داده شده در شکل روبرو است. با توجه به این‌که مدار دارای یک حلقه و یک گره است، باید به مجهول مدار توجه شود و با توجه به مجهول بودن V_k از روش KCL استفاده می‌شود. با نوشتن KCL در گره k داریم:



$$\frac{V_k-20}{4}+\frac{V_k-3V_k}{4}=6 \Rightarrow V_k-20+V_k-3V_k=24 \Rightarrow \mathbf{V_k=-44v}$$

مثال ۳۵: در مدار زیر مقدار جریان I_1 کدام است؟



۱) ۰/۲A
۲) ۱/۲A
۳) ۲/۲A
۴) ۱۰A

پاسخ: گزینه «۴» باید دقت شود که مدار فوق دارای سه حلقه است و با نوشتن سه KVL در حلقه‌ها می‌توان مدار را حل کرد. اما این روش بسیار وقت‌گیر می‌باشد. همچنین با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای سه گره می‌باشد و گره‌های سمت راست و سمت چپ مدار دارای ولتاژ معین نسبت به زمین هستند و برای KCL مناسب نیستند. بنابراین فقط گره A برای KCL مناسب است. حال با نوشتن KCL در مدار، با یک معادله و یا با نوشتن KVL در سه حلقه مدار، با سه معادله، مدار قابل حل است و روش ساده‌تر همان KCL در گره A می‌باشد.

حال با نوشتن معادله KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A-10I_2}{10}+\frac{V_A-100}{10}+\frac{V_A-10I_1-10}{10}=0$$

با نوشتن قانون اهم، جریان‌های I_1 و I_2 را می‌نویسیم:

$$I_1=\frac{V_A-10I_2}{10}\quad,\quad I_2=\frac{V_A-100}{10}$$

با جایگذاری معادلات I_1 و I_2 در معادله KCL داریم:

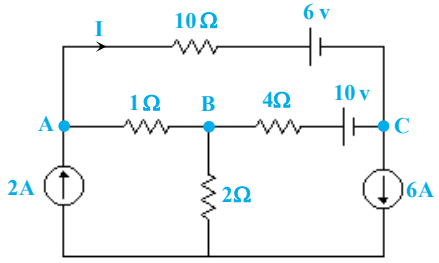
$$\frac{V_A-10[\frac{V_A-100}{10}]}{10}+\frac{V_A-100}{10}+\frac{V_A-10[\frac{V_A-100}{10}]-10}{10}=0$$

$$V_A=55v \Rightarrow I_2=\frac{55-100}{10}=-4/5A \Rightarrow I_1=\frac{55-10\times(-4/5)}{10} \Rightarrow \mathbf{I_1=10A}$$

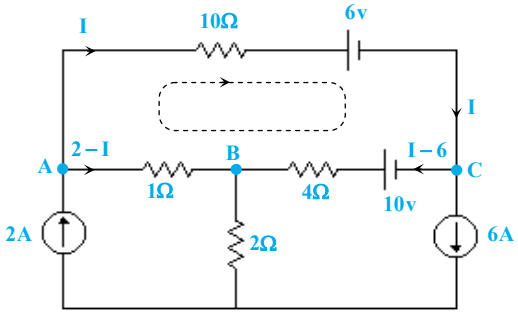
حل مسائل مدار با روش ترکیبی حلقه (مش) و گره

در برخی مسائل مدار اگر بخواهیم فقط از روش حلقه و یا فقط از روش گره استفاده کنیم، ممکن است روند حل مدار طولانی شده و یا معادلات بدست آمده برای رسیدن به جواب کافی نباشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که علاوه بر استفاده از انتخاب روش مناسب برای حل مدار که در قبل بیان شد، از روش حلقه و گره به صورت هم‌زمان نیز استفاده شود. به عنوان مثال اگر یک حلقه را برای نوشتن KVL در مدار، مناسب تشخیص دهیم، بر روی المان‌های موجود در حلقه موردنظر حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در حلقه را بر حسب مجهول اصلی سؤال می‌نویسیم و ولتاژ یا جریان شاخه‌ای را به عنوان مجهول جدید در نظر نمی‌گیریم. حال با نوشتن KVL در حلقه انتخاب شده، معادله‌ای بدست می‌آید که فقط شامل مجهول اصلی سؤال بوده و به سادگی قابل حل می‌باشد. علاوه بر این گاهی دیده می‌شود که فقط یک گره مناسب برای KCL در مدار وجود دارد، ولی معادله بدست آمده از KCL در آن گره، برای حل مدار کافی نیست و در آن معادله، چند مجهول وجود دارد. در این حالت لازم است که حلقه‌های مناسب برای KVL نیز بررسی شوند و با انتخاب مناسب آنها و نوشتن KVL در آنها، معادلات دیگری نیز بدست آید، که با حل معادلات بدست آمده از KVL‌ها و KCL، مجهول اصلی سؤال محاسبه می‌شود. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۳۶: در مدار زیر مقدار جریان I برحسب آمپر کدام است؟



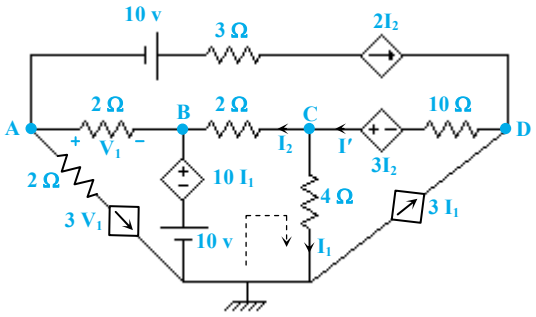
۱) ۸
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲



پاسخ: گزینه «۴» با دقت در مدار دیده می‌شود که حلقه‌های پایین مدار در سمت چپ و راست دارای منبع جریان بوده و برای KVL مناسب نیستند. لذا مدار فقط دارای یک حلقه مناسب برای KVL است و حلقه فوق در بالای مدار موجود است. همچنین مدار دارای ۳ گره با نام‌های C و B و A بوده و لذا دارای ۳ معادله KCL است. حال با توجه به تعداد حلقه‌ها و گره‌ها دیده می‌شود که روش KVL مناسب‌تر خواهد بود. برای اعمال KVL در حلقه بالای مدار باید جریان یا ولتاژ تمام المان‌های موجود در حلقه مشخص شود. لذا با نوشتن KCL در نقاط A و C جریان مقاومت‌های ۱Ω و ۴Ω مشخص می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه (بالای مدار) داریم:

$$10I+6-10+4(I-6)-1\times(2-I)=0 \Rightarrow \mathbf{I=\frac{30}{15}=2A}$$

مثال ۳۷: در مدار زیر مقدار جریان $I_۲$ کدام است؟



۱) ۱۰A
۲) ۱۵A
۳) ۵A
۴) ۲۰A

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای حل مدار ابتدا تعداد حلقه‌ها و گره‌ها شمارش می‌شود. با دقت در مدار دیده می‌شود که چهار حلقه به صورت ظاهری موجود است؛ اما با توجه به وجود منابع وابسته جریان در حلقه‌های سمت چپ و سمت راست و حلقه بالای مدار، نوشتن KVL در آنها مناسب نبوده و کمکی به حل مسأله نخواهد کرد. بنابراین نوشتن KVL فقط در حلقه وسط مدار مفید می‌باشد.

همچنین با دقت در مدار دیده می‌شود که چهار گره به اسامی A، B، C و D موجود است. با توجه به مشخص بودن ولتاژ گره B نسبت به زمین، این گره برای KCL مناسب نمی‌باشد. بنابراین گره‌های A و C و D برای اعمال KCL مناسب هستند. با توجه به وجود سه گره در مدار، می‌توان مدار را با نوشتن سه معادله KCL در گره‌های مذکور با ۳ معادله و ۳ مجهول حل کرد و یا می‌توان با نوشتن یک KVL در حلقه وسط و با یک معادله و یک مجهول مدار را حل کرد. با توجه به نکات ذکر شده، روش KVL در این مدار ساده‌تر خواهد بود. بنابراین در حلقه وسطی مدار KVL زده می‌شود.

در نقطه D جریان‌های $۳I_۱$ و $۲I_۲$ جمع شده و جریان I' به صورت $I' = ۲I_۲ + ۳I_۱$ بدست می‌آید. در نقطه C از جریان I' جریان $I_۲$ کم می‌شود و جریان $I_۱$ در مقاومت ۴Ω بدست می‌آید.

با نوشتن معادله KCL در گره‌های C و D داریم:

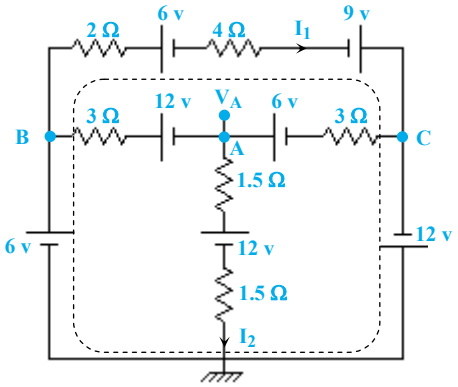
$$I_۲ + I_۱ = I' \quad و \quad I' = ۲I_۲ + ۳I_۱ \Rightarrow I_۲ = -۲I_۱ \Rightarrow I_۱ = -\frac{۱}{۲}I_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن معادله KVL در حلقه وسطی داریم:

$$-۱۰ - ۱۰I_۱ - ۲I_۲ + ۴I_۱ = ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -۱۰ - ۱۰(-\frac{۱}{۲}I_۲) - ۲I_۲ + ۴(-\frac{۱}{۲}I_۲) = ۰ \Rightarrow \mathbf{I_۲ = ۱۰\,A}$$

مثال ۳۸: در مدار زیر مقادیر جریان‌های $I_۲$ و $I_۱$ کدام است؟



۱) $I_۱ = ۳A \quad , \quad I_۲ = -۴A$
۲) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = ۳A$
۳) $I_۱ = -۴A \quad , \quad I_۲ = ۳/۵A$
۴) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = -۴A$

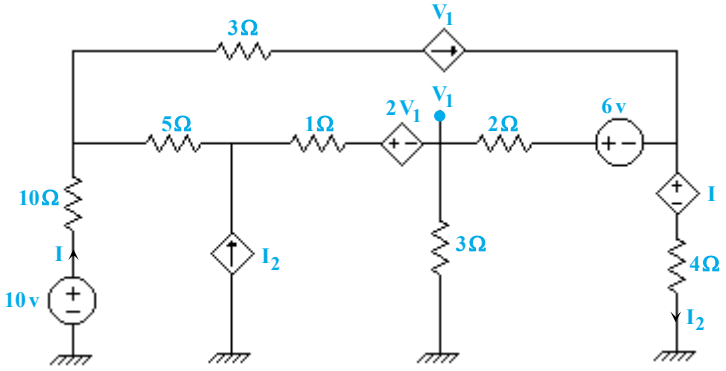
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ نقاط C و B نسبت به زمین مشخص است و فقط گره A با ولتاژ نامعین موجود است، بنابراین مدار با یک KCL در نقطه A حل شده و به KVL در سه حلقه مدار نیاز نیست. با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A + ۱۲ - ۶}{۳} + \frac{V_A - ۶ + ۱۲}{۳} + \frac{V_A - ۱۲}{۱/۵ + ۱/۵} = ۰ \Rightarrow V_A = ۰ \Rightarrow I_۲ = \frac{V_A - ۱۲}{۱/۵ + ۱/۵} = \frac{-۱۲}{۳} = -۴A$$

با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده در مدار داریم:

$$-۶ + ۲I_۱ + ۶ + ۴I_۱ - ۹ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \mathbf{I_۱ = ۳/۵A}$$

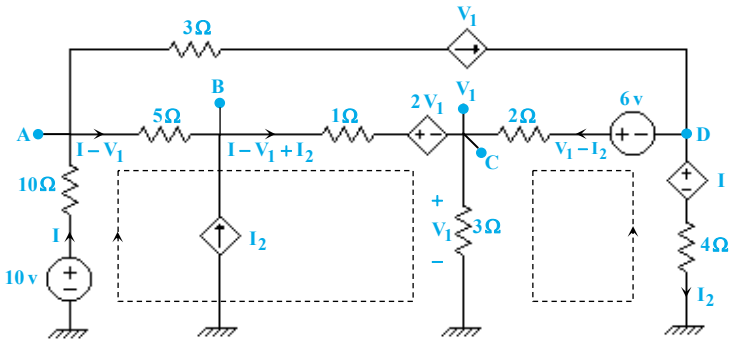
مثال ۳۹: در مدار زیر مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۳۳}$
۲) $\frac{۳۳}{۲۵}$
۳) $\frac{۱۹}{۲۵}$
۴) $\frac{۲۵}{۱۹}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۴ گره مناسب برای KCL و دو حلقه مناسب برای KVL است. با توجه به اینکه تعداد حلقه‌ها، از تعداد گره‌ها کمتر است، از روش KVL استفاده می‌کنیم. (دقت کنید حلقه‌ای را برای KVL انتخاب می‌کنیم که شامل منبع جریان نباشد) حال قبل از نوشتن KVL در حلقه‌های مدار، در مسیر حلقه‌های مدار حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در هر حلقه را بر حسب مجهول اصلی مدار و بقیه پارامترهای مدار بدست می‌آوریم. حال ابتدا در مسیر حلقه سمت چپ مدار به صورت ساعتگرد حرکت می‌کنیم. با توجه به مشخص بودن جریان مقاومت ۱۰ اهمی، با نوشتن KCL در گره A، جریان مقاومت ۵ اهمی برابر با $(I-V_1)$ می‌شود. در ادامه حرکت در حلقه سمت چپ به مقاومت ۱ اهمی می‌رسیم که با نوشتن KCL در گره B، جریان آن را به اندازه $(I-V_1+I_2)$ بدست می‌آوریم. آخرین مقاومت موجود در حلقه سمت چپ، مقاومت ۳ اهمی است که ولتاژ آن برابر با V_1 است و نیازی به مشخص کردن جریان آن نمی‌باشد.

در ادامه حل، در مسیر حلقه سمت راست مدار به صورت پادساعتگرد حرکت می‌کنیم. جریان مقاومت ۴ اهمی برابر با I_2 بوده و نیازی به محاسبه ندارد. ولی با نوشتن KCL در گره D، جریان مقاومت ۲ اهمی را به اندازه (V_1-I_2) بدست می‌آوریم. حال با مشخص شدن جریان مقاومت‌های موجود در حلقه‌های مدار بر حسب مجهولات موجود، در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم: $-۱۰+۱۰I+۵\times(I-V_۱)+۱\times(I-V_۱+I_۲)+۲V_۱+V_۱=۰ \Rightarrow ۱۶I-۳V_۱+I_۲=۱۰$ (۱)

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم: $-۴I_۲-I-۶+۲\times(V_۱-I_۲)+V_۱=۰ \Rightarrow -۶I_۲+۳V_۱-I=۶$ (۲)

دقت کنید که معادلات (۱) و (۲) هر کدام شامل سه مجهول است و برای حل این معادلات به یک معادله دیگر نیز نیاز است.

با نوشتن KCL در گره C این معادله را بصورت مقابل بدست می‌آوریم: $I-V_۱+I_۲+V_۱-I_۲=\frac{V_۱}{۳} \Rightarrow V_۱=۳I$ (۳)

با ترکیب روابط (۱) و (۳) داریم: $۱۶I-۳\times۳I+I_۲=۱۰ \Rightarrow ۷I+I_۲=۱۰$ (۴)

با ترکیب روابط (۳) و (۲) داریم: $-۶I_۲+۳\times۳I-I=۶ \Rightarrow -۶I_۲+۸I=۶$ (۵)

با حل دستگاه تشکیل شده از معادلات (۴) و (۵)، مقدار جریان I به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}۷I+I_۲=۱۰\\-۶I_۲+۸I=۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I=\frac{۳۳}{۲۵}A\\I_۲=\frac{۱۹}{۲۵}A\end{cases}$$

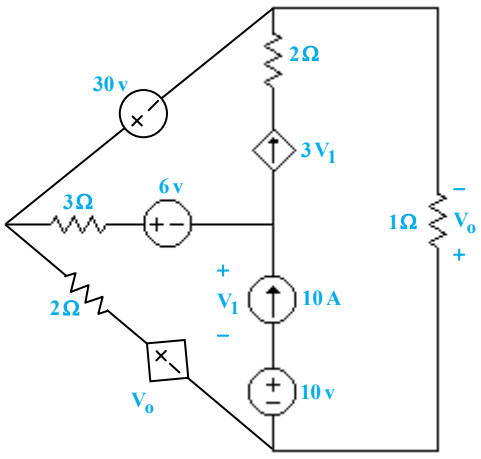
مثال ۴۰: در مدار زیر مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان ۱۰ آمپر بر حسب ولت کدام است؟

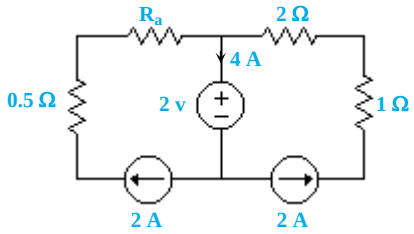
۱) ۴/۱۵

۲) ۳/۱۵

۳) ۲/۵

۴) ۵/۵



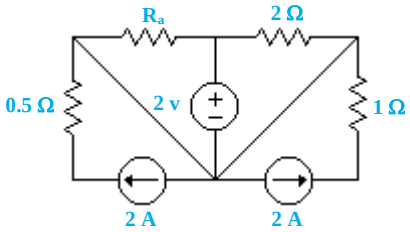


پاسخ: گزینه «۱» توان‌های مصرفی مدار قبل و بعد از اتصال کلیدها باید با هم برابر باشند، لذا در هر یک از دو حالت توان مصرفی را حساب می‌کنیم. در صورتی که کلیدها باز باشند، داریم:

$$P_1 = (0/5)\times 2^2 + R_a \times 2^2 + 1\times 2^2 + 2\times 2^2 + 4(2) = 22 + 4R_a$$

دقت کنید در این حالت چون جریان‌ها از سر مثبت به منبع ولتاژ وارد می‌شوند، توان این منبع را بصورت توان‌های مصرفی حساب کردیم.

در حالت بسته بودن کلیدها، جریان منبع سمت چپ فقط از مقاومت ۰/۵ اهم و جریان منبع سمت راست فقط از مقاومت ۱ اهم عبور می‌کند. ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهم و R_a برابر ۲ ولت است که توان مصرفی آنها با توجه به این ولتاژ محاسبه می‌شود. در این حالت با توجه به این که منابع مدار هر یک به شکل مجزا در حال تأمین توان مصرفی مقاومت‌های خاصی از مدار هستند، لذا هر سه آنها در حال تولید توان می‌باشند. بنابراین می‌توان نوشت:



$$P_2 = 0/5\times 2^2 + \frac{2^2}{R_a} + \frac{2^2}{2} + 1\times 2^2 = 8 + \frac{4}{R_a}$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow 22 + 4R_a = 8 + \frac{4}{R_a} \Rightarrow 4R_a + 14 = \frac{4}{R_a}$$

$$\Rightarrow 4R_a^2 + 14R_a - 4 = 0 \Rightarrow 2R_a^2 + 7R_a - 2 = 0 \Rightarrow R_a = \frac{-7 \pm \sqrt{65}}{4}$$

چند نکته مهم در ساده‌سازی مدار

۱) کلیه المان‌های سری با منبع جریان چه مستقل و چه وابسته، با برقراری چهار شرط زیر می‌توانند از مدار حذف شوند:

الف) جریان، ولتاژ یا توان المان یا شاخه قابل حذف مورد سؤال نباشد.

ب) جریان، ولتاژ یا توان منبع مذکور مورد سؤال نباشد.

ج) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ یا جریان المان قابل حذف مرتبط باشد.

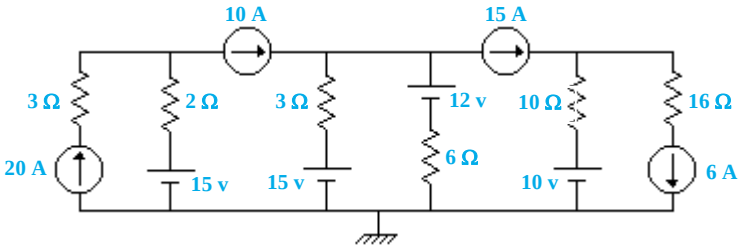
د) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ دو سر منبع جریان مرتبط باشد.

۲) کلیه المان‌ها و شاخه‌های موازی منبع ولتاژ (چه مستقل و چه وابسته) از مدار قابل حذف هستند، در صورتی که شرایط (الف)، (ب) و (ج) در فوق عیناً صادق بوده و در مدار هیچ منبع وابسته‌ای وجود نداشته باشد که مقدار آن به جریان منبع ولتاژ موردنظر مرتبط باشد.

۳) کلیه المان‌های مقاومتی موازی اتصال کوتاه، حاوی جریان صفر بوده و از مدار حذف می‌شوند. ($I = \frac{V}{R}$ و $V = 0$ در نتیجه $I = 0$)

۴) در صورتی که شاخه‌ای بین دو گره با ولتاژ مشخص نسبت به زمین وجود داشته باشد و در صورتی که مجهول به آن شاخه مرتبط نبوده و یا منبع وابسته به آن شاخه ارتباط نداشته باشد، شاخه مذکور قابل حذف است.

مثال ۶۹: در مدار زیر مقدار توان مصرفی مقاومت ۶ اهمی کدام است؟



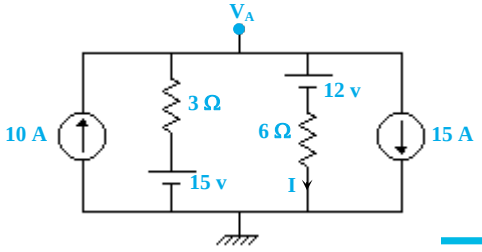
۱) ۹/۳w

۲) ۲/۴w

۳) ۱۰/۶w

۴) ۱۱/۵w

پاسخ: گزینه «۳» شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۰A در سمت چپ مدار حذف می‌شود و همچنین شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۵A در سمت راست مدار هم حذف می‌شود و مدار ساده شده به صورت زیر است. حال با نوشتن KCL، ولتاژ V_A را محاسبه و سپس مقدار جریان I را بدست می‌آوریم.

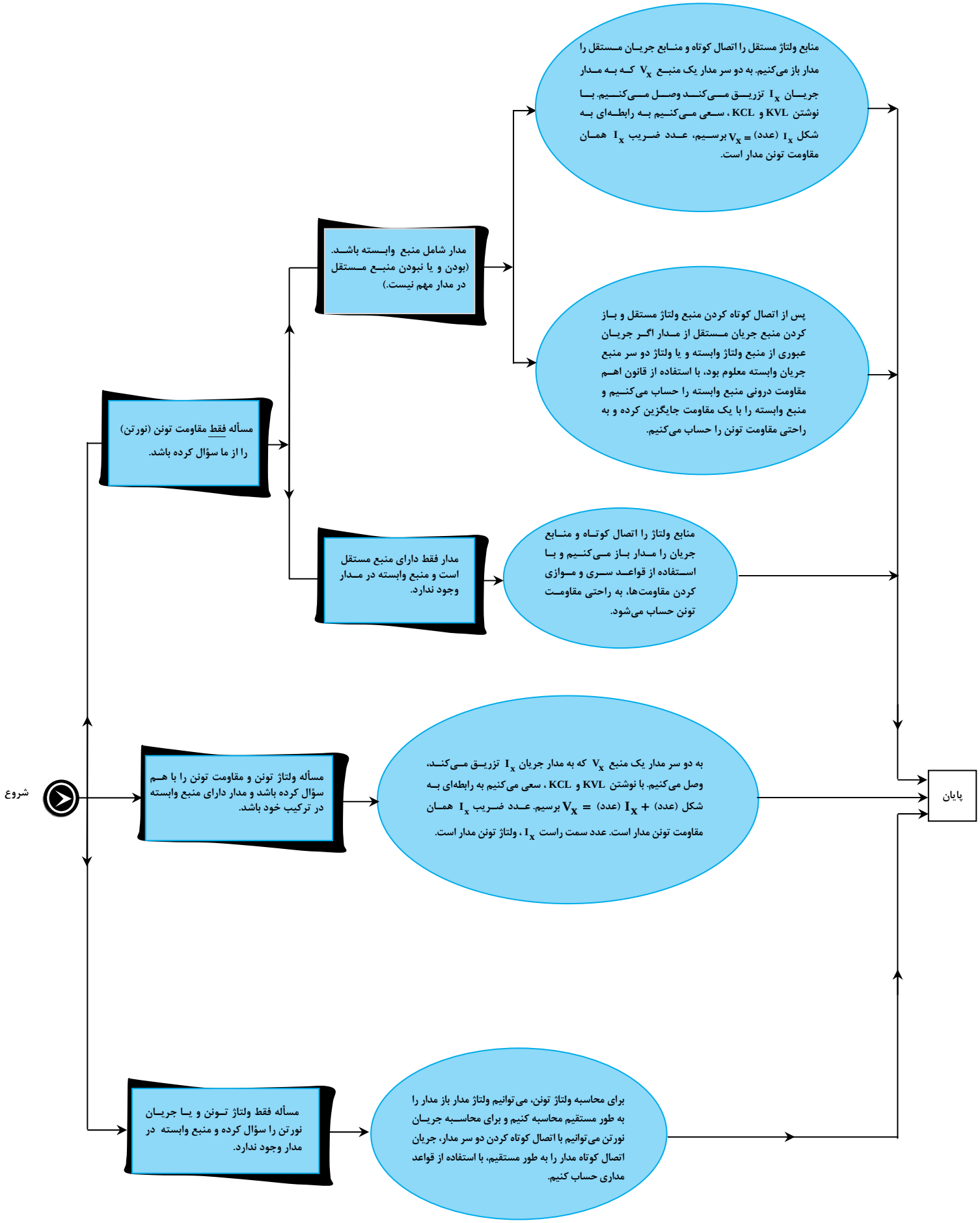


$$\frac{V_A - 15}{3} + \frac{V_A - 12}{6} + 15 = 10 \Rightarrow V_A = 4v$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_A - 12}{6} = \frac{4-12}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} A$$

$$P_{6\Omega} = |I|^2 \times 6 = (\frac{4}{3})^2 \times 6 = 10/6w$$

در زیر، دستورالعمل محاسبه مدار معادل تونن و نورتن به صورت الگوریتم آورده شده است:



در رابطه فوق اندیس rms نشان‌دهنده مقدار مؤثر تابع است که برای تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f^{2}(t)dt}$$

مقدار مؤثر توابع $A\sin(at+\theta)$ و $A\cos(at+\theta)$ برابر $\frac{A}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

دقت کنید روش‌هایی که در اینجا برای محاسبه توان بیان شد، در تمام مدارهای الکتریکی و برای تمام عناصر مداری قابل استفاده می‌باشد.

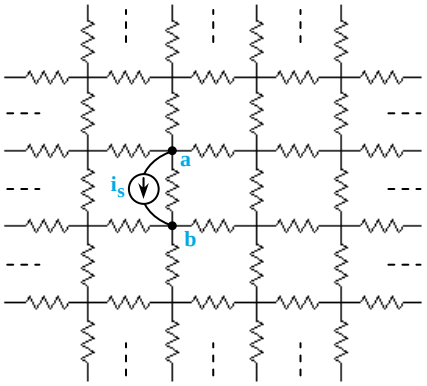
مثال ۱۲۲: در شکل زیر تمام مقاومت‌ها ۱Ω بوده و تا بینهایت ادامه دارند. اگر به پایانه‌های a و b منبع جریان i_s وصل شود، چه توانی در این مدار تلف می‌شود؟ (بر حسب وات)

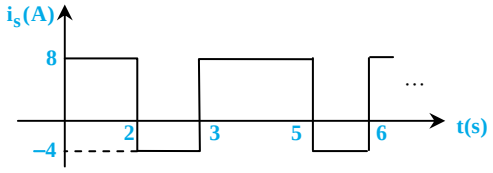
۱) ۳۲

۲) ۸

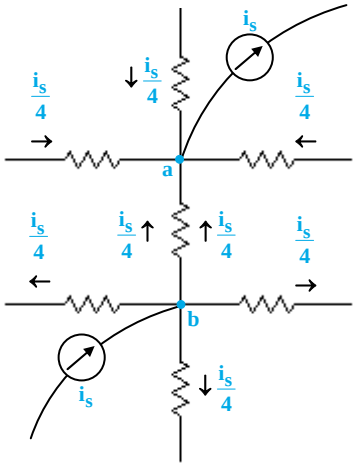
۳) ۱۲

۴) ۲۴





پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید مقاومت معادل دو سر منبع جریان i_s را محاسبه کنیم. چون مدار از دو سمت به ∞ می‌رود، می‌توان منبع i_s را با دو منبع i_s که یکی از ∞ به b وارد می‌شود و دیگری از a به سمت ∞ می‌رود، جایگزین کرد. پس داریم:



$$V_{ba}=(\frac{i_s}{4}+\frac{i_s}{4})\times 1$$

$$V_{ba}=0/5i_s \quad \Rightarrow \quad R_{eq}=0/5\Omega$$

حال با توجه به رابطه $P=R_{eq}i_{rms}^{2}$ باید مقدار i_{rms}^{2} را محاسبه کنیم:

$$i_{rms}^{2}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}i^{2}(t)dt=\frac{1}{3}[\int_{0}^{2}8^{2}dt+\int_{2}^{3}(-4)^{2}dt]=\frac{1}{3}[64\times 2+16\times 1]=\frac{144}{3}=48\ (A^{2})$$

$$\Rightarrow \quad P=R_{eq}i_{rms}^{2}=\frac{1}{2}\times 48=24(w)$$

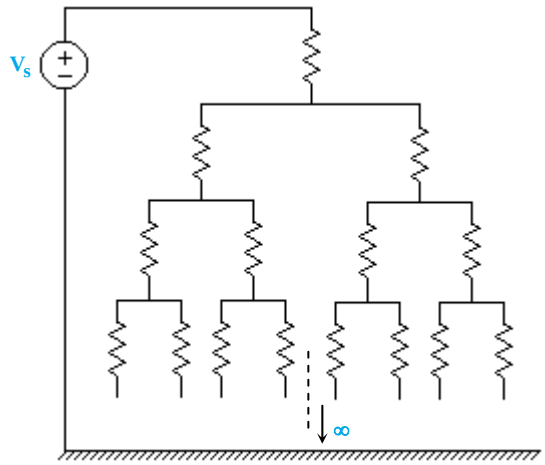
مثال ۱۲۳: در مدار شکل زیر مقاومت‌ها ۲ اهمی هستند و تا بینهایت ادامه دارند. توان تلف شده در این مدار بر حسب وات کدام است؟

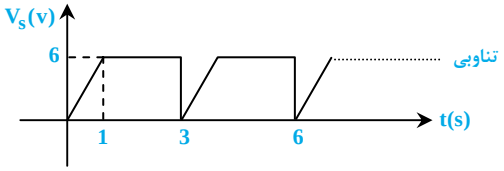
۱) ۴

۲) ۸

۳) ۷

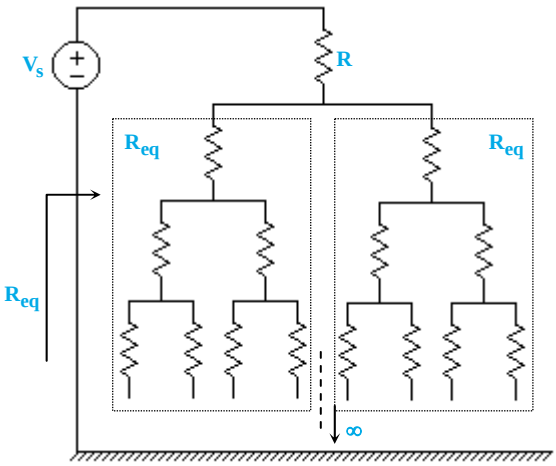
۴) ۶





☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مدار که تا ∞ ادامه دارد:

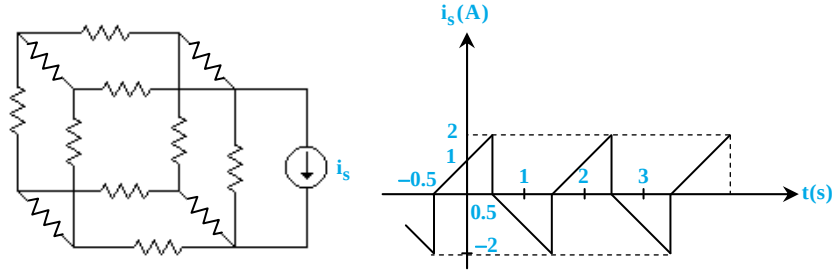
$$R_{eq} = R + R_{eq} \| R_{eq} \Rightarrow R_{eq} = R + \frac{R_{eq}}{۲} \Rightarrow R_{eq} = ۲R \xrightarrow{R=۲} R_{eq} = ۴\Omega$$



حال با توجه به این که $P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}}$ می‌باشد، باید $V_{rms}^۲$ را محاسبه کنیم:

$$V_{rms}^۲ = \frac{۱}{T}\int_۰^T V^۲(t)dt = \frac{۱}{۳}[\int_۰^۱ (۶t)^۲ dt + \int_۱^۳ (۶)^۲ dt] = \frac{۱}{۳}[\frac{۳۶}{۳}t^۳\Big|_۰^۱ + ۳۶t\Big|_۱^۳] = \frac{۸۴}{۳} = ۲۸(v^۲) \Rightarrow P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}} = \frac{۲۸}{۴} = ۷(w)$$

مثال ۱۲۴: **در مدار شکل زیر مقاومت‌های یک اهم اضلاع یک مکعب را تشکیل می‌دهند. توان تلف شده در این مدار در صورتی که سیگنال منبع جریان به صورت زیر باشد، کدام است؟**



۱) $\frac{۱}{۳}$ وات

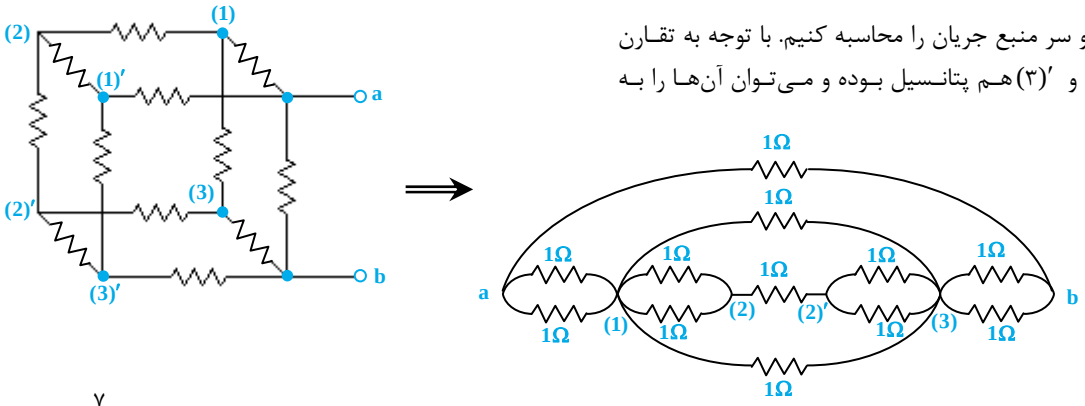
۲) ۱ وات

۳) $\frac{۱}{۹}$ وات

۴) $\frac{۷}{۹}$ وات

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

باید ابتدا مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان را محاسبه کنیم. با توجه به تقارن مدار نقاط (۱) و $(۱)'$ و نقاط (۳) و $(۳)'$ هم پتانسیل بوده و می‌توان آن‌ها را به یکدیگر متصل کرد.



با محاسبه‌ی مقاومت‌های معادل داریم:

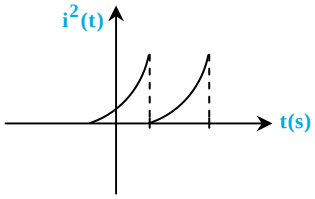
$$R_{ab} = \frac{۷}{۱۲}\Omega$$

حال مقدار توان را از رابطه روبرو محاسبه می‌کنیم:

$$P = Ri_{rms}^۲$$

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{۱}{T}\int_۰^T i^۲(t)dt}$$

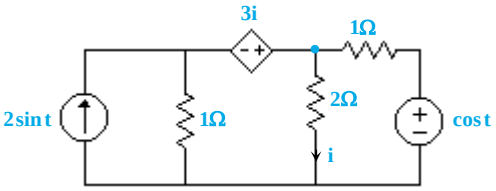
با توجه به سیگنال جریان داریم:



$$i_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۱}\int_{۰}^{۱}۴t^{۲}dt=\frac{۴}{۳}\ (A^{۲})\quad (T=۱sec)$$

$$P=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۷}{۹}(w)$$

مثال ۱۲۵: در مدار زیر اندازه توان متوسط منبع وابسته چند برابر اندازه توان مصرفی مقاومت ۲ اهم می‌باشد؟



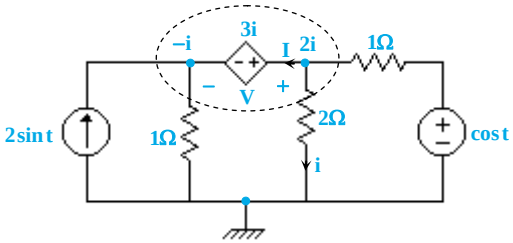
۱) ۷/۸

۲) ۶/۶

۳) ۳/۹

۴) ۳/۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم با تحلیل مدار جریان مقاومت ۲ اهمی و جریان منبع وابسته را محاسبه کنیم. مطابق شکل روبرو می‌توان ولتاژ گره‌های مدار را برحسب جریان i مشخص نمود:



حال در ابرگره بالای مدار KCL می‌زنیم:

$$۲\sin t+\frac{i}{۱}=i+\frac{۲i-\cos t}{۱}\ \Rightarrow\ i=\sin t+\frac{\cos t}{۲}\ (A)$$

با بدست آمدن مقدار i مقدار جریان منبع وابسته و ولتاژ آن نیز به سادگی بدست می‌آید:

$$V=۳\times i=۳\sin t+\frac{۳\cos t}{۲}\ (v)\quad ,\quad I=-۲\sin t-i=-۲\sin t-\sin t-\frac{\cos t}{۲}=-۳\sin t-\frac{\cos t}{۲}\ (A)$$

اکنون می‌خواهیم توان مقاومت ۲ اهم را محاسبه کنیم. بدین منظور می‌توان ابتدا توان لحظه‌ای این مقاومت را محاسبه کرد:

$$P_{۲\Omega}(t)=۲\times i^{۲}(t)=۲\times(\sin t+\frac{\cos t}{۲})^{۲}=۲\sin^{۲}t+۲\sin t\times\cos t+\frac{۱}{۲}\cos^{۲}t$$

با توجه به این نکته که مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin^{۲}\omega t$ و $\cos^{۲}\omega t$ برابر ۰/۵ و مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ برابر صفر است، داریم:

$$P_{۲\Omega}=\text{متوسط}[۲\sin^{۲}t+\sin ۲t+\frac{۱}{۲}\cos^{۲}t]=۲\times\frac{۱}{۲}+۰+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}\ w$$

مقدار توان متوسط مقاومت ۲ اهم را به روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$i(t)=\sin t+\frac{\cos t}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\sin(t+۲۶/۵^{\circ})\ \Rightarrow\ i_{rms}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۵}}{۲}=\sqrt{\frac{۵}{۸}}A$$

$$P_{۲\Omega}=۲\times i_{rms}^{۲}=۲\times\frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۴}\ w$$

اکنون توان متوسط منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم. در این جا نیز مانند قبل ابتدا توان لحظه‌ای را محاسبه کرده و سپس از آن متوسط‌گیری می‌کنیم:

$$P_{۳i}(t)=V(t)\times I(t)=(۳\sin t+\frac{۳\cos t}{۲})\times(-۳\sin t-\frac{\cos t}{۲})=-۹\sin^{۲}t-۶\sin t\times\cos t-\frac{۳}{۴}\cos^{۲}t$$

$$P_{۳i}=\text{متوسط}[-۹\sin^{۲}t-۳\sin ۲t-\frac{۳}{۴}\cos^{۲}t]=-۹\times\frac{۱}{۲}+-۳\times۰-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۳۹}{۸}\ w$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{|P_{۳i}|}{|P_{۲\Omega}|}=\frac{\frac{۳۹}{۸}}{\frac{۵}{۴}}=۳/۹$$