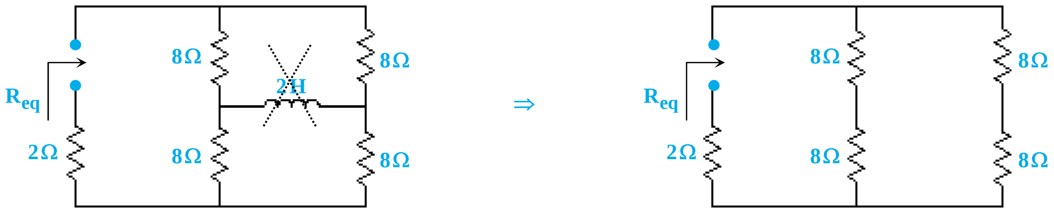
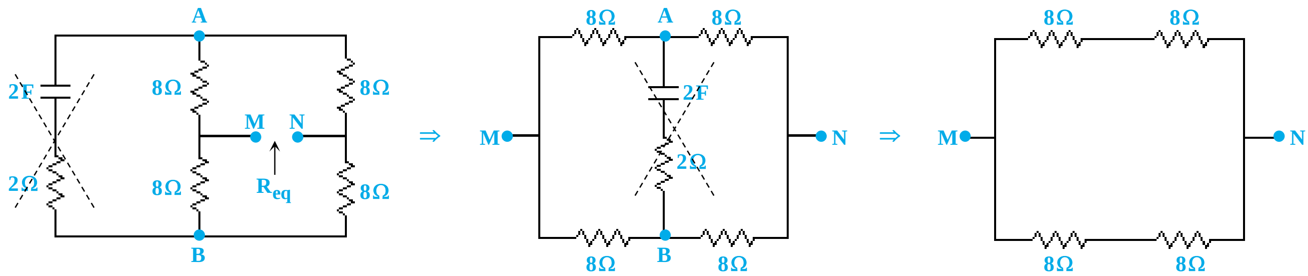
☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای حل مدار ابتدا لازم است مشخص شود که بیشترین ثابت زمانی در اثر سلف است یا خازن. دقت کنید در نگاه اول شاید این استنباط شود که مدار مرتبه دوم است و ثابت زمانی برای آن تعریف نمی‌شود، ولی در ادامه حل خواهیم دید که مدار را می‌توان به صورت دو مدار مرتبه اول در نظر گرفت. ابتدا ثابت زمانی را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. در این حالت از دو سر خازن مقاومت معادل را حساب می‌کنیم. با توجه به حضور پل وتستون در مدار، از سلف جریانی عبور نمی‌کند و از دیدگاه خازن، سلف در مدار وجود ندارد. حال داریم:



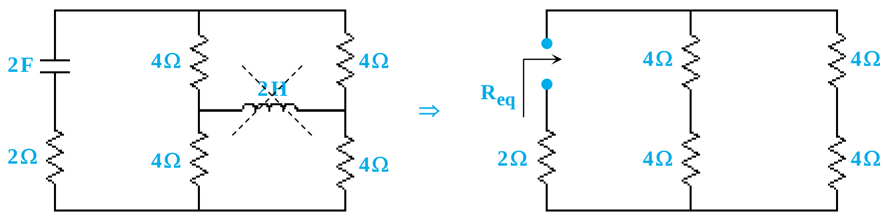
$$R_{eq} = ۲ + (۸+۸) \,||\, (۸+۸) = ۱۰\Omega \;\Rightarrow\; \tau_۱ = R_{eq}.C = ۱۰\times ۲F = ۲۰\,(sec)$$

در ادامه ثابت زمانی را در اثر سلف محاسبه می‌کنیم. در این حالت با توجه به تقارن مدار از دیدگاه سلف، نقاط A و B هم‌پتانسیل هستند و از خازن مدار جریان عبور نمی‌کند و شاخه RC قابل حذف می‌باشد. لازم به ذکر است که با ترسیم دوباره مدار، علت حذف شاخه RC را وجود پل وتستون از دیدگاه سلف نیز می‌توان در نظر گرفت.



$$R_{eq} = (۸+۸) \,||\, (۸+۸) = ۸\Omega \Rightarrow \tau_۲ = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}(sec)$$

با توجه به این که ثابت زمانی در اثر خازن، بزرگتر از ثابت زمانی در اثر سلف است، لذا با تعویض مقاومت‌های ۸ اهمی با مقاومت‌های ۴ اهمی، ثابت زمانی جدید مدار را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. حال داریم:



$$R_{eq} = ۲ + (۴+۴) \,||\, (۴+۴) = ۶\Omega$$

$$\tau_۳ = R_{eq}.C = ۶\times ۲ = ۱۲(sec) \;\Rightarrow\; \Delta\tau = \tau_۳ - \tau_۱ = ۱۲ - ۲۰ = -۸(sec)$$

بنابراین بیشترین ثابت زمانی مدار، به اندازه ۸ ثانیه کم می‌شود.

روش تستی برای محاسبه مجهولات در مدار مرتبه اول

با توجه به اینکه مدارهای مرتبه اول دارای معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند و فرم پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه اول ثابت است، لذا برای بدست آوردن ولتاژ یا جریان هر المان مداری در مدارهای مرتبه اولی که به صورت خطی و با ورودی DC هستند، می‌توان از فرم پاسخ زمانی نمایی استفاده کرد. بر این اساس در صورتی که کلیدزنی در زمان صفر انجام شود، پاسخ کامل یک مدار مرتبه اول برای هر مجهول به صورت زیر است:

$$\boxed{f(t) = [f(\infty) + [f(۰^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}]u(t)}$$

با توجه به فرمول ذکر شده در صفحه قبل، می‌توان پاسخ‌های حالت ماندگار و حالت گذرا، همچنین پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر در یک مدار مرتبه اول را به طور کلی به صورت زیر نوشت:

پاسخ حالت صفر $= f_2(t) = f(\infty)[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$ ، پاسخ ورودی صفر $= f_1(t) = f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$

(چون ورودی صفر است، لذا حتماً $f(\infty)$ صفر می‌شود.)

پاسخ حالت ماندگار $= f_4(t) = f(\infty)$ ، پاسخ گذرا $= f_3(t) = [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

دقت کنید اگر کلیدزنی در زمان $t = t_1$ باشد، با شیفت $t = 0$ به $t = t_1$ برای پاسخ کامل داریم:

$$f(t) = [f(\infty) + [f(t_1^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}]u(t - t_1)$$

لازم به ذکر است که مقدار $f(0^+)$، مقدار اولیه ولتاژ یا جریان مجهول، اندکی بعد از کلیدزنی است و $f(t = t_1)$ مقدار مجهول در $t = t_1$ و $f(\infty)$ مقدار مجهول در $t = \infty$ است. حال به بررسی قوانین تحلیل مدار در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ و $t = \infty$ می‌پردازیم.

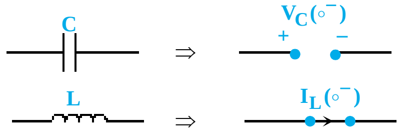
قوانین تحلیل مدار در زمان‌های 0^+ و 0^- و ∞

الف) تحلیل مدار در $t = 0^-$:

زمان $t = 0^-$ اندکی قبل از کلیدزنی است و نوع تحلیل آن به صورت تحلیل DC می‌باشد. مدار در این وضعیت به حالت پایدار رسیده است و در این زمان سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. بنابراین داریم:

$V_C =$ ثابت $\Rightarrow i_C = 0 \Rightarrow$ مدار باز

$i_L =$ ثابت $\Rightarrow V_L = 0 \Rightarrow$ اتصال کوتاه

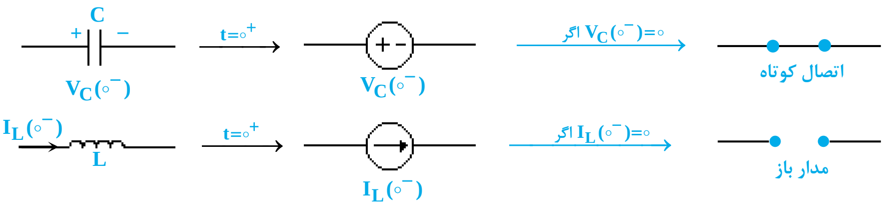


$V_C(0^-) = V_{th}$ (از دو سر خازن)

$I_L(0^-) = I_N$ (از دو سر سلف)

ب) تحلیل مدار در $t = 0^+$:

زمان $t = 0^+$ کمی بعد از عمل کلیدزنی در مدار است. در این حالت باید به جای خازن، یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار دهیم. واضح است در صورتی که $V_C(0^-) = 0$ باشد، باید به جای خازن در $t = 0^+$ اتصال کوتاه قرار دهیم و اگر $I_L(0^-) = 0$ باشد، باید به جای سلف مدار باز قرار دهیم.



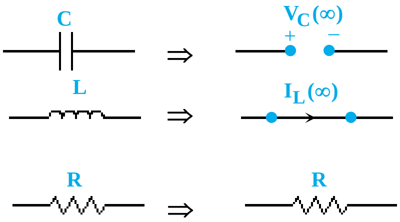
تذکر۱: با توجه به مطالب گفته شده به این نتیجه می‌رسیم که ولتاژ خازن در دو زمان $t = 0^-$ و $t = 0^+$ برابر بوده و تغییرات لحظه‌ای ندارد و همچنین در این دو زمان جریان سلف نیز برابر بوده و تغییری ندارد، یعنی داریم: $V_C(0^+) = V_C(0^-)$ ، $I_L(0^+) = I_L(0^-)$

نکته۸: دیده می‌شود که جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات لحظه‌ای ندارند و مقادیر عددی آنها در 0^+ و 0^- برابر است. اما برابری $V_C(0^-)$ با $V_C(0^+)$ به معنی برابری $I_C(0^-)$ با $I_C(0^+)$ نمی‌باشد و در مورد جریان خازن فقط با تحلیل مدار می‌توان نظر داد. بحث مشابهی نیز در مورد ولتاژ سلف قابل ذکر است. **علاوه بر این ولتاژ خازن و جریان سلف در مواردی خاص تغییرات لحظه‌ای دارند که در قسمت‌های آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.**

نکته۹: با توجه به اینکه در اکثر تست‌ها کلیدزنی در $t = 0$ اتفاق می‌افتد، لذا ما نیز مبنای لحظه کلیدزنی را $t = 0$ قرار دادیم. توجه کنید اگر مثلاً در لحظه $t = 2$ کلیدزنی انجام شود، تمامی تحلیل‌های فوق صحیح است، فقط پارامترها به شکل $V_C(2^+)$ و $V_C(2^-)$ و همچنین $I_L(2^+)$ و $I_L(2^-)$ تغییر می‌کند.

ج) تحلیل مدار در $t = \infty$:

این تحلیل مختص منابع از نوع DC است و مربوط به زمانی است که مدار به حالت پایدار خود رسیده است. در این حالت سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز می‌باشند.



$V_C(\infty) = V_{th}$ (از دو سر خازن)

$I_L(\infty) = I_N$ (از دو سر سلف)

نکته ۱۰: نوع تحلیل در $t=\infty$ و $t=۰^-$ کاملاً یکسان است، اما این امر دلیلی بر تساوی مجهولات در این دو زمان نمی‌باشد، زیرا بـه علـت اعمـال کلیدزنی و تغییر منابع تغذیه، مدار به لحاظ ساختاری در لحظات $t=۰^-$ و $t=\infty$ متفاوت است.

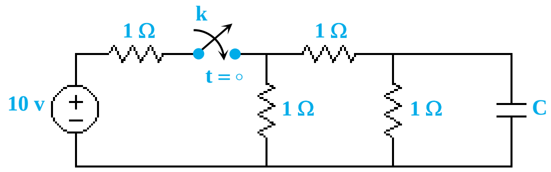
مثال ۱۶: در مدار شکل مقابل اگر کلید k در $t=۰$ بسته شود، خازن تا چه ولتاژی برحسب ولت شارژ می‌شود؟

۱) ۲/۵

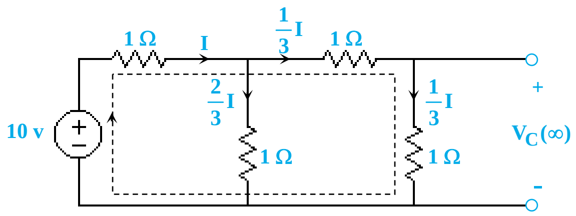
۲) ۱۰

۳) ۲

۴) صفر



پاسخ: گزینه «۳» تست از ما ولتاژ نهایی خازن یا $V_C(\infty)$ را می‌خواهد. برای ترسیم مدار در $t=\infty$، بعد از کلیدزنی به جای خازن در مدار، مدار باز قرار می‌دهیم. برای بدست آوردن ولتاژ دو سر خازن که همان ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی سمت راست می‌باشد، فرض مـی‌کنـیم جریـان منبـع برابـر I باشد، طبق قانون تقسیم جریان، جریان شاخه سمت راست برابر $\frac{۱}{۳}I$ می‌شود. حالا با نوشتن قانون KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:



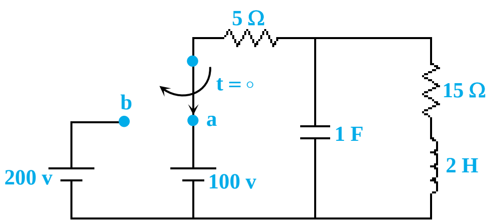
$$۱\times I+\frac{۱}{۳}I\times ۱+\frac{۱}{۳}I\times ۱=۱۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}I=۱۰ \Rightarrow I=۶A$$

$$I=\frac{۱۰\,v}{R_{eq}}=\frac{۱۰\,v}{۱+(۱\|۲)}=\frac{۱۰}{۱+\frac{۲}{۳}}=۶A \quad \text{یا}$$

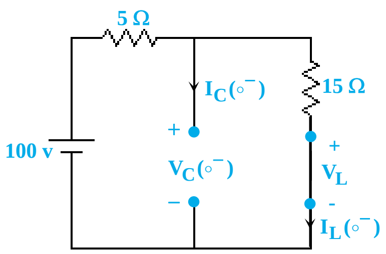
با توجه به اینکه ولتاژ خازن، همان ولتاژ مقاومت ۱ اهم در سمت راست است، داریم:

$$V_C(\infty)=V_{۱\Omega}=(\frac{۱}{۳}I)\times ۱=\frac{۱}{۳}(۶)\times ۱=\mathbf{۲v}$$

مثال ۱۷: در مدار زیر مقادیر جریان سلف و خازن و ولتاژ سلف و خازن را در زمان‌های $t=۰^-$ و $t=۰^+$ و $t=\infty$، بدست آوریـد. (کلیـد در $t=۰$ از وضعیت a به b می‌رود.)

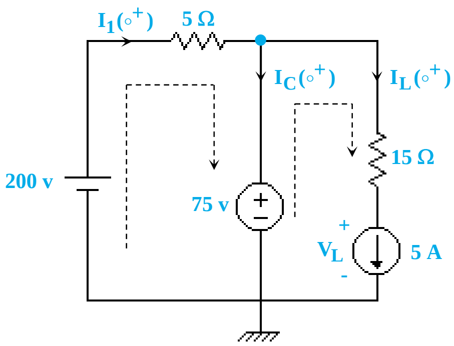


پاسخ: ابتدا مدار را در $t=۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید در وضعیت a بوده و مدار در حالـت ماندگار کار می‌کرده است، پس سلف با اتصال کوتاه و خازن با مدار باز مدل می‌شوند. حال داریم:



$$I_L(۰^-)=\frac{۱۰۰}{۵+۱۵}=۵A \quad \text{و} \quad V_L(۰^-)=۰ \quad \text{(به علت اتصال کوتاه شدن سلف)}$$

$$V_C(۰^-)=(\frac{۱۵}{۵+۱۵})\times ۱۰۰=۷۵\,v \quad \text{و} \quad I_C(۰^-)=۰ \quad \text{(به علت مدار باز شدن خازن)}$$



حال با اطلاعات بدست آمده در $t=۰^-$، مدار معادل را در $t=۰^+$ ترسیم می‌کنیم. در این حالـت به جای خازن یک منبع ولتاژ با مقدار $V_C(۰^-)=۷۵\,v$ و به جای سلف یک منبع جریان با اندازه $I_L(۰^-)=۵A$ قرار می‌دهیم. جریان سلف و ولتاژ خـازن در $t=۰^+$ بـا مقـادیر آنهـا در $t=۰^-$ برابر است، یعنی $I_L(۰^+)=I_L(۰^-)=۵A$ و مقدار $V_C(۰^+)=V_C(۰^-)=۷۵\,v$ می‌باشد.

حال مقادیر $V_L(۰^+)$ و $I_C(۰^+)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در حلقه سمت چپ KVL می‌نویسیم:

$$۵\times I_۱(۰^+)+۷۵=۲۰۰ \Rightarrow I_۱(۰^+)=۲۵A$$

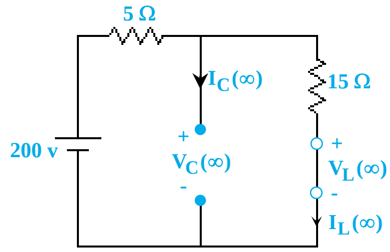
با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:

$$I_1(0^+)=I_C(0^+)+I_L(0^+) \Rightarrow 25=I_C(0^+)+5 \Rightarrow I_C(0^+)=20A$$

از طرفی با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

$$15\times I_L(0^+)+V_L(0^+)=75 \Rightarrow 15\times 5+V_L(0^+)=75 \Rightarrow V_L(0^+)=0$$

حالا مدار را در $t=\infty$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید به حالت b تغییر وضعیت داده است و خازن با مدار باز و سلف با اتصال کوتاه مدل می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه مدار به سادگی مقدار I_L محاسبه می‌شود.



$$I_L(\infty)=\frac{200}{5+15}=10A \quad \text{و} \quad V_L(\infty)=0$$

$$V_C(\infty)=\frac{200\times 15}{5+15}=150v \quad \text{و} \quad I_C(\infty)=0$$

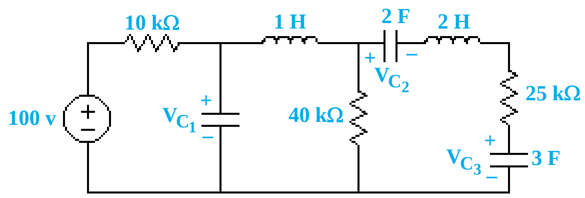
مثال ۱۸: در مدار شکل زیر ولتاژهای $V_{C_1}(0^-)$، $V_{C_2}(0^-)$ و $V_{C_3}(0^-)$ به ترتیب از راست به چپ برابر چند ولت می‌باشند؟

۱) ۸۰ ، ۳۲ ، ۴۸

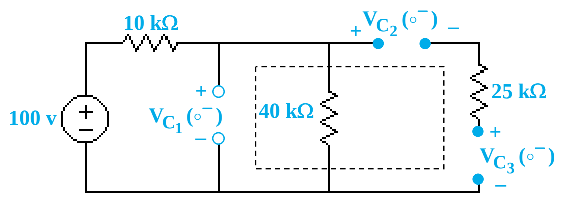
۲) ۲۰ ، ۸ ، ۱۲

۳) ۸۰ ، ۴۸ ، ۳۲

۴) ۲۰ ، ۱۲ ، ۸



☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در $t=0^-$ مدار در حالت پایدار بوده است، لذا سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ داریم:



$$V_{C_1}(0^-)=\frac{40}{40+10}\times 100=80v=V_{40k\Omega}$$

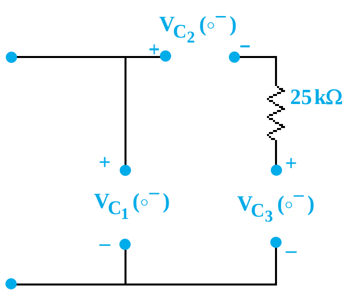
از طرفی چون دو خازن C_3 و C_2 با هم سری هستند، بار آنها با هم برابر بوده و ولتاژ آنها به نسبت عکس ظرفیت‌شان تقسیم می‌شود، یعنی:

$\frac{V_{C_2}(0^-)}{V_{C_3}(0^-)}=\frac{C_3}{C_2}=\frac{3}{2}$ و یا $V_{C_2}(0^-)=\frac{3}{2}V_{C_3}(0^-)$ است. با نوشتن KVL در مش سمت راست داریم:

$$V_{C_2}(0^-)+V_{C_3}(0^-)=80v$$

$$\frac{3}{2}V_{C_3}(0^-)+V_{C_3}(0^-)=80 \Rightarrow V_{C_3}(0^-)=32v \Rightarrow V_{C_2}(0^-)=80-32=48v$$

لازم به ذکر است که در $t=0^-$ با توجه به مدار باز بودن خازن‌ها، افت ولتاژی روی مقاومت‌ها و سلف‌های سری با خازن‌ها وجود ندارد. لذا ولتاژهای V_{C_2} و V_{C_3} را می‌توان از قانون تقسیم ولتاژ از ولتاژ خازن C_1 بدست آورد. بنابراین داریم:

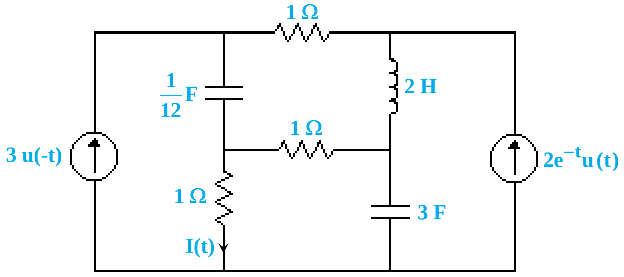


$$V_{C_1}(0^-)=V_{40k}=80v$$

$$V_{C_3}(0^-)=V_{C_1}(0^-)\times\frac{C_2}{C_2+C_3}=80\times\frac{2F}{2F+3F}=32v$$

$$V_{C_2}(0^-)=V_{C_1}(0^-)\times\frac{C_3}{C_2+C_3}=80\times\frac{3F}{2F+3F}=48v$$

مثال ۱۹: در مدار زیر جریان $I(t)$ در لحظه $t=0^+$ برحسب آمپر کدام است؟



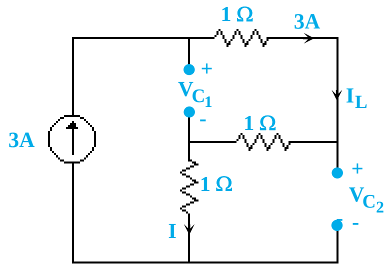
۱) ۳

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۵

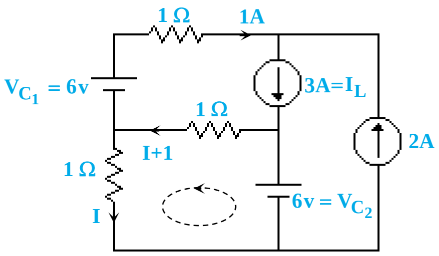
۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای محاسبه مقدار I در $t=0^+$، ابتدا مدار باید در $t=0^-$ تحلیل شود و مقدار $V_C(0^-)$ برای خازن‌ها و مقدار $I_L(0^-)$ برای سلف مدار محاسبه شود. در ادامه با توجه به شرایط اولیه، مدار معادل در $t=0^+$ ترسیم شده و مقدار $I(0^+)$ محاسبه می‌شود. برای تحلیل مدار در $t=0^-$ خازن‌ها را با مدار باز و سلف را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم. در $t=0^-$ منبع جریان سمت چپ مدار، برابر ۳A و منبع جریان سمت راست مدار برابر با صفر است.



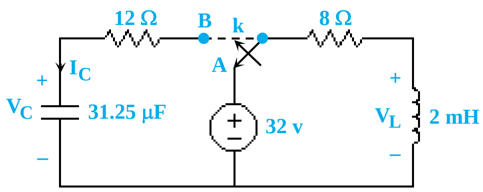
$$I_L(0^-)=۳A \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l} I_L(0^+)=۳A \\ V_{C_1}(0^+)=۶v \\ V_{C_2}(0^+)=۶v \end{array}\right.$$
$$V_{C_1}(0^-)=I_L(0^-)\times ۲=۶v \Rightarrow$$
$$V_{C_2}(0^-)=۲\times I=۶v$$

حال مدار را در $t=0^+$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت منبع جریان سمت راست برابر ۲A و منبع جریان در سمت چپ برابر صفر است. با نوشتن KVL در حلقه پایین مدار داریم:



$$۶=۱\times(I+۱)+I\times ۱ \quad\Rightarrow\quad I=I(t=0^+)=\mathbf{۲/۵A}$$

مثال ۲۰: در مدار شکل مقابل کلید k مدت زیادی در وضعیت A بوده است و در لحظه $t=0$ به وضعیت B برده می‌شود. مقدار $V_L(0^+)$ بعد از تغییر وضعیت کلید چقدر است؟ $(V_C(0)=0)$



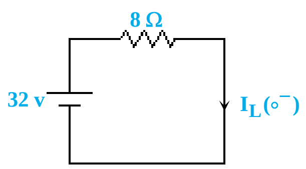
۱) صفر

۲) ۳۲- ولت

۳) ۸۰- ولت

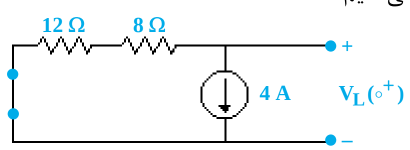
۴) بینهایت

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» برای محاسبه $V_L(0^+)$، ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم و $V_C(0^-)$ و $I_L(0^-)$ را بدست می‌آوریم. در ادامه حل، مدار را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم و مقدار $V_L(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم. حال با قرار دادن اتصال کوتاه به جای سلف، مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم.



$$I_L(0^\pm)=\frac{۳۲}{۸}=۴A \ , \ V_C(0^\pm)=0$$

حال با قرار دادن منبع جریان ۴A به جای سلف و اتصال کوتاه به جای خازن، مدار را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم.



$$V_L(0^+)=-۴\times(۸+۱۲)=-۸0v$$

چکیده مطالب کلیدزنی در مدارهای مرتبه اول

به طور کلی معادله ولتاژ یا جریان یک عنصر مداری در مدارهای مرتبه اول در حالت خطی و با ورودی DC به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$ می‌تواند معادله ولتاژ و یا جریان یک عنصر و یا یک شاخه مدار باشد. برای بدست آوردن معادله جریان و ولتاژ مجهول، باید مقادیر آنها را در $t=0^+$ و $t=\infty$ حساب کنیم و با بدست آوردن ثابت زمانی مدار، معادله مورد نظر را بنویسیم. برای بدست آوردن مقدار $f(0^+)$، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و سپس با توجه به خواسته مسأله به دو حالت برخورد می‌کنیم:

۱) معادله جریان یک عنصر غیر از سلف و یا معادله ولتاژ یک عنصر غیر از خازن مورد سؤال باشد:

مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و با ترسیم مدار در $t=0^+$، به جای خازن یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار می‌دهیم و مقدار عددی مجهول مسأله را در $t=0^+$ با توجه به مدار رسم شده حساب می‌کنیم. واضح است که اگر $I_L(0^-)=0$ و $V_C(0^-)=0$ باشند، در $t=0^+$ به جای سلف مدار باز و به جای خازن اتصال کوتاه قرار می‌دهیم.

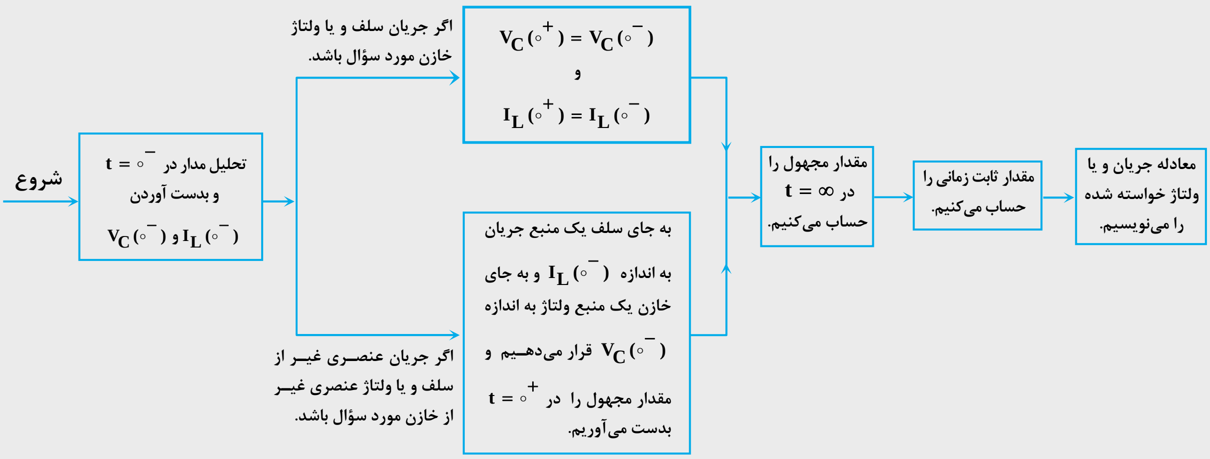
۲) معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن مورد سؤال باشد:

اگر هدف نوشتن معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن باشد، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقادیر $I_L(0^-)$ و $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و دیگر تحلیل مدار در $t=0^+$ لازم نیست، زیرا $I_L(0^-)=I_L(0^+)$ و $V_C(0^-)=V_C(0^+)$ می‌باشد. **دقت کنید تساوی‌های اخیر به این دلیل است که ولتاژ خازن و جریان سلف تغییرات ناگهانی ندارند، غیر از مواردی که در ادامه این فصل بیان شده است.**

پس از بدست آوردن $f(0^+)$، باید به سراغ محاسبه $f(\infty)$ برویم. بعد از عمل کلیدزنی، زمانی که مدار به حالت پایدار رسیده است، به جای سلف اتصال کوتاه و به جای خازن مدار باز قرار می‌دهیم و مقدار $f(\infty)$ را حساب می‌کنیم.

مرحله آخر بدست آوردن ثابت زمانی مدار می‌باشد. اگر مدار دارای سلف و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}$ و اگر مدار دارای خازن و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=R_{eq}.C_{eq}$ برای بدست آوردن ثابت زمانی استفاده می‌کنیم.

الگوریتم حل مسائل کلیدزنی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:



تذکر: دقت کنید در تست‌ها ممکن است مقادیر $f(0^+)$، $f(0^-)$ و یا $f(\infty)$ سؤال شود. در این حالت دیگر لازم نیست تمامی مراحل فوق را انجام دهیم و تا همان مرحله‌ای که مقادیر فوق حساب می‌شوند، ادامه می‌دهیم. مثلاً اگر $f(\infty)$ مورد سؤال باشد، تحلیل مدار در $t=0^-$ و یا در $t=0^+$ لازم نیست و اگر $f(0^+)$ را سؤال کرده باشند، باید مدار در دو زمان $t=0^-$ و $t=0^+$ تحلیل شود.

حال باید ببینیم چگونه می‌توانیم $\dot{V}_o$ را در لحظه صفر پیدا کنیم. با توجه به قانون تقسیم ولتاژ روی سلف‌ها داریم $V_C = ۱/۲۵\, V_o$. از طرفی رابطه $\dot{V}_C$ و I_C را بلدیم:

$$\dot{V}_C = \frac{۱}{C} I_C = ۲ \times ۱۰^۵\, I_C$$

اما می‌دانیم در لحظه اول پس از وصل شدن تغذیه، خازن مدار اتصال کوتاه بوده و $V_C = ۰$ می‌باشد و جریان سلف‌ها نیز برابر صفر است. پس طبق شکل مدار داریم:

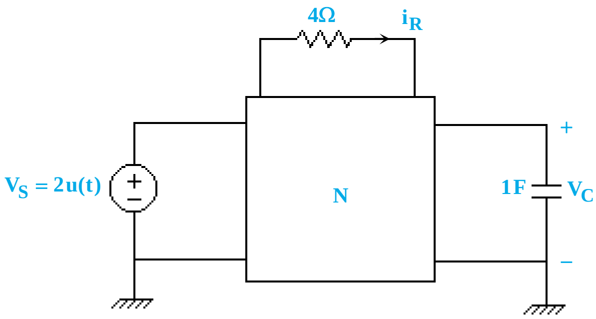
$$I_C(۰^+) = \frac{۶۰}{۲۰۰} = ۰/۳\ A$$

و در نهایت می‌توان $\dot{V}_C$ و $\dot{V}_o$ را محاسبه نمود:

$$\dot{V}_C(۰^+) = ۲\times۱۰^۵\, I_C(۰^+) = ۲\times۱۰^۵ \times ۰/۳ = ۶۰۰۰۰ (\frac{v}{sec})$$

$$\dot{V}_o(۰^+) = \frac{۱}{۱/۲۵}\dot{V}_C(۰^+) = \frac{۱}{۱/۲۵} \times ۶۰۰۰۰ = ۴۸۰۰۰ (\frac{v}{sec})$$

مثال ۵۹: در مدار زیر شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی می‌باشد. با شروع به کار مدار، مقادیر ولتاژ خازن و جریان مقاومت تا لحظه $t = ۲$ ثانیه به صورت $V_C(t) = ۴ - ۵e^{-\frac{t}{۴}}$ و $i_R(t) = ۱ + ۲e^{-\frac{t}{۴}}$ ثبت شده است. در $t = ۲$ ثانیه منبع ولتاژ پله‌ای و خازن را از مدار جدا ساخته و جای آن دو را در مدار عوض می‌کنیم. در لحظه $t = ۲^+$ مجموعاً چه توانی روی خازن و شبکه N مصرف می‌شود؟



۱) ۰/۵ وات

۲) ۱ وات

۳) ۱− وات

۴) ۲/۵− وات

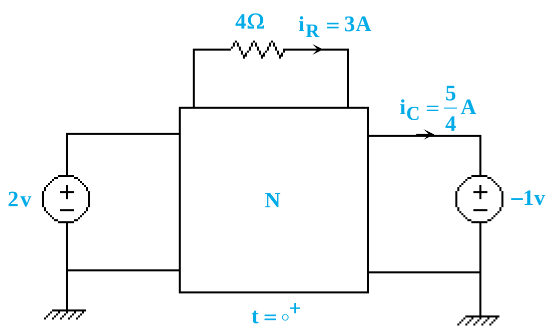
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این تست جریان مقاومت و جریان منبع و متعاقباً توان آنها را در لحظه $t = ۲^+$ محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از قانون پایستگی توان، مجموع توان مصرفی بقیه مدار را بدست می‌آوریم. بدین منظور ابتدا باید با یک تحلیل مداری مقدار جریان مقاومت و مقدار جریان خازن را به ولتاژ منبع و ولتاژ خازن مرتبط سازیم. برای این کار می‌توان از دو روش مختلف استفاده کرد که ما هر دو روش را برای روشن‌تر شدن کلیت راه‌حل تست بیان می‌کنیم. قبل از بیان این دو روش مقادیر اولیه و نهایی جریان و ولتاژ خازن و جریان مقاومت را تعیین می‌کنیم. با توجه به ظرفیت خازن مشخص است که داریم:

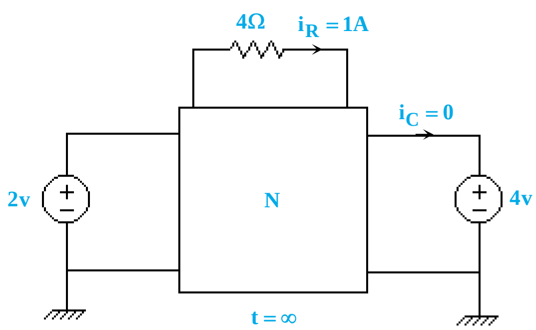
$$i_C = ۱ \times \frac{dV_C}{dt} = \frac{۵}{۴} e^{-\frac{t}{۴}}\ (A)$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_R(۰) = ۳\,A \\ i_R(\infty) = ۱\,A \end{cases} , \quad \begin{cases} V_C(۰) = -۱\,v \\ V_C(\infty) = ۴\,v \end{cases} , \quad \begin{cases} i_C(۰) = \frac{۵}{۴}\,A \\ i_C(\infty) = ۰\,A \end{cases}$$

روش اول: با تحلیل مدار در $t = ۰^+$ و $t = \infty$ مطابق با مدارهای معادل زیر می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به صورت ترکیب خطی از ولتاژ منبع و ولتاژ خازن در نظر گرفت. دقت کنید از آنجایی که ولتاژ خازن در $t = \infty$ ثابت بوده و به طور لحظه‌ای نمی‌تواند تغییر کند، می‌توان خازن را در این زمان به صورت یک منبع ولتاژ مدل کرد.





بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_R(0)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(0) \\ i_R(\infty)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=2\alpha_R-\beta_R \\ 1=2\alpha_R+4\beta_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=1/3 \\ \beta_R=-0/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_C(0)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(0) \\ i_C(\infty)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}=2\alpha_C-\beta_C \\ 0=2\alpha_C+4\beta_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=0/5 \\ \beta_C=-0/25 \end{cases}$$

حال با بدست آمدن روابط فوق می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به ازای هر مقدار دلخواه V_S و V_C تعیین کرد.

روش دوم: فرض کنید به جای خازن موجود در مدار، منبع ولتاژی با ولتاژ $V_C(t)=4-5e^{-\frac{t}{4}}$ در مدار قرار گیرد. می‌توان نشان داد که در این حالت جریان و ولتاژ شاخه‌های مدار نسبت به حالت اول هیچ تفاوتی نمی‌کند، چرا که به عنوان مثال اگر روشی مثل روش تحلیل ولتاژ گره در تحلیل مدار مورد استفاده قرار گیرد، با مشخص شدن ولتاژ خازن در هر لحظه، می‌توان ولتاژ سایر گره‌ها و به تبع آن جریان تمام شاخه‌های مدار را تعیین کرد. حال با جایگزین شدن خازن توسط منبع ولتاژ مورد نظر، با توجه به این که مدار دارای دو منبع ولتاژ می‌باشد، طبق قضیه جمع آثار باید بتوان جریان مقاومت و جریان خازن را در هر لحظه از زمان بر حسب ولتاژ این دو منبع بیان نمود:

$$i_R(t)=\alpha_R\times V_S(t)+\beta_R\times V_C(t) \Rightarrow 1+2e^{-\frac{t}{4}}=2\alpha_R+\beta_R\times(4-5e^{-\frac{t}{4}})=2\alpha_R+4\beta_R-5\beta_R e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_R+4\beta_R=1 \\ -5\beta_R=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=1/3 \\ \beta_R=-0/4 \end{cases} \Rightarrow i_R(t)=1/3V_S(t)-0/4V_C(t)$$

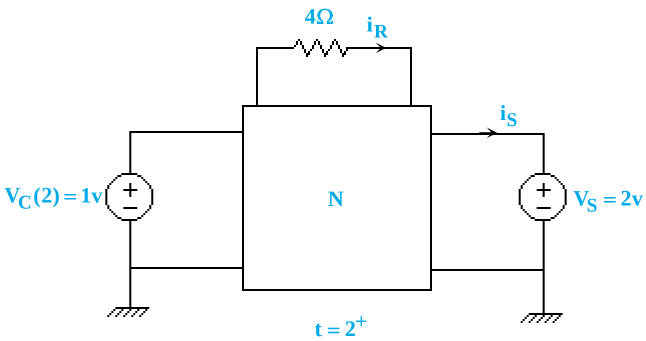
$$i_C(t)=\alpha_C\times V_S(t)+\beta_C\times V_C(t) \Rightarrow \frac{5}{4}e^{-\frac{t}{4}}=2\alpha_C+\beta_C\times(4-5e^{-\frac{t}{4}})=2\alpha_C+4\beta_C-5\beta_C e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_C+4\beta_C=0 \\ -5\beta_C=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=0/5 \\ \beta_C=-0/25 \end{cases} \Rightarrow i_C(t)=0/5V_S(t)-0/25V_C(t)$$

در ادامه حل این تست مدار را در $t=2$ ثانیه تحلیل می‌کنیم. در این زمان ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(t=2)=4-5e^{-\frac{2}{4}}\cong 4-5\times 0/6=4-3=1v$$

حال با عوض شدن جای خازن و منبع ولتاژ در $t=2$ ثانیه مدار معادلی به شکل زیر خواهیم داشت:



بنابراین طبق روابطی که قبلاً بدست آوردیم، داریم: (دقت کنید که در اینجا با استفاده از رابطه بدست آمده برای جریان خازن در مرحله قبل، جریان منبع V_S را در شرایط جدید محاسبه می‌کنیم.)

$$i_R(t=2^+)=1/3V_C(t=2^+)-0/4V_S(t=2^+)=1/3\times1-0/4\times2=0/5A \Rightarrow P_R(t=2^+)=4\times(0/5)^2=1w$$

$$i_S(t=2^+)=0/5V_C(t=2^+)-0/25V_S(t=2^+)=0/5\times1-0/25\times2=0 \Rightarrow P_S(t=2^+)=0$$

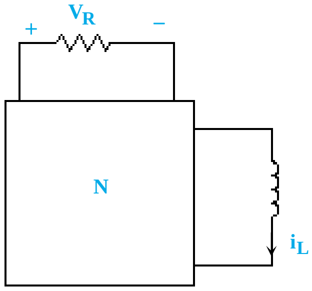
$$\Rightarrow P_S(2^+)+P_R(2^+)=1w \Rightarrow P_C(2^+)+P_N(2^+)=-1w$$

و لذا گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.

مثال ۶۰: در مدار زیر، شبکه N متشکل از تعدادی مقاومت و یک منبع DC می‌باشد. تحت شرایط اولیه $i_L(\circ)=\circ$ داریم:

$i_L(t)=۳-۳e^{-۲t}\;,\;V_R(t)=۴-e^{-۲t}$

حال در آزمایش دیگری که مقدار $i_L(\circ)$ و اندازه منبع DC در آن متفاوت است، ولتاژ مقاومت به صورت $V'_R(t)=-۲+\frac{۳}{۲}e^{-۲t}$ بدست آمده است. در این حالت معادله جریان سلف کدام است؟



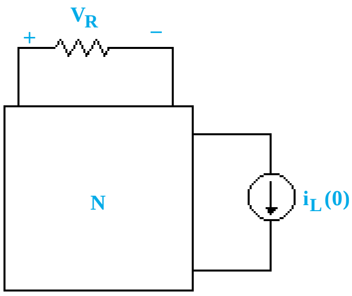
۱) $i'_L(t)=-۳+۶e^{-۲t}$

۲) $i'_L(t)=-۳+۹e^{-۲t}$

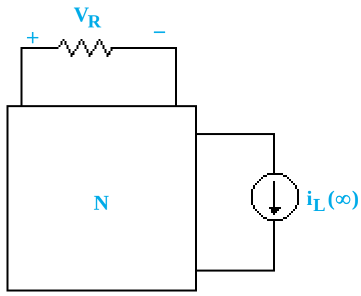
۳) $i'_L(t)=-۱/۵+۴/۵e^{-۲t}$

۴) $i'_L(t)=-۱/۵+۳e^{-۲t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مدار را در زمان‌های $t=\circ$ و $t=\infty$ مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



$t=\circ$



$t=\infty$

در زمان $t=\circ$ ولتاژ مقاومت متأثر از منبع ولتاژ DC در داخل شبکه N و جریان اولیه سلف می‌باشد. پس با فرض این که اندازه منبع DC برابر A باشد، می‌توان نوشت:

$V_R(\circ)=\alpha A+\beta i_L(\circ)$

و همچنین در حالت دایمی مطابق با شکل فوق داریم:

$V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty)$

حال نتایج بدست آمده از آزمایش اول را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. با توجه به توابع زمانی $i_L(t)$ و $V_R(t)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_L(\circ)=\circ A \\ i_L(\infty)=۳A \end{cases} \;,\; \begin{cases} V_R(\circ)=۳v \\ V_R(\infty)=۴v \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم مقادیر αA و β در روابط فوق را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V_R(\circ)=\alpha A+\beta i_L(\circ) \Rightarrow \alpha A=۳ \\ V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty) \Rightarrow ۴=۳+\beta\times ۳ \Rightarrow \beta=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

حال آزمایش دوم را که در آن مقدار $i_L(\circ)$ و A تغییر یافته است، در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه داده شده برای $V'_R(t)$ داریم:

$$\begin{cases} V'_R(\circ)=-\frac{۱}{۲}A \\ V'_R(\infty)=-۲A \end{cases}$$

از طرفی با فرض این که منبع DC، k برابر شده باشد، می‌توان جریان نهایی سلف را به صورت زیر نوشت:

$i'_L(\infty)=k\,i_L(\infty)=۳k$

حال سعی می‌کنیم با مدنظر قرار دادن مقادیر $V'_R(\circ)$ و $V'_R(\infty)$، مقادیر $i'_L(\circ)$ و k را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V'_R(\circ)=\alpha Ak+\beta i'_L(\circ) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=۳k+\frac{۱}{۳}\times i'_L(\circ) \\ V'_R(\infty)=\alpha Ak+\beta i'_L(\infty) \Rightarrow -۲=۳k+\frac{۱}{۳}\times ۳k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow i'_L(\infty)=۳k=-\frac{۳}{۲} \\ i'_L(\circ)=۳A \end{cases}$$

در نهایت با توجه به مقادیر بدست آمده برای $i'_L(\infty)$ و $i'_L(\circ)$ و با توجه به ثابت ماندن مقدار ثابت زمانی مدار در آزمایش دوم داریم:

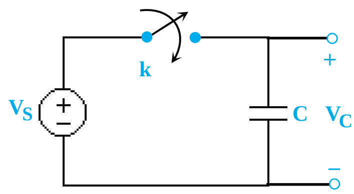
$$i'_L(t)=i'_L(\infty)+(i'_L(\circ)-i'_L(\infty))e^{-۲t}=-\frac{۳}{۲}+(۳-(-\frac{۳}{۲}))e^{-۲t}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۹}{۲}e^{-۲t}\,(A)$$

تغییر ناگهانی ولتاژ خازن و جریان سلف

همان‌طور که در ابتدای مطالب کلیدزنی اشاره شد، معمولاً ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقات $V_C(0^+) = V_C(0^-)$ است و همچنین جریان سلف نیز تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقات $I_L(0^+) = I_L(0^-)$ است. اما در مواردی این روابط صحیح نیستند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

۱ـ اتصال موازی یک منبع ولتاژ با کلید به یک خازن:

در صورتی که یک خازن با کلید، مستقیماً به یک منبع مستقل ولتاژ وصل شود، بعد از کلیدزنی ولتاژ V_C باید مساوی V_S باشد و شارژ خازن ناچاراً به صورت آنی انجام می‌شود. در این حالت جریان خازن شامل تابع ضربه خواهد بود.

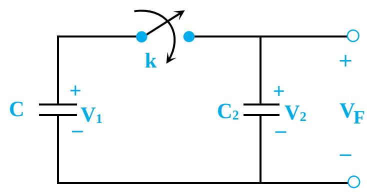


$$V_C(0^-) = 0 \quad , \quad V_C(0^+) = V_S$$

$$V_C(0^-) \neq V_C(0^+)$$

۲ـ اتصال موازی دو خازن با ولتاژهای مختلف:

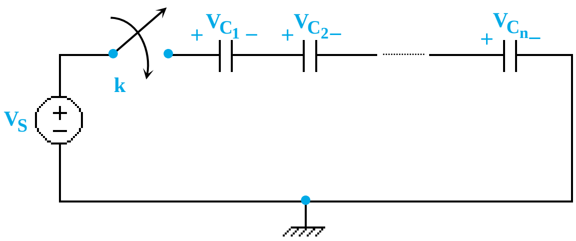
در واقع شبیه حالت اول می‌باشد. در این حالت ولتاژ نهایی پس از اتصال کلید از رابطه زیر محاسبه می‌شود. در این حالت اگر پلاریته ولتاژهای اولیه مطابق با پلاریته V_F باشد، ولتاژهای اولیه با علامت مثبت وارد معادله می‌شوند و در غیر این صورت با علامت منفی در معادله لحاظ می‌شوند.



$$V_F = \frac{\pm C_1 V_1 \pm C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pm q_1 \pm q_2}{C_{eq}}$$

۳ـ تشکیل یک حلقه توسط خازن‌ها و منابع ولتاژ (حلقه خازنی) بعد از کلیدزنی:

اگر کلیدزنی در مدار موجب تشکیل یک حلقه خازنی شود، یعنی حلقه‌ای که شامل یک یا چند خازن و یک یا چند منبع ولتاژ مستقل است، خازن‌های مدار جهش ولتاژ خواهند داشت.



در این حالت ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t = 0^+$ (با پلاریته مشخص شده روی شکل) می‌توان از طریق رابطه کلی زیر محاسبه کرد:

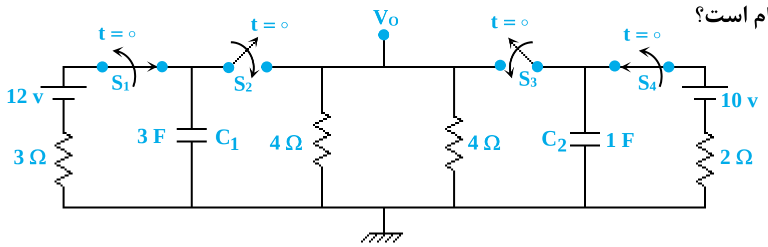
$$V_{C_i}(0^+) = \frac{C_{eq}}{C_i}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-) - \cdots - V_{C_n}(0^-)] + V_{C_i}(0^-) \quad , \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

برای حالت خاصی که تنها دو خازن در حلقه موجود باشد، داریم:

$$\begin{cases} V_{C_1}(0^+) = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)] + V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^+) = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)] + V_{C_2}(0^-) \end{cases}$$

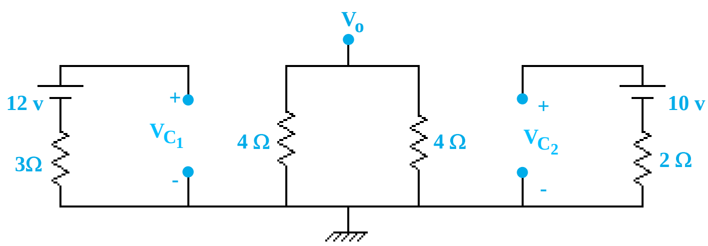
این روابط را می‌توان با استفاده از قانون بقای بار اثبات نمود.

مثال ۶۱: در مدار مقابل معادله تغییرات V_o بر حسب زمان کدام است؟



۱) $11/5e^{-\frac{t}{4}}$
۲) $6/5e^{-\frac{t}{4}}$
۳) $11/5e^{-\frac{t}{8}}$
۴) $6/5e^{-\frac{t}{8}}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مدار را در $t = 0^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان S_1 و S_4 بسته و S_2 و S_3 باز هستند. با توجه به اینکه خازن‌ها مدار باز شده‌اند، لذا داریم:

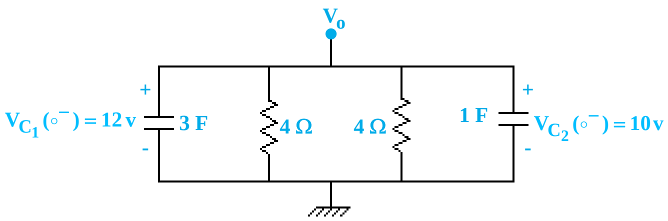


$$V_{C_1}(0^-) = 12v \quad , \quad V_{C_2}(0^-) = 10v$$

حالا مدار را در $t>۰$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید $S_۱$ و $S_۴$ باز شده و کلید $S_۳$ و $S_۲$ وصل می‌شوند. با توجه به اینکه دو خازن با ولتاژهای اولیه متفاوت با هم موازی می‌شوند، لذا معادله ولتاژ نهایی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$V_o(۰^+)=\frac{V_{C_۱}(۰^-)\times C_۱+V_{C_۲}(۰^-)\times C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{۳\times ۱۲+۱\times ۱۰}{۳+۱}=۱۱/۵\,v$$

حال مقادیر R_{eq} و C_{eq} را محاسبه می‌کنیم:



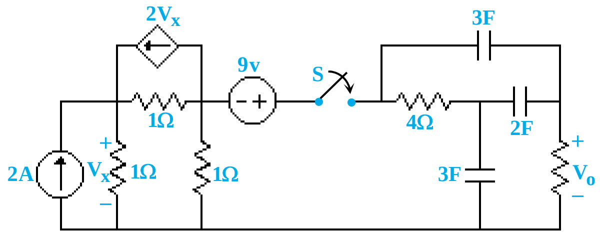
$$R_{eq}=۴\,\|\,۴=۲\Omega\ ,\ \ C_{eq}=۳F\,\|\,۱F=۴F$$

$$\tau=R_{eq}.C_{eq}\ \Rightarrow\ \tau=۲\times ۴=۸\sec$$

$$V_o(t)=V_o(۰^+)e^{-\frac{t}{\tau}}\ \Rightarrow\ V_o(t)=۱۱/۵e^{-\frac{t}{۸}}$$

توجه کنید که در بینهایت هیچ منبعی به مدار متصل نیست، لذا $V_o(\infty)=۰$ است.

مثال ۶۲: در مدار شکل زیر، کلید S در $t=۰$ بسته می‌شود. مقدار $V_o(۰^+)$ چند ولت است؟ (ولتاژ اولیه خازن‌ها در $t=۰^-$ صفر است)



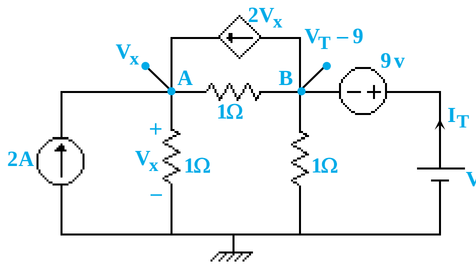
۱) ۲

۲) ۳

۳) صفر

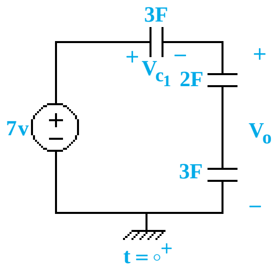
۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ اولیه خازن‌ها برابر صفر است، تنها زمانی $V_o(۰^+)$ مخالف صفر خواهد بود که مدار سمت چپ کلید S، به صورت یک منبع ولتاژ عمل کرده و پس از بسته شدن کلید حلقه خازنی در مدار ایجاد شود. برای بررسی این مسئله مدار معادل تونن این قسمت را محاسبه می‌کنیم:



$$KCL\ \ (A):\frac{V_x}{۱}-۲+\frac{V_x-V_T+۹}{۱}-۲V_x=۰\ \Rightarrow V_T=۷v$$

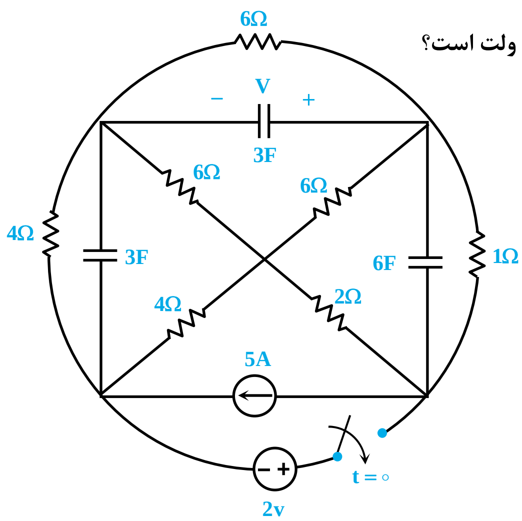
بنابراین، این مدار دقیقاً مشابه یک منبع ولتاژ ۷ ولتی عمل می‌کند. حال با تحلیل مدار در $t=۰^+$ داریم:



$$V_{C_۱}(۰^+)=\frac{\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}}{۳}\times ۷=۲v$$

$$V_o(۰^+)=۷-V_{C_۱}(۰^+)=۷-۲=۵v$$

مثال ۶۳: در مدار زیر کلید در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. مقدار V در لحظه $t=۰^+$ چند ولت است؟



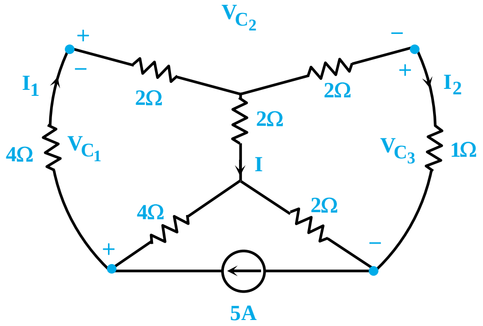
۱) صفر

۲) ۱/۶-

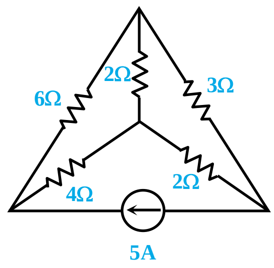
۳) ۴-

۴) ۸-

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم. جهت تحلیل ساده‌تر مدار، می‌توانیم اتصال مثلث با مقاومت‌های ۶ اهمی در بـالای مـدار را به اتصال ستاره تبدیل کنیم:



⇒



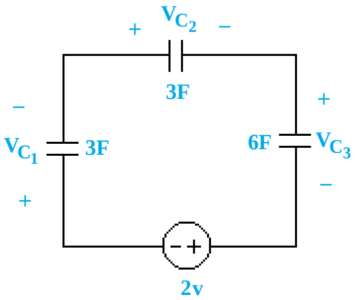
پل وتستون متعادل $\rightarrow$ ۶×۲ = ۴×۳

حال با توجه به شکل بالا و برقراری حالت تعادل در پل وتستون موجود در مدار داریم:

$$\begin{cases} V_{C_1}(0^-) = ۲\times۴ = ۸v \\ V_{C_2}(0^-) = ۲\times(۲+۲) = ۸v \\ V_{C_3}(0^-) = ۲\times۱ = ۲v \end{cases}$$

$$I = 0 \quad , \quad I_1 = I_2 = ۵\times\frac{۶}{۶+۹} = ۲A$$

اکنون مدار را در زمان $t=0^+$ تحلیل می‌کنیم. پس از کلیدزنی مشاهده می‌شود که سه خازن موجود در مدار با منبع ولتاژ ۳ ولتی، تشکیل یک حلقه داده و بنابراین لزوماً شاهد تغییرات ناگهانی در ولتاژ خازن‌ها خواهیم بود. حال با استفاده از رابطه بیان شده، ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t=0^+$ محاسبه می‌کنیم. (دقت کنید که مدار مقاومتی به همراه منبع جریان، در میزان تغییرات ولتاژ خازن‌ها در لحظه‌ی $t=0$ بی‌تأثیر هستند، از این رو در تحلیل مـدار در لحظـه $t=0^+$ نادیده گرفته می‌شوند)



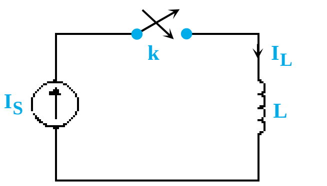
$$V_{C_2}(0^+) = \frac{C_{eq}}{C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-) - V_{C_3}(0^-)] + V_{C_2}(0^-)$$

$$V_S = -۲v \quad , \quad C_2 = ۳F \quad , \quad C_{eq} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}} = \frac{۶}{۵}F$$

$$\Rightarrow V_{C_2}(0^+) = \frac{\frac{۶}{۵}}{۳}[-۲-۸-۸-۲]+۸ = 0/۴\times(-۲0)+۸ = 0v \Rightarrow V = -V_{C_2}(0^+) = 0v$$

۴ـ اتصال سری یک سلف به یک منبع مستقل جریان با یک کلید:

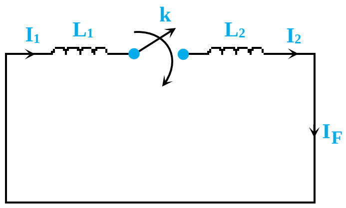
در صورتی که یک سلف با یک منبع جریان توسط یک کلید سری شود، جریان سلف برابر I_S شده و این جریان در همه زمان‌ها ثابت خواهد بود. لذا جریـان به صورت آنی از صفر به I_S تغییر می‌کند. در این حالت ولتاژ دو سر سلف شامل تابع ضربه خواهد بود.



$$I_L(0^-) = 0 \quad , \quad I_L(0^+) = I_S$$

$$\Rightarrow I_L(0^-) \neq I_L(0^+)$$

۵ـ اتصال سری دو سلف با جریان‌های اولیه مختلف:



در واقع شبیه حالت دوم می‌باشد. در این حالت جریان نهایی مدار با استفاده از رابطه زیر محاسبه مـی‌شـود. در صورتی که جریان‌های اولیه سلف‌ها، هم‌جهت با I_F باشند، با علامت مثبت در معادله وارد می‌شـوند و در غیر این صورت با علامت منفی در فرمول لحاظ می‌شوند.

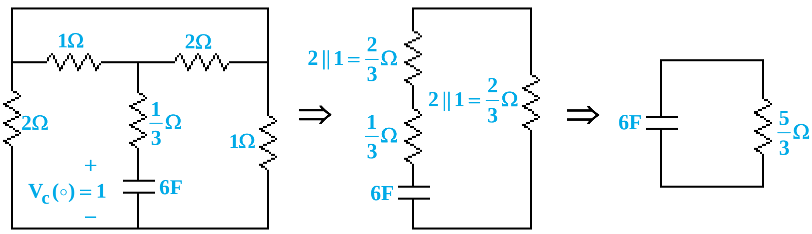
$$I_F = \frac{\pm L_1 I_1 \pm L_2 I_2}{L_1 + L_2} = \frac{\pm\varphi_1 \pm \varphi_2}{L_{eq}}$$

۶ـ تشکیل یک کاتست توسط سلف‌ها و منابع جریان (کاتست سلفی) بعد از کلیدزنی:

اگر کلیدزنی در مدار موجب تشکیل یک کاتست سلفی شود، یعنی کاتستی که شامل یک یا چند سلف و یک یا چند منبع جریان مستقل است، سـلف‌هـای مدار جهش جریان خواهند داشت.

حال در گام اول $V_C(t_0^-)$ را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به شکل مقابل داریم:

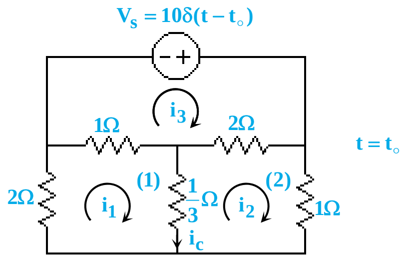


$$\tau = R.C = \frac{5}{3}\times 6 = 10\,sec$$

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{10}}$$

$$V_C(t=t_0^-) = e^{-\frac{t_0}{10}}$$

اکنون مدار را در $t=t_0$ تحلیل کرده و اثر منبع ولتاژ ضربه‌ای را بر روی ولتاژ خازن محاسبه می‌کنیم. در این حالت خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم.



$$KVL(1): 2i_1 + i_1 - i_3 + \frac{1}{3}\times(i_1-i_3) = 0 \Rightarrow i_3 = \frac{10}{3}i_1 - \frac{1}{3}i_2 \qquad (1)$$

$$KVL(2): \frac{1}{3}\times(i_2-i_1)+2\times(i_2-i_3)+i_2=0\Rightarrow -\frac{1}{3}i_1+\frac{10}{3}i_2-2i_3=0$$

$$\xrightarrow{(1)} -\frac{1}{3}i_1+\frac{10}{3}i_2-\frac{20}{3}i_1+\frac{2}{3}i_2=0\Rightarrow i_2=\frac{7}{4}i_1 \qquad (2)$$

$$KVL\ (\text{حلقه بیرونی}): 2i_1 - V_S + i_2 = 0 \xrightarrow{(2)} 2i_1 - V_S + \frac{7}{4}i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{4}{15}V_S \Rightarrow i_C = i_1 - i_2 = -\frac{3}{4}i_1 = -\frac{V_S}{5}$$

$$V_C(t=t_0^+) = \frac{1}{c}\int_{t_0^-}^{t_0^+} i_C dt = \frac{1}{6}\times\int_{t_0^-}^{t_0^+} -\frac{1}{5}\times 10\delta(t-t_0)dt = -\frac{1}{3}v$$

ناشی از V_S

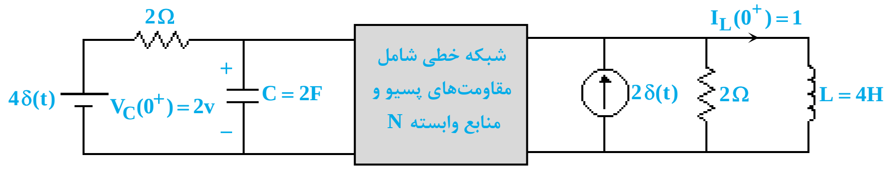
بنابراین ولتاژ خازن در لحظه $t=t_0^+$ برابر است با:

$$V_C(t=t_0^+) = e^{-\frac{t_0}{10}} - \frac{1}{3}$$

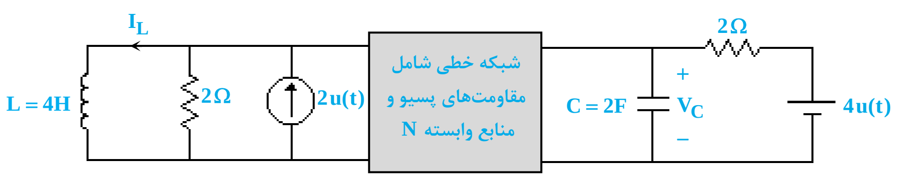
حال باید داشته باشیم:

$$V_C(t=t_0^+)=0 \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{10}}-\frac{1}{3}=0\Rightarrow -\frac{t_0}{10}=Ln(\frac{1}{3})=-Ln(3)\Rightarrow t_0=10Ln(3)\,sec$$

مثال ۷۶: در مدار شکل زیر، سلف و خازن بدون انرژی اولیه هستند و جریان سلف و ولتاژ خازن پس از اعمال منابع ضربه روی شکل نشان داده شده است.



اکنون در مدار شکل زیر و در حالت پایدار مدار، جریان سلف و ولتاژ خازن چقدر خواهد بود؟



۱) $\begin{cases} I_L = 4A \\ V_C = 4v \end{cases}$

۲) $\begin{cases} I_L = 2A \\ V_C = 1v \end{cases}$

۳) $\begin{cases} I_L = 1A \\ V_C = 2v \end{cases}$

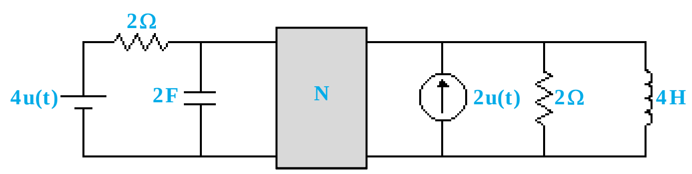
۴) $\begin{cases} I_L = 2A \\ V_C = 2v \end{cases}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ایده حل این سؤال در رسم مدار در زمان‌های خواسته شده و مقایسه دو مدار است. ابتدا مدار اول را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم جریان خازن و ولتاژ سلف را در بازه زمانی $0^- < t < 0^+$ پیدا کنیم:

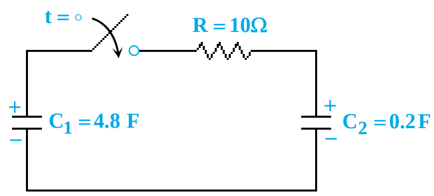
$$I_C(t) = 2\frac{dV_C}{dt} = 2\times\frac{d(2u(t))}{dt} = 4\delta(t) \qquad 0^- < t < 0^+$$

$$V_L(t) = 4\frac{dI_L}{dt} = 4\times\frac{d(u(t))}{dt} = 4\delta(t) \qquad 0^- < t < 0^+$$

حال با توجه به خطی بودن مدار، برای یافتن پاسخ پله مدار می‌توانیم از پاسخ ضربه انتگرال‌گیری کنیم. در این حالت با مدار زیر سر و کار داریم:



مثال۷۹: در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه خازن $C_۱$ برابر ۱۰ ولت و ولتاژ اولیه خازن $C_۲$ برابر صفر است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی ندارد.

۲) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی دارد.

۳) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۹/۶ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی دارد.

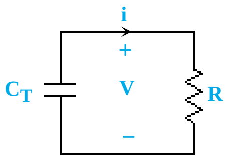
۴) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۴/۸ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:** انرژی اولیه ذخیره شده در مدار برابر است با:

$$\text{انرژی اولیه} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۴/۸\times ۱۰^۲ = ۲۴۰J$$

بعد از بسته شدن کلید، خازن معادل مدار با ولتاژ اولیه ۱۰ ولت از طریق مقاومت دشارژ می‌شود:

در این حالت انرژی تلف شده در مقاومت برابر انرژی از دست رفته خازن معادل می‌باشد:

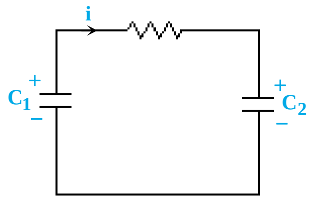


$$C_T = \frac{۴/۸\times ۰/۲}{۴/۸+۰/۲} = \frac{۴/۸}{۲۵}F \quad \text{و} \quad V_T = V_{C_۱} - V_{C_۲} = ۱۰-۰ = ۱۰v$$

$$\text{انرژی تلف شده در مقاومت} = \text{انرژی اولیه خازن معادل} = \frac{۱}{۲}\times C_T\times V_T^۲ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴/۸}{۲۵}\times ۱۰^۲ = ۹/۶J$$

$$\Rightarrow \text{انرژی نهایی ذخیره شده} = ۲۴۰-۹/۶ = ۲۳۰/۴J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در مدار}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$

روش دوم: بعد از این که مدار به حالت پایدار رسید، ولتاژ دو خازن باید با هم برابر باشند. به عبارتی پس از این‌که مدار شروع به کار کرد، جریان i در مدار برقرار می‌شود و خازن $C_۲$ شارژ و خازن $C_۱$ دشارژ می‌شود و به عبارتی ولتاژ خازن $C_۱$ کاهش و ولتاژ خازن $C_۲$ افزایش می‌یابد تا زمانی که این دو ولتاژ با هم برابر شوند.



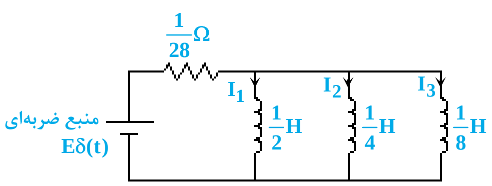
ولتاژ خازن‌ها در حالت پایدار از قانون بقای بار الکتریکی به دست می‌آید:

$$\underbrace{C_۱V_۱ + C_۲V_۲}_{\text{قبل از بسته شدن کلید}} = \underbrace{C_۱V + C_۲V}_{\text{در حالت پایدار}} \Rightarrow ۱۰\times ۴/۸ + ۰/۲\times ۰ = ۵V \Rightarrow V = ۹/۶v$$

$$\text{انرژی اولیه مدار} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲ = ۲۴۰J \quad \text{و} \quad \text{انرژی نهایی مدار} = \frac{۱}{۲}(C_۱+C_۲)V^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۹/۶^۲ = ۲۳۰/۴J$$

$$\text{انرژی تلف شده} = ۹/۶J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی}}{\text{انرژی تلف شده}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$

مثال۸۰: سه سلف $\frac{۱}{۲}H$، $\frac{۱}{۴}H$ و $\frac{۱}{۸}H$ با جریان‌های اولیه ۵ آمپر، ۴ آمپر و ۵ آمپر را در لحظه صفر در مدار زیر قرار داده‌ایم. انرژی مدار پس از گذشت ۱۰ ثانیه حدوداً چقدر است؟



۱) ۲/۸J

۲) ۳J

۳) صفر

۴) $\frac{۱}{۲}\left[\frac{(۵+۲E)^۲}{۲} + \frac{(۴+۴E)^۲}{۴} + \frac{(۵+۸E)^۲}{۸}\right]$