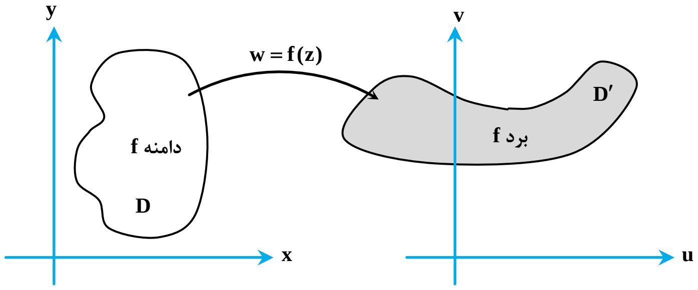
مدرسان شریف

فصل دوم

« نگاشت »

تعریف نگاشت

از درس ریاضی عمومی و حتی از دوره‌ی دبیرستان می‌دانیم برای توابع حقیقی، تابع به صورت $y=f(x)$ نوشته می‌شد و نمایش هندسی آن در صفحه‌ی xoy انجام می‌گرفت. اما در مورد توابع مختلط انجام چنین کاری (یعنی رسم نمودار تابع در یک صفحه) ممکن نیست، چون برای رسم نمودار به یک فضا آن هم از نوع چهار بعدی نیاز داریم که بدیهی است امکان ندارد. برای اینکه خودِ z (که متغیر ورودی یا دامنه‌ی تابع مختلط $w=f(z)$ است) به دو متغیر حقیقی x و y وابسته است و تابع $w=u+iv$ که خروجی تابع یا همان برد تابع $f(z)$ است، به دو متغیر که خود به x و y وابسته هستند، بستگی دارد. برای حل این مشکل ما اطلاعات خود را در مورد تابع، با رسم دو صفحه‌ی مختلف (و البته مختلط)، یکی برای مقادیر z و دیگری برای مقادیر w و مشخص کردن تناظر بین نقاط این دو صفحه مشخص می‌کنیم:



همانطورکه در شکل فوق می‌بینید، تابع f نقاط ناحیه D را در صفحه z، به نقاط ناحیه D' در صفحه‌ی w تبدیل می‌کند. به تابع $w=f(z)$ یک نگاشت می‌گوییم هرگاه توسط آن، نقاط ناحیه‌ی D از صفحه‌ی $x-y$ به نقاط ناحیه‌ی D' از صفحه‌ی $u-v$ تبدیل شوند. برای مثال نگاشت $w=z^۲$، نقطه‌ی $z=۱+i$ از صفحه‌ی $x-y$ را به نقطه‌ی $۲i$ در صفحه‌ی $u-v$ تبدیل می‌کند:

$$w=(x+iy)^۲=x^۲-y^۲+۲ixy \xrightarrow[x=۱,\,y=۱]{z=۱+i} w=۱^۲-۱^۲+۲i\times۱\times۱=۲i$$

گاهی از کلمه‌ی «تبدیل» و یا «تابع» نیز برای نگاشت استفاده می‌کنیم.

نگاشت همدیس (حافظ زاویه)

هرگاه تحت نگاشت $w=f(z)$ هر زاویه با رأس $z_۰$ از صفحه $x-y$ بدون هیچ‌گونه تغییری از نظر اندازه و جهت، به زاویه‌ای با رأس $w_۰=f(z_۰)$ در صفحه $u-v$ منتقل شود، آنگاه نگاشت را در نقطه $z=z_۰$ همدیس می‌نامیم. برای اینکه تابع تحلیلی $w=f(z)$ همدیس باشد، باید شرط $f'(z)\neq ۰$ برقرار باشد.

مثال۱: اگر تصاویر خطوط $x=a$ و $y=b$ را تحت نگاشت $w=(x^۲-y^۲)+ikxy$ بدست بیاوریم و بخواهیم تصاویر آن‌ها عمود بر هم باشد، k لازم است چه مقداری باشد؟ (a و b اعدادی غیرصفر هستند.) (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» اولاً توجه کنید که اگر نگاشت w تحلیلی باشد، هر جا که $w'\neq ۰$ باشد، زاویه‌ی بین خطوط و منحنی‌ها را حفظ می‌کند. (یعنی همدیس است.) خطوط $x=a$ و $y=b$ دو خط عمود بر هم هستند و می‌دانیم اگر w تحلیلی و در $z=a+ib$، دارای مشتق مخالف صفر باشد، آن‌ها را به دو منحنی یا خطِ عمود بر هم تصویر خواهد کرد. شرط لازم برای تحلیلی بودن آن است که شرایط کوشی ریمان برقرار باشند: $u=x^۲-y^۲\ ,\ v=kxy$

$$\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x=kx\\-۲y=-ky\end{cases}\Rightarrow k=۲$$

بنابراین $k=۲$ جواب صحیح است. دقت کنید که به ازای $k=۲$ داریم: $w=(x^۲-y^۲)+۲ixy=z^۲$ که نگاشتی تحلیلی است و در هر $z\neq ۰$ داریم $w'\neq ۰$.

راهنمایی برای پاسخگویی به تست‌های نگاشت

همان‌طور که گفتیم نگاشت $w=f(z)$، در واقع هر نقطه در صفحه $x-y$ مانند $z=x+iy$ را بـه نقطـه‌ای ماننـد $w=u+iv$ در صـفحه $u-v$ تبـدیل می‌کند و برای همین با جایگزینی $z=x+iy$ در $f(z)$ و همچنین قرار دادن $u+iv$ به جای w در نهایت می‌توانیم u و v را بر حسب x و y یا x و y را برحسب u و v محاسبه کرده و با توجه به نواحی، نقاط مرزی و همچنین حدود تغییرات داده شده در صفحه $x-y$، تعیین کنیم که u و v چـه تغییراتی می‌کنند و نشان‌دهنده چه ناحیه‌هایی در صفحه $u-v$ می‌باشند.

توجـــه۱: اکثـر تـسـت‌هـای نگاشـت بـا در نظـر گـرفتن نقطـه‌ای دلخـواه بـه جـای z در ناحیـه مـوردنظر و پیـدا کـردن نقطـه‌ی متنـاظر آن (یعنی همان w) به روش رد گزینه و سریع قابل پاسخگویی هستند.

توجه۲: بررسی نقاط و یا خطوط روی مرز ناحیه داده شده در حل تست‌ها به ما کمک می‌کند.

در نهایت لازم به ذکر است که ممکن است، گزینه‌ها طوری طراحی شوند که با استفاده از نکات فوق نتوان گزینه‌های غلـط را حـذف کـرد و یـا بـه صـورت نقطه‌یابی تست را جواب داد. برای همین آشنایی با خواص هر نگاشت در حل سریع‌تر تست‌ها به ما کمک می‌کند.

نگاشت همانی $w=f(z)=z$

این نگاشت هر شکل را بدون تغییر منتقل می‌کند. واضح است که این نگاشت، در تمام نقاط همدیس است.

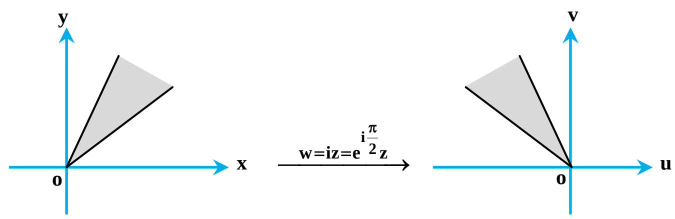
نگاشت انتقال $w=z+b$

این نگـاشت کـه در آن $b=b_1+ib_2$ یک عـدد مختـلط است، هـر نقطـه یا شکـل را در جهـت بردار b و به اندازه b منتقل می‌کند. در واقـع تحـت ایـن نگاشت، نقطه (x,y) از صفحه $x-y$ به نقطه $(x+b_1\ ,\ y+b_2)$ در صفحه $u-v$ منتقل می‌شود. واضح است این نگاشت نیز در تمام نقاط همدیس است.

نگاشت $w=az$

این نگاشت که در آن $a=re^{i\theta}$ عددی مختلط و مخالف صفر است، انبساط یا انقباضی به اندازه $\underline{\underline{r}}$ و دورانی به اندازه θ در هر نقطه z که قرار است منتقـل شـود، ایجاد می‌کند. در واقع برای رسیدن از z به $w=az$ اگر $z=r_1e^{i\theta_1}$ تعریف شود، ابتدا طول r_1 را به اندازه r (همان اندازه a) منبسـط و یا منقبــض مــی‌کـنیم (اگر $|r|>1$ شکل منبسط و اگر $|r|<1$ شکل منقبض می‌شود) و سپس z را به انـدازه θ (زاویه a) دوران می‌دهیـم. یعنی هـر نقطـه در مختـصات قطبـی بـه صورت (r_1,θ_1) به نقطه‌ای به مختصات $(r.r_1\ ,\ \theta+\theta_1)$ تبدیل خواهد شد. واضح است که این نگاشت نیز همدیس است.

برای مثال در شکل مقابل نگاشـت $w=iz$ کـه در واقـع آن را بـه شـکل $w=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ می‌نویسیم، فقط یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ (در جهت مثلثاتی) در شکل داده شده در صفحه‌ی $x-y$ ایجاد کرده و در اندازه شکل هـیچ تأثیری نداشته است.



«صفحه z» «صفحه w»

مثال۲: نیم‌صفحه $y>0$ تحت نگاشت $w=(1+i)z$ بر روی کدام ناحیه نگاشته خواهد شد؟

۱) $u+v=1$ ۲) $u<v$ ۳) $u+v=-1$ ۴) $u>v$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با فرض $z=x+iy$ و $w=u+iv$ داریم:

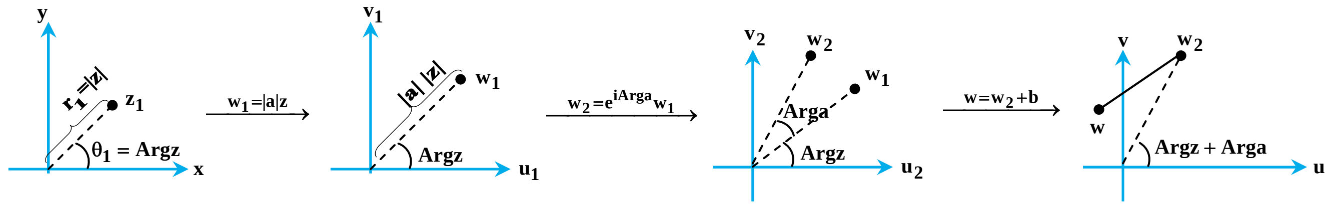
$$u+iv=(1+i)(x+iy)=x-y+i(x+y)\ \Rightarrow \begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \Rightarrow y=\frac{v-u}{2} \xrightarrow{\text{چون } y>0 \text{ است}} v-u>0 \Rightarrow u<v$$

نگاشت خطی $w=az+b$

این نگاشت که همه‌جا همدیس است ترکیبی از دو نگاشت $w_1=az$ و $w_2=w_1+b$ می‌باشد که می‌تواند به ترتیب متوالی صورت گیرد.

مطابق شکل، تغییرات نقطه‌ای مانند z_1 که طول شعاع حامل آن از مبدأ برابر r_1 و زاویه آن با محور x ها θ_1 است، تحـت نگاشـت $w=az+b$ بـه ایـن صورت است که ابتدا توسط نگاشت $w_1=|a|z$ فاصله‌ی نقطه از مبدأ در $r=|a|$ ضرب می‌شود و سپس تحت نگاشـت $w_2=e^{iArga}w_1$، بـه زاویـه آن بـا محور x ها به اندازه $\theta=Arga$، اضافه شده و نقطه از w_1 به w_2 منتقل می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w=w_2+b$ نقطه به اندازه b منتقل می‌شود.

به شکل‌های نشان داده شده برای درک بیشتر مطلب دقت کنید. (در این شکل‌ها فرض می‌کنیم $|a|>۱$ و Arga مثبت است):



به طور خلاصه این نگاشت سه عملکرد زیر را دارد:

۱) انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ۲) دورانی به اندازه Arga   ۳) انتقالی به اندازه b

مثال ۳: نگاشت $w = iz + i$ نیم‌صفحه $x > ۰$ را بر روی کدام ناحیه می‌نگارد؟

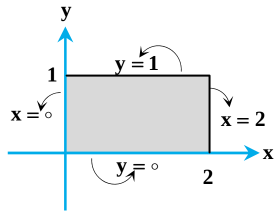
۱) $u > ۱$ ۲) $v > ۱$ ۳) $v > \frac{۱}{۲}$ ۴) $u > \frac{۱}{۲}$ و $v < ۱$

پاسخ : گزینه «۲»

$$w = iz + i = i(x+iy) + i = -y + i(x+۱) = u + iv$$

$$v = x + ۱ \Rightarrow x = v - ۱ \xrightarrow{x>۰} v - ۱ > ۰ \Rightarrow v > ۱$$

مثال ۴: ناحیه داده شده در شکل زیر توسط نگاشت $w = (۱+i)z + (۱-۲i)$ به چه شکلی تبدیل خواهد شد؟



پاسخ : ابتدا با جایگزینی $z = x + iy$ و $w = u + iv$، سعی می‌کنیم u و v را بر حسب y و x تعیین کنیم:

$$u + iv = (۱+i)(x+iy) + ۱ - ۲i \Rightarrow u + iv = x + ۱ - y + i(x + y - ۲)$$

پس $u = x + ۱ - y$ و $v = x + y - ۲$ و با توجه به مرزها داریم:

به جای خط $y = ۱$ باید خط $v = u - ۱$ رسم شود.

$$y = ۱ \Rightarrow \begin{cases} u = x + ۱ - ۱ = x \\ v = x + ۱ - ۲ = x - ۱ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v = u - ۱}$$

به جای خط $y = ۰$ باید خط $v = u - ۳$ رسم شود.

$$y = ۰ \Rightarrow \begin{cases} u = x + ۱ - ۰ = x + ۱ \\ v = x + ۰ - ۲ = x - ۲ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v = u - ۳}$$

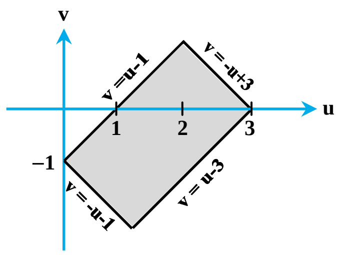
به جای خط $x = ۰$ باید خط $v = -u - ۱$ رسم شود.

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} u = ۰ + ۱ - y = ۱ - y \\ v = ۰ + y - ۲ = y - ۲ \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v = -u - ۱}$$

به جای خط $x = ۲$ باید خط $v = -u + ۳$ رسم شود.

$$x = ۲ \Rightarrow \begin{cases} u = ۲ + ۱ - y = ۳ - y \\ v = ۲ + y - ۲ = y \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v = -u + ۳}$$

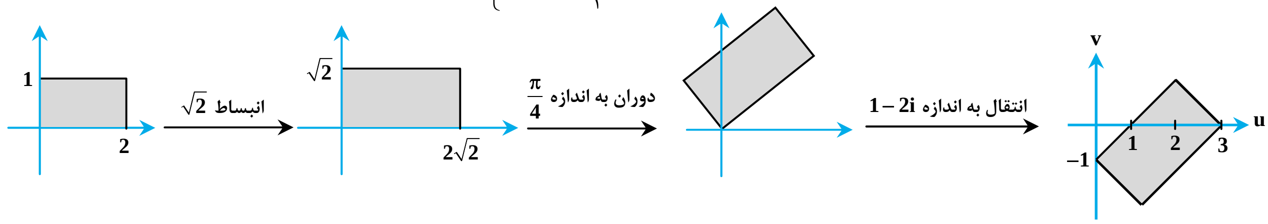
حالا باید چهار خط را در صفحه $u - v$ رسم کنیم:



در واقع در این تبدیل ابتدا اندازه شکل توسط نگاشت $w_۱ = (۱+i)z = \sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}z$، $\sqrt{۲}$ برابر می‌شود و همچنین شکل به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌کند و سپس توسط نگاشت $w = w_۱ + ۱ - ۲i$، شکل به اندازه $۱ - ۲i$ انتقال می‌یابد.

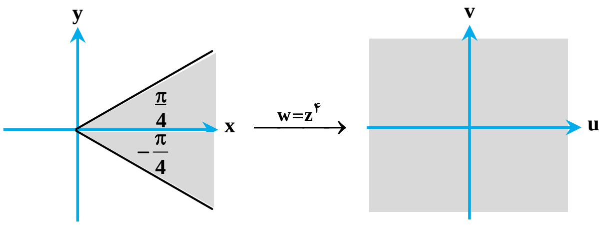
البته سؤال را می‌توان با توجه به سه عملکرد گفته شده برای نگاشت $w = az + b$ نیز حل کرد:

$$a = ۱ + i \Rightarrow \begin{cases} |a| = \sqrt{۲} & \text{انبساط} \\ \text{Arga} = \frac{\pi}{۴} & \text{دوران} \end{cases} \quad , \quad b = ۱ - ۲i \Rightarrow \text{انتقال}$$



توضیح: البته اگر این مسئله در قالب یک تست چهار گزینه‌ای مطرح شده بود، با توجه به اینکه نقاط و خطوط مرزی به چه نقاطی تبدیل شده‌اند (روش نقطه‌یابی) به راحتی می‌توانستیم بدون انجام محاسبات گزینه صحیح را انتخاب کنیم. مگر اینکه گزینه‌ها به طور دقیقی نزدیک به هم طرح شده باشند!

نگاشت $w = z^n$



این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و بزرگتر از یک است، فاصله از مبدأ برای هر نقطه مانند z را به توان n می‌رساند و آرگومان آن را نیز n برابر می‌کند. توسط این نگاشت نقاط $-\frac{\pi}{n} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{n}$ به نقاط $-\pi \le Arg(w) \le \pi$ تبدیل می‌گردند. در واقع توسط این نگاشت زاویه اشکال بازتر می‌گردد. این نگاشت در مبدأ همدیس نیست. قابل ذکر است که نگاشت $w = z^2$ حالت خاصی از این نگاشت می‌باشد که ابتدا آن را بررسی می‌کنیم:

نگاشت $w = z^2$

این نگاشت هر نقطه‌ی $z = re^{i\theta}$ را به نقطه‌ی $w = r^2e^{i2\theta}$ تبدیل می‌کند. در واقع نگاشت $w = z^2$، زاویه را دو برابر کرده و اندازه را به توان ۲ می‌رساند. این نگاشت فقط در مبدأ مختصات که مشتق آن برابر صفر است، همدیس نیست.

مثال ۵: تصویر میدان $\{z \in C; Re z > 0 , Im z > 0 , (Re z)(Im z) > 1\}$ تحت نگاشت $w = z^2$ کدام است؟

۱) $\{w \in C ; Im w > 1\}$
۲) $\{w \in C ; Im w > 2\}$
۳) $\{w \in C ; Re w > 1\}$
۴) $\{w \in C ; (Re w)(Im w) > 1\}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر فرض کنیم $z = x + iy$ و $w = u + iv$، تحت نگاشت $w = z^2$ داریم:

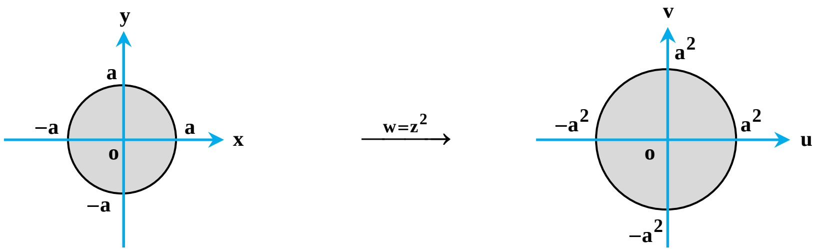
$$w = z^2 \Rightarrow u + iv = (x + iy)^2 \Rightarrow u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

پس $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$. از طرفی ناحیه‌ی داده شده در سؤال به صورت $\{xy > 1 \ , \ x > 0 \ , \ y > 0\}$ می‌باشد که ناحیه‌ی مرزهای آن به صورت زیر است:

$$xy > 1 \Rightarrow 2xy > 2 \Rightarrow v > 2$$

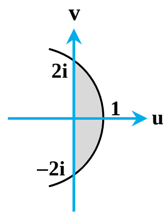
مثال ۶: تصویر دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ تحت نگاشت $w = z^2$ را بیابید.

☑ **پاسخ :** معادله دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ در مختصات قطبی به صورت $z = ae^{i\theta}$ می‌باشد و چون نگاشت $w = z^2$، زاویه را دو برابر و همچنین اندازه را به توان ۲ می‌رساند، لذا $w = a^2e^{i2\theta}$ خواهد بود؛ یعنی معادله دایره‌ای به صورت $u^2 + v^2 = a^4$. به عبارت دیگر تحت این نگاشت دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a در صفحه $(x-y)$ به دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a^2 در صفحه $(u-v)$ تبدیل می‌شود.

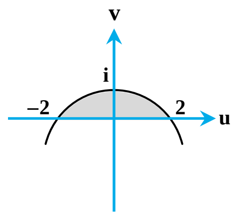


نکته۱: نگاشت $w = z^2$ خطوط $x = c$ را به سهمی‌های $v^2 = -4c^2(u - c^2)$ و خطوط $y = d$ را به سهمی‌های $v^2 = 4d^2(u + d^2)$ تبدیل می‌کند.

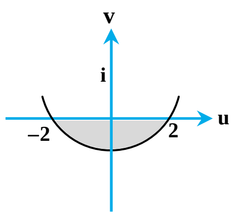
مثال ۷: تابع $w = z^2$ ناحیه مثلثی بین خطوط $y = \pm x$ و $y = 1$ را به کدام ناحیه تبدیل می‌کند؟



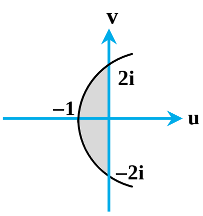
(۱)



(۲)



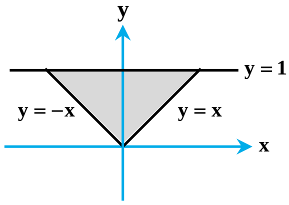
(۳)



(۴)

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

با توجه به نگاشت $w = z^2$ داریم:



$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

تصویر خط $y=1$ تحت نگاشت w با توجه به روابط به دست آمده برای u و v به صورت $\mathbf{u=x^2-1}$ و $\mathbf{v=2x}$ است که آن را می‌توان به صورت $\mathbf{v^2=4(u+1)}$ نوشت که یک سهمی افقی با رأس $(-1,0)$ است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. همین‌جا پاسخ به تست تمام است ولی برای تمرین بیشتر بررسی‌های دقیق‌تر را نیز انجام می‌دهیم. تصویر خط $y=x$، به صورت $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{v=2x^2}$ و برای خط $y=-x$، $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{v=-2x^2}$ و در نتیجه تصویر خط $y=\pm x$ به صورت پاره‌خط $\mathbf{u=0}$ و $\mathbf{-2\le v\le 2}$ است. (دقت کنید $-2x^2\le v\le 2x^2$ و چون $-1<x<1$، لذا $-2\le v\le 2$ به دست آمد.)