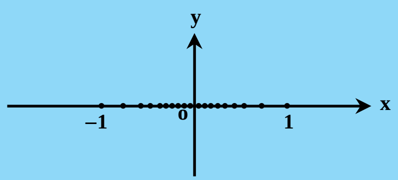
درسنامه۲: انواع نقاط تکین و محاسبه مانده

تعریف نقطه تکین

نقطه $z=z_0$ را نقطه **تکین** تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد، ولی هر **همسایگی** نقطه z_0، **شامل** نقاطی باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد. نقطه $z=z_0$ را یک نقطه **تکین تنها** برای تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در z_0 غیر تحلیلی ولی **یک همسایگی** از z_0 موجود باشد به طوری که $f(z)$ در **تمام نقاط** این همسایگی به جز خود z_0 تحلیلی باشد. به عنوان مثالی ساده نقطه $z_0=0$ برای تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ یک نقطه تکین تنها می‌باشد، چون این تابع در نقطه $z_0=0$ تحلیلی نیست ولی در **تمام نقاط** به جز صفر (یعنی در هر همسایگی محذوف z_0) تحلیلی می‌باشد.

نقطه $z_0=0$ برای تابع $f(z)=\log z$ یک نقطه تکین است، چون تابع در $z=0$ تحلیلی نیست. اما هر همسایگی نقطه z_0 **شامل** نقاطی است که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی است (مثلاً zهای روی محور حقیقی مثبت) اما این نقطه، **تکین تنها نیست**. چون در $z=0$ تابع غیر تحلیلی می‌باشد، پس می‌توانیم بگوییم نقطه تکین است؛ ولی هر همسایگی حول مبدأ مختصات که در نظر گرفته شود، بالاخره شامل نقاطی روی محور حقیقی منفی است و می‌دانیم به ازای مقادیر منفی z، تابع $\log z$ تحلیلی **نیست** و این موضوع با تعریف نقطه **تکین تنها**، مطابقت ندارد. (چون ما باید بتوانیم حداقل یک همسایگی برای $z_0=0$ پیدا کنیم، که $f(z)$ در آنجا در تمام نقاط غیر از z_0 تحلیلی باشد.)

به عنوان مثال آخر و مثالی مهم تابع $f(z)=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را در نظر بگیرید. برای این تابع نقاط تکین $z=0$ و $z=\frac{1}{n}$ ($n\neq 0$ عددی صحیح است) هستند که به ازای $z=0$، $\sin(\frac{\pi}{z})$ تعریف نشده است و به ازای $z=\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$، مخرج $f(z)$ برابر صفر می‌شود. اما این نقاط، **تکین تنها** هستند، چون حول تمام آن‌ها می‌توان یک همسایگی پیدا کرد که تابع در تمام آن نقاط تحلیلی باشد.



اما نقطه $z=0$ تکین غیرتنها است چون نمی‌توان در همسایگی آن، یک همسایگی پیدا کرد که تابع در آن‌جا شامل نقاط تکین دیگری نباشد. در واقع در این تابع کلاً تکین‌ها به سمت نقطه $z=0$ انباشته می‌شوند و به همین دلیل به این نوع تکین‌های غیر تنها، تکین‌های انباشته نیز می‌گویند.

در واقع نقطه‌ی z_0، تکین غیر تنها از نوع انباشته به حساب می‌آید، هرگاه حد دنباله‌ای از نقاط تکین برابر با z_0 شود. در مثال بالا دنباله‌ی نقاط تکین به صورت $z=\frac{1}{n}$ بوده و چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$، لذا $z_0=0$ نقطه‌ی تکین انباشته است (هر چه n بیشتر می‌شود، جملات دنباله به صفر نزدیک‌تر می‌شوند) البته هر یک از جملات دنباله همان‌طور که در بالا گفتیم نقطه‌ی تکین تنها هستند.

تذکر۱: معمولاً نقاط تکین غیر تنها (انباشته) در توابعی به‌صورت فوق و هم‌چنین در نقاط شاخه‌ای توابع رادیکالی و لگاریتمی مشاهده می‌شوند.

نکته۱: در بعضی توابع مانند $\bar{z}$، $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$، که هیچ جا تحلیلی نیستند، نقاط تکین تعریف نمی‌شوند.

تذکر۲: اگر z_0 یک نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد، در این صورت $f(z)$ حول نقطه z_0 دارای بسط لوران خواهد بود.

نکته۲: تمام نقاط تکین تنها برای تابع $f(z)$، برای توابع $\frac{1}{\sin(f(z))}$، $\frac{1}{\cos(f(z))}$، $\frac{1}{\sinh(f(z))}$ و $\frac{1}{\cosh(f(z))}$ تکین غیر تنها (انباشته) به حساب می‌آیند.

مثال۱: نقطه‌ی $z=0$ برای توابع زیر چه نوع نقطه‌ای است؟

الف) $e^{\cot g\frac{1}{z}}$ **ب)** $\sin\left(\dfrac{1}{\cos(\frac{1}{z})}\right)$

پاسخ: الف) می‌دانیم که $e^{\cot g(\frac{1}{z})}=e^{\frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}}$ است. ریشه‌های $\sin\frac{1}{z}$ نقاط غیر تحلیلی این تابع هستند.

$$\sin\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=n\pi \Rightarrow z=\frac{1}{n\pi}$$

دنباله‌ی $\frac{1}{n\pi}$ دنباله‌ای از نقاط غیر تحلیلیِ $e^{\cot g\frac{1}{z}}$ است و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}=0$. بنابراین $z=0$ یک نقطه‌ی تکین انباشته (حدی) است.

ب) در تابع $\sin\left(\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$ ریشه‌های $\cos\frac{1}{z}$ نقاط غیر تحلیلی هستند.

$$\cos\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=(2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

دنباله‌ی $\frac{2}{(2n+1)\pi}$ دنباله‌ای از نقاط غیر تحلیلی این تابع است و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}=0$. بنابراین $z=0$ یک نقطه‌ی تکین انباشته (حدی) است.

تکین برداشتنی

نقطه z_0 را یک نقطه تکین برداشتنی می‌گویند هرگاه $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد، ولی بتوان آن را طوری تعریف کرد که در z_0 تحلیلی شود. برای مثال نقطه $z_0=0$ برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z}(z\neq 0)$ یک نقطه تکین برداشتنی است چون اگر $g(z)$ را بـه صورت مقابل تعریف کنیم، داریم: $g(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z} & , z\neq 0\\ 1 & , z=0\end{cases}$

ملاحظه می‌شود که $g(z)$ در $z=0$ تحلیلی است. تعریف دیگری از تکین برداشتنی این است که به نقطه‌ای تکین برداشتنی می‌گوییم که بسط لـوران آن شامل توان منفی $z-z_0$ نباشد. (یعنی قسمت اصلی بسط لوران در آن وجود نداشته باشد.)

نکته ۳: اگر ریشه مخرج کسر، ریشه صورت کسر هم باشد و حد عبارت را در این نقطه تکین (ریشه مخرج) حساب کردیم و برابر بـا عـددی مخالف بینهایت (∞) شد، آن‌گاه آن ریشه، تکین برداشتنی تابع است.

مثال ۲: اگر $f(z)=\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$، آنگاه $z_0=0$ چه نوع تکینی برای $f(z)$ است؟

۱) تکین تنها ۲) تکین غیرتنها از نوع انباشته ۳) تکین برداشتنی ۴) تکین غیرتنها از نوع انشعابی

پاسخ: گزینه «۳» در نگاه اول به نظر می‌رسد $z=0$ یک نقطه‌ی شاخه‌ای است (بـه دلیـل وجـود $\sqrt{z}$). بـرای امتحـان کـردن ایـن حـدس فـرض کنیم $z=re^{i\theta}$ باشد. اگر یک گردش کامل حول صفر انجام دهیم خواهیم داشت $z=re^{i(\theta+2\pi)}$. حالا باید ببینیم آیـا مقـدار $\arg f(z)$ در ایـن دو حالـت، تغییری می‌کند یا خیر؟

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow f(z)=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}\quad,\quad z=re^{i(\theta+2\pi)}\Rightarrow f(z)=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi}}=\frac{\sin(-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sin(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})}{\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

بنابراین با یک گردش کامل حول صفر، $f(z)$ هیچ تغییری نکرده است. پس $z=0$ نقطـه‌ی شـاخه‌ای نیسـت. پـس ماننـد سـایر سـؤالات مـی‌تـوان گفـت $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1$ و لذا $z_0=0$ یک تکین برداشتنی برای تابع $f(z)$ است.

تکین اساسی

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **نامتناهی** از توان‌های منفی $z-z_0$ باشد، آنگاه z_0 را نقطه تکین اساسی می‌نامیم. برای مثـال توابـع $\sin\frac{1}{z}$ و $e^{\frac{1}{z}}$ دارای نقطـه تکین اساسی در $z=0$ هستند.

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^3}\right)+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z^5}\right)-\cdots\qquad\text{و}\qquad e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)+\cdots$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر دو تابع شامل جملاتی با توان‌های منفی z هستند و تعداد این جملات نامتناهی است.

مثال ۳: کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح <u>نیست</u>؟

۱) نقطه‌ی $z=0$ برای تابع $\cos(z^2+z^{-2})$ تکین اساسی است.

۲) نقاط $z=-1\pm i$ تکین‌های غیر تنها برای تابع $tg^{-1}(z^2+2z+2)$ هستند (لگاریتم مختلط با شرط $0<\theta\leq 2\pi$ مدنظر است.)

۳) نقطه‌ی $z=0$ تکین رفع شدنی برای تابع $\frac{z}{e^z-1}$ است.

۴) نقطه‌ی $z=0$، تکین برداشتنی برای تابع $z^2e^{-z^2}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» در گزینه‌ی (۴) تابع $f(z)=z^2e^{-z^2}$ در $z=0$ تحلیلی است زیرا $z^2e^{-z^2}$ تابعی تام است که همه جـا تحلیلـی اسـت و بنـابراین گزینه‌ی (۴) صحیح نیست. با وجود این سایر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم. برای بررسی گزینه‌ی (۱) داریم:

$$\cos(z^2+z^{-2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^{2k}\frac{1}{z^{2n-2k}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\binom{2n}{k}\frac{z^{2k}}{z^{2n-2k}}$$

بنابراین $z=0$ تکین اساسی آن است. زیرا تعداد توان‌های منفی z در این بسط نامتناهی است. پس این گزینـه درسـت اسـت. در گزینـه‌ی (۳) نیـز $z=0$ ریشه‌ی مخرج است. اگر بسط‌های مک‌لورن را بنویسیم می‌بینیم که این نقطه، یک تکین رفع شدنی است:

$$f(z)=\frac{z}{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots-1}=\frac{z}{z(1+\frac{z}{2!}+\cdots)}$$

بررسی گزینه‌ی (۲) وقت‌گیر است، اما با توجه به آن که $f(z)=\frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z^2+2z+2}{i-z^2-2z-2}\right)$ است و روی بریدگی شاخه‌ای‌اش نقاط غیر تحلیلیِ غیر تنها دارد، خواهید دید که این گزینه هم درست است. طبق صورت سؤال نیم‌خط $\theta=0$ یعنی قسمت مثبت محور x ها بریدگی شاخه‌ای Lnw است. اگـر $Re\,w\geq 0$ و $Im\,w=0$ باشد، روی بریدگی شاخه‌ای قرار دارد. به ازای $z=-1+i$ داریم:

$$w=\frac{i+z^2+2z+2}{i-z^2-2z-2}=\frac{i-2i-2+2i+2}{i+2i+2-2i-2}=1$$

بنابراین $Re\,w\geq 0$ و $Im\,w=0$ است، پس $z=-1+i$ روی بریدگی شاخه‌ای قرار دارد. پس یک نقطه‌ی غیر تحلیلی اما غیر تنها است.

قطب

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **متناهی** از توان‌های منفی $z-z_0$ باشد، آنگاه z_0 را یک قطب برای $f(z)$ می‌نامیم.

تعیین مرتبه قطب

با محاسبه $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ در صورتی که $m=1,2,3,\ldots$ باشد، مقداری از m که به ازای آن برای اولین بار حد فوق برابر مقداری متناهی (و البته مخالف صفر) شود را مرتبه قطب می‌نامیم. به عبارت دیگر در بسط لوران تابع، بزرگترین توان m در عبارت $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ را مرتبه قطب می‌نامیم. اگر $m=1$ باشد قطب را مرتبه اول و یا ساده می‌نامیم. برای مثال تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-2)^5}+\frac{3}{(z-2)^2}$ یک قطب ساده در $z=0$ و یک قطب مرتبه ۵ در $z=2$ دارد.

مثال ۴: در مورد تابع $f(z)=\frac{z+1}{1-\cos z}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $z=0$ قطب مرتبه‌ی دوم تابع است.
۲) $z=0$ قطب مرتبه اول تابع است.
۳) $z=0$ نقطه تکین اساسی تابع است.
۴) $z=0$ نقطه تکین برداشتنی تابع است.

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از فرمول و محاسبه حد داریم:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^m\frac{1+z}{1-\cos z}=\frac{0}{0}$$

اگر $m=1$ داریم:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+z^2}{1-\cos z}\right)\overset{HOP}{=\!=}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1+2z}{\sin z}\right)=\frac{1}{0}=\infty$$

چون حد برابر بی‌نهایت (نامتناهی) شد لذا قطب مرتبه اول نیست.

به ازای $m=2$ داریم:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^2\frac{1+z}{1-\cos z}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{z\to 0}\frac{z^2(1+z)}{2\sin^2\frac{z}{2}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2(1+z)}{2\times(\frac{z}{2})^2}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{1+z}{2\times\frac{1}{4}}=2$$

چون حد مقداری متناهی دارد، لذا مرتبه‌ی قطب ۲ است.

توضیح: البته در صفحات بعدی روش‌های متنوع و ساده‌تری برای محاسبه مرتبه‌ی قطب ارائه می‌شود.

نکته۴: هرگاه z_0 یک نقطه‌ی تکین برداشتنی برای تابع باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ برابر صفر می‌شود.

نکته۵: قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$، نقطه تکین اساسی برای توابع $\sin(\frac{1}{f(z)})$ و $\cos(\frac{1}{f(z)})$، $e^{\frac{1}{f(z)}}$، $\sinh(\frac{1}{f(z)})$، $\cosh(\frac{1}{f(z)})$ به حساب می‌آیند.

مثال ۵: در نقطه $z=1$ تابع $f(z)=e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$ دارای:

۱) یک قطب مرتبه دوم است.
۲) یک نقطه تکین اساسی است.
۳) یک نقطه تکین برداشتنی است.
۴) قطب مرتبه اول است.

پاسخ: گزینه «۲» بسط لوران را برای تابع می‌نویسیم:

$$e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}=1-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\cdots$$

ملاحظه می‌گردد که $z=1$ یک نقطه تکین اساسی است.

مثال ۶: تابع $f(z)=\sin\frac{1}{z}-\cos\frac{1}{z}$:

۱) در $z=0$ تکینی اساسی دارد.
۲) در $z=0$ قطب دارد.
۳) در $z=0$ تکینی برداشتنی دارد.
۴) در همسایگی سفته (محذوف) $z=0$ کراندار است.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم در توابعی به صورت $\sin\frac{1}{f(z)}$ و $\cos\frac{1}{f(z)}$، قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$ تکین اساسی برای توابع مذکور ایجاد می‌کنند، پس در تابع داده شده $z=0$ نقطه تکین اساسی است.

در مورد گزینه‌ی (۴) دقت کنید که طبق تعریف داریم:

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{e^{\frac{1}{z}}-e^{-\frac{1}{z}}}{2i}$$

حالا اگر $z\to 0$ میل کند، مثلاً روی مسیر $x\to 0^+$ و $y=0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{z\to 0}\sin\frac{1}{z}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{2i}=\frac{e^{\infty}-e^{-\infty}}{2i}=\infty$$

به همین ترتیب $\cos\frac{1}{z}$ نیز در همسایگیِ محذوف صفر، بی‌کران است. در واقع هر تابع مختلط $f(z)$ در همسایگی نقطه‌ی تکین اساسی‌اش، بی‌کران است.

دسته‌بندی نقاط تکین

برای جمع‌بندی بحث نقاط تکین در این قسمت، دسته‌بندی نقاط تکین را ارائه کرده‌ایم. اگر نقطه‌ای مانند $z_۰$ نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ باشد، آنگاه می‌توان دسته‌بندی زیر را برای آن در نظر گرفت:

$z_۰$ نقطه تکین $f(z)$ است. ⇐
- $z_۰$ نقطه‌ی تکین **غیر** تنهاست →
  - یا تکین انباشته است.
  - یا تکین انشعابی است (مثل نقطه‌ی شاخه‌ای و نقاط روی شاخه)
- $z_۰$ نقطه‌ی تکین تنهاست →
  - یا $z_۰$ قطب $f(z)$ است.
  - یا $z_۰$ تکین اساسی است.
  - یا $z_۰$ تکین رفع شدنی است.

صفر تابع

اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و $z_۰$ متعلق به این حوزه باشد، آنگاه $z_۰$ را صفر تابع می‌نامیم هرگاه $f(z_۰)=۰$ باشد.

مرتبه صفر: اگر $z_۰$ یک صفر تابع $f(z)$ باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن $f^{(n)}(z_۰)\neq ۰$ باشد، را مرتبه صفر می‌نامیم.

برای مثال تابع $f(z)=z(e^z-۱)$ در $z=۰$ دارای صفر مرتبه دوم است، چون $f(۰)=f'(۰)=۰$ و $f''(۰)=۲\neq ۰$، یعنی مشتق دوم آن مخالف صفر است.

یکی از روش‌های تعیین مرتبه صفر این است که حاصل $\lim\limits_{z\to z_۰}\frac{f(z)}{(z-z_۰)^n}$ را به دست می‌آوریم و اولین مقدار n، که به ازای آن مقدار این حد متناهی و مخالف صفر شد را به عنوان مرتبه صفر در نظر بگیریم.

نکته ۶: نقطه $z_۰$ قطب مرتبه nام $(n\geq ۱)$ تابع $f(z)$ می‌باشد، اگر صفر مرتبه nام تابع $g(z)=\frac{۱}{f(z)}$ باشد. از این تعریف در مواقعی که از تعریف‌های قبلی نمی‌توانیم مرتبه قطب را تعیین کنیم، استفاده می‌کنیم.

نکته ۷: تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ مفروض است. (با فرض اینکه $P(z)$ و $Q(z)$ در همه جا تحلیلی باشند.) اگر $z_۰$ صفر مرتبه‌ی n تابع $P(z)$ و صفر مرتبه‌ی m تابع $Q(z)$ باشد آنگاه:

الف) با شرط $n\geq m$، $z_۰$ یک صفر مرتبه‌ی $(n-m)$ام تابع $f(z)$ و به عبارت دیگر $z_۰$ تکین رفع شدنی تابع f است. (مثلاً $z=۰$ برای تابع $\frac{\sin^۴ z}{z^۳}$ تکین برداشتنی است.)

ب) با شرط $m>n$، $z_۰$ یک قطب مرتبه‌ی $(m-n)$ام تابع $f(z)$ است.

نکته ۸: هرگاه توابع $f(z)$ و $g(z)$ دارای ریشه‌ی مشترک $z_۰$ باشند، به طوری که $z_۰$ ریشه‌ی مرتبه‌ی n برای f و ریشه‌ی مرتبه‌ی m برای g باشد. $(m<n)$ آن‌گاه با شرط A و B مخالف صفر داریم:

۱) $Af(z)+Bg(z)$ دارای صفری از مرتبه‌ی m در $z_۰$ است.

۲) $f(z)g(z)$ دارای صفری از مرتبه‌ی $m+n$ در $z_۰$ است.

نکته ۹: توجه داشته باشید که نقطه‌ای مانند $z=z_۰$ ممکن است برای تابع $f(z)$ هم نقطه‌ی تکین اساسی باشد و هم قطب (یا صفر مرتبه n) (البته به شرطی که $f(z_۰)=۰$ تعریف شود) در چنین حالتی در کل باید نقطه‌ی $z=z_۰$ را نقطه‌ی تکین اساسی برای تابع $f(z)$ در نظر بگیریم.

به عنوان مثال: تابع $f(z)=\begin{cases} z^۳e^{\frac{۱}{z}} & , \quad z\neq ۰ \\ ۰ & , \quad z=۰\end{cases}$ که در آن نقطه $z=۰$ هم تکین اساسی است و هم صفر مرتبه‌ی ۳ است که در کل باید تکین اساسی در نظر گرفته شود.

مثال ۷: **نقطه $z=۰$ برای تابع $f(z)=\frac{۱}{۲+z^۲-۲\cosh z}$، قطب مرتبه چندم می‌باشد؟**

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

پاسخ: گزینه «۴» با تعریف $g(z)=\frac{۱}{f(z)}=۲+z^۲-۲\cosh z$، سعی می‌کنیم مرتبه صفر تابع $g(z)$ را حساب کنیم. برای این منظور باید از تابع $g(z)$ تا مرتبه‌ای مشتق بگیریم تا مقدار مشتق آن در نقطه $z=۰$ مخالف صفر شود:

$$g(z)=۲+z^۲-۲\cosh z \Rightarrow g(۰)=۰$$

$$g'(z)=۲z-۲\sinh z \Rightarrow g'(۰)=۰ \quad , \quad g''(z)=۲-۲\cosh z \Rightarrow g''(۰)=۰$$

$$g'''(z)=-۲\sinh z \Rightarrow g'''(۰)=۰ \quad , \quad g^{(۴)}(z)=-۲\cosh z \Rightarrow g^{(۴)}(۰)=-۲\neq ۰$$

پس $z=۰$ قطب مرتبه چهارم تابع $f(z)$ می‌باشد.