اعداد و توابع مختلط

دراین قسمت ۲۲ تست از آزمون های کارشناسی ارشد و دکتری این فصل رو براتـــون انتخاب کردم که قراره باهم به اونا کَلَکْ بزنیم!

پیدا کردن مزدوج همساز با یه مشتق‌گیری ساده!

بخشی از تست‌های مربوط به این فصل تو آزمون‌های کارشناسی ارشد، به پیدا کردن مزدوج همساز اختصاص داره. به این شکل که برای تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، یکی از u یا v رو به ما میدن و اون یکی‌رو از ما سؤال می‌کنن (منظوره از «اون یکی» مزدوجِ همسازِ!) خُب همون‌طور که می‌دونیم برای این تابع تحلیلی باید دو معادله‌ی زیر برقرار باشه:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

البته حالا لازم نیست هر دو معادله‌رو چک کنیم تا برقرار باشه! اگه u رو داده بودن، سریع از اون نسبت به x مشتق می‌گیریم و یه عبارتی به دست میاد؛ اونوقت از گزینه‌ها (که منظور همون v یا مزدوج همساز u هستش!) نسبت به y مشتق می‌گیریم، هر کدوم با اون عبارت (یا همون $\frac{\partial v}{\partial x}$) برابر شد، جوابه البته اگه تو صورت سؤال v رو داده بودن و u رو از ما سؤال کرده بودن، طبیعیه باید از v نسبت به y مشتق بگیریم و بگیم گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به x مشتق گرفتیم برابر با $\frac{\partial v}{\partial y}$ بِشه! چند مثال زیر شما رو کامل توجیه می‌کنه!

مثال۱: تابع $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$ در همه نقاط هارمونیک (همساز) می‌باشد. تابع مختلط تحلیلی G از متغیّر z را به گونه‌ای تعیین نمایید که $\mathrm{Re}\,G=\varphi$.

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $(x^3-3xy^2)+i(3xy^2-y^3+c)$
۲) $(x^3-3xy^2)+i(4xy-y^2+c)$
۳) $(x^3-3xy^2)+i(4xy^2+y^2+c)$
۴) $(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c)$

پاسخ: گزینه «۴» چون $u_x=3x^2-3y^2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از v اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با v_x بِشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال۲: اگر $u(x,y)=y^3-3x^2y$ آنگاه مزدوج هارمونیک (همساز) u، کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $-3x^2y+y^3+c$
۲) $-3xy^2+x^3+c$
۳) $-3x^2y+x^3+c$
۴) $-3xy^2+y^3+c$

پاسخ: گزینه «۲» چون $u_x=-6xy$ پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق گرفتیم برابر با v_x بشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال۳: فرض کنید $v(x,y)=y^3-3x^2y$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$ تحلیلی باشد و $f(0)=0$. تابع $u(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $3xy^2-x^3$
۲) x^3-3x^2y
۳) x^3-3xy^2
۴) y^3-3xy^2

پاسخ: گزینه «۳» چون $v_y=-(3y^2-3x^2)$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به x مشتق گرفتیم، برابر با v_y بشه، فقط گزینه (۳) چنین شرایطی داره

مثال۴: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ به ازای $u(x,y)=x^3-3xy^2$ یک تابع تحلیلی باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ $(i^2=-1)$

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۴ـ مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $v(x,y)=3x^2y$
۲) $v(x,y)=3x^2y-y^3$
۳) $v(x,y)=3y^2x$
۴) $v(x,y)=3y^2x-x^3$

پاسخ: گزینه «۲» چون $u_x=3x^2-3y^2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با u_x بشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۵: اگر $u = x^2 - y^2 + 2x$، آنگاه مزدوج همساز و تابع متناظر آن $w = f(z)$ کدام‌اند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $v = 2xy$ و $f(z) = 2z(z-1)$
۲) $v = xy + 2y$ و $f(z) = 2z(z+1)$
۳) $v = 2xy - 2y$ و $f(z) = z(z+2)$
۴) $v = y(2x+2)$ و $f(z) = z^2 + 2z$

پاسخ: گزینه «۴» چون $u_x = 2x + 2$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از ضابطه‌ی v اون نسبت به y مشتق گرفتیم، برابر با $2x + 2$ باشه، فقط گزینه (۴) این شرایط رو داره

مثال ۶: اگر $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، آنگاه مزدوج هارمونیک u، کدامیک از گزینه‌های زیر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $-3xy^2 + x^3 + c$
۲) $-3x^2y + x^3 + c$
۳) $-2x^2y^2 + x^3 + c$
۴) $-4xy + y^2 + c$

پاسخ: گزینه «۱» چون $u_x = -6xy$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به y مشتق بگیریم، برابر با u_x بشه، فقط گزینه (۱) ایـن شـرایط رو داره

مثال ۷: اگر $f(z) = f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ یک تابع تحلیلی باشد که در آن:
$u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ و $(j = \sqrt{-1})$ آنگاه $v(x,y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{-x}(y\sin y + x\cos y)$
۲) $e^{-y}(x\sin x + y\cos y)$
۳) $e^{-x}(x\sin x + y\cos x)$
۴) $e^{-y}(y\sin y + x\cos y)$

پاسخ: گزینه «۱» با یه مشتق‌گیری ساده به راحتی معلومه $u_x = -e^{-x}x\sin y + e^{-x}y\cos y + e^{-x}\sin y$، حالا باید تـو گزینـه‌هـا ببینـیم کـدوم گزینه هستش که اگه از اون نسبت به y مشتق بگیریم، برابر با u_x میشه، طبیعیه گزینه‌ای جوابه که e^{-x} داشته باشه و ایـن یعنـی گزینـه‌هـای (۲) و (۴) غلطن و یکی از گزینه های (۱) یا (۳) جوابه، از بین اونا با مشتق‌گیری معلوم میشه گزینه (۱) جوابه

مثال ۸: هارمونیک مزدوج (conjugate Harmonic Function) تابع $u(x,y) = 2x(3-y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $2x(3+y)$
۲) $x^2 - y^2$
۳) $-2x(3+y)$
۴) $x^2 - (3-y)^2$

پاسخ: گزینه «۴» به راحتی معلومه $u_x = 2(3-y)$، حالا تو گزینه‌ها باید ببینیم کدوم گزینه هستش که اگـه از اون نـسبت بـه y مـشتق بگیـریم، برابر با $2(3-y)$ میشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

نکته تکمیلی: اگه ضابطه‌ی تابع تو مختصات قطبی داده شده بود، طبیعتاً روش بالا رو می‌تونین باز هم استفاده کنین، فقط معادله‌ها بـه صـورت مقابل هستن: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$

مثال ۹: تابع پتانسیل $u(r,\theta) = \ln r + r\cos\theta$ در مختصات قطبی داده شده است. تابع مزدوج همسـاز (conjugate Harmonic) آن، یعنـی $v(r,\theta)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\theta - r\sin\theta + A$
۲) $\theta + r\sin\theta + A$
۳) $r + r\sin\theta + A$
۴) $\theta - r\sin\theta + A$

پاسخ: گزینه «۲» چون $u_r = \frac{1}{r} + \cos\theta$، پس گزینه‌ای جوابه که اگه از اون نسبت به θ مشتق گرفتیم و بعد تقسیم بر r کردیم، برابر بـا u_r بـشه، فقط گزینه (۲) چنین شرایطی داره

«بستنی»

پسر بچه‌ای وارد یک بستنی فروشی شد و پشت میزی نشست. پیشخدمت یک لیوان آب برایش آورد.
پسر بچه پرسید: "یک بستنی میوه‌ای چند است؟"
پیشخدمت پاسخ داد: "۵۰ سنت"
پسر بچه دستش را در جیبش برد و شروع به شمردن کرد. بعد پرسید: "یک بستنی ساده چند است؟"
در همین حال، تعدادی از مشتریان در انتظار میز خالی بودند. پیشخدمت با عصبانیت پاسخ داد: "۳۵ سنت"
پسر دوباره سکه‌هایش را شمرد و گفت: "لطفاً بستنی ساده"
پیشخدمت بستنی را آورد و به دنبال کار خود رفت. پسرک نیز پس از خوردن بستنی، پول را به صندوق پرداخت و رفت.
وقتی پیشخدمت بازگشت، از آنچه دید حیرت کرد!
آنجا در کنار ظرف بستنی، ۲ سکه ۵ سنتی و ۵ سکه ۱ سنتی گذاشته بود برای انعام پیشخدمت!

انسان باید ذاتاً ثروتمند باشد، نه ارثاً!!

بدست آوردن ضابطه‌ی f(z) وقتی u یا v رو به ما دادن!

سؤالاتی داریم که به ما $u(x,y)$ یا $v(x,y)$ را می‌دن و از ما $f(z)$ را می‌خوان. تو این جور سؤالات برای حل سریع می‌تونیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$$

یعنی تو ضابطه‌ی u یا v که داده شده، به جای تمام y ها، صفر و به جای تمام x ها، z قرار می‌دیم. طبیعیه اگه فقط u رو داده باشن، ما فقط به قسمت حقیقی $f(z)$ (یعنی اون قسمتی که ضریب i نداره!) دست پیدا می‌کنیم و اگه فقط v رو به ما داده باشن، فقط به قسمت موهومی $f(z)$ (یعنی اون قسمت که ضریب i داره!) می‌رسیم.

مثال ۱۰: فرض کنید $u = x^3 - 3y^2x, z = x+iy$ و $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد. f کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) iz ۲) z^3 ۳) ze^z ۴) z^3+3z^2+1

پاسخ: گزینه «۲» گزینه‌ای جوابه که اگه تو ضابطه‌ی u به جای x ها، z و به جای y ها، صفر قرار دادیم، اون قسمت که ضریب i نیست، برابر با $u(z,0)$ بشه، پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۱۱: تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ است کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) $f(z)=2^z+ic$ ۲) $f(z)=z(\ln 2)^z+ic$ ۳) $f(z)=(\ln 2)^z+ic$ ۴) $f(z)=z2^z+ic$

پاسخ: گزینه «۱» همون‌طور که گفتیم $f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$ میشه، پس داریم: $f(z)=2^z\cos(0)+iv(z,0)=2^z+iv(z,0)$

خُب ما کاری با $iv(z,0)$ نداریم، همین‌طوری معلومه گزینه (۱) جوابه چون فقط تو گزینه (۱) قسمت حقیقی برابر با 2^z داده شده

مثال ۱۲: اگر داشته باشیم $F(z)=F(re^{j\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، چنانچه تابع F تحلیلی بوده و داشته باشیم: $u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$، کدام گزینه $F(r,\theta)$ را معرفی می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۴)

۱) $F(z)=z^2+ic$ ۲) $F(z)=\frac{1}{z^2}+ic$ ۳) $F(z)=(z+\bar{z})+ic$ ۴) $F(z)=z\bar{z}+ic$

پاسخ: گزینه «۱» قسمت حقیقی $F(z)$ (یعنی اون قسمت که با ضریب i همراه نیست) باید برابر با $u(z,0)$ باشه، یعنی باید برابر با $z^2\cos(0)=z^2$ باشه، و این یعنی گزینه (۱) جوابه

مثال ۱۳: اگر $u=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ باشد، تابع $f(z)$ عبارت است از:

(مهندسی نانو مواد و مهندسی شیمی ـ (بیوتکنولوژی و داروسازی) ـ سراسری ۸۹)

۱) z^2 ۲) $\frac{1}{z^2}$ ۳) e^{2z} ۴) e^{z^2}

پاسخ: گزینه «۴» **روش اول:** توجه کنید که $u(z,0)=e^{z^2}$، پس $f(z)=e^{z^2}$ و لذا گزینه (۴) جوابه

روش دوم: یه جور دیگه هم میشه این سؤال رو جواب داد. به ازای $z=1$، (یعنی $x=1$ و $y=0$) مقدار حقیقی تابع $f(z)$ برابر با $e^1=e$ میشه، حالا به من بگو ببینم تو کدوم گزینه اگه $z=1$ قرار بِدیم، قسمت حقیقی اون برابر با e میشه!؟ جون من داری فکر میکنی!؟

مثال ۱۴: اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $u=-r^3\sin 3\theta$، تابع $f(z)$ بر حسب z کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $-z^3+ik$ ۲) $-iz^3+ik$ ۳) iz^3+ik ۴) z^3+ik

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه تو همه‌ی گزینه‌ها z^3 داریم، می‌تونیم $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ قرار بدیم و z^3 رو حساب کنیم:

$$z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3 \xrightarrow{\text{فرمول دموآور}} z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

اما همون‌طور که تو صورت سؤال هم می‌بینین، قسمت حقیقی تابع $f(z)$ به صورت $-r^3\sin 3\theta$ داده شده، بنابراین z^3 باید در i ضرب بِشه، یعنی گزینه (۳) جوابه

استفاده از نقطه‌گذاری و عدد گذاری تو حل تست‌ها

بعضی تست‌ها رو میشه با عددگذاری مناسب به سرعت و بدون نیاز به محاسبات طولانی جواب داد. فقط باید حواستون باشه، نقطه یا مقداری که انتخاب می‌کنین تو شرط صورت سؤال و همچنین ضابطه‌ی تابع صدق کنه و مثلاً جزء نقاط ناپیوستگی یا خارج بازه‌ی تعریفِ تابع و این‌جور چیزها نباشه! چند مثال زیر مطلب رو روشن‌تر میکنه:

مثال ۱۵: اگر w یک تابع مختلط باشد، آنگاه $w=u(x,y)+iv(x,y)$. در تابع $w=\frac{1}{1-z}$ مقادیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $u(x,y)=\frac{1-x}{1+y}$ و $v(x,y)=\frac{1-y}{1-x}$

۲) $u(x,y)=\frac{y}{1-x}$ و $v(x,y)=\frac{x}{1-y}$

۳) $u(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$ و $v(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$

۴) $u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$ و $v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$

پاسخ: گزینه «۴» به ازای $z=0$ تابع w برابر با ۱ میشه، یعنی به ازای $x=y=0$ باید $u=1$ و $v=0$ تولید بِشه. تنها گزینه‌ای کـه ایـن شـرایط رو داره گزینه (۴) هستش (تو گزینه‌های (۲) و (۳) که $u=0$ میشه و تو گزینه (۱)، $v=1$ میشه که غلطه)

مثال ۱۶: اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط $w=\tan z$ باشند و $z=x+iy$ آنگاه: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۵)

۱) $u=\frac{\sin x\cosh y}{(\cosh y)^2-\sin^2 x}$ و $v=\frac{\cos x\sinh y}{(\cosh y)^2-\sin^2 x}$

۲) $u=\frac{\sin x\cos x}{(\cosh y)^2-\sin^2 x}$ و $v=\frac{\cosh y\sinh y}{(\cosh y)^2-\sin^2 x}$

۳) $u=\frac{\cos x\sinh y}{\cos^2 x+(\sinh y)^2}$ و $v=\frac{\sin x\cosh y}{\cos^2 x+(\sinh y)^2}$

۴) $u=\frac{\cosh y\sinh y}{\cos^2 x+(\sinh y)^2}$ و $v=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+(\sinh y)^2}$

پاسخ: گزینه «۲» خُب به ازای $z=x+0(i)$، یعنی به ازای $y=0$، مقدار $\tan z$ برابر با $\tan x$ میشه و می‌دونیـم $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ هـستش و در واقع بـه ازای $y=0$ باید $u=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $v=0$ بِشه، تنها گزینه‌ای که این شرایط رو داره گزینه (۲) هستش $u=\frac{\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}$

مثال ۱۷: قدرمطلق عدد مختلط $w=\frac{1-t^2+2it}{1+t^2}$، کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $1-t$ ۴) $\frac{1-t}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» چون برای t هیچ شرطی قرار داده نـشده، پس مـی‌تـونیم مـثلاً $t=1$ قـرار بِـدیم، کـه در ایـن صـورت $w=i$ و $|w|=1$ میـشه. تو گزینه‌ها فقط گزینه (۲) مقدارش برابر با ۱ میشه

مثال ۱۸: اگر $z=x+iy$ یک عدد مختلط، $\operatorname{Re} z$ قسمت حقیقی آن و $\operatorname{Im} z$ قسمت موهومی آن باشد، آنگاه مقـدار $2x\operatorname{Re}(z^{n+1})-(x^2+y^2)\operatorname{Re}(z^n)$، کـدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر ۲) $\operatorname{Re}(z^{n+2})$ ۳) $\operatorname{Im}(z^{n+2})$ ۴) $\operatorname{Re}(z^{n+1})-\operatorname{Im}(z^{n+1})$

پاسخ: گزینه «۲» اگه فرض کنیم $z=2$ و $n=1$ اونوقت داریم:

$$A=2x\operatorname{Re}(z^{n+1})-(x^2+y^2)\operatorname{Re}(z^n)\xrightarrow[n=1]{y=0,x=2}A=2\times2\times2^{1+1}-(2^2+0)2^1=16-8=8$$

حالا تو گزینه‌ها به جای z، عدد ۲ و به جای n عدد ۱ رو قرار میدیم هر کدوم برابر با ۸ شد، جوابه! گزینه‌های (۱) و (۳) که نیاز به بررسی ندارن (چون هر دو صفرن)، مقدار گزینه (۴) هم که برابر $4=0-2^{1+1}$ میشه، پس میره کنار! بنابراین به راحتی معلوم میشه گزینه (۲) جوابه، چون $8=2^3=2^{1+2}$ میشه

مثال ۱۹: اگر α,β,γ اعداد مختلط با قدرمطلق واحد باشند به قسمی که $|\alpha\beta\gamma|=|\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma|$، مقدار $|\alpha+\beta+\gamma|$ کدام است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون برای α، β و γ هیچ شرطی جز این که اعداد باید مختلط و با اندازه‌ی واحد باشند، نداریم، پس می‌تونیم اعداد رو $\alpha = ۱$ و $\beta = -۱$ و $\gamma = ۱$، انتخاب کنیم که تو رابطه داده شده تو صورت سؤال هم صدق می‌کنن، پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = -۱ \\ \gamma = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تو شرط صورت سوال صدق می‌کنن}} |\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma| = |\alpha\beta\gamma| \Rightarrow |\alpha + \beta + \gamma| = ۱$$

پس گزینه (۳) جوابه

مثال۲۰: نقاط $z_۱ \neq ۰$ و $z_۲ \neq ۰$ با فرض $z_۱ \neq z_۲$ در صفحه‌ی مختلط مفروض هستند. شرط اینکه نقطه‌ی مبدأ یعنی $z = ۰$ نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط واصل بین $z_۱$ و $z_۲$ باشد این است که: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $|z_۱ + z_۲| = |z_۱| + |z_۲|$ ۲) $|z_۱ - z_۲| = |z_۱| + |z_۲|$ ۳) $||z_۱| - |z_۲|| = |z_۱ - z_۲|$ ۴) $|z_۱| - |z_۲| = |z_۱ - z_۲|$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافیه نقطه‌های $z_۱$ و $z_۲$ رو به شرطی که پاره‌خط واصل اون‌ها از نقطه‌ی $z = ۰$ عبور کنه، انتخاب کنیم و در گزینه‌ها قرار بدیم تا گزینه‌ی صحیح معلوم بشه:

$z_۱ = ۱ \quad , \quad z_۲ = -۲$

گزینه ۱ : $|۱ - ۲| = |۱| + |-۲| \Rightarrow ۱ = ۳$ غ. ق. ق.

گزینه ۲ : $|۱ - (-۲)| = |۱| + |-۲| \Rightarrow ۳ = ۳$ لذا این گزینه صحیح است.

گزینه ۳ : $||۱| - |-۲|| = |۱ - (-۲)| \Rightarrow ۱ = ۳$ غ. ق. ق.

گزینه ۴ : $|۱| - |-۲| = |۱ - (-۲)| \Rightarrow -۱ = ۳$ غ. ق. ق.

مثال۲۱: مقدار سری $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\sin nx}{۲^n}$ که در آن x یک عدد حقیقی است، برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۲\sin x}{۵ - ۴\sin x}$ ۲) $\frac{۲\cos x}{۵ - ۴\sin x}$ ۳) $\frac{۲\sin x}{۵ - ۴\cos x}$ ۴) $\frac{۲\cos x}{۵ - ۴\cos x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به ازای $x = ۰$ مقدار سری برابر با صفر میشه، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) غلطن، چون به ازای $x = ۰$، برابر با صفر نمیشن!

از طرفی به ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{۲}}{۲^n} = \overset{\frac{۱}{۲}}{\boxed{\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{۲}}} + \overset{-\frac{۱}{۸}}{\boxed{\frac{\sin\frac{۳\pi}{۲}}{۲^۳}}} + \overset{\frac{۱}{۳۲}}{\boxed{\frac{\sin\frac{۵\pi}{۲}}{۲^۵}}} + \cdots$$

خیلی معلومه که مقدار سری به ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ عددی کمتر از $\frac{۱}{۲}$ میشه، حالا اگه گزینه‌های (۱) و (۳) رو با هم مقایسه کنیم معلوم میشه مقدار گزینه (۱) به ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ برابر با ۲ میشه، پس این گزینه غلطه و گزینه (۳) که مقدار اون به ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ برابر $\frac{۲}{۵}$ میشه، جوابه

مثال۲۲: حاصل سری $S = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{۳^k}$ $(\theta > ۰)$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\sin\theta}{۱۰ - ۶\cos\theta}$ ۲) $\frac{۱ - \cos\theta}{۱۰ - ۶\cos\theta}$ ۳) $\frac{۳ - ۳\cos\theta}{۱۰ - ۶\cos\theta}$ ۴) $\frac{۳\sin\theta}{۱۰ - ۶\cos\theta}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به ازای $\theta = \pi$، مقدار سری برابر با صفر میشه، بنابراین گزینه‌هایی که به ازای $\theta = \pi$ مقدارشون صفر نمیشه، غلطن، یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) همین اولِ کاری می‌پَرن! بین گزینه‌های (۱) و (۴) می‌تونیم مثلاً به ازای $\theta = \frac{\pi}{۲}$ ببینیم کدوم مقدارش نزدیک‌تر به سری میشه!؟

$$S = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{۳^k} \Rightarrow S(\theta = \frac{\pi}{۲}) = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{۳} + \frac{\sin \pi}{۳^۲} + \frac{\sin(\frac{۳\pi}{۲})}{۳^۳} + \cdots \simeq \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲۷} + \cdots$$

فعلاً برای دوری از محاسبات، همون جمله‌ی اول رو در نظر می‌گیریم، (چون تقریب خوبی هم هست!) در واقع گزینه‌ای جوابه که به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک‌تر باشه (همون جمله‌ی اول رو برداشتیم!)

$$\theta = \frac{\pi}{۲} \text{ مقدار گزینه (۱) به ازای } = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲})}{۱۰ - ۶\cos(\frac{\pi}{۲})} = \frac{۱}{۱۰} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{۲} \text{ مقدار گزینه (۴) به ازای } = \frac{۳\sin(\frac{\pi}{۲})}{۱۰ - ۶\cos(\frac{\pi}{۲})} = \frac{۳}{۱۰} \simeq \frac{۱}{۳}$$

پس گزینه (۴) جوابه

نگاشت

۴۰ تست در فصل نگاشت واجد شرایط کَلَکْ زدن بودن که با هم اونارو مرور می کنیم!

درسنامه نگاشت

تو این فصل قراره به تست‌های نگاشت هم کَلَکْ بزنیم! همون‌طور که می‌دونین سؤالات نگاشت این جوریه که یه ناحیه تو صفحه xy با نگاشت $w=f(z)$ به یه ناحیه تو صفحه uv تبدیل میشه، چون هر **نقطه‌ای** تو صفحه‌ی xy به صورت $z=x+iy$ تعریف میشه و هر نقطه تو صفحه‌ی w به صورت $w=f(z)=u+iv$ تعریف میشه، تو تبدیل یه **نقطه** از صفحه‌ی xy به یه **نقطه** تو صفحه uv می‌تونیم تو ضابطه‌ی w به جای z ها، مختصات همون نقطه رو قرار بِدیم و بعد ببینیم نگاشت چه نقطه‌ای تولید میکنه!؟ مثلاً اگه از ما بپرسن نقطه‌ی $z=i$ توسط نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به چه نقطه‌ای تبدیل میشه؟ باید $z=i$ رو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بِدیم، یعنی جواب میشه؛ $w=\frac{1}{i}=-i$. می‌بینم که خوشحال شدین؟! ولی بدونید سؤالات همیشه به این سادگی‌ها نیستن، چون معمولاً **ناحیه‌ای** تو صفحه xy به **ناحیه‌ای** تو صفحه‌ی uv تبدیل میشه، اما نگران نباشین! اونا رو هم می‌تونیم راحت حل کنیم. این جوری که یه z مناسب (یه نقطه‌ی مناسب) که تو صفحه‌ی xy قرار داره رو انتخاب می‌کنیم، بعد اون z رو تو ضابطه‌ی $w=f(z)$ به جای z ها قرار می‌دیم و از طریق نقطه‌یابی جواب رو به دست میاریم. مثلاً وقتی گفته میشه ناحیه‌ی $|z-1|=1$ توسط نگاشت $w=\frac{i}{z}$ به چه ناحیه‌ای تبدیل میشه؟ اولین کار اینه که یه z مناسب تو ناحیه‌ی $|z-1|=1$ انتخاب کنیم، یعنی z باید طوری باشه که اندازه‌ی $z-1$ برابر با ۱ باشه، خُب معلومه انتخاب‌هایی مثه $z=0$ یا $z=2$ برای ما وجود دارن (چون $|0-1|=1$ و $|2-1|=1$)، این یعنی z ها تو ناحیه قرار دارن) حالا باید با توجه به گزینه‌ها ببینیم کدوم بیشتر به کارمون میاد؟ مثلاً اگه $z=2$ قرار بِدیم، متوجه می‌شیم حتماً نقطه‌ی $w=\frac{i}{2}$ تو صفحه uv وجود داره و یا اگه $z=0$ قرار بِدیم باید $w=\frac{i}{0}=\infty$ داشته باشیم ($w=\infty$ یعنی این که ناحیه تو صفحه‌ی uv بالاخره حداقل از یه طرف نامحدودِ) و شاید حتی مجبور شیم از هر دو نقطه تو دو مرحله برای رد گزینه استفاده کنیم. البته با حل مثال‌های متعدد مطلب رو خوب یاد می‌گیرین. قبل از این که حل مثال‌ها رو شروع کنیم، بهتره چند تا رابطه رو بلد باشین که تو حل تست‌ها بهتون کمک میکنه:

$$\begin{cases} e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \ , \ e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i \\ \mathrm{Ln}(re^{i\theta})=\mathrm{Ln}r+i\theta \quad (\text{شاخه اصلی لگاریتم مدنظر ماست}) \\ \cos(iz)=\cosh z \quad , \quad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad , \quad \sin(iz)=i\sinh z \quad , \quad \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \end{cases}$$

مثال۱: نگاشت $w=\frac{z}{1-z}$ **نیم صفحه بالایی صفحه z ها را به کدام ناحیه در صفحه w ها می‌نگارد؟** (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)

۱) فقط ربع اول ۲) فقط ربع سوم ۳) فقط نیمه بالایی ۴) فقط نیمه پایینی

پاسخ: گزینه «۳» می‌تونیم اول یه نقطه تو نیم‌صفحه‌ی بالایی رو تو ضابطه‌ی w امتحان کنیم. نقطه‌ی $z=1+i$ مناسب و به ازای اون داریم:

$$w=\frac{z}{1-z}=\frac{1+i}{1-(1+i)}=\frac{1+i}{-i}=-\frac{1}{i}-1=i-1$$

خُب نقطه‌ی به دست اومده تو ربع دوم که اتفاقاً تو نیم صفحه بالایی هم هست، قرار داره، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) همگی به اتفاق غلطن

مثال۲: دایره $|z+i|=1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به کدام منحنی از صفحه $w=u+iv$ تبدیل می‌شود؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۷)

۱) $v=\frac{1}{2}$ ۲) $v=-\frac{1}{2}$ ۳) $v=1$ ۴) $u^2+(v+1)^2=1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌تونیم مثلاً نقطه‌ی $z=1-i$ رو که تو ناحیه $|z+i|=1$ قرار داره رو امتحان کنیم.

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \Rightarrow v=\frac{1}{2}$$

پس گزینه (۱) جوابه (البته مشخصه که با جایگذاری $v=\frac{1}{2}$ و $u=\frac{1}{2}$ گزینه (۴) صحیح نیست.)

مثال ۳: خط $y=\frac{x}{۲}$ از صفحه‌ی مختلط z، $(z=x+iy)$ تحت نگاشت $w=\frac{۱}{z}$، به کدام منحنی در صفحه‌ی w، $(w=u+iv)$ تبدیل می‌شود؟
(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)

۱) $v=-۲u$ ۲) $v=+\frac{۱}{۲}u$ ۳) $v=+۲u$ ۴) $v=-\frac{۱}{۲}u$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال ساده و اصطلاحاً خوراکِ!! می‌تونیم مثلاً $x=۲$ و $y=۱$ رو انتخاب کنیم، یعنی $z=۲+i$. حالا اونو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم:

$$w=\frac{۱}{۲+i}=\frac{۲-i}{۴-i^۲}=\frac{۲-i}{۵}=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}i$$

خُب همون‌طور که می‌بینین، تو رابطه‌ی بالا $u=\frac{۲}{۵}$ و $v=-\frac{۱}{۵}$ و این یعنی $v=-\frac{۱}{۲}u$، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۴: نگاشت $w=\frac{z-۱}{z-۲}$ نقاط واقع بر منحنی $|z+۱|=۳$ را بر کدام منحنی می‌نگارد؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات است. ۲) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد.
۳) دایره‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد. ۴) خطی موازی محور مختلط.

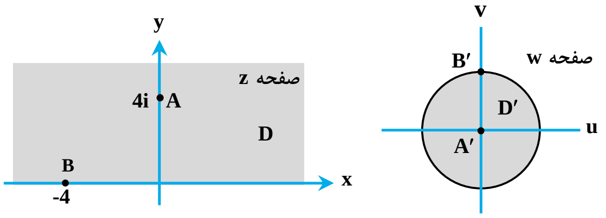
پاسخ: گزینه «۴» اولین کار اینه که یه نقطه روی منحنی انتخاب کنیم که به ما اطلاعات خوبی بِده. نقطه‌ی $z=۲$ تو ضابطه‌ی منحنی صدق میکنه و وقتی تو ضابطه‌ی نگاشت قرار میدیم، می‌فهمیم که $w\to\infty$ و این یعنی نقطه‌ی $z=۲$ به ناحیه‌ای تبدیل میشه که نامحدوده، مثلاً دایره نیست! (حتماً می‌دونین که دایره نمی‌تونه به ناحیه نامحدود باشه!) این یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) غلطن! چون دایره هستن! پس یکی از گزینه‌های (۲) و (۴) جوابه، گزینه (۲) میگه ناحیه‌ای که توسط این نگاشت به وجود میاد، شامل مبدأ هم هست، اما اگه قرار باشه توسط این نگاشت به مبدأ برسیم، باید $z=۱$ باشه (صورت کسر صفر بِشه) اما $z=۱$ نمی‌تونه باشه، چون روی منحنی $|z+۱|=۳$ قرار نداره، پس گزینه (۴) جوابه

مثال ۵: در مورد نگاشت $w=\frac{۲z-۱}{z-۲}$ کدام گزاره زیر صحیح است؟ (مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۱)

۱) این نگاشت صفحه z را روی صفحه w می‌نگارد. ۲) این نگاشت قرص واحد را به قرص واحد می‌نگارد.
۳) این نگاشت نیم‌صفحه فوقانی را به قرص واحد می‌نگارد. ۴) این نگاشت نیم‌صفحه راست را به نیم‌صفحه چپ می‌نگارد.

پاسخ: گزینه «۲» گزینه (۱) که خیلی غلطه و نیاز به توضیح نداره! گزینه (۴) هم راحت رو میشه! چون اگه مثلاً $z=۳$ قرار بِدیم (یعنی یه نقطه تو نیم صفحه‌ی سمت راست انتخاب کنیم)، اونوقت $w=۵$ و این یعنی نقطه‌ای تو نیم صفحه‌ی سمت راست، پس گزینه (۴) غلطه! اگه نقطه‌ی $z=۲+i$ رو از نیم‌صفحه بالایی انتخاب کنیم، این نقطه توسط نگاشت به صورت $w=\frac{۲(۲+i)-۱}{i}$ و یا به عبارت ساده‌تر به صورت $w=\frac{۳+۲i}{i}=۲-۳i$ در میاد که اصلاً درون دایره واحد قرار نداره، پس گزینه (۳) هم غلطه

مثال ۶: تابع تحلیلی که حوزهٔ D را به حوزهٔ D' تبدیل کند به طوری که نقاط A و B مطابق شکل به نقاط A' و B' دایره یکه تصویر شوند، کدام است؟
(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)



۱) $w=\frac{z-i}{-iz+۱}$ ۲) $w=\frac{z+۴i}{z-۴i}$
۳) $w=-\frac{z^۲+i}{iz^۲+۲}$ ۴) $w=\frac{z-۴i}{z+۴i}$

پاسخ: گزینه «۴» نقطه‌ی A به نقطه‌ی A' تبدیل شده، یعنی گزینه‌ای جوابه که اگه به جای z های اون، ۴i قرار بِدیم، مقدارش برابر با صفر بشه. فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

$$w=f(۴i)=\frac{۴i-۴i}{۴i+۴i}=۰$$

مثال ۷: تبدیل خطی کسری که به ترتیب نقاط -۱، i و $۱+i$، در صفحه z را بر روی نقاط ۰، ∞ و $۲+i$ در صفحه w تصویر می‌کند، کدام است؟
(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $w=\frac{z+۱}{z-i}$ ۲) $w=\sqrt{۲}\frac{z+۱}{z-i}$ ۳) $w=\frac{z-i}{z+۱}$ ۴) $w=\frac{۱}{۲}\frac{z+۱}{z-i}$

پاسخ: گزینه «۱» تنها گزینه‌ای که نقطه‌ی $۱+i$ رو به نقطه‌ی $۲+i$ تبدیل می‌کنه، نگاشت داده شده تو گزینه (۱) هستش

مثال ۸: نگاشت $w=\dfrac{z^2+i}{iz^2+1}$ ، ربع اول صفحهٔ z ($x>0$ و $y>0$) را به کدام ناحیه از صفحهٔ w تبدیل می‌کند؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲ و مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) نیم دایره بالایی از دایرهٔ یکه
۲) خارج دایره یکه
۳) بالای محور u و خارج از نیم‌دایره یکه
۴) داخل دایره یکه

پاسخ: گزینه «۲» نقطه‌ی $z=1+i$ تو ناحیه ذکر شده قرار داره (یعنی تو ربع اولِ) اگه اونو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بدیم، داریم:

$$w=\frac{(1+i)^2+i}{i(1+i)^2+1}=\frac{1+i^2+2i+i}{i(1+i^2+2i)+1}=-3i$$

همون‌طور که می‌بینین نقطه‌ی فوق خارج از دایره یکه هستش و از طرفی پایین محور u هم قرار داره، پس گزینه (۲) جوابه

مثال ۹: تبدیل $T(z)=\dfrac{z}{z-1}$ ، محور اعداد حقیقی را به کدام مجموعه تبدیل می‌کند؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲)

۱) محور اعداد حقیقی
۲) نیم‌محور راست اعداد حقیقی
۳) یک دایره
۴) یک نیم‌دایره

پاسخ: گزینه «۱» اگه $z=\frac{1}{2}$ باشه، اونوقت $T=-1$ میشه، بنابراین گزینه (۲) غلطه! (چون وقتی $T=-1$ به دست اومده یعنی نیم‌محور چپ هم می‌تونه تو جواب باشه.) گزینه‌های (۳) و (۴) هم به راحتی از بین جواب‌ها حذف می‌شن، چرا؟ برای این که اگه قرار باشه ناحیه جدید دایره یا نیم‌دایره باشه، باید به ازای برخی z ها، مقدار T عددی مختلط بِشه، اما با توجه به صورت سؤال وقتی z از بین اعداد حقیقی انتخاب میشه، چه جوری ممکنه $T(z)=\frac{z}{z-1}$ عددی مختلط رو به ما تحویل بِده!؟ پس بدون این که لازم باشه محاسبه‌ای انجام بِدیم، می‌تونیم گزینه (۱) رو تو پاسخنامه وارد کنیم

مثال ۱۰: نوار $\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}\{z\}<\pi$ ، تحت نگاشت $w=\dfrac{1+e^z}{1-e^z}$ به چه ناحیه‌ای در صفحه w تبدیل می‌شود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)

۱) داخل نیم‌دایره واحد که در آن $\operatorname{Im}\{w\}>0$
۲) داخل مثلث متساوی‌الساقین با رئوس $(-1,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$
۳) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل نیم‌دایره واحد که در آن $\operatorname{Im}\{w\}>0$
۴) تمام صفحه مختلط به غیر از داخل مثلث متساوی‌الساقین با رئوس $(-1,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$

پاسخ: گزینه «۱» خُب با یه سؤال نسبتاً سخت روبه‌رو هستیم، ولی ما به اینم کَلَک می‌زنیم! اولاً توجه کنین که گزینه‌های (۳) و (۴) دارن میگن این ناحیه که تو صفحه‌ی uv تولید میشه، بی‌در و پیکره! یعنی از بالا و پایین و حتی از چپ و راست نامحدودِ! اگه قرار باشه اینا راست بِگن، باید مخرج w صفر بشه، خُب حالا شما بگید ببینم آیا امکان داره $1-e^z$ با شرط $\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi$ صفر بِشه!؟ معلومه که نه؟ چون مثلاً z نمی‌تونه صفر بشه، پس این گزینه‌های (۳) و (۴) رو که خیلی دروغ‌گو بودن اخراج می‌کنیم اما برای انتخاب بین گزینه‌های (۱) و (۲) باید کمی بـه اطلاعـات نگاشـتی خودمـون هـم رجـوع کنیم، این که آیا تا حالا دیدین چنین نگاشت‌هایی مثلاً مثلث تولید کنن!؟ یا بیشتر نیم‌دایره یا دایره و این جور چیزا رو تولید میکـنن! بنـابراین گزینـه (۱) جوابه

مثال ۱۱: ناحیه‌ی $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ در صفحه‌ی z تحت نگاشت $w=\dfrac{-i}{z^2}$ ، به کدام ناحیه در صفحه‌ی w تبدیل می‌شود؟

(مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) ربع اول
۲) ربع دوم
۳) ربع سوم
۴) ربع چهارم

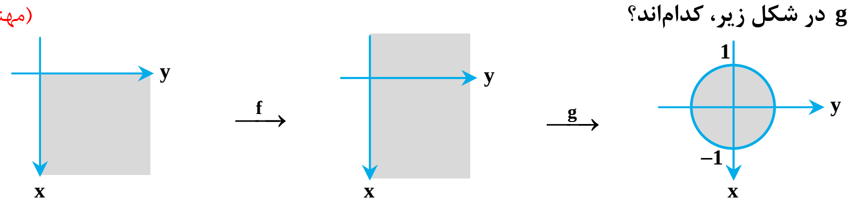
پاسخ: گزینه «۳» اگه نقطه‌ی $z=2+i$ که تو ناحیه‌ی $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ قرار داره رو تو ضابطه‌ی نگاشت قرار بدیم، داریم:

$$w=-\frac{i}{z^2}=\frac{-i}{(2+i)^2}=\frac{-i}{4-1+4i}=\frac{-i}{3+4i}=\frac{-i(3-4i)}{3^2-(4i)^2}=\frac{-3i-4}{9+16}=-\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$$

که نقطه‌ای تو ربع سومِ، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۲: نگاشت‌های f و g در شکل زیر، کدام‌اند؟

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۳)



۱) $f(z)=z^2\,,g(z)=\dfrac{1}{z+i}$
۲) $f(z)=z^3\,,g(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$
۳) $f(z)=z^2\,,g(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$
۴) $f(z)=z^3\,,g(z)=\dfrac{1}{z+1}$