درسنامه: مسائل اشتروم ـ لیوویل و روش تفکیک متغیرها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در حل برخی مسائل ساده فیزیکی یا علوم مهندسی به یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) برخورد می‌کنیم. در واقع این مسائل ساده عموماً فقط وابسته به **یک متغیر**، مثلاً متغیر زمان (t) و یا متغیر مکان (x) هستند. اما بسیاری از مسائل متنوع و مهم مهندسی و فیزیکی به **دو یا چند متغیر** بستگی دارند. مسائلی در زمینه‌ی دینامیک سیالات، ژئوفیزیک (انتشار موج زلزله‌ای)، انتقال حرارت، آیرودینامیک، علوم نور، مهندسی نفت، مکانیک کوانتوم و نظریه‌های الکترومغناطیسی، نمونه‌هایی از این مسائل هستند که در تجزیه و تحلیل آن‌ها به «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» (PDE) برخورد می‌کنیم. در واقع هر معادله شامل یک تابع مجهول (مانند u) که حداقل دارای دو متغیر مستقل و مجزا (مثلاً x و t) و مشتقات جزئی u نسبت به دو متغیر x و t باشد را یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی می‌نامیم. برای مثال هر یک از معادلات زیر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی محسوب می‌شوند:

۱) $u_x + u_y = x^۲ + y^۲ + ۱$, ۲) $u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - u_t = ۲$

ملاحظه می‌کنید معادله‌ی (۱)، دارای دو متغیر مستقل و معادله‌ی (۲)، دارای (۴) متغیر مستقل است. لازم به ذکر است که به **مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله** «مرتبه معادله‌ی مشتق جزئی» گفته می‌شود که با این تعریف معادله (۱) مرتبه اول و معادله (۲) مرتبه دوم محسوب می‌شود.

اگر معادله شامل تابع مجهولی مانند u و مشتقات نسبی آن از درجه اول (توان یک) باشد، و آن‌ها با تابع دیگری ترکیب نشده باشند (مثلاً sin(u) نداشته باشیم) و توابع برحسب u در یکدیگر ضرب نشده باشند، معادله را **خطی** می‌گوییم. مهم‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل که ما با آن‌ها در این فصل برخورد می‌کنیم، معادلات مرتبه دوم هستند. صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی **خطی مرتبه دوم** نسبت به دو متغیر به فرم زیر است:

$$A\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + B\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

که در آن A، B، ... و G ممکن است به x و y بستگی داشته باشند، ولی به u و مشتق‌های u بستگی ندارند. هر معادله مرتبه دوم را که به فرم این معادله نیست، یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم **غیرخطی** می‌نامیم. هرگاه فقط A و B و C عدد ثابت باشند یا به x و y بستگی داشته باشند نه به u یا مشتق‌های u، معادله را **شبه خطی** می‌نامیم. تفاوت معادله شبه خطی با معادله‌ی خطی در آن است که در معادلات شبه خطی D، E، F و G ممکن است به u یا مشتق‌های u بستگی داشته باشند. (مثلاً معادله‌ی $۲u_{xx} + u^۲ y u_x = ۰$ شبه خطی است). در معادله‌ی فوق اگر $G = ۰$ معادله را **همگن** و اگر $G \neq ۰$ آن را **ناهمگن** می‌نامیم.

گفتیم که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارای تنوع زیادی هستند. مهم‌ترین و مطرح‌ترین آن‌ها به صورت زیر است: ($c > ۰$ عددی ثابت است)

۱) $u_{tt} - c^۲ u_{xx} = ۰$ (معادله‌ی موج در یک بعد)

۲) $u_t - c^۲ u_{xx} = ۰$ (معادله‌ی حرارت در یک بعد)

۳) $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ (معادله‌ی پواسون در دو بعد)

۴) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰$ (معادله‌ی لاپلاس در سه بعد)

۵) $\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{۱}{r^۲}(\frac{\partial^۲ u}{\partial \theta^۲}) - \frac{۱}{c^۲}(\frac{\partial u}{\partial t}) = ۰$ (معادله‌ی حرارت در دو بعد در مختصات قطبی)

۶) $u_{tt} = c^۲(u_{xx} + u_{yy})$ (معادله‌ی موج در دو بعد)

۷) $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ (معادله‌ی لاپلاس در دو بعد)

۸) $u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$ معادله‌ی تلگراف (α و β ثابت)

همان‌طور که در تمام معادلات بالا مشخص است، پاسخ مسأله یعنی u، به بیش از یک متغیر بستگی دارد (مثلاً در معادله‌ی (۱) و (۲) پاسخ مسأله به x و t بستگی دارد که در آن‌ها x متغیر مکان و t متغیر زمان است.) در برخی معادلات مانند معادلات (۳) و (۴) متغیرهای مسأله فقط از نوع مکانی (x, y, z) هستند، و بالاخره همان‌طور که در معادله‌ی (۵) می‌بینید، این معادلات با توجه به شرایط هندسی مسأله ممکن است در مختصات قطبی، استوانه‌ای، کروی و ... مطرح شوند.

در حل این‌گونه سؤالات باید توجه کنید که چون در روند حل با یک معادله دیفرانسیل روبه‌رو می‌شویم، پاسخ‌ها کلی و به همراه پارامتر ثابت بدست می‌آیند (که مقادیر ثابت در مسائل با توجه به محدودیت‌ها بدست می‌آیند.) و یا گاهی اوقات برای یک مسأله با مشتقات جزئی تعداد جواب‌ها و حتی نوع تابع جواب کاملاً متفاوت بدست می‌آید. برای مثال هر یک از توابع $e^x \cos y$ ، $e^y \sin x$ ، $x^۲ - y^۲$ ، $Ln(x^۲ + y^۲)$ و xy جواب معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ هستند. (می‌توانید با مشتق‌گیری از هر یک از توابع داده شده و قرار دادن آن در معادله صحت این ادعا را بررسی کنید!) در واقع وقتی ما با یک مسأله مهندسی یا فیزیکی و یا نظایر آن روبه‌رو هستیم، معمولاً باید به جواب «یکتا» برسیم (فرض کنید قرار باشد درجه حرارت یک نقطه در یک سنسور و یا کلید کنترلی دقیقاً یک عدد ثابت باشد، در این وضعیت حتماً لازم است شرایط را طوری تعریف کنیم که جواب یکتا و برابر با همان درجه حرارت خواسته شده باشد.)

هرگاه تعداد شرایط مرزی و محدودیت‌ها برابر تعداد مشتقات جزئی گرفته شده باشد، به جواب یکتا خواهیم رسید. در غیر این صورت، ثابت‌های دلخواهی در جواب هستند که مقدارشان نامعلوم است. برای مثال معادله‌ی (۱) به دو شرط مرزی برای x و دو شرط مرزی برای t نیاز دارد تا به جواب یکتا برسد. معادله‌ی (۲) به یک شرط مرزی برای t و دو شرط مرزی برای x نیاز دارد تا به جواب یکتایی برسد.

برای درک بهتر بحث، فرض کنید معادله‌ی حرارت در یک بعد به صورت زیر تعریف شده باشد:

$c^2 u_{xx} = u_t$ ، (c عددی ثابت است)

پاسخ این مسأله تابعی مانند $u(x,t)$ است، به عبارت دیگر درجه حرارت در لحظه‌ی t و در نقطه‌ی x توسط تابع $u(x,t)$ مشخص خواهد شد. چون مسأله دارای یک بعد مکانی (یعنی x) است و زمان (یعنی t) مثبت است، به نظر می‌رسد ناحیه بررسی مسأله $0 \le x \le L$ و $t \ge 0$ باشد. در واقع ما دنبال پیدا کردن درجه حرارت در هر نقطه‌ی x از یک میله با طول L و در لحظه‌ی دلخواه t هستیم. این مسأله با این شرایط تعداد زیادی جواب دارد که در معادله صدق می‌کنند. اما اگر بخواهیم مسأله دارای **پاسخ یکتا** باشد، باید محدودیت‌هایی برای مسأله در نظر گرفته شود. این محدودیت‌ها باید در $x = 0$ ، $x = L$ و $t = 0$ تعریف شده باشند. (چون مسأله در ناحیه $0 \le x \le L$ و $t \ge 0$ مطرح است.) مقادیر درجه حرارت در $x = L$ و $x = 0$ (یعنی $u(L,t)$ و $u(0,t)$) به **شرایط مرزی** و یا به عبارت دیگر به **شرایط مکانی** موسوم هستند (زیرا x متغیر مکانی است) و مقدار درجه حرارت در لحظه‌ی $t = 0$ ، (یعنی $u(x,0)$) **شرط اولیه** نامیده می‌شود. خُب حالا با این شرایط مسأله، انتظار داریم به پاسخ یکتا برسیم. چرا؟ چون شرایط و محدودیت‌ها برای این معادله کافی هستند (در این سؤال مشتق نسبت به x از مرتبه ۲ و مشتق نسبت به t از مرتبه ۱ است، پس نسبت به x باید ۲ شرط و نسبت به t باید یک شرط داشته باشیم).

لازم به ذکر است مسائلی از این قبیل را گاهی **«مسائل مقدار مرزی ـ مقدار اولیه»** و یا به طور خلاصه‌تر **«مسائل مقدار مرزی»** نامگذاری می‌کنند.

انواع شرایط مرزی

محدودیت‌ها (یا همان شرایط مرزی) در مسائل، معمولاً در حالت‌های مختلف داده می‌شود که مهم‌ترین آن‌ها در ریاضیات مهندسی به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

شرط دیریکله: چنانچه شرایط مرزی فقط بر حسب **مقدار تابع** مجهول بر روی میدان مکان داده شده باشد، آن را شرط دیریکله گویند.

برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از یک شرط دیریکله است: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

شرط دیریکله بیان می‌کند که؛ مقدار تابع در برخی از مرزها، ثابت است. برای نمونه در مسأله‌ی انتقال حرارت، اگر ابتدای میله را در مخلوط آب و یخ قرار دهیم، دما در آن نقطه همواره صفر است، یعنی شرط به صورت $u(0,t) = 0$ نوشته می‌شود.

شرط نیومن: اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار **مشتق تابع** مجهول (در جهت بردار نرمال بر روی میدان مکان) داده شده باشد، آن را شرط نیومن گویند. برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از شرط نیومن است: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

به عنوان یک مثال از نظر فیزیکی عایق بودن مرزها در مسأله‌ی انتقال حرارت شرط نیومن را ایجاد می‌کند.

شرط روبین (مخلوط): اگر شرایط مرزی در قسمت‌هایی از مرز بر حسب **مقدار تابع** و در قسمت‌های دیگر بر حسب **مقدار مشتق تابع** داده شده باشد، آن را شرط مرزی روبین گویند. برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از شرط روبین است: $u(0,t) = u_x(L,t) = 0$

شرط تناوبی: اگر تفاضل مقدار تابع در دو سر بازه (بازه‌ای متناهی) و همچنین تفاضل مقدار مشتق تابع در دو سر بازه (بازه‌ای متناهی) داده شده باشد، شرط مرزی را متناوب گویند. مثلاً دو شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ تناوبی هستند: $u(0,t) - u(L,t) = 0 \;,\; u_x(0,t) - u_x(L,t) = 0$

و یا برای بازه‌ی $-L \le x \le L$ شرایط زیر نمونه‌ای از شرط تناوبی محسوب می‌شوند:

$$u(-L,t) - u(L,t) = 0 \;,\; u_x(-L,t) - u_x(L,t) = 0$$

برای نمونه، میله‌ای به طول L را در نظر بگیرید که منبع حرارتی (مانند شمع) دقیقاً وسط آن قرار داده شود. ابتدا و انتهای میله فاصله‌ای یکسان از منبع حرارتی دارند. بنابراین در هر لحظه‌ی t ، مقدار دما (u) و تغییرات دمایی (u_x) در این دو نقطه یکسان است. یعنی داریم:

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) \;,\; u(0,t) = u(L,t)$$

تذکر ۱: دقت کنید لزومی ندارد حتماً شرایط مرزی برابر با صفر باشند، کافیست مقداری معلوم باشند و همانطور که گفتیم مثال‌های فوق فقط نمونه‌هایی از این شرایط هستند.

شرط کران‌داری: چنانچه میدان بی‌کران باشد، شرایط مرزی در بی‌نهایت به صورت حدی بیان می‌شود:

شرط $|u(a,t)| < M$ را شرط کران‌داری می‌نامیم که در آن $M > 0$ عددی ثابت است. این شرط معمولاً برای مسائلی مطرح می‌شود که بازه، نامتناهی یا نیمه متناهی است. شرط مقابل نمونه‌ای از شرط کران‌داری است: $0 < x < \infty \;,\; |u(\infty,t)| < M$

شرط کران‌داری نیز مفهوم فیزیکی دارد. برای نمونه فرض کنید یک میله‌ی مسی به طول L را به طور دائم تحت تأثیر حرارت قرار دهیم $u(x,t)$ دمای نقطه‌ی x را در لحظه‌ی t بیان می‌کند. اگر به مقدار زیاد از ابتدای میله دور شویم، دما نمی‌تواند به بی‌نهایت میل کند؛ زیرا میله‌ی مسی ظرفیت گرمایی محدودی دارد. در اینجا M می‌تواند نقطه‌ی ذوب مس در نظر گرفته شود.

نکته ۱: اگر u_1 ، u_2 ، u_3 ، ... و u_n پاسخ‌های یک معادله دیفرانسیل خطی و همگن باشند، در این صورت هر ترکیب خطی از آن‌ها هم جواب‌های این معادله خواهد بود. به عبارت دیگر: $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ که c_1 تا c_n همگی ضرایب ثابت هستند، نیز جواب معادله می‌باشد.

مسائل اشتروم ـ لیوویل عادی

در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پس از انجام عملیاتی کوتاه به مسائل اشتروم ـ لیوویل برخورد می‌کنیم. برای همین قبل از شروع آموزش روش‌های حل این نوع معادلات، لازم است با مسائل اشتروم ـ لیوویل آشنا شویم. اگر یادتان باشد در درس معادلات دیفرانسیل برای حل یک معادله درجه دوم خطی و همگن به دو شرط اولیه نیاز داشتید؛ یکی مقدار تابع در یک نقطه و دیگری مقدار مشتق تابع در همان نقطه. در اینجا ما شرایط مرزی برای معادله در نظر می‌گیریم؛ یعنی شرایطی که در نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی مورد بررسی برای مقادیر تابع و مقادیر مشتق تابع مجهول، تحمیل می‌شوند.

هر مسأله با شرایط زیر را یک مسأله اشتروم ـ لیوویل می‌نامند:

$$\begin{cases}(f(x)y')'+[g(x)+\lambda h(x)]y=0 \quad , \quad a<x<b\\ \left.\begin{array}{l}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{دو شرط مکانی}\end{cases}$$

در مسأله فوق α_1، α_2، β_1 و β_2 اعداد ثابت هستند که α_1 و α_2 با هم و همچنین β_1 و β_2 با هم، به صورت هم‌زمان صفر نیستند. λ یک پارامتر ثابت، $f(x)$ یک تابع حقیقی مثبت در فاصله $[a,b]$ و $h(x)$ یک تابع حقیقی مثبت معلوم با نام **تابع وزن** است. برای تضمین وجود جواب باید توابع $f(x)$ و $f'(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند. به ازای یک انتخاب مفروض از مقدار λ، $y_\lambda(x)$ یک **تابع ویژه** (مخالف صفر) وابسته به λ نامیده می‌شود. این ثابت λ، **مقدار ویژه** این مسأله نام دارد. توجه کنید که تابع ثابت $y=0$ هم در معادله و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند. این جواب را جواب بدیهی می‌گوییم در واقع منظورمان از توابع ویژه معادله همان جواب‌های نابدیهی هستند.

مثال۱: مقادیر و توابع ویژه مسأله زیر کدام است؟

$$\mathbf{(xy')'+\frac{\lambda}{x}y=0 \ , \ y'(1)=y(2)=0}$$

۱) $\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2(Ln2)^2})^2 \ , \ \cos(\frac{2n-1}{2(Ln2)^2}Ln^2x)$

۲) $\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2Ln2})^2 \ , \ \cos(\frac{2n-1}{2Ln2}\pi Lnx)$

۳) $\lambda_n=(\frac{n-1}{2(Ln2)^2}\pi)^2 \ , \ \cos(\frac{n-1}{2(Ln2)^2}\pi Ln^2x)$

۴) $\lambda_n=(\frac{n-1}{2Ln2}\pi)^2 \ , \ \cos(\frac{n-1}{2Ln2}\pi Lnx)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی داده شده به صورت زیر است:

$$xy''+y'+\frac{\lambda}{x}y=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} x^2y''+xy'+\lambda y=0$$

یعنی معادله‌ی اویلر است. حالا سه حالت برای λ در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $\lambda=0$: در این صورت $x^2y''+xy'=0$ و در نتیجه $y=c_1+c_2Lnx$ و چون $y'(1)=0$، لذا $c_2=0$ و بنابراین $y=c_1$ و چون $y(2)=0$ است، پس c_1 هم برابر با صفر است و به جواب بدیهی $y=0$ رسیدیم. پس در این حالت تابع ویژه نداریم.

حالت دوم: اگر $\lambda=-k^2<0$ (k عددی حقیقی و مثبت است) در این صورت داریم:

$$x^2y''+xy'-k^2y=0 \Rightarrow y=c_1x^k+c_2x^{-k}$$

با توجه به شرایط $y'(1)=0$ و $y(2)=0$ داریم:

$$\begin{cases}c_1k-c_2k=0\\ c_12^k+c_22^{-k}=0\end{cases}$$

دترمینان ضرایب برابر $k(2^{-k}+2^k)\neq 0$ و مخالف صفر است. بنابراین تنها جواب دستگاه، $c_1=c_2=0$ بوده و باز هم تابع ویژه‌ای بدست نمی‌آید.

حالت سوم: اگر $\lambda=k^2>0$، آن‌گاه معادله‌ی مقابل را داریم: $x^2y''+xy'+k^2y=0$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به جواب معادله‌ی اویلر}} y=c_1\cos(kLnx)+c_2\sin(kLnx) \Rightarrow y'=-c_1(\frac{k}{x})\sin(kLnx)+c_2(\frac{k}{x})\cos(kLnx)$$

با توجه به شرط $y'(1)=0$، از معادله‌ی مشتق می‌فهمیم $c_2=0$، بنابراین داریم: $y=c_1\cos(kLnx)$، حالا با توجه به شرط $y(2)=0$، داریم:

$$c_1\cos(kLn2)=0 \Rightarrow kLn2=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_n=\frac{2n-1}{2Ln2}\pi$$

توجه کنید که اگر $c_1=0$ باشد، به جواب $y=0$ می‌رسیم و تابع ویژه‌ای به دست نمی‌آید. پس فرض کرده‌ایم $c_1\neq 0$ باشد. بنابراین برای $n=1,2,3,\dots$ داریم:

$$\begin{cases}\lambda_n=k_n^2=(\frac{2n-1}{2Ln2}\pi)^2 & : \text{مقادیر ویژه}\\ \cos(\frac{2n-1}{2Ln2}\pi Lnx) & : \text{توابع ویژه}\end{cases}$$

مثال ۲: مقادیر و توابع ویژه مسأله اشتروم ـ لیوویل مقابل را حساب کنید.
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \;,\; 0<x<L \\ y(0)=0 \;,\; y(L)+hy'(L)=0 \;,\; (\text{عددی ثابت است } h>0) \end{cases}$$

پاسخ: برای صرفه‌جویی در زمان و کاغذ! فقط حالتی که منجر به بدست آمدن توابع و مقادیر ویژه می‌شود، یعنی $\lambda=k^2>0$ را بررسی می‌کنیم:
$$y''+k^2y=0 \Rightarrow y=c_1\cos(kx)+c_2\sin(kx) \xrightarrow{y(0)=0} c_1=0 \Rightarrow y=c_2\sin kx$$
حالا سراغ شرط دوم می‌رویم:
$$y(L)+hy'(L)=0 \Rightarrow c_2\sin(kL)+hkc_2\cos(kL)=0$$
برای این که جواب غیر صفر داشته باشیم، باید $c_2\neq 0$ باشد، لذا داریم: $\sin(kL)+hk\cos(kL)=0 \Rightarrow tg(kL)=-hk \xrightarrow{k=\sqrt{\lambda}} tg\sqrt{\lambda}L=-h\sqrt{\lambda}$

مقادیر ویژه (یا همان λ_nها) برای این مسأله ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند که دارای بی‌نهایت جواب است. در واقع نقاط تلاقی منحنی‌های $tg(\sqrt{\lambda}L)$ و $-h\sqrt{\lambda}$ باید حساب شوند. هر چند نیاز به توضیح نیست، اما توابع ویژه برای این مسأله به صورت $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ است.

سؤال دانشجو: چرا برای $\lambda<0$ مقدار ویژه‌ای به دست نمی‌آید؟

پاسخ: با فرض $\lambda=-k^2$ $(k>0)$ به معادله‌ی $y''-k^2y=0$ می‌رسیم که جواب آن $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$ است. با جایگذاری شرایط مرزی، به تساوی $e^{2kL}=\frac{1-hk}{1+hk}$ می‌رسیم. توان e مثبت است پس سمت چپ بزرگ‌تر از یک است. در حالی که کسر سمت راست کوچک‌تر از یک است بنابراین تساوی به وجود آمده غیر ممکن است.

مثال ۳: در مسأله مقدار مرزی $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \;,\; \lambda>0 \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$، مقادیر ویژه (λ_n) در کدام معادله صدق می‌کنند؟ $(n=1,2,3,\cdots)$

۱) $tg\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\lambda_n}$
۲) $cotg\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\lambda_n}$
۳) $tg\sqrt{\lambda_n}=-\sqrt{\lambda_n}$
۴) $cotg\sqrt{\lambda_n}=-\sqrt{\lambda_n}$

پاسخ: گزینه «۲» حل معادله‌ی $y''+\lambda y=0$ $(\lambda>0)$ را با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی آن آغاز می‌کنیم:
$$r^2+\lambda=0 \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow y=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$$
بنابراین: $y'=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. اکنون شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم:
$$\begin{cases} y(0)-y'(0)=a-b\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow a=b\sqrt{\lambda} \\ y'(1)=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$
با جایگذاری $b\sqrt{\lambda}=a$ از معادله‌ی اول در معادله‌ی دوم خواهیم داشت:
$$-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+a\cos\sqrt{\lambda}=a(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+\cos\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}=\cos\sqrt{\lambda} \Rightarrow \sqrt{\lambda}=cotg(\sqrt{\lambda})$$
پس مقادیر ویژه‌ی این معادله در تساوی $cotg(\sqrt{\lambda_n})=\sqrt{\lambda_n}$ صدق می‌کنند.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0$، $\lambda>0$ و $0<x<\pi$، با شرایط مرزی $\varphi'(0)=0$ و $\varphi(0)+\varphi(\pi)=0$ مفروض است. مقادیر ویژه توابع آن عبارت است از: $(n=1,2,3,\ldots)$

۱) $\sqrt{\lambda}=n\pi \;,\; \cos\sqrt{\lambda}x$
۲) $\sqrt{\lambda}=n \;,\; \cos\sqrt{\lambda}x$
۳) $\sqrt{\lambda}=(2n-1)\pi \;,\; \cos\sqrt{\lambda}x$
۴) $\sqrt{\lambda}=2n-1 \;,\; \cos\sqrt{\lambda}x$

پاسخ: گزینه «۴» در خودِ سؤال مشخص شده $\lambda>0$ است و برای مقادیر مثبت λ به راحتی با حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت، داریم:
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi=0 \Rightarrow \varphi(x)=k_1\cos\sqrt{\lambda}x+k_2\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$\varphi'(0)=0 \Rightarrow k_2=0 \Rightarrow \varphi(x)=k_1\cos\sqrt{\lambda}x$$
با جایگذاری $\varphi(x)$ در رابطه $\varphi(0)+\varphi(\pi)=0$ خواهیم داشت:
$$k_1+k_1\cos\sqrt{\lambda}\pi=0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi=-1 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi=(2n-1)\pi \;,\; n=1,2,3,\ldots \Rightarrow \sqrt{\lambda}=2n-1 \;,\; n=1,2,3,\ldots$$

مثال ۵: در مسأله مقدار مرزی، $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \;,\; \lambda>0 \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$، مقادیر ویژه در کدام معادله صدق می‌کنند؟ $(n=1,2,\cdots)$

۱) $cotg\sqrt{\lambda_n}=-\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n-1}$
۲) $cotg\sqrt{\lambda_n}=\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n-1}$
۳) $tg\sqrt{\lambda_n}=\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n-1}$
۴) $tg\sqrt{\lambda_n}=-\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n-1}$

پاسخ: گزینه «۳» با حل معادله‌ی $y''+\lambda y=0$ $(\lambda>0)$ با استفاده از معادله‌ی مشخصه داریم:
$$r^2+\lambda=0 \Rightarrow r^2=-\lambda \Rightarrow r=\pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow y=a\cos\sqrt{\lambda}x+b\sin\sqrt{\lambda}x$$
اکنون شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم. برای این منظور ابتدا y' را هم حساب می‌کنیم:
$$y'=-a\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$\begin{cases} y(0)-y'(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow a=b\sqrt{\lambda} \\ (a+b\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}+(b-a\sqrt{\lambda})\sin\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$

از معادله‌ی اول $a=b\sqrt{\lambda}$ را داریم که با قرار دادن آن در معادله‌ی دوم خواهیم داشت:

$$2b\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}+b(1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}=0\xrightarrow{b\neq 0}2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=-(1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\Rightarrow\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=tg\sqrt{\lambda}$$

بنابراین همه‌ی مقادیر ویژه‌ی این معادله در تساوی $\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n-1}=tg\sqrt{\lambda_n}$ صدق می‌کنند. (توجه کنید که اگر $b=0$، آن‌گاه $a=b\sqrt{\lambda}=0$ و لذا جواب بدیهی $y=0$ برای مسأله بدست می‌آید، که مطلوب ما نیست.)

مثال ۶: **مقادیر ویژه و توابع ویژه در مسأله** $\begin{cases}\frac{d}{dx}(e^xy')+\lambda e^xy=0\ ,\ 0<x<1\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$ **کدامند؟** $(n=1,2,3,\dots)$ **و** $(\lambda>\frac{1}{4})$

۱) $y_n(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sin(n\pi x),\lambda_n=(n\pi)^2+\frac{1}{4}$

۲) $y_n(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sin(n\pi x),\lambda_n=(n\pi)^2-\frac{1}{4}$

۳) $y_n(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sin(n\pi x),\lambda_n=(n\pi)^2+(-\frac{1}{4})^2$

۴) $y_n(x)=e^{-x}\sin(n\pi x),\lambda_n=(n\pi)^2+(\frac{1}{4})^2$

پاسخ: گزینه «۱» با محاسبه‌ی مشتقِ حاصل‌ضرب، معادله‌ی دیفرانسیل به صورت مقابل به دست می‌آید: $y''e^x+e^xy'+\lambda e^xy=0$

با تقسیم طرفین بر e^x معادله‌ای همگن با ضرایب ثابت خواهیم داشت: $y''+y'+\lambda y=0$

معادله‌ی مشخصه‌ی آن $r^2+r+\lambda=0$ است. $\Delta=1-4\lambda<0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\pm i\sqrt{4\lambda-1}$

پس ریشه‌ها مختلط هستند: $r=\frac{-1\pm i\sqrt{4\lambda-1}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}$

بنابراین داریم: $y=e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x)$

اکنون شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}y(0)=0\\ y(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ e^{-\frac{1}{2}}(0+B\sin\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2})=0\end{cases}\Rightarrow\sin\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}=n\pi\Rightarrow\sqrt{4\lambda-1}=2n\pi\Rightarrow\lambda=\frac{4n^2\pi^2+1}{4}=n^2\pi^2+\frac{1}{4}$$

بنابراین جواب‌های ویژه‌ی معادله و مقادیر ویژه‌ی آن عبارتند از: $y_n(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\sin(n\pi x)\ ,\ \lambda_n=(n\pi)^2+\frac{1}{4}$