درسنامه۴: محاسبه‌ی انتگرال توابع حقیقی و برخی سری‌های عددی به کمک قضیه مانده‌ها

در این درسنامه به بررسی یکی از زیباترین کاربرد نظریه مانده‌ها، یعنی محاسبه‌ی انتگرال‌های معین برخی توابع حقیقی می‌پردازیم. این روش‌ها برای تمام انتگرال‌های حقیقی قابل استفاده نیستند، اما به هر حال بسیاری از این انتگرال‌ها را می‌توان با این روش‌ها حل کرد که ما آن‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم:

۱ـ محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها با توجه به مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و جایگزینی $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \quad , \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

که در نهایت انتگرال به صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{I}=\oint_{|z|=1}\mathbf{f(z)dz}$$

مثال۱: حاصل انتگرال $\mathbf{I}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{5+3\sin\theta}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۱» با جایگزینی $\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$ و $d\theta=\frac{1}{iz}dz$ داریم:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{5+\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})}(\frac{dz}{iz})=\int_{|z|=1}\frac{1}{5iz+\frac{3}{2}(z^2-1)}dz=\int_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$$

با به دست آوردن ریشه‌های مخرج داریم:

$$z=\frac{-10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}=\frac{-10i\pm 8i}{6}=-3i \ , \ \frac{-i}{3}$$

فقط $z=-\frac{i}{3}$ درون دایره‌ی $|z|=1$ قرار دارد، پس با فرض $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{3}} f(z)=\frac{p(z)}{q'(z)}\bigg|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{2}{6z+10i}\bigg|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{1}{4i}$$

$$I=2\pi i\times\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$$

مثال۲: حاصل انتگرال $\mathbf{I}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{d\theta}}{\mathbf{3-2\cos\theta+\sin\theta}}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ : گزینه «۱» با جایگزین کردن مقادیر گفته شده داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{3-(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=2\times 2\pi i[\operatorname{Res}(\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i})]$$

با صفر قرار دادن مخرج، دو قطب $z_1=\frac{2-i}{5}$ و $z_2=2-i$ حاصل می‌شود که فقط $z_1=\frac{2-i}{5}$ در داخل دایره $|z|=1$ قرار دارد لذا داریم:

$$I=4\pi i\times\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}=4\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{1}{2(1-2i)z+6i}\Rightarrow I=4\pi i\times\frac{1}{2(1-2i)\times\frac{2-i}{5}+6i}=\pi$$

مثال ۳: حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 2π ۳) $2\pi i$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» با جایگزینی $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ داریم:

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\oint\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{2\sqrt{2}z-(z^2+1)}{2z}}=\frac{1}{i}\oint\frac{2dz}{2\sqrt{2}z-z^2-1}=\frac{1}{i}\oint\frac{-2dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$$

با صفر قرار دادن مخرج کسر، قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^2-2\sqrt{2}z+1=0\Rightarrow z=\sqrt{2}+1\ ,\ z=\sqrt{2}-1$$

که از بین دو قطب فوق فقط $z=\sqrt{2}-1$ درون دایره $|z|=1$ واقع است، لذا داریم:

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}f(z)=2\pi i\operatorname*{Rez}_{z=\sqrt{2}-1}\left[\frac{-2}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\right]=-4\pi i\times\frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\Big|_{z=\sqrt{2}-1}=-4\pi i\left(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)-2\sqrt{2}}\right)=2\pi i$$

دقت کنید پشت انتگرال ضریب $\frac{1}{i}$ داشتیم، پس $I=\frac{1}{i}(2\pi i)=2\pi$.

۲ـ محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

فرض کنیم $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای هستند و درجه مخرج **حداقل دو درجه** از درجه صورت بیشتر است.

در این صورت حاصل انتگرال به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i$ (مجموع مانده‌های $f(z)$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند.)

یعنی در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت فوق، اول تمام قطب‌های $f(z)$ را حساب می‌کنیم، بعد فقط مانده تابع را در قطب‌هایی که **بالای محور حقیقی** قرار دارند حساب کرده و با هم جمع و در $2\pi i$ ضرب می‌کنیم.

تذکر ۱: اگر تابع $f(z)$ دقیقاً **روی محور حقیقی** قطبی داشته باشد، باید مانده مربوط به آن را به جای $2\pi i$ در πi ضرب کنیم.

مثال ۴: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۳» تابع دارای قطب‌های $z=\pm 2i$ و $z=\pm i$ می‌باشد که فقط i و $2i$ در نیم‌صفحه فوقانی قرار دارند. با فرض $p(z)=z^2-1$ و $q(z)=z^4+5z^2+4$ خواهیم داشت:

$$I=2\pi i\left[\frac{p(i)}{q'(i)}+\frac{p(2i)}{q'(2i)}\right]=2\pi i\left[\frac{(i)^2-1}{4(i)^3+10(i)}+\frac{(2i)^2-1}{4(2i)^3+10(2i)}\right]\Rightarrow I=2\pi i\left[\frac{-2}{-4i+10i}+\frac{-5}{-32i+20i}\right]=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۵: حاصل انتگرال $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به بازه‌ی انتگرال امکان استفاده از فرمول وجود ندارد، اما با توجه به زوج بودن تابع می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$$

حالا می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم. برای این منظور لازم است مانده $f(z)=\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی هستند، حساب کنیم:

$$z^4+5z^2+4=(z^2+4)(z^2+1)=0\quad\Rightarrow\begin{cases}z=\pm 2i\\ z=\pm i\end{cases}\xrightarrow{\text{قطب‌های بالای محور حقیقی}}z=i,z=2i$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{مانده در } z=i=\frac{2z^2-1}{4z^3+10z}\Big|_{z=i}=\frac{2(i)^2-1}{4(i)^3+10(i)}=\frac{-3}{6i}=-\frac{1}{2i}\\&\text{مانده در } z=2i=\frac{2z^2-1}{4z^3+10z}\Big|_{z=2i}=\frac{2(2i)^2-1}{4(2i)^3+10(2i)}=\frac{-9}{-12i}=\frac{3}{4i}\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\left(\frac{3}{4i}-\frac{1}{2i}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۶: حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» قطب‌های تابع $z=\pm i$ و $z=\pm 3i$ می‌باشند، که فقط $z=i$ و $z=3i$ بالای محور حقیقی هستند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}=\frac{1}{16i}\\ \lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)}=-\frac{1}{48i}\end{cases}\Rightarrow I=2\pi i(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i})=2\pi i(\frac{3-1}{48i})=\frac{\pi}{12}$$

مثال ۷: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^4}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{32}$ ۳) $\frac{\pi}{16}$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۳» تابع $f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^4}$ در $z=\pm i$ دارای قطب است. مانده‌ی f را در $z=i$ که قطب مرتبه‌ی ۴ است و بالای محور افقی قرار دارد، حساب می‌کنیم.

$$Res(f,i)=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}[(z-i)^4\frac{z^2}{(z-i)^4(z+i)^4}]_{z=i}=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}[\frac{z^2}{(z+i)^4}]_{z=i}$$

اگر از $\frac{z^2}{(z+i)^4}$، سه بار مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$Res(f,i)=\frac{1}{6}[-\frac{24}{(z+i)^5}+\frac{120z}{(z+i)^6}-\frac{120z^2}{(z+i)^7}]_{z=i}=\frac{-i}{32}$$

در نتیجه داریم:

$$I=2\pi i\times\frac{-i}{32}=\frac{\pi}{16}$$

مثال ۸: حاصل $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مانده‌های تابع $f(z)=\frac{1}{z^6+1}$ را به دست می‌آوریم: برای این کار باید ریشه‌های ششم عدد ۱- را حساب کنیم.

$$z^6+1=0\Rightarrow z^6=-1\xrightarrow{-1=e^{i\pi}}z=1e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{6})}$$

به ازای مقادیر مختلف k از صفر تا ۵ داریم:

$$z=e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{3\pi}{6}},\ e^{i\frac{5\pi}{6}},e^{i\frac{7\pi}{6}},e^{i\frac{9\pi}{6}},e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

از بین قطب‌های فوق فقط قطب‌های $e^{i\frac{\pi}{6}}$، $e^{i\frac{3\pi}{6}}$ و $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ بالای محور حقیقی قرار دارند (به زوایای $\frac{\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ که در ربع اول و دوم قرار دارند، دقت کنید) خب حالا مانده تابع را در این سه نقطه حساب می‌کنیم. با توجه به ضابطه f یعنی $f(z)=\frac{1}{z^6+1}$، بهترین راه استفاده از روش سوم می‌باشد. اگر از مخرج مشتق بگیریم به شکل $\frac{1}{6z^5}$ می‌شود، پس داریم:

$$e^{i\frac{\pi}{6}}\ \text{مانده در}=\frac{1}{6(e^{i\frac{\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{6}[\cos(\frac{-5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6})]=\frac{1}{6}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})$$

$$e^{i\frac{3\pi}{6}}\ \text{مانده در}=\frac{1}{6(e^{i\frac{3\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{2}}=\frac{1}{6}[\cos(\frac{-5\pi}{2})+i\sin(\frac{-5\pi}{2})]=\frac{1}{6}(0-i)$$

$$e^{i\frac{5\pi}{6}}\ \text{مانده در}=\frac{1}{6(e^{i\frac{5\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{25\pi}{6}}=\frac{1}{6}[\cos(-\frac{25\pi}{6})+i\sin(\frac{-25\pi}{6})]=\frac{1}{6}[\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}]$$

$$\text{مجموع مانده‌ها}=\frac{1}{6}[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}+0-i+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}]=-\frac{i}{3}\Rightarrow I=2\pi i\times(-\frac{i}{3})=\frac{2\pi}{3}$$

دقت کنید، حاصل فوق برابر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$، می‌باشد و چون بازه انتگرال‌گیری در صورت تست از صفر تا ∞ است، لذا باید عبارت فوق در عدد $\frac{1}{2}$ ضرب شود، یعنی $I=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

مثال ۹: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه حاصل انتگرال $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n}(n!)}$ ۲) $\frac{\pi(2n!)}{2^{2n+1}(n!)^2}$ ۳) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n}(2n!)}$ ۴) $\frac{\pi(n!)}{2^{2n+1}(2n!)}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بازه‌ی انتگرال امکان استفاده از فرمول وجود ندارد، اما با تغییر بازه‌ی آن (با توجه به زوج بودن تابع زیر انتگرال می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم، بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

کافی است مانده تابع $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ در قطب‌های بالای محور حقیقی تعیین شوند. تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد، $z=i$ می‌باشد، لذا با توجه به این که $z=i$ قطب مرتبه‌ی **$(n+1)$ام** است، داریم:

$$\text{مانده در } z=i = \frac{1}{(n+1-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{(n+1)-1}}{dz^{(n+1)-1}}[(z-i)^{n+1}(\frac{1}{(z-i)^{n+1}(z+i)^{n+1}})]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}]$$

چند بار مشتق می‌گیریم تا بتوانیم به یک ضابطه‌ی کلی در مورد حاصل مشتق nام برسیم:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[\frac{-(n+1)}{(z+i)^{n+2}}]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}[\frac{(n+1)(n+2)}{(z+i)^{n+3}}]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}[\frac{-(n+1)(n+2)(n+3)}{(z+i)^{n+4}}]$$

به نظر می‌رسد فرمول کلی مشتق به صورت زیر باشد:

$$=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{(z+i)^{n+n+1}}]=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}{(2i)^{2n+1}}]=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{(2i)^{2n+1}}]$$

برای این که بتوانیم عبارت صورت کسر بالا را به صورت $(2n)!$ بنویسیم، لازم است جملات قبل از $(n+1)$ نیز اضافه شود، بنابراین در صورت و مخرج کسر عبارت $1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$ را ضرب می‌کنیم.

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n\overbrace{1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)}^{(2n)!}}{[1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n](2i)^{2n+1}}]$$

عبارتی که ضرب کردیم، همان $n!$ بود و لذا در مخرج $n!$ داریم بنابراین عبارت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{1}{n!}[\frac{(-1)^n(2n)!}{(2i)^{2n+1}n!}]=\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2(2i)^{2n+1}}$$

$$I=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i)^{2n+1}})]=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(i^2)^n i})]=\frac{1}{2}[2\pi i(\frac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2.2^{2n+1}.(-1)^n i})]=\frac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

توضیح: با عرض خسته نباشید از حل این مثال به اطلاع می‌رسانم، چون هر از گاهی بعضی از طراحان که آزمون‌های تستی را با امتحانات پایان ترم اشتباه می‌گیرند، از این نوع سؤالات طرح می‌کنند، ما هم این مثال را آوردیم تا با حل این‌گونه سؤالات نیز آشنا شوید. (البته به عنوان روش ساده‌تر می‌توانید در صورت سؤال به جای n، عددی مناسب قرار دهید و در گزینه‌ها هم همان عدد را قرار دهید و انتگرال ساده‌تری را بررسی کنید.)

۳ـ محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin axdx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos axdx$

فرض کنیم $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند و درجه مخرج **حداقل یک درجه** از درجه صورت بیشتر و a عددی حقیقی و بزرگتر از صفر است. در این صورت حاصل انتگرال به صورت زیر قابل محاسبه است:

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos axdx=\mathrm{Re}[2\pi i$ **(مجموع مانده‌های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند)**$]$

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin axdx=\mathrm{Im}[2\pi i$ **(مجموع مانده‌های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند)**$]$

تذکر ۲: اگر تابع $f(z)$، **دقیقاً روی محور حقیقی** قطبی داشته باشد، باید مانده مربوط به آن را به جای $2\pi i$ در πi ضرب کنیم.

مثال ۱۰: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3e^3}$　۲) $\frac{\pi}{3e^6}$　۳) $\frac{\pi}{9e^3}$　۴) $\frac{\pi}{9e^6}$

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال فوق کافی است مانده تابع $\frac{e^{2iz}}{z^2+9}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند، حساب کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx=\operatorname{Re}[2\pi i\Sigma\operatorname{Res}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}]=\operatorname{Re}[2\pi i\operatorname{Res}_{z=3i}\frac{e^{2iz}}{z^2+9}]=\operatorname{Re}\Big[[2\pi i\frac{e^{2iz}}{z+3i}]_{z=3i}\Big]=\pi i.\frac{e^{-6}}{3i}=\frac{\pi}{3e^6}$$

مثال ۱۱: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(\cos 1-\sin 1)}{e}$　۲) $\frac{2\pi(\sin 1+\cos 1)}{e}$　۳) $\frac{\pi(\sin 1+\cos 1)}{e}$　۴) $\frac{2\pi(\cos 1-\sin 1)}{e}$

پاسخ: گزینه «۳» تابع $f(z)$ را به صورت $f(z)=\frac{z}{z^2+2z+2}$ تعریف می‌کنیم. با صفر قرار دادن عبارت مخرج کسر قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^2+2z+2=0\Rightarrow(z+1)^2+1=0\Rightarrow(z+1)^2=-1=i^2\Rightarrow z+1=\pm i\Rightarrow z=-1\pm i$$

از دو قطب فوق فقط $z=-1+i$ بالای محور حقیقی قرار دارد، پس باید مانده تابع $f(z)e^{iz}$ را در این نقطه حساب کنیم. استفاده از روش سوم محاسبه مانده برای این تست مناسب‌تر است. می‌دانیم باید به جای تمام zهای صورت و همچنین zهای تابع مشتق مخرج $-1+i$ قرار دهیم:

$$z=-1+i \text{ مانده در } =\frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{2(-1+i)+2}=\frac{(-1+i)e^{(-1-i)}}{2i}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } i \text{ ضرب می‌کنیم}} z=-1+i\text{ مانده در }=\frac{-(-i-1)e^{(-1-i)}}{2}$$

$$\Rightarrow z=-1+i\text{ مانده در }=(\frac{(i+1)e^{-1}}{2})e^{-i}=\frac{i+1}{2e}[\cos(-1)+i\sin(-1)]=\frac{i}{2e}\cos 1+\frac{1}{2e}\cos 1+\frac{1\times\sin 1}{2e}+\frac{-i}{2e}\sin 1$$

همان‌طور که گفتیم باید این عبارت را در $2\pi i$ ضرب کنیم و بعد قسمت موهومی آن را به دست بیاوریم. با ضرب در $2\pi i$ جمله‌های دوم و سوم قسمت موهومی به حساب خواهند آمد، (که اتفاقاً همین قسمت مدنظر ماست.) چون وقتی $2\pi i$ در جمله‌های اول و چهارم ضرب شود آن‌ها، به عنوان قسمت حقیقی عبارت محسوب خواهند شد. پس حاصل انتگرال برابر با مقدار مقابل می‌شود:

$$I=\frac{2\pi\cos 1}{2e}+\frac{2\pi\sin 1}{2e}=\frac{\pi}{e}(\sin 1+\cos 1)$$

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{x^4+5x^2+4}dx$ برابر کدام گزینه است؟ $(\omega>0)$

۱) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$　۲) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$　۳) $\frac{\pi}{4}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$　۴) $\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}+e^{-2\omega})$

پاسخ: گزینه «۲» برای تابع فوق $f(z)=\frac{1}{z^4+5z^2+4}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا قطب‌های تابع را حساب می‌کنیم:

$$z^4+5z^2+4=0\Rightarrow(z^2+1)(z^2+4)=0\Rightarrow z=\pm i\ ,z=\pm 2i$$

حالا کافیست مانده $\frac{e^{i\omega z}}{z^4+5z^2+4}$، در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب شود:

$$z=i\text{ مانده در }=\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\Big|_{z=i}=\frac{e^{i\omega(i)}}{4(i)^3+10(i)}=\frac{e^{-\omega}}{6i}$$

$$z=2i\text{ مانده در }=\frac{e^{i\omega z}}{4z^3+10z}\Big|_{z=2i}=\frac{e^{i\omega(2i)}}{4(2i)^3+10(2i)}=-\frac{e^{-2\omega}}{12i}$$

$$\Rightarrow I=\operatorname{Re}[2\pi i(\frac{e^{-\omega}}{6i}-\frac{e^{-2\omega}}{12i})]=\frac{\pi}{6}(2e^{-\omega}-e^{-2\omega})$$

مثال ۱۳: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3\pi e^{-2}}{16}$　۲) $\frac{3\pi e^{-2}}{32}$　۳) $\frac{-3\pi e^{-2}}{16}$　۴) $\frac{-3\pi e^{-2}}{32}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به کران انتگرال که از صفر تا بی‌نهایت است، ابتدا باید بازه انتگرال را به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}$ تبدیل کنیم، چون تابع زیر انتگرال زوج است این موضوع امکان‌پذیر است و لذا داریم:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$$

برای محاسبه این انتگرال باید مانده $\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$ را در قطب‌های بالای محور حقیقی حساب کنیم. تنها قطب تابع که بالای محور حقیقی قرار دارد $z = 2i$ می‌باشد و لذا داریم:

$$z = 2i \text{ مانده در } = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{iz}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right]' = \lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2 - 2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4} = \frac{ie^{i(2i)}(2i+2i)^2 - 2(2i+2i)e^{i(2i)}}{(2i+2i)^4}$$

$$= \frac{e^{-2}(-16i) - 2(4i)e^{-2}}{4^4} = \frac{(-24i)e^{-2}}{16\times 16} = -\frac{3ie^{-2}}{32}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\left(\frac{-3ie^{-2}}{32}\right)\right] \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi e^{-2}}{16}\right) \Rightarrow I = \frac{3\pi e^{-2}}{32}$$

مثال ۱۴: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(3x)}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۲) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}+e^{-3\sqrt{3}})$ ۳) $\frac{\pi}{4}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$ ۴) $\frac{\pi}{2}(e^{-3}-e^{-3\sqrt{3}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به تابع زیر انتگرال باید مانده تابع $\frac{ze^{i3z}}{(z^2+3)(z^2+1)}$ را در قطب‌های آن (قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند) حساب کنیم. قطب‌های بالای محور حقیقی فقط $z=\sqrt{3}i$ و $z = i$ هستند، لذا داریم:

$$z = i \text{ مانده در } = \left.\frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\right|_{z=i} = \frac{ie^{i3(i)}}{2i(i^2+1)+2i(i^2+3)} = \frac{ie^{-3}}{4i} = \frac{e^{-3}}{4}$$

$$z = \sqrt{3}i \text{ مانده در } = \left.\frac{ze^{i3z}}{2z(z^2+1)+2z(z^2+3)}\right|_{z=\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}ie^{i3(i\sqrt{3})}}{2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+1)]+2(i\sqrt{3})[(i\sqrt{3})^2+3]} = \frac{\sqrt{3}ie^{-3\sqrt{3}}}{2i\sqrt{3}(-2)} = \frac{e^{-3\sqrt{3}}}{-4}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر مقدار زیر است:

$$I = \mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{4} - \frac{e^{-3\sqrt{3}}}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}(e^{-3} - e^{-3\sqrt{3}})$$

مثال ۱۵: حاصل $I = \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{37\pi}{48e}$ ۲) $\frac{37\pi}{96e}$ ۳) $\frac{37\pi}{24e}$ ۴) $\frac{37\pi}{12e}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا باید مانده‌ی تابع $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^4}$ را در $z = i$ که بالای محور حقیقی است تعیین کنیم. این نقطه یک قطب مرتبه‌ی ۴ است. بنابراین داریم:

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left[(z-i)^4\frac{e^{iz}}{(z-i)^4(z+i)^4}\right]_{z=i} = \frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^4}\right]_{z=i}$$

با سه بار مشتق‌گیری از این عبارت داریم:

$$Q(z) = (z+i)^{-4}e^{iz} \Rightarrow Q'(z) = e^{iz}[i(z+i)^{-4} - 4(z+i)^{-5}] \Rightarrow Q''(z) = e^{iz}[-(z+i)^{-4} - 4i(z+i)^{-5} - 4i(z+i)^{-5} + 20(z+i)^{-6}]$$

$$\Rightarrow Q^{(3)}(z) = e^{iz}[-i(z+i)^{-4} + 4(z+i)^{-5} + 4(z+i)^{-5} + 20i(z+i)^{-6} + 4(z+i)^{-5} + 20i(z+i)^{-6} + 20i(z+i)^{-6} - 120(z+i)^{-7}]$$

با جایگذاری $z = i$ مقدار مشتق سوم، $-\frac{74}{32}e^{-1}i$ به دست می‌آید. در نتیجه

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{6}Q^{(3)}(i) = \frac{1}{6}\times\frac{-74}{32}ie^{-1}$$

در نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^4}dx = 2\pi i\times\frac{-74i}{6\times 32}e^{-1} = \frac{74}{96}\pi e^{-1}$$

و در نهایت با نصف کردن جواب و محاسبه‌ی بخش حقیقی آن داریم:

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^4}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^4}dx = \frac{1}{2}\times\frac{74}{96}\pi e^{-1} = \frac{37}{96}\pi e^{-1}$$

مثال ۱۶: در حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^4 x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ ، ضریب e^{-8} برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi}{6}$	۲) $-\frac{\pi}{24}$	۳) $-\frac{\pi}{12}$	۴) $-\frac{\pi}{48}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به توان ۴ برای $\cos x$، واضح است استفاده از فرمول گفته شده امکان‌پذیر نیست، چون همان طور که گفتیم فرم کسینوس باید به صورت $\cos ax$ باشد. برای این منظور از رابطه‌ی $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ، کمک می‌گیریم:

$$\cos^4 x=(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4=\frac{1}{2^4}[(e^{ix}+e^{-ix})^2]^2=\frac{1}{16}([e^{2ix}+e^{-2ix}+2(e^{ix})(e^{-ix})]^2$$

$$=\frac{1}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)^2=\frac{1}{16}[e^{4ix}+e^{-4ix}+4+2(e^{2ix})(e^{-2ix})+2(e^{2ix})(2)+2(e^{-2ix})(2)]$$

$$=\frac{1}{16}(e^{i4x}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6)=\frac{1}{16}(2\cos 4x+8\cos 2x+6)=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$$

بنابراین انتگرال داده شده به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$I=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}+\frac{3}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

با توجه به انتگرال‌های فوق برای این که مجبور نباشیم هر سه انتگرال را به طور جداگانه حساب کنیم، بهتر است انتگرال زیر را حساب کنیم:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos nx}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

و در نهایت به جای n، مقادیر ۴، ۲ و ۰ را قرار دهیم. برای محاسبه‌ی این انتگرال باید مانده $\frac{e^{inz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ در قطب‌های این تابع که در بالای محور حقیقی قرار دارند را حساب کنیم. قطب‌های این تابع که بالای محور حقیقی قرار دارند، $z=i$ و $z=2i$ هستند و لذا داریم:

$$z=i \text{ مانده در } =\frac{e^{inz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\Big|_{z=i}=\frac{e^{-n}}{2i(i^2+4)+2i(i^2+1)}=\frac{e^{-n}}{6i}$$

$$z=2i \text{ مانده در } =\frac{e^{inz}}{2z(z^2+4)+2z(z^2+1)}\Big|_{z=2i}=\frac{e^{-2n}}{2(2i)[(2i)^2+4]+2(2i)[(2i)^2+1)]}=-\frac{e^{-2n}}{12i}$$

بنابراین حاصل انتگرال برحسب n برابر است با:

$$J=\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{e^{-n}}{6i}-\frac{e^{-2n}}{12i})]=\frac{\pi}{3}e^{-n}-\frac{\pi}{6}e^{-2n}$$

خب حالا اگر به جای n، سه مقدار ۴، ۲ و ۰ را قرار دهیم، حاصل سه انتگرال معلوم می‌شود. اما خواسته‌ی سؤال ضریب e^{-8} است که واضح است فقط به ازای $n=4$ ، جمله‌ی e^{-8} به وجود می‌آید، پس داریم:

$$-\frac{\pi}{6}e^{-2\times 4}=-\frac{\pi}{6}e^{-8}$$

اما پشت انتگرال اصلی ضریب $\frac{1}{8}$ نیز وجود دارد و لذا ضریب e^{-8} برابر $-\frac{\pi}{48}=\frac{1}{8}(-\frac{\pi}{6})$ می‌شود.

مثال ۱۷: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx$ ، چند برابر $\frac{\pi}{5}$ است؟

۱) $\cos 1-e^{-2}$	۲) $\cos 1+e^{-2}$	۳) $2\cos 1-e^{-2}$	۴) $2\cos 1+e^{-2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا تابع $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع قطب ساده $z=2i$ را بالاتر از محور حقیقی و $z=1$ را روی محور حقیقی دارد. بنابراین مانده‌ی $f(z)$ را در $z=2i$ و $z=1$ حساب می‌کنیم. اولی را در $2\pi i$ و دومی را در πi ضرب خواهیم کرد. دقت کنید که مسیر انتگرال‌گیری محور xها از $-\infty$ تا $+\infty$ است. نقطه‌ی تکین $z=1$ روی مرز قرار دارد. با یک کمان به اندازه‌ی π (نیم دایره) می‌توانیم آن را دور بزنیم به همین خاطر مانده در $z=1$ را در π ضرب می‌کنیم. با تجزیه‌ی مخرج داریم $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)(z-1)}$. بنابراین:

$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{e^{i}}{5}\quad,\quad \mathrm{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)}=\frac{e^{-2}}{(4i)(2i-1)}$$

و در نتیجه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}+\pi i\frac{e^{i}}{5}=\frac{\pi}{2e^2(2i-1)}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}+\frac{\pi i}{5}(\cos 1+i\sin 1)=-\frac{\pi(1+2i)}{10e^2}+\frac{\pi}{5}(i\cos 1-\sin 1)$$

در نهایت می‌دانیم که:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x-1)}dx=-\frac{2\pi}{10e^2}+\frac{\pi}{5}\cos 1=\frac{\pi}{5}(\cos 1-e^{-2})$$

نکته۱: انتگرال‌های $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$ و همچنین $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$، هر کدام بخش‌هایی از انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$ می‌باشند، در واقع داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx=2\pi i$$ (مجموع مانده‌های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند.)

واضح است $Re[I]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$ و $Im[I]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$ می‌باشد. (مطابق معمول، مانده‌های مربوط به قطب‌های حقیقی باید در πi ضرب شوند.)

مثال۱۸: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{+ix}}{x^2+1}dx$ را بیابید.

پاسخ: برای حل این مسئله طبق نکته فوق باید مانده تابع $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ در قطب $z=i$ را حساب کنیم:

$$z=i \text{ مانده در } =\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i}=\frac{e^{i^2}}{2i}=\frac{e^{-1}}{2i}\Rightarrow I=2\pi i\times\frac{e^{-1}}{2i}=\pi e^{-1}$$

مثال۱۹: اگر $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x-1}dx$ و $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-1}dx$، آنگاه مقدار $I_1\times I_2$ کدام است؟

۱) $-2\pi\sin 1+2\pi\cos 1$
۲) $-\pi\sin 1+\pi\cos 1$
۳) $-\frac{\pi^2}{2}\sin 2$
۴) $-\pi^2\sin 2$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید مقادیر هر یک از انتگرال‌های I_1 و I_2 را حساب کنیم، دقت کنید برای هر دو انتگرال $f(z)=\frac{1}{z-1}$ در نظر گرفته می‌شود و $z=1$ قطب روی محور حقیقی محسوب می‌شود، یعنی مانده $f(z)e^{iz}$ باید در πi ضرب شود. ابتدا انتگرال $f(x)e^{ix}$ را حل می‌کنیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx=\pi i(z=1 \text{ در } \frac{e^{iz}}{z-1} \text{ مانده عبارت})=\pi i(e^{i\times 1})=\pi i(\cos 1+i\sin 1)=(i\pi\cos 1-\pi\sin 1)$$

اکنون داریم:

$$\left.\begin{array}{l}I_1=\mathrm{Re}\,I=-\pi\sin 1\\ I_2=\mathrm{Im}\,I=\pi\cos 1\end{array}\right\}\Rightarrow I_1\times I_2=-\pi^2\sin 1\cos 1\xrightarrow{\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a} I_1\times I_2=-\frac{\pi^2}{2}\sin 2$$

نکته۲: برای همگرایی $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos ax dx$ (یا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin ax dx$)، لازم است قطب‌های **حقیقی** تابع $\frac{p(z)}{q(z)}\cos az$ (یا $\frac{p(z)}{q(z)}\sin az$)، **رفع شدنی** یا حداکثر از **مرتبه یک** باشند. به عبارتی وقتی $q(z_0)=0$ می‌شود باید z_0 ریشه‌ی ساده (مرتبه یک) $q(z)$ باشد. واضح است اگر مثلاً z_0 ریشه‌ی مرتبه دوم $q(z)$ باشد، در صورتی انتگرال همگراست که z_0 ریشه‌ی صورت کسر هم باشد.

برای مثال انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست؛ زیرا $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی صورت و مخرج است و قطب رفع شدنی محسوب می‌شود. انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-1}dx$ نیز همگراست؛ چون $x=1$ ریشه‌ی ساده (مرتبه یک) مخرج است. همچنین انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{(4\pi^2-x^2)^2}dx$ همگراست، زیرا با آن که 2π ریشه‌ی مرتبه‌ی دو برای مخرج است، اما ریشه‌ی مرتبه‌ی یک صورت هم هست و این یعنی $x=2\pi$ یک قطب مرتبه‌ی یک محسوب می‌شود و به همگرایی لطمه‌ای نمی‌زند. اما انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x-1)^2}dx$ واگراست؛ زیرا $x=1$ قطب مرتبه‌ی دو حقیقی است. پس اگر مخرج کسر یک ریشه‌ی حقیقی از مرتبه‌ی دو داشته باشد، باید این عدد ریشه‌ی صورت هم باشد. (ریشه‌ها بر هم منطبق باشند.)

توجه: در برخی از منابع، گفته شده که ریشه‌های حقیقی مخرج کسر، حتی اگر مرتبه اول هم هستند، حتماً باید ریشه‌ی صورت کسر هم باشند که این حکم صحیح نیست.

تمرین: حاصل انتگرال‌های $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{4\pi^2-x^2}dx$ و $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{(4\pi^2-x^2)^2}dx$ رابیابید. **جواب:** $I_1=0$ و $I_2=\frac{1}{8\pi}$

نکته۳: در بعضی تست‌ها از عبارت «مقدار اصلی کوشی» که آن را با **P.V** نشان می‌دهند استفاده می‌شود. همین‌قدر بدانید که در تمام انتگرال‌های حقیقی، در صورتی که همگرا باشند، همان فرمول‌هایی که گفته شد در واقع مقدار اصلی کوشی را نیز محاسبه می‌کنند.

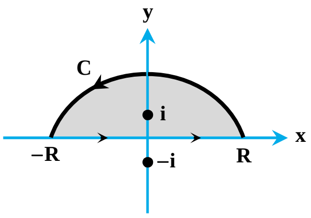
۴ــ محاسبه نوع دیگری از انتگرال‌های حقیقی

اگر انتگرالی در گروه سه نوع انتگرال حقیقی که تا حالا بررسی کردیم، نبود، در این دسته قرار می‌گیرد. در حل این نوع انتگرال‌ها باید ابتدا یک $f(z)$ مناسب انتخاب کنیم و سپس با انتخاب یک مسیر مناسب برای انتگرال‌گیری و تفکیک انتگرال‌ها در مسیرهای مختلف و همچنین حذف بعضی از این انتگرال‌ها سعی کنیم، محاسبات را ساده کرده و سپس با استفاده از قضیه مانده‌ها حاصل $\int_C f(z)dz$ را حساب کنیم و مقدار به دست آمده را مساوی انتگرال‌های تفکیک شده قرار دهیم. مثال زیر موضوع را روشن می‌کند:

مثال ۲۰: حاصل انتگرال حقیقی $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ را حساب کنید.

☑ **پاسخ:** برای ورود به بحث، یک انتگرال ساده را مثال می‌زنیم که می‌دانیم با استفاده از فرمول‌های ریاضی عمومی به راحتی برابر $I=[\mathrm{Arc\,tg}x]_{-\infty}^{\infty}=\pi$ می‌شود.

اما در مبحث توابع مختلط روش حل دیگری ارائه می‌شود که برای حل انتگرال‌های پیچیده‌ای که در ریاضی عمومی در مقابل آن‌ها عاجز هستیم، بسیار توانمند و مفید هستند. خب حالا برویم سراغ حل این انتگرال، می‌توانیم این انتگرال را چنین بنویسیم:



$$I=\int_C \frac{dz}{z^2+1}$$

که C مسیری از $-\infty$ تا $+\infty$ در طول محور xها است. اما مشکل اینجاست برای استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها، C باید یک مسیر بسته باشد، بنابراین به جای I، انتگرال مقابل را جایگزین می‌کنیم:

$$I'=\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$$

که C مسیری از $-\infty$ تا $+\infty$ نیست، بلکه مسیر بسته‌ای از $-R$ تا $+R$ است که با یک نیم‌دایره بسته شده است.

خب حالا برویم سراغ قضیه مانده‌ها. تابع زیر انتگرال دارای قطب‌های مرتبه‌ی اول $z=+i$ و $z=-i$ می‌باشد که از این دو قطب فقط $z=+i$ درون مسیر بسته‌ی C قرار دارد، بنابراین با استفاده از قضیه مانده‌ها داریم:

$$I'=2\pi i\,\underset{z=i}{\mathrm{Res}}f(z)=2\pi i\lim_{z\to i}[(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}]=\pi$$

اما ما مقدار I را می‌خواهیم، برای این منظور I' را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$I'=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}$$

با توجه به اینکه $I'=\pi$، لذا داریم:

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

بازه‌های انتگرال‌گیری باید $-\infty$ تا $+\infty$ شود، برای همین R را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

حالا باید تکلیف انتگرال دوم را معلوم کنیم. برای این منظور از تعریف کران ML استفاده می‌کنیم با توجه به نامساوی مثلث داریم:

$$|z^2+1|\ge||z|^2-1|=R^2-1\Rightarrow|\frac{1}{z^2+1}|\le\frac{1}{R^2-1}\Rightarrow|f(z)|\le\frac{1}{R^2-1}$$

اگر عبارت برحسب R، برابر M در نظر گرفته شود، با توجه به این که طول کمان C_R برابر $L=\pi R$ است، خواهیم داشت:

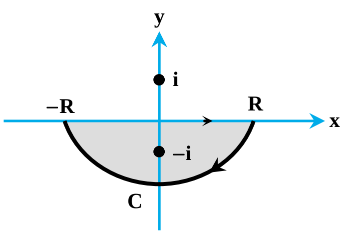
$$|\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}|\le(\frac{1}{R^2-1})\pi R$$

که در $R\to\infty$ عبارت سمت راست نامساوی برابر صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$I+0=\pi\Rightarrow \mathbf{I=\pi}$$

توضیح ۱: دقت کنید، مسیر بسته‌ی C را به شکل زیر نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم:

در این صورت با توجه به جهت نشان داده شده که ساعت‌گرد شده، علامت منفی اضافه می‌شود و داریم:



$$I'=-2\pi i\,\underset{z=-i}{\mathrm{Res}}(f(z))=-2\pi i[\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z+i)(z-i)}]=\frac{-2\pi i}{-2i}=\pi$$

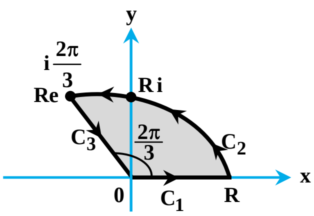
با ادامه‌ی حل مانند آن‌چه در بالا انجام شد، به نتیجه‌ی یکسان $I=\pi$ می‌رسیم. بنابراین در حل چنین مسائلی مسیر را به صورت نیم‌دایره‌ای در نظر می‌گیریم که بالای محور یا پائین محور حقیقی باشد. این کار به دلیل کاهش حجم محاسبات می‌باشد.

توضیح ۲: انتگرال فوق را به غیر از روش «ریاضی عمومی» با استفاده از نکته‌ی گفته شده راجع به انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$، به راحتی می‌توانیم جواب دهیم. در واقع آن دستورالعمل‌ها براساس همین روش‌های تعیین مسیر به دست آمده‌اند. ما به دلیل حفظ روش تستی شما را درگیر این روش‌ها نکردیم و شما تمام انتگرال‌هایی که با ساختار آن دستورالعمل‌ها همخوانی دارند، با همان روش‌ها حل کنید. اما چرا اینجا این روش را آموزش دادیم؟ به این دلیل که برخی انتگرال‌ها هستند که با آن دستورالعمل‌ها قابل پاسخگویی نیستند.

مثال۲۱: مقدار انتگرال $I=\int_{۰}^{+\infty}\frac{۱}{x^{۳}+۱}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینه «۳» در ابتدا ممکن است فکر کنیم با همان فرمول گفته شده برای انتگرال‌هایی به شکل کلی $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$، می‌توانیم تست را جواب دهیم ولی به کران پائین انتگرال توجه کنید (باید $-\infty$ باشد که بتوانیم از فرمول گفته شده استفاده کنیم) در ضمن این تابع زوج هم نیست که بتوانیم انتگرال را روی $(-\infty,\infty)$ حل کرده و جواب را نصف کنیم. پس مجبوریم از مسیر استفاده کنیم. برای حل این انتگرال مسیر روبرو را در نظر می‌گیریم:



این مسیر قطاعی به رأس صفر و زاویه مرکزی $\frac{۲\pi}{۳}$ است و علت انتخاب این زاویه این است که تعداد کمتری قطب داخل مسیر قرار بگیرد و محاسبات کوتاهتر شود وگرنه می‌توانستیم زاویه‌ی مرکزی را مثلاً ۲π نیز انتخاب کنیم. خب باید ابتدا نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{۱}{z^{۳}+۱}$ را حساب کنیم:

$$۱+z^{۳}=۰\Rightarrow z^{۳}=-۱\xrightarrow{-۱=e^{i\pi}}z_k=e^{(\frac{۲k\pi+\pi}{۳})}\ ,\ k=۰,۱,۲\Rightarrow z_۱=e^{\frac{\pi}{۳}i}\ ,\ z_۲=e^{\pi i}=-۱\ ,\ z_۳=e^{\frac{۵\pi}{۳}i}$$

از سه قطب ساده فوق، فقط قطب $z=e^{i\frac{\pi}{۳}}$، داخل مسیر نشان داده شده قرار می‌گیرد. مسیر C متشکل از سه قسمت زیر است:

$C_۱$ که واقع بر نیم قسمت مثبت محور x ها است، $C_۲$ که قسمتی از کمان دایره است و $C_۳$ که قطعه خط واصل از نقطه $Re^{\frac{۲\pi}{۳}i}$ تا ۰ می‌باشد.

بر روی مرز $C_۳$ با فرض $z=xe^{\frac{۲\pi}{۳}i}$ که در آن x از R تا صفر تغییر می‌کند، داریم:

$$z=xe^{\frac{۲\pi}{۳}i}\Rightarrow dz=e^{\frac{۲\pi}{۳}i}dx\quad ,\quad f(z)=f(xe^{\frac{۲\pi}{۳}i})=\frac{۱}{۱+(xe^{\frac{۲\pi}{۳}i})^{۳}}=\frac{۱}{۱+x^{۳}}$$

پس انتگرال $\oint_C f(z)dz$ به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\oint_C f(z)dz=\int_{۰}^{R}\frac{dx}{۱+x^{۳}}+\int_{C_۲}\frac{dz}{۱+z^{۳}}+\int_{R}^{۰}\frac{e^{\frac{۲\pi}{۳}i}}{۱+x^{۳}}dx$$

از بین انتگرال‌های فوق مقدار انتگرال وسط صفر است و برای اثبات آن به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$\left|z^{۳}+۱\right|\ge\left||z|^{۳}-۱\right|=R^{۳}-۱\Rightarrow\left|\frac{۱}{z^{۳}+۱}\right|\le\frac{۱}{R^{۳}-۱}\Rightarrow|f(z)|\le\frac{۱}{R^{۳}-۱}$$

حالا از فرمول کران بالا برای انتگرال (یا همان فرمول ML) کمک می‌گیریم. با توجه به طول کمان در مسیر $C_۲$ داریم:

$$L=\text{زاویه مرکزی}\times\text{شعاع}=R\times\frac{۲\pi}{۳}\quad ,\quad M=\frac{۱}{R^{۳}-۱}\Rightarrow\left|\int_{C_۲}f(z)dz\right|\le(\frac{۱}{R^{۳}-۱})(\frac{۲\pi}{۳}R)=\frac{۲\pi R}{۳(R^{۳}-۱)}$$

اما با توجه به بازه‌ی انتگرال‌گیری، مقدار انتگرال باید برای تمام R های بزرگتر از یک صادق باشد، لذا باید برای $R\to\infty$ نیز صادق باشد:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{۲\pi R}{۳(R^{۳}-۱)}=۰\Rightarrow\lim_{R\to\infty}(\int_{C_۲}f(z)dz)=۰$$

توضیح: یک روش دیگر برای اثبات صفر بودن انتگرال $\int_{C_۲}\frac{dz}{۱+z^{۳}}$ این است که $z=Re^{i\theta}$ در نظر بگیریم و در آن صورت $dz=Rie^{i\theta}d\theta$ که θ از ۰ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ تغییر می‌کند که انتگرال به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\int_{C_۲}\frac{dz}{۱+z^{۳}}=\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{۱+R^{۳}e^{۳i\theta}}$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، انتگرال فوق به سمت صفر می‌رود.

حالا که تکلیف انتگرال دوم معلوم شد، سراغ انتگرال سوم می‌رویم. با قرار دادن ∞ به جای R، انتگرال به صورت $\int_{\infty}^{۰}\frac{e^{\frac{۲\pi i}{۳}}}{۱+x^{۳}}dx$، نوشته می‌شود و می‌دانیم $\int_{\infty}^{۰}$ به صورت $-\int_{۰}^{\infty}$ نیز قابل نمایش است، لذا داریم:

$$\oint_C f(z)dz=\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۳}}-e^{\frac{۲\pi i}{۳}}\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۳}}=(۱-e^{\frac{۲\pi}{۳}i})\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۳}}\qquad(۱)$$

از طرفی برای انتگرال $\oint_C f(z)dz$ با توجه به قضیه مانده‌ها و توجه به اینکه فقط قطب $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ داخل ناحیه قرار دارد، داریم:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(z=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ در } f(z)=\frac{1}{z^3+1} \text{ مانده}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{3z^2}\right)\Bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}} \qquad (2)$$

با توجه به تساوی (۱) و (۲) داریم:

$$(1-e^{\frac{2\pi}{3}i})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3}ie^{-\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow I=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}\left[\frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\right] \Rightarrow I=\frac{2\pi i}{3}\left[\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})}\right]$$

$$\frac{2\pi i}{3}\left[\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{\pi i}{3}}(e^{-\frac{\pi i}{3}}-e^{\frac{\pi i}{3}})}\right] = \frac{2\pi i}{3}\left[\frac{e^{-\frac{3\pi i}{3}}}{-2i\sin(\frac{\pi}{3})}\right] = \frac{2\pi i}{3}\left(\frac{-1}{-2i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

پس حاصل این انتگرال $I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ است.

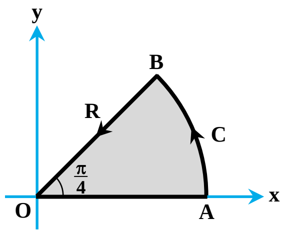
حالت کلی این مثال به صورت زیر می‌باشد و حفظ آن خالی از لطف نیست!

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}}$$

مثال ۲۲: **حاصل $I=\int_0^\infty \sin x^2 dx$ کدام است؟ (در حل سؤال از تساوی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، استفاده کنید)**

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ ۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

پاسخ: گزینه «۱» مسیر انتگرال‌گیری را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



برای حل این سؤال باید حاصل انتگرال $\oint_C e^{iz^2}dz$ را حساب کنیم. یک حدس بـرای انتخـاب ایـن انتگـرال بـه دلیل تساوی مقابل است: $e^{ix^2}=\cos x^2+i\sin x^2$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع زیر انتگرال هیچ نقطه‌ی تکینی در مرز داده شده ندارد، لذا $\oint_C e^{iz^2}dz=0$

حالا با تفکیک این انتگرال داریم: $\int_{OA} e^{iz^2}dz+\int_{AB} e^{iz^2}dz+\int_{BO} e^{iz^2}dz=0$

اما روی OA داریم $z=x$ (از $x=0$ تا $x=R$)، روی AB داریم $z=Re^{i\theta}$ (از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$) و بالاخره روی BO داریم $z=xe^{\frac{\pi}{4}i}$ (از $x=R$ تا $x=0$) بنابراین انتگرال‌ها را به صورت مقابل می‌توان نوشت:

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(e^{2i\theta})}(iRe^{i\theta}d\theta)+\int_R^0 e^{ix^2(e^{\frac{\pi}{2}i})}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{i(x^2)(i)}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0 \qquad (*)$$

خب حالا حد عبارات فوق را وقتی $R\to\infty$ را حساب می‌کنیم. قدر مطلق انتگرال دوم از سمت راست به شکل زیر حساب می‌شود:

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R}{e^{R^2\sin 2\theta}}d\theta$$

در عبارات فوق $0\le 2\theta\le\frac{\pi}{2}$، بنابراین $\sin 2\theta\ge 0$ و بنابراین وقتی $R\to\infty$ مقدار این انتگرال صفر است.

پس معادله (*) در $R\to\infty$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx+\int_\infty^0 e^{-x^2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})dx=0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

طبق صورت سؤال انتگرال سمت راست برابر $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است و لذا داریم:

$$\int_0^{+\infty}(\cos x^2+i\sin x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را برابر قرار دهیم، داریم:

$$\int_0^\infty \sin x^2dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \quad , \quad \int_0^\infty \cos x^2dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

توضیح ۱: انتگرال‌های فوق به انتگرال‌های «فرنل» معروف هستند که در بحث تفرق امواج ظاهر می‌شوند.

توضیح ۲: همان‌طور که در چند مثال اخیر دیدید معمولاً وقتی زیر انتگرال $f(x^n)$ داریم، مسیر انتخابی قطاعی با زاویه‌ی مرکزی $\frac{2\pi}{n}$ است. مثلاً برای $\frac{1}{x^2+1}$، چون $n=2$ است، مسیر قطاعی با زاویه‌ی مرکزی $\frac{2\pi}{2}=\pi$ بود.