



نکته ۳: در روابط اگر قرار شد زاویه فازها برحسب درجه بیان گردد، می‌توانیم از گذاشتن علامت درجه در فرم نمایش برحسب رادیان صرف‌نظر کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

$$\left[ \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega t + 90^\circ) \right]$$

مثال ۲: فرم فازوری توابع زیر که برحسب زمان بیان شده‌اند را بنویسید.

$$1) V(t) = 2 \cos 4t \Rightarrow V = 2 \angle 0^\circ$$

$$2) V(t) = 3 \cos(2t + 45^\circ) \Rightarrow V = 3 \angle 45^\circ$$

$$3) V(t) = 5 \sin 10t = 5 \cos(10t - 90^\circ) \Rightarrow V = 5 \angle -90^\circ$$

$$4) V(t) = 5 \sin(377t + 15^\circ) = 5 \cos(377t + 15^\circ - 90^\circ) = 5 \cos(377t + 6^\circ) \Rightarrow V = 5 \angle 6^\circ$$

### جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس

برای جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس می‌توانیم معادلات را به صورت فازوری نمایش داده و سپس فرم دکارتی آنها را نوشته (چون جمع دو عدد مختلط در فرم دکارتی به راحتی صورت می‌گیرد) و جمع را به راحتی انجام دهیم. در نهایت مجدداً با استفاده از تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی و سپس نوشتن آن در حوزه زمان جواب نهایی را بدست آوریم. دقت کنید برای جمع دو فازور، باید فرکانس دو فازور با یکدیگر برابر باشد. (می‌توانیم آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی هم رسم کنیم و سپس بردارها را با هم جمع برداری کنیم).

مثال ۳: اگر  $I_1(t) = 25 \sin(\omega t)$  و  $I_2(t) = 25 \cos(\omega t - 30^\circ)$  و  $I_3(t) = 25 \cos(\omega t + 30^\circ)$  باشد، حاصل  $I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$  را بدست آورید.

پاسخ: چون یکی از موج‌ها سینوسی می‌باشد، لذا لازم است آن را به فرم کسینوسی تبدیل کنیم:

$$I_1(t) = 25 \sin(\omega t) = 25 \cos(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \bar{I}_1 = 25 \angle -90^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 25 \angle -30^\circ, \quad \bar{I}_3 = 25 \angle +30^\circ$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = -j25 + 25 \cos(-30^\circ) + j25 \sin(-30^\circ) + 25 \cos(+30^\circ) + j25 \sin(+30^\circ)$$

$$= -j25 + 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - j25 \times \frac{1}{2} + 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + j25 \times \frac{1}{2} = -j25 + 25\sqrt{3} = 25\sqrt{3} - j25$$

$$\text{اندازه} = \sqrt{(25)^2 + (25\sqrt{3})^2} = \sqrt{25^2 + 25^2 \times 3} = \sqrt{4 \times 25^2} = 2 \times 25 = 50 \text{ A}$$

$$I \text{ فاز} = \text{Arctg}\left(\frac{-25}{25\sqrt{3}}\right) = \text{Arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30^\circ \Rightarrow I = 50 \angle -30^\circ \Rightarrow I(t) = 50 \cos(\omega t - 30^\circ)$$

نکته ۴: جمع تعدادی تابع سینوسی با فرکانس‌های یکسان و هر تعدادی از مشتق‌های آنها در انتها یک تابع سینوسی با همان فرکانس اولیه خواهد شد. همچنین روابط زیر نیز برقرار خواهد بود.

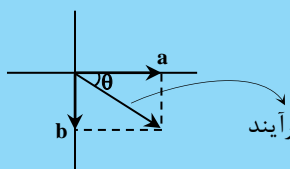
$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \angle -\theta$$

$$\text{tg} \theta = \frac{b}{a}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

علت:

$$a \cos \omega t = a \angle 0^\circ$$

$$b \sin \omega t = b \cos(\omega t - 90^\circ) = b \angle -90^\circ \quad \text{جمع در مختصات قطبی:}$$



$$\text{بردار برآیند} \begin{cases} \text{اندازه} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{زاویه} = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{در حوزه زمان}} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \theta) \text{ و } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



**چکیده مطالب محاسبات فازوری**

(۱) برای نوشتن فازوری به شکل  $k = |k| \angle \varphi$  به فرم مختلط داریم:  
و بر عکس برای نوشتن یک عدد مختلط به صورت  $A = a + jb$  به صورت فازور  $A = |A| \angle \varphi$  از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$A = |A| \angle \varphi \quad \text{و} \quad |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{اندازه } A$$

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{b}{a} \quad \text{زاویه فاز } A$$

(۲) رابطه ضرب دو فازور  $k_1 \angle \varphi_1$  و  $k_2 \angle \varphi_2$  به صورت مقابل است:

$$(k_1 \angle \varphi_1) \times (k_2 \angle \varphi_2) = k_1 \cdot k_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

(۳) رابطه تقسیم فازور  $k_1 \angle \varphi_1$  بر فازور  $k_2 \angle \varphi_2$ ، به شکل مقابل است:

$$\frac{k_1 \angle \varphi_1}{k_2 \angle \varphi_2} = \frac{k_1}{k_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

(۴) در محاسبات زاویه فاز، هر زاویه‌ای مثل  $\alpha$  را می‌توانیم به صورت  $\alpha = \pm 36^\circ + \beta$  بنویسیم و در نهایت مقدار  $\beta$  را به جای  $\alpha$  در محاسبات قرار دهیم. (با توجه به این که چرخش  $2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) در دستگاه مثلثاتی تغییری ایجاد نمی‌کند، در محاسبات تأثیری نمی‌گذارد.)

$$+24^\circ = 36^\circ - 12^\circ = -12^\circ \quad , \quad -24^\circ = -36^\circ + 12^\circ = 12^\circ$$

دقت شود که عموماً زاویه را در بازه‌ی  $[-\pi, \pi]$  بیان می‌کنند.

(۵) برای نوشتن معادلات جریان و ولتاژ که به فرم مختلط دکارتی هستند، در حوزه زمان، ابتدا فرم قطبی (فازوری) آنها را نوشته و سپس به راحتی معادله زمانی آنها را می‌نویسیم. برای مثال برای یک ولتاژ مختلط که مرجع آن به فرم سینوسی در نظر گرفته شده داریم:

$$V = a + jb \xrightarrow{\text{فازور}} V_m \angle \varphi_v \xrightarrow{\text{معادله زمانی}} V(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$$

**یادآوری چند رابطه مفید:**

$$\sin(3^\circ) = \cos(6^\circ) = 0/5 \quad \cos(3^\circ) = \sin(6^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0/866$$

$$\sin(37^\circ) = \cos(53^\circ) = 0/6 \quad \cos(37^\circ) = \sin(53^\circ) = 0/8$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 90^\circ) \quad \sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \cos a - \cos b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$$

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x + \theta) \quad , \quad \theta = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$A \sin(\omega t + \varphi_1) + B \sin(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \sin(\omega t + \varphi_3)$$

$$A \cos(\omega t + \varphi_1) + B \cos(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cos(\omega t + \varphi_3)$$

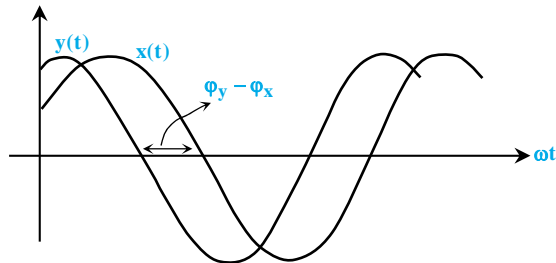
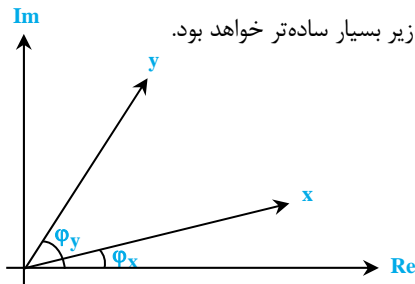
**چند نکته برای بالا بردن سرعت در محاسبات:**

- ۱)  $A = A \angle 0^\circ$
- ۲)  $-A = A \angle 180^\circ$
- ۳)  $jA = A \angle 90^\circ$
- ۴)  $-jA = A \angle -90^\circ$
- ۵)  $A + jA = A\sqrt{2} \angle 45^\circ$
- ۶)  $A - jA = A\sqrt{2} \angle -45^\circ$



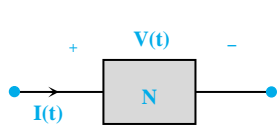
### مفاهیم پیش فاز و پس فاز

دو سیگنال سینوسی هم‌فکانس  $x(t) = \cos(\omega t + \phi_x)$  و  $y(t) = \cos(\omega t + \phi_y)$  را با فرض  $|\phi_y - \phi_x| < \pi$  در نظر بگیرید. اگر  $\phi_y > \phi_x$  باشد، اصطلاحاً می‌گوییم سیگنال  $y(t)$  نسبت به سیگنال  $x(t)$  به اندازه  $\phi_y - \phi_x$  رادین، پیش‌فاز است، و یا در بیان دیگر سیگنال  $x(t)$  نسبت به سیگنال  $y(t)$  به اندازه  $\phi_y - \phi_x$  رادین، پس‌فاز است. درک مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز از طریق نمودارهای فازوری زیر بسیار ساده‌تر خواهد بود.



### تعریف امپدانس و ادمیتانس و راکتانس

در صورتی که یک شبکه تک‌قطبی با اجزای خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد، آنگاه امپدانس و ادمیتانس شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود.



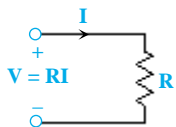
$$\begin{cases} V(t) = V_m \angle \theta_V \\ I(t) = I_m \angle \theta_I \end{cases} \Rightarrow Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m \angle \theta_V}{I_m \angle \theta_I} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_V - \theta_I$$

$$Y = \frac{I(t)}{V(t)} = \frac{I_m \angle \theta_I}{V_m \angle \theta_V} = \frac{I_m}{V_m} \angle \theta_I - \theta_V, \quad Y = \frac{1}{Z}, \quad \cos \theta = \cos(\theta_V - \theta_I)$$

در روابط بالا  $Z$  امپدانس و  $Y$  ادمیتانس سیستم می‌باشد و  $\frac{V_m}{I_m}$  اندازه امپدانس و  $\theta = \theta_V - \theta_I$  زاویه امپدانس می‌نامند و  $\cos \theta$  ضریب توان یا ضریب قدرت سیستم است. همچنین لازم به ذکر است که برای اندازه امپدانس ظاهری سلف و خازن یا همان  $X_L$  و  $X_C$  عبارت راکتانس نیز به کار می‌رود. در واقع راکتانس اندازه قسمت موهومی امپدانس است.

#### «مقاومت در حالت دائمی سینوسی»

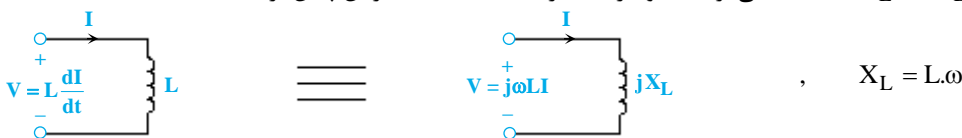
رابطه ولتاژ - جریان مقاومت در حالت فازوری مانند رابطه ولتاژ - جریان مقاومت در حوزه زمان است.



لازم به ذکر است که ولتاژ و جریان یک مقاومت همیشه هم‌فاز هستند.

#### «سلف در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ - جریان در سلف،  $(V_L = jX_L I_L)$  ملاحظه می‌گردد که ولتاژ به اندازه  $90^\circ$  نسبت به جریان پیش‌فاز است.



اثبات:  $I(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  و  $V(t) = L \frac{dI}{dt} = -L\omega A \sin(\omega t + \phi) = L\omega A \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow I = A \angle \phi \quad \text{و} \quad V = L\omega A \angle (\phi + \frac{\pi}{2}) = j\omega LA \angle \phi = j\omega LI$$

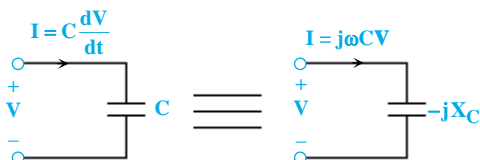
اگر رابطه فازوری جریان به صورت  $I = I_m \angle \phi$  بیان گردد، چون  $j = 1 \angle 90^\circ$  است، آنگاه رابطه ولتاژ آن به صورت زیر است:

$$V = jX_L I_m \angle \phi = 1 \angle 90^\circ \times \omega L I_m \angle \phi = \omega L I_m \angle (\phi + 90^\circ)$$

#### «خازن در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ - جریان در خازن  $(V_C = -jX_C I_C)$ ، ملاحظه می‌گردد که جریان خازن به اندازه  $90^\circ$  نسبت به ولتاژ دو سر خازن پیش‌فاز است.

یعنی اگر فازور ولتاژ خازن به صورت  $V = V_m \angle \phi$  بیان گردد، آنگاه داریم:

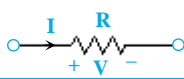
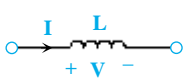
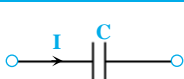


$$I = \frac{V_m \angle \phi}{-jX_C} = \frac{V_m \angle \phi}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{V_m \angle \phi}{\frac{1}{C\omega} \angle -90^\circ} = V_m C \omega \angle \phi + 90^\circ$$

اثبات:  $V(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  و  $I(t) = C \frac{dV}{dt} = -C\omega A \sin(\omega t + \phi) = C\omega A \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow V = A \angle \phi$  و  $I = C\omega A \angle(\phi + \frac{\pi}{2}) = j\omega C A \angle \phi = j\omega C V \Rightarrow V = \frac{1}{j\omega C} I$

در جدول زیر رابطه بین ولتاژ و جریان سه عنصر در حوزه‌های زمان و فرکانس به طور خلاصه بیان گردیده است:

امپدانس	در حالت فازوری	در حوزه زمان	عنصر
R	$V = RI$	$V = RI$	
$j\omega L$	$V = jX_L \cdot I$	$V = L \frac{dI}{dt}$	
$\frac{1}{j\omega C}$	$V = -jX_C \cdot I$	$I = C \frac{dV}{dt}$	

**نکته ۵:** ادmittانس عناصر C و L و R که عکس امپدانس‌های آنها می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$Y_R = \frac{1}{R}$  ,  $Y_L = \frac{1}{j\omega L}$  ,  $Y_C = j\omega C$

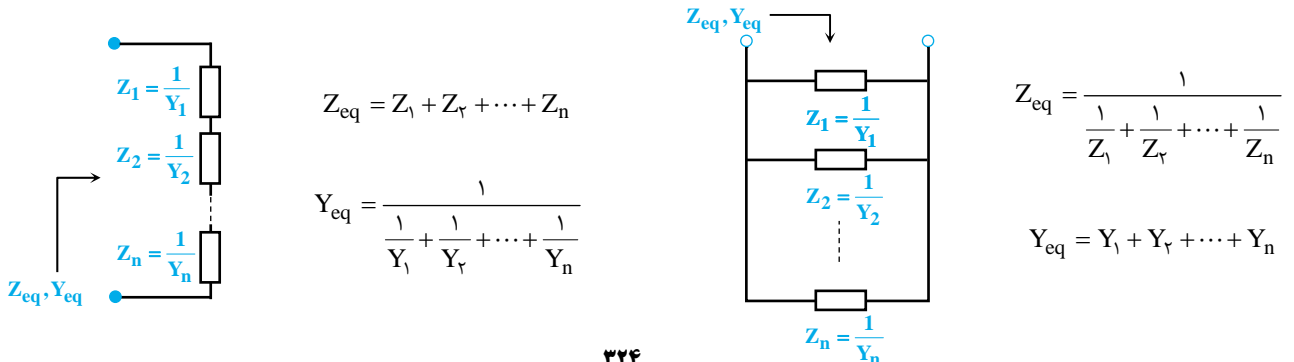
**نکته ۶:** با توجه به اینکه  $\omega = 2\pi f$  می‌باشد، لذا در فرکانس‌های خیلی زیاد  $Z_L = \infty$  و  $Z_C = 0$  می‌باشد، یعنی سلف در فرکانس‌های خیلی زیاد (مثلاً تحریک ضربه‌ای) مدار باز و خازن در فرکانس‌های خیلی زیاد اتصال کوتاه می‌باشد و در فرکانس‌های خیلی پایین (مثلاً تحریک DC)، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

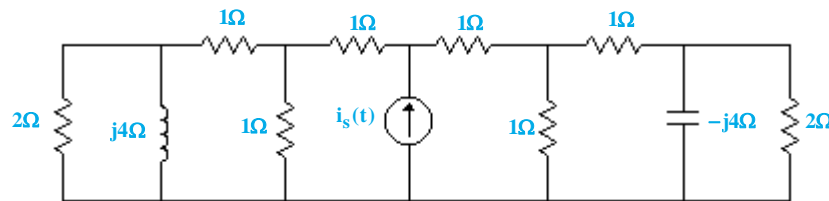
**نکته ۷:** در مدارهای ترکیبی امپدانس مدار معمولاً خود یک عدد مختلط می‌شود و لذا امپدانس را در اینگونه مدارها به صورت  $Z = |Z| \angle \phi$  و یا  $Z = R + jX$  نمایش می‌دهیم که  $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$  و  $\phi = \tan^{-1} \frac{X}{R}$  می‌باشد. توجه شود R مقاومت اهمی مدار و X راکتانس مدار می‌باشد (که ممکن است خاصیت القائی و یا خاصیت خازنی داشته باشد). بحث مشابهی نیز در مورد ادmittانس مدار قابل طرح است، یعنی ادmittانس مدار در حالت کلی به شکل  $Y = G + jB$  یا  $Y = |Y| \angle \theta$  نمایش داده می‌شود که البته داریم:

$|Y| = \frac{1}{|Z|}$  ,  $\theta = -\phi$

لازم به ذکر است در شکل نمایش دکارتی Y، G یا بخش حقیقی Y، **کندوکتانس** و B در بخش موهومی Y، **سوسپتانس** نامیده می‌شود. واحد اندازه‌گیری ادmittانس، کندوکتانس و سوسپتانس، مهو (S) می‌باشد.

**نکته ۸:** توجه شود وقتی تمامی عناصر در یک مدار برحسب امپدانس‌های خود بیان شده باشند، آنگاه برای محاسبه امپدانس کل می‌توانیم اینگونه فرض کنیم که هر یک از امپدانس‌ها مانند یک مقاومت هستند و با استفاده از روابط سری و موازی بودن مقاومت‌های اهمی، مقدار امپدانس کل را با در نظر گرفتن روابط فازوری بدست آوریم. (در واقع با استفاده از مفهوم فازور، مدار را از حالت پیچیده‌ی سلفی و خازنی به حالت ساده‌ی مقاومتی (شبهه به مقاومتی) تبدیل می‌کنیم). برای محاسبه ادmittانس کل نیز می‌توانیم عیناً از روش‌هایی استفاده کنیم که برای محاسبه رسانایی معادل در مدارهای مقاومتی استفاده می‌کردیم.





## محاسبه مقدار RMS

اگر موجی، ترکیبی از چند موج مختلف با فرکانسهای متفاوت (و یا اشکال مختلف) باشد، آنگاه مقدار مؤثر کل آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_{rms} = \sqrt{(y_{rms_1})^2 + (y_{rms_2})^2 + (y_{rms_3})^2 + \dots}$$

برای معادله موجی به شکل زیر:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \dots + a_n \cos(n\omega_1 t) + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots + b_n \sin n\omega_1 t$$

مقدار مؤثر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

توجه شود که  $a_0$  عدد ثابت می‌باشد.

هرگاه دو موج کسینوسی (یا سینوسی) هم‌فرکانس داشته باشیم، ابتدا باید آنها را به صورت یک موج بنویسیم و آنگاه از رابطه فوق استفاده کنیم، که برای این کار ابتدا موج‌ها را به صورت فازوری می‌نویسیم؛ سپس با تبدیل به فرم دکارتی، آنها را با هم جمع کرده و در نهایت با تبدیل مجدد به فرم قطبی و نوشتن معادله در حوزه زمان مقدار مؤثر را حساب می‌کنیم.

**نکته ۱۴:** طبق مطالب بیان شده در این بخش می‌توان نتیجه گرفت که برای محاسبه توان مصرفی یک عنصر مدار اگر فرکانس تمام منابع ورودی

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

مدار متفاوت باشد، می‌توان از قضیه جمع آثار به شکل مقابل استفاده کرد:

در این رابطه  $P_1$  توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تنها منبع  $i$  فعال باشد و  $P_T$  توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تمامی  $n$  منبع موجود در مدار فعال باشند. لازم به ذکر است در یک حالت خاص می‌توان در مدارهای با منابع ورودی هم‌فرکانس از قضیه جمع آثار برای محاسبه توان استفاده کرد. اگر مدار تنها دارای دو منبع ورودی هم‌فرکانس باشد و جریان‌های ناشی شده از این دو منبع در عنصر موردنظر، دارای اختلاف فاز  $90^\circ$  درجه باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$P_T = P_1 + P_2$$

این نکته را می‌توان با بکارگیری رابطه  $|\sqrt{a^2 + b^2} \angle \theta| = \sqrt{a^2 + b^2} \angle (\theta + 90^\circ)$  اثبات نمود.

**مثال ۵۸:** در یک مقاومت، معادله جریان عبوری به صورت زیر است. توان مصرفی توسط مقاومت کدام است؟

$$i(t) = 10 + 6 \sin 2t + 8 \cos(2t + \theta) \quad , \quad R = 10 \Omega$$

$$1/6 \text{ kW} \quad (۴)$$

$$2 \text{ kW} \quad (۳)$$

$$1/25 \text{ kW} \quad (۲)$$

$$1/5 \text{ kW} \quad (۱)$$

**پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مقدار مؤثر سیگنال جریان را محاسبه می‌کنیم و سپس برای محاسبه توان از آن استفاده می‌کنیم.

$$I_{rms} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{150} \text{ A} \Rightarrow P_R = [I_{rms}]^2 \times R = 150 \times 10 = 1/5 \text{ kW}$$

**مثال ۵۹:** دو سر یک مقاومت ( $R = 1/5 \Omega$ )، ولتاژی به معادله  $v(t)$  موجود می‌باشد. توان مصرفی مقاومت مذکور کدام است؟

$$v(t) = 2 \cos 2t - \cos(2t + 60^\circ)$$

$$3 \text{ W} \quad (۴)$$

$$1/5 \text{ W} \quad (۳)$$

$$2/5 \text{ W} \quad (۲)$$

$$1 \text{ W} \quad (۱)$$

**پاسخ:** گزینه «۱» به دلیل اینکه دو موج کسینوسی دارای فرکانس  $2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  داریم، لذا باید ابتدا آنها را ترکیب کنیم؛ بدین منظور از فازورها استفاده می‌کنیم:

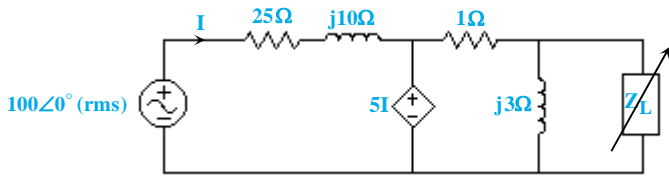
$$v(t) = 2 \cos 2t - \cos(2t + 60^\circ) \Rightarrow v = 2 \angle 0^\circ - 1 \angle 60^\circ \Rightarrow v = 2 - (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 2 - 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

$$v = 1.5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1.5^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \angle \theta = \sqrt{3} \angle \theta \Rightarrow v(t) = \sqrt{3} \cos(2t + \theta)$$

$$V_{rms} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v \Rightarrow P_R = \frac{(V_{rms})^2}{R} = \frac{1/5}{1/5} = 1 \text{ W}$$

مثال ۷۲: در مدار شکل زیر  $Z_L$  را طوری تنظیم می‌کنیم که حداکثر توان متوسط به آن برسد. در این صورت حدوداً چند درصد از توان تولیدی

مدار به  $Z_L$  می‌رسد؟



۳۲/۳ (۱)

۱۶/۶ (۲)

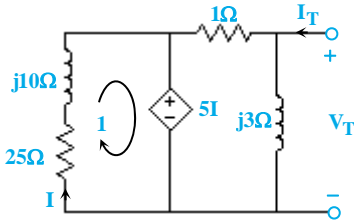
۲۵/۵ (۳)

۱۳/۳ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» حل این تست را با پیدا کردن امپدانس معادل

مدار از دید  $Z_L$  شروع می‌کنیم تا بتوانیم مقدار بهینه  $Z_L$  را پیدا کنیم.

بدین منظور مدار معادل روبرو را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده در حلقه (۱) مشخص است که  $I = 0$  خواهد بود. پس امپدانس  $Z_L$  دیده می‌شود برابر است با:

$$\frac{1 \times j^3}{1 + j^3} = 0/9 + j0/3$$

بنابراین  $Z_L$  باید برابر  $0/9 - j0/3$  باشد تا توان حداکثر به آن برسد. اکنون

می‌خواهیم ببینیم با فرض  $Z_L = 0/9 - j0/3$ ، چند درصد از توان متوسط مدار

روی  $Z_L$  مصرف می‌شود. می‌دانیم که توان متوسط یا توان اکتیو تنها روی

مقاومت‌های مدار مصرف می‌شود و مقدار این توان را می‌توان با داشتن مقدار

مقاومت و جریان آن محاسبه کرد؛ پس به سراغ محاسبه جریان سه مقاومت موجود

در مدار می‌رویم. بار دیگر شکل مدار را با تعریف جریان‌های  $I_1$  و  $I_2$  در نظر بگیریم:

می‌خواهیم جریان‌های  $I_1$  و  $I_2$  را بر حسب جریان  $I$  بدست آوریم. امپدانس  $5I$  در سمت راست خود می‌بیند برابر ۲ اهم است؛ پس داریم:

$$I_1 = \frac{5I}{2} = 2/5 I$$

$$I_2 = \frac{j^3}{j^3 + 0/9 - j0/3} \times 2/5 I = (2/5 + j5/6) I$$

و حالا با تکنیک تقسیم جریان می‌توان نوشت:

اکنون می‌توان توان مصرفی روی سه مقاومت  $R_1$  (مقاومت ۲۵ اهمی)،  $R_2$  (مقاومت ۱ اهمی) و  $R_L$  را بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} W_1 = 25 I^2 \\ W_2 = 1 \times 2/5 I^2 \times I^2 = 6/25 I^2 \\ W_L = 0/9 \times \left| 2/5 + j5/6 \right|^2 \times I^2 = 6/25 I^2 \end{cases}$$

$$\frac{W_L}{W_T} = \frac{6/25 I^2}{25 \times I^2 + 6/25 I^2 + 6/25 I^2} = \frac{1}{6} = 16/6\%$$

در نهایت می‌توان نسبت توان مصرف شده در  $Z_L$  را به توان مصرفی کل مدار بدست آورد:

دقت کنید که در عمل نیازی به محاسبه جریان  $I_2$  نیز نداشتیم، چرا که با تطبیق امپدانس که انجام داده بودیم مشخص بود توانی که مقاومت  $R_2$  مصرف

می‌کند برابر توانی است که مقاومت  $R_L$  مصرف می‌کند.

نکته ۱۶: برای اینکه حداکثر توان به بار منتقل شود، به طور کلی می‌توان گفت اگر در قسمت بار راکتانس قابل تغییر وجود داشته باشد، باید این

راکتانس خنثی شود؛ به این شکل که اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود نداشته باشد، باید مقدار راکتانس بار برابر صفر باشد و اگر

در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود داشته باشد، باید راکتانس بار از لحاظ عددی با راکتانس مدار برابر ولی از لحاظ علامت مخالف آن باشد.

نکته ۱۷: دقت کنید که تطبیق امپدانس در یک مدار به معنای حداکثر نمودن توان تولیدی منبع ورودی مدار نیست؛ در واقع برای این که

توان تولیدی یک منبع ولتاژ در مدار بیشینه گردد، باید راکتانس دیده شده از دو سر منبع کمینه گردد (در صورت ممکن برابر

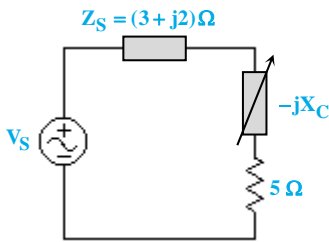
صفر شود)؛ در این حالت مقدار بهینه برای مقاومت مدار از دید منبع برابر اندازه راکتانس دیده شده از دو سر منبع خواهد بود. برای منابع جریان نیز

باید سوسپتانس (بخش موهومی ادمیتانس) دیده شده از دو سر منبع کمینه بوده و رسانایی یا کندوکتانس مدار (بخش حقیقی ادمیتانس) از دید

منبع برابر اندازه سوسپتانس مدار باشد.



مثال ۲۳: به ازای چه مقدار از  $X_C$  بر حسب اهم، منبع حداکثر توان را به شبکه تحویل می‌دهد؟

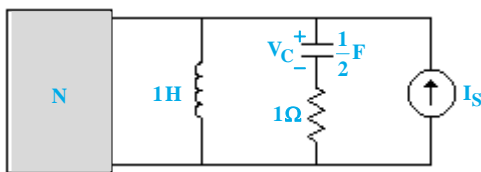


- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» در این تست عنوان شده منبع حداکثر توان را تحویل شبکه دهد و این در شرایطی اتفاق می‌افتد که اثری از قسمت‌های موهومی نباشد؛ لذا داریم:

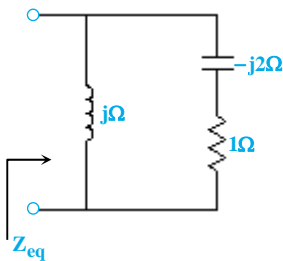
$$j2 - jX_C = 0 \Rightarrow j(2 - X_C) = 0 \Rightarrow X_C = 2\Omega$$

مثال ۲۴: در مدار شکل زیر  $N$  یک مدار LTI و فاقد منابع مستقل است. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ، توان  $N$  ماکزیمم می‌شود. اگر مدار در  $t = 0$  بدون شرایط اولیه و  $I_S = 2\delta(t)$  باشد،  $V_C(0^+)$  برابر کدام گزینه است؟



- (۱) -۶V
- (۲) ۶V
- (۳) -۲V
- (۴) ۲V

پاسخ: گزینه «۴» اگر در  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  توان شبکه  $N$  حداکثر شود، باید  $Z_N$  برابر  $Z_{eq}^*$  در مدار سمت راست باشد. حال مقدار  $Z_{eq}$  مدار سمت راست را محاسبه می‌کنیم.

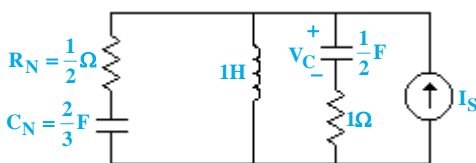


$$Z_{eq} = j \parallel (1 - j2) \Rightarrow Z_{eq} = \left(\frac{1}{j} + \frac{3}{j}\right) \Omega$$

$$\Rightarrow Z_N = Z_{eq}^* = \left(\frac{1}{j} - \frac{3}{j}\right) \Omega$$

با توجه به امپدانس  $Z_N$ ، شبکه  $N$ ، یک مدار RC سری است که مقادیر  $R_N$  و  $C_N$  در آن به صورت زیر است:

$$R_N = \frac{1}{j} \Omega, \quad X_{C_N} = \frac{3}{j} \Omega \Rightarrow \frac{1}{C_N \omega} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{C_N} = \frac{3}{2} \Rightarrow C_N = \frac{2}{3} F$$



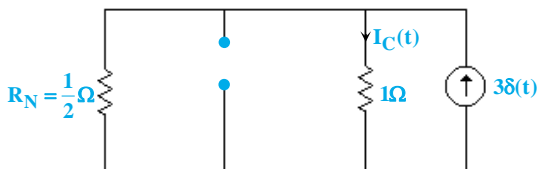
حال با جایگذاری شبکه  $N$ ، مدار به صورت روبرو خواهد شد. برای محاسبه مقدار  $V_C(0^+)$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. در این حالت با توجه به اعمال ضربه، سلف‌ها را مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم.

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} I_C(t) dt$$

با نوشتن قانون تقسیم جریان داریم:

$$I_C(t) = 2\delta(t) \times \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \delta(t), \quad V_C(0^-) = 0$$

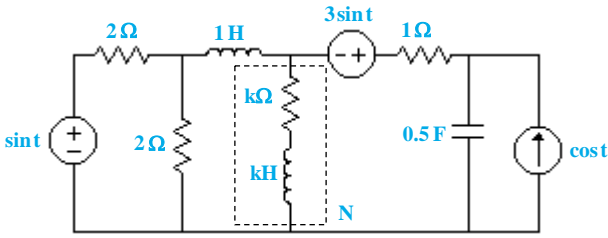
$$\Rightarrow V_C(0^+) = 0 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt \Rightarrow V_C(0^+) = 2V$$



نکته ۱۸: زمانی که بار  $Z_L = Re^{j\theta}$  با زاویه فاز معین (یعنی مقدار  $\theta_L$  مشخص باشد) به شبکه‌ای با امپدانس معادل  $Z_N$  متصل گردد، شرط آن که حداکثر توان توسط  $Z_L$  جذب گردد این است که اندازه  $Z_L$  برابر اندازه  $Z_N$  باشد:

$$|Z_L| = R = |Z_N|$$

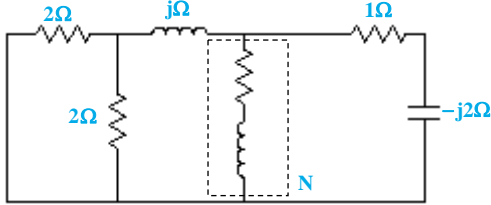
جهت درک بهتر این نکته می‌توانید آن را اثبات کنید.



مثال ۷۵: در مدار شكل زير مقدار سلف و مقاومت سري شده با آن با هم يكسان و برابر k مي باشند. هدف تعيين k به نحوي است كه توان جذب شده توسط N حداكثر شود. k چقدر است؟

- (۱)  $k = \frac{7}{5}$  (۲)  $k = \sqrt{2}$  (۳)  $k = \sqrt{5}$  (۴)  $k = 1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا امپدانس ديده شده از دو سر N ( $Z_N$ ) را بدست مي آوريم.



$$Z_N = k + jk$$

$$Z_N = (1 + j) \parallel (1 - 2j) = \frac{(1 + j)(1 - 2j)}{1 + j + 1 - 2j} = \frac{3 - j}{2 - j} = \frac{7 + j}{5}$$

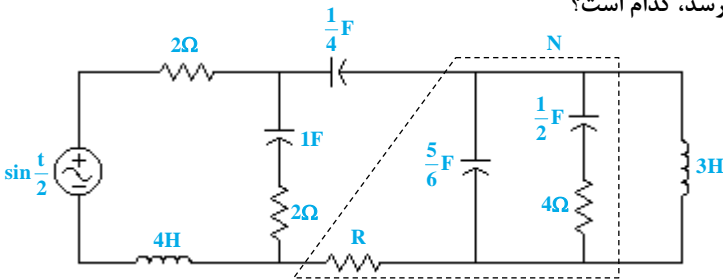
امپدانس ديده شده از دو سر N

در اين مسأله امکان تطبيق امپدانس وجود ندارد زيرا بخش حقيقي و موهومي مقاومت بار به هم وابسته هستند. همچنين نمي توانيم با بهينه سازي مقدار مقاومت بار از طريق رابطه  $R_L = |Z_N + jX_L|$  مقدار توان جذب شده بار را حداكثر كنيم چرا كه مقدار راکتانس بار نيز متغير است.

در اين مسأله ما با فاز ثابت امپدانس بار مواجه هستيم و شرط تحقق توان ماكزيمم در صورت ثابت بودن فاز امپدانس بار اين است كه  $|Z_N| = |Z_N|$ .

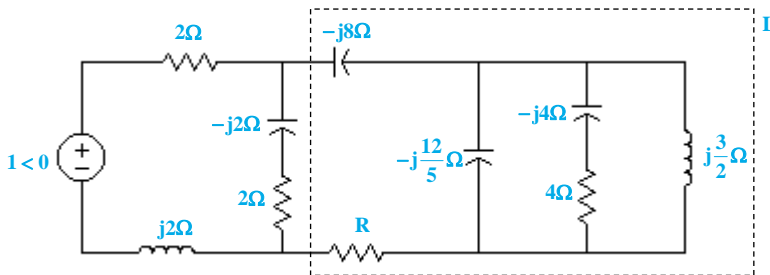
$$\left. \begin{aligned} |Z_N| &= k\sqrt{2} \\ |Z_N| &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = 1$$

مثال ۷۶: در مدار زير مقدار R براي اين كه حداكثر توان به بار N برسد، كدام است؟

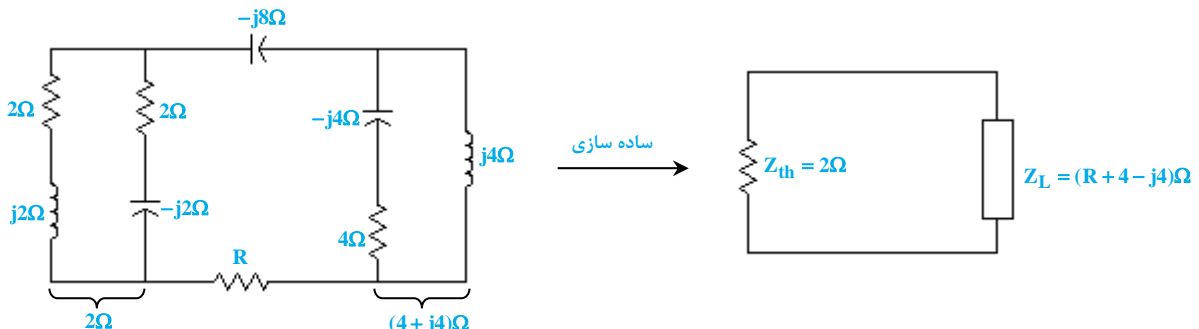


- (۱) صفر اهم  
(۲) ۰/۵ اهم  
(۳) ۴/۵ اهم  
(۴) ۷/۲ اهم

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار را مطابق شكل زير با فرض  $\omega = 0/5$  به حالت فازوري مي بريم:



دقت كنيد اگر توان بار N ماكزيمم گردد، توان بار L نيز بيشينه خواهد شد، زيرا بار L هيچ مقاومتي افزون بر مقاومتهای بار N ندارد. پس مي توان به جای حداكثر نمودن توان بار N، توان بار L را حداكثر نمود. حال مطابق با شكل زير مي توان  $Z_L$  و  $Z_{th}$  را با غيرفعال نمودن منبع تغذيه سينوسي محاسبه نمود: (دقت كنيد كه در اين شكل خازن و سلف موازي در سمت راست مدار، با امپدانس معادلشان كه برابر  $j4$  مي باشد، جايزين شده اند)

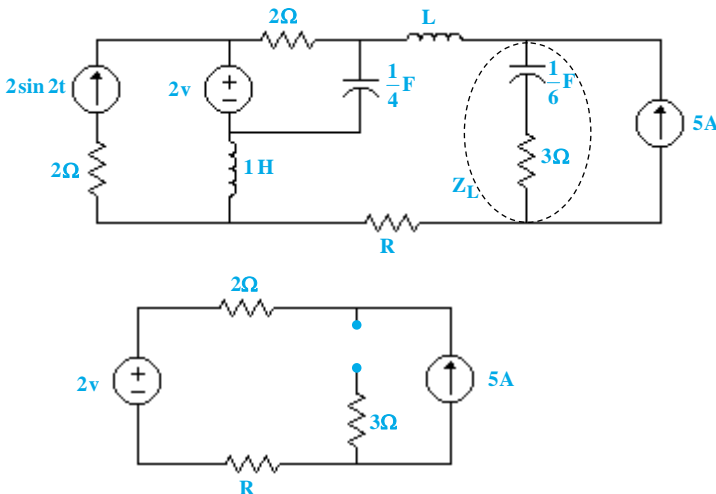


اکنون با توجه به اين كه تنها مقاومت بار قابل تنظيم است بايد داشته باشيم  $R_L = |Z_{th} + jX_L|$ ؛ يعني:

$$R + 4 = |2 - j4| = \sqrt{20} \cong 4/5 \Rightarrow R = 0/5 \Omega$$



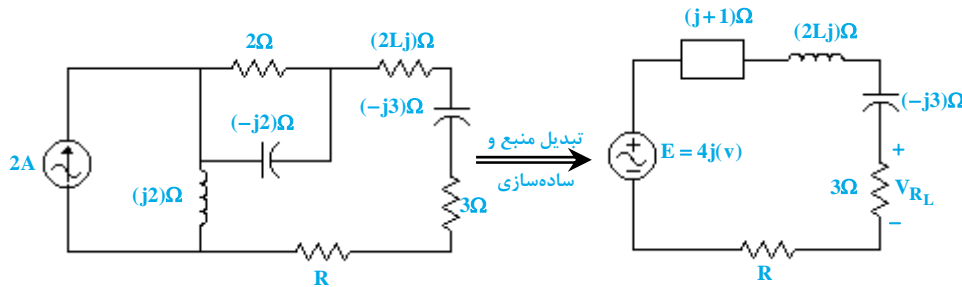
مثال ۷۷: در مدار زیر مقدار  $R$  و  $L$  به ترتیب چند اهم و چند هانری باشد تا در حالت دائمی حداکثر توان به  $Z_L$  برسد؟



- (۱) صفر اهم و ۱ هانری
- (۲) صفر اهم و ۲ هانری
- (۳) ۲ اهم و ۱ هانری
- (۴) ۲ اهم و ۲ هانری

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بیابید تنها منابع DC مدار را در نظر گرفته و ببینیم چه توانی در اثر این منابع به بار  $Z_L$  می‌رسد. بدین منظور منبع جریان سینوسی و خازن‌های مدار را مدار باز و سلف‌های موجود در مدار را اتصال کوتاه می‌کنیم:

با توجه به شکل بالا مشخص است که توان اکتیوی که در این حالت به بار می‌رسد فارغ از مقادیر  $R$  و  $L$ ، برابر صفر است. حال می‌خواهیم اثر منبع جریان سینوسی را در نظر بگیریم. بدین منظور مطابق شکل زیر منابع DC را غیرفعال کرده و مقدار المان‌ها را در حالت فازوری با در نظر گرفتن فرکانس  $\omega = 2$  لحاظ می‌کنیم:



نکته مهمی که در اینجا باید مورد توجه قرار گیرد، این است که ما در این تست نمی‌توانیم از صورت معمول قضیه تطبیق امپدانس استفاده کرده و بگوییم  $Z_{in} = Z_L^*$ ، چرا که در قضیه تطبیق امپدانس، این امپدانس بار است که تعیین می‌گردد و نه امپدانس شبکه، و در این تست امپدانس بار ثابت بوده و ما به دنبال یافتن امپدانس بهینه شبکه هستیم. بنابراین برای حل این تست بهتر است مستقیماً توان مصرفی بار  $Z_L$  را بیشینه کنیم. برای بیشینه ساختن این توان کافی است ولتاژ دو سر مقاومت بار بیشینه گردد (دقت کنید که مقدار مقاومت بار ثابت و مشخص است). حال با توجه به شکل قبلی داریم:

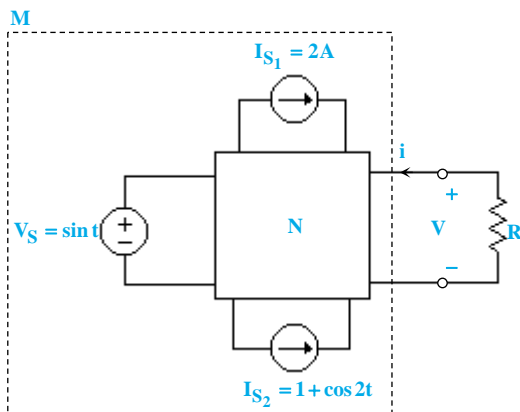
$$V_{R_L} = \frac{3}{3 - 3j + (2L + 1)j + 1 + R} \times E = \frac{3E}{4 + R + (2L - 2)j} \Rightarrow |V_{R_L}| = \frac{3E}{\sqrt{(4 + R)^2 + (2L - 2)^2}}$$

برای حداکثر نمودن مقدار  $|V_{R_L}|$  باید مخرج کسر فوق مینیمم گردد:

$$\begin{cases} 2L - 2 = 0 \Rightarrow L = 1H \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow |V_{R_L}| \rightarrow \max \Rightarrow P_{Z_L} \rightarrow \max$$

مثال ۷۸: در مدار زیر شبکه  $N$  متشکل از مقاومت‌های خطی بوده و رابطه

ولتاژ - جریان برای شبکه  $M$  به صورت  $2V - 6i + 4 \sin t - \cos 2t - 5 = 0$  می‌باشد. اگر جای دو منبع جریان موجود در مدار عوض شده (با حفظ جهت جریان آنها) و اندازه منبع ولتاژ نصف شود، حداکثر توان جذب می‌تواند توسط مقاومت  $R$  چند وات خواهد بود؟

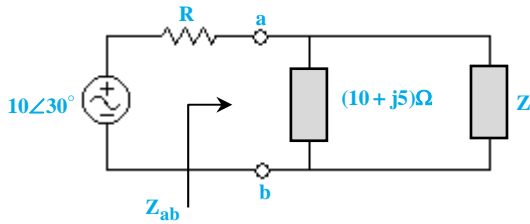


- (۱)  $\frac{5}{12}$  وات
- (۲)  $\frac{5}{24}$  وات
- (۳)  $\frac{1}{4}$  وات
- (۴)  $\frac{1}{2}$  وات



**کله مثال ۸۹:** در مدار شکل زیر، حداکثر توان از منبع به سمت راست سرهای  $a$  و  $b$  منتقل می‌شود. اگر  $Z$  فقط شامل یک عنصر مداری (خازن، سلف یا مقاومت)

باشد و شبکه‌ی سمت راست دو سر  $a$  و  $b$ ، به ازای فرکانس زاویه‌ای  $\omega = 2 \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$  به حالت تشدید برود، مقاومت  $R$  باید چند اهم باشد؟



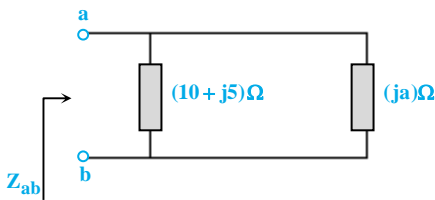
۲۵ (۱)

۲۱ (۲)

۱۰/۵ (۳)

۱۲/۵ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» سؤال اصلاً سخت نیست! کلید حل سؤال این است که بدانیم عنصر  $Z$  قطعاً موهومی است. چرا؟ چون فقط شامل یک عنصر مداری است؛ پس یا به صورت  $Z = ja$  است و یا به صورت  $Z = a$  می‌باشد. (یعنی یا موهومی محض یا مقاومتی محض) اگر  $Z = a$ ، آن‌گاه امکان ندارد شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود، (هنوز که حواستان به صورت سؤال هست؟ قرار است شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود!) پس  $Z = ja$ . برای حل سؤال باید  $a$  را حساب کنیم. برای پیدا کردن  $a$  لازم است از این موضوع که شبکه‌ی سمت راست در حالت تشدید است، استفاده کنیم:



$$Z_{ab} = \frac{(10 + j5) \times ja}{10 + j5 + ja} = \frac{j10a - 5a}{10 + j(\delta + a)} = \frac{(j10a - 5a)[10 - j(\delta + a)]}{100 - j^2(\delta + a)^2}$$

$$\Rightarrow Z_{ab} = \frac{j100a - j^210a(\delta + a) - 50a + j5a(\delta + a)}{100 + (\delta + a)^2} \quad (*)$$

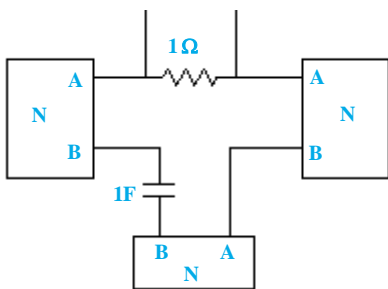
باید قسمت موهومی  $Z_{ab}$  برابر با صفر باشد؛ لذا داریم:

$$j(100a + 25a + 5a^2) = 0 \Rightarrow 5a^2 + 125a = 0 \Rightarrow 5a(a + 25) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (غقیق)}, \quad a = -25 \Omega \text{ (قابل قبول)}$$

پس  $Z_{ab}$  برابر با مقدار زیر است: (دقت کنید دیگر قسمت موهومی ندارد و باید در رابطه‌ی (\*) فقط قسمت‌های حقیقی را حساب کنیم).

$$Z_{ab} = \frac{10(-25)(\delta - 25) - 50 \times (-25)}{100 + (\delta - 25)^2} = \frac{-250(-20) + 1250}{100 + 400} = \frac{6250}{500} = 12.5 \Omega$$

پس برای این که حداکثر توان به سمت راست سرهای  $a$  و  $b$  منتقل شود، باید  $R = 12.5 \Omega$  باشد.



**کله مثال ۹۰:** شبکه  $N$  دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است که آن را  $\omega_r$  می‌نامیم. در مورد

فرکانس یا فرکانس‌های تشدید مدار روبرو چه می‌توان گفت؟

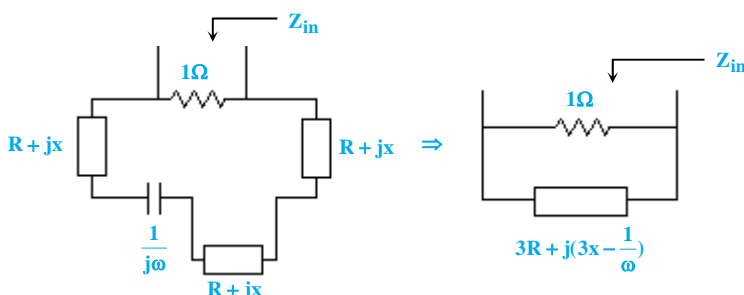
(۱) دقیقاً یک فرکانس تشدید دارد.

(۲) به علت وجود خازن تعداد فرکانس‌های تشدید آن از یک بیشتر است.

(۳) می‌تواند صفر، یک و یا تعداد بیشتری فرکانس تشدید داشته باشد و با هر مقدار دلخواهی بدون توجه به  $\omega_r$ .

(۴) اگر فرکانس تشدید کوچکتر از  $\omega_r$  داشته باشد، نمی‌تواند فرکانس تشدید بزرگتر از  $\omega_r$  داشته باشد.

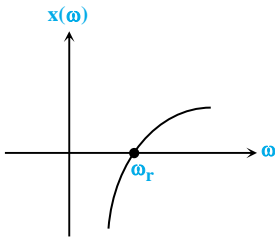
پاسخ: گزینه «۴» اگر امپدانس دیده شده از دو سر  $A$  و  $B$  را  $Z = R + jx$  در نظر بگیریم، مدار به شکل زیر درمی‌آید:



$$Y_{in} = 1 + \frac{1}{3R + j(3x - \frac{1}{\omega})} = 1 + \frac{3R + j(\frac{1}{\omega} - 3x)}{9R^2 + (3x - \frac{1}{\omega})^2}$$

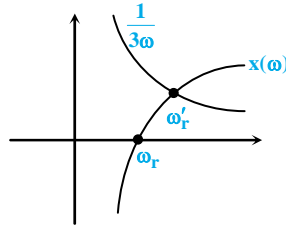
$$\frac{1}{\omega} = 3x(\omega) \Rightarrow x(\omega) = \frac{1}{3\omega}$$

در حالت تشدید  $\text{Im}\{Y_{in}\}$  باید مساوی صفر باشد، یعنی:

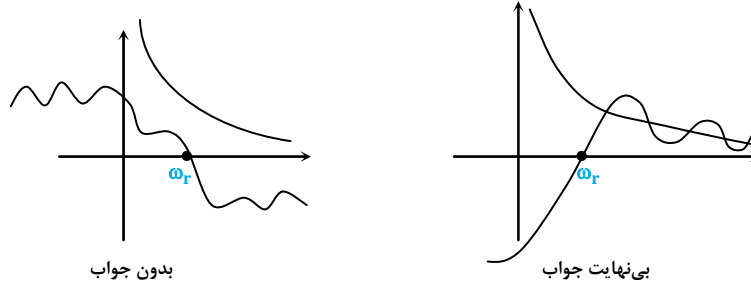


اکنون از اطلاعات داده شده در صورت سؤال استفاده می‌کنیم. از آنجا که  $N$  دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است، معادله  $x(\omega) = 0$  تنها دارای یک جواب است؛ لذا  $x(\omega)$  تنها یک بار محور  $\omega$  را قطع خواهد کرد. فرض کنید نمودار  $x(\omega)$  به صورت شکل روبرو باشد:

برای اینکه فرکانس تشدید شبکه کلی را بیابیم، باید این نمودار را با نمودار تابع  $\frac{1}{3\omega}$  تقاطع دهیم.



اما بسته به اینکه  $x(\omega)$  چه نموداری داشته باشد، جواب‌های متفاوتی حاصل خواهد شد:



لذا به ازای هر  $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$  می‌توان  $x(\omega)$  را یافت که شبکه دارای  $N$  فرکانس تشدید باشد. اما در عین حال یک محدودیت روی تمام این فرکانس‌ها خواهد بود و آن اینکه یا همه از  $\omega_r$  کوچکترند و یا همه از  $\omega_r$  بزرگتر. در غیر این صورت با موجود بودن تنها یک فرکانس تشدید برای  $N$  منافات خواهد داشت.

### ضریب کیفیت (Q)

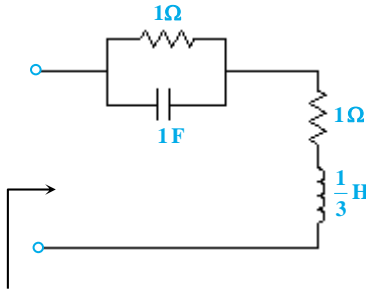
در فصل قبل، تعریف خاصی از ضریب کیفیت که معمولاً در سؤالات کنکور مدنظر است، ارائه گردید و روند ریاضیاتی محاسبه آن نیز بیان شد. در اینجا تعریف دیگری از ضریب کیفیت ارائه می‌گردد که گاهی ممکن است در سؤالات کنکور مورد توجه قرار گیرد. در این تعریف که مشخصاً نمودی از وضعیت میرایی یک مدار الکتریکی نوسانی می‌باشد، بر انرژی ذخیره شده و انرژی تلف شده در دوره نوسانات مدار، در یک مدار در حال رزونانس تمرکز می‌شود:

$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در هر سیکل در حال رزونانس}} = \omega_r \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{تلفات توان در حال رزونانس}}$$

ماکزیمم انرژی ذخیره شده در یک مدار مرتبه دوم شامل سلف و خازن مثلاً یک مدار RLC ساده با استفاده از رابطه  $E_s = \frac{1}{4}LI_L^2 = \frac{1}{4}CV_C^2$  (پیک انرژی ذخیره شده در خازن یا سلف) و یا  $E_s = \frac{1}{4}LI_L^2 + \frac{1}{4}CV_C^2$  (مجموع متوسط انرژی‌های ذخیره شده در سلف و خازن) قابل محاسبه می‌باشد که در این روابط  $I_L$  و  $V_C$  به ترتیب پیک ولتاژ خازن و پیک جریان سلف هستند. برای توجیه این روابط دقت کنید که در یک مدار RLC در حال رزونانس، پیک جریان سلف زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ خازن برابر صفر است و همینطور پیک ولتاژ خازن زمانی رخ می‌دهد که جریان سلف برابر صفر است و از طرفی پیک انرژی سلف برابر پیک انرژی خازن است. مشخص است که طبق تعریف صورت گرفته، انتظار می‌رود پاسخ ورودی صفر یک سیستم نوسانی با ضریب کیفیت بالاتر نسبت به سیستمی مشابه با ضریب کیفیت پایین‌تر، دوام بیشتری داشته باشد. طبق این تعریف همچون تعریف اول در فصل قبل، نوسان‌سازهای ایده‌آل (مثلاً مدارهای LC)، دارای ضریب کیفیت بینهایت هستند. دقت کنید که در تعریف ارائه شده برای ضریب کیفیت، فرکانس تحریک مدار تأثیرگذار نیست و مهم فرکانس رزونانس مدار است.



مثال ۹۱: ضریب کیفیت مدار روبرو کدام است اگر ضریب کیفیت (Q) به صورت زیر برای مدار در حال رزونانس تعریف شود؟



$$Q = 2\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}}$$

- (۱)  $\sqrt{2}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (۳)  $\frac{4}{3}$

(۴) به فرکانس بستگی دارد.

پاسخ گزینه «۲» این مدار یک مدار RLC ساده سری یا موازی نیست و استفاده از روابط ضریب کیفیت آن‌ها، در اینجا کاربرد ندارد. طبق صورت سؤال در اینجا ضریب کیفیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = 2\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}} = \omega_r \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{1+j\omega} + 1 + \frac{j\omega}{3} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} + 1 + \frac{j\omega}{3} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{2}$$

در مورد متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار، باید دانست که در حالت دائمی، انرژی ذخیره شده در سلف  $\frac{1}{2}LI_m^2$  و در خازن  $\frac{1}{2}CV_m^2$  است و همچنین باید این نکته را به خاطر داشت که در فرکانس تشدید این دو با هم برابر هستند. به عبارتی متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار با  $2\varepsilon_M$  یا  $2\varepsilon_E$  برابر است که  $\varepsilon_M$  و  $\varepsilon_E$  به ترتیب متوسط انرژی ذخیره شده در المان‌های سلفی و خازنی مدار هستند. لذا  $Q = \omega_r \frac{2\varepsilon_M}{P_{av}}$ .

$$P_{av} = \frac{1}{2}RI_m^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\omega^2} + 1 \right) \Big|_{\omega=\sqrt{2}} I_m^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+2} + 1 \right) I_m^2 = \frac{2}{3} I_m^2$$

$$\varepsilon_M = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{12} I_m^2 \quad \text{و} \quad Q = \sqrt{2} \times \frac{2 \times \frac{1}{12} I_m^2}{\frac{2}{3} I_m^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

### حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از فازورها

در صورتی که یک مدار توسط یک تابع سینوسی تحریک شود، می‌توان معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از روش فازورها حل کرده و جواب خصوصی معادله را بدست آورد. برای توضیح مطلب فوق، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$b_n \frac{d^n(X)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1}(X)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{d(X)}{dt} + b_0 X = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

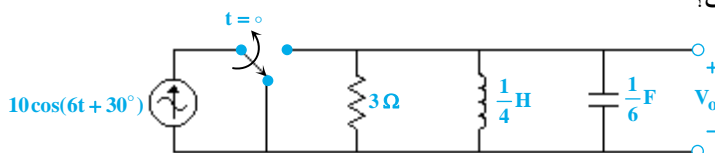
در صورتی که ضرایب  $b_n$  و  $\theta$  اعداد حقیقی باشند، برای حل معادله فوق می‌توان به جای  $\frac{d}{dt}$  عبارت  $(j\omega)^n$  را به صورت زیر جایگزین کرد. (چنانچه با فوریه آشنا باشید این نکته را بهتر متوجه خواهید شد.) حال داریم:

$$b_n \cdot (j\omega)^n \cdot X + b_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} \cdot X + \dots + b_1(j\omega) \cdot X + b_0 \cdot X = V_m \angle \theta$$

$$X \cdot [b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0] = V_m \angle \theta \Rightarrow X = \frac{V_m \angle \theta}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}$$

نکته ۲۳: در صورت جایگزینی  $j\omega$  در معادله دیفرانسیل و صفر شدن معادله به ازای  $j\omega$ ، می‌توان چنین نتیجه گرفت که  $j\omega$  فرکانس طبیعی سیستم بوده و پاسخ خصوصی مدار به صورت  $X(t) = V_m t \sin(\omega t + \theta)$  یا به صورت  $X(t) = V_m t \cos(\omega t + \alpha)$  خواهد بود.

مثال ۹۲: در مدار زیر معادله  $V_o$  در حالت ماندگار سینوسی کدام است؟



- (۱)  $42/4 \cos(6t - 15^\circ)$
- (۲)  $42/4 \cos(6t + 75^\circ)$
- (۳)  $21/2 \cos(6t - 15^\circ)$
- (۴)  $21/2 \cos(6t + 75^\circ)$