

فصل اول

« یادآوری »

با توجه به این که بعضی دانشجویان مطالب ابتدایی ریاضیات را فراموش کرده‌اند در ابتدای این کتاب به صورت خلاصه اشاره‌ای به این مباحث شده است. از این فصل در آزمون‌های دانشگاه دولتی به طور مستقیم سؤال مطرح نشده ولی در آزمون‌های دانشگاه آزاد به طور مستقیم سؤال آمده است همچنین در آزمون‌های دانشگاه دولتی به طور غیر مستقیم مباحث این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرد. دانشجویانی که در مباحث این فصل دارای پایه‌ی علمی قوی هستند، می‌توانند از فصل بعد شروع به مطالعه‌ی کتاب کنند.

توان

❖ **تعریف ۱:** a به توان n را به شکل a^n نمایش می‌دهند، یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم. اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم:

$$۱) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad ۲) a^n \times b^n = (ab)^n \quad ۳) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$۴) (a^m)^n = a^{mn} \quad ۵) a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad ۶) \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

❖ **تذکره ۱:** هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد: $a^1 = a$

❖ **تذکره ۲:** هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، برابر یک می‌شود: $a^0 = 1$

❖ **مثال ۱:** حاصل عبارت $\frac{a^3 \times b^3 \times c^{-2}}{a^{-2} \times c^2 \times b^{-1}} \div \frac{a^2 \times c^{-2} \times b}{(ab)^{-1}}$ برابر کدام است؟

$$a^2 b^2 \quad (۴) \quad \frac{a^2 b^3}{c^2} \quad (۳) \quad \left(\frac{c}{ab}\right)^2 \quad (۲) \quad \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \quad (۱)$$

$$\frac{a^3 \times b^3 \times a^2 \times b^1}{c^2 \times c^2} \div \frac{a^2 \times b \times (ab)^1}{c^2} = \frac{a^5 b^4}{c^4} \times \frac{c^2}{a^3 b^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2} = \left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

❑ پاسخ: گزینه «۱»

رادیکالها

❖ **تعریف ۲:** عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه n ام، a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند.

❖ **فضای رادیکالها:**

$$۱) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad ۲) a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0) \quad ۳) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad ۴) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$



تذکره ۳: اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد.

تذکره ۴: اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد.

مثال: ۱) $\sqrt{36} = 6$ ۲) $\sqrt{-27} = -3$ ۳) $\sqrt{-16} \neq -4$

مثال ۲: حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{ab}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[6]{ab^2}$ ۲) $\sqrt[6]{ab}$ ۳) $\sqrt[6]{a^2b}$ ۴) $\sqrt[6]{ab}$

$$A = \frac{\sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[6]{b^3}}{\sqrt[6]{ab}} = \frac{\sqrt[6]{a^2b^3}}{\sqrt[6]{ab}} = \sqrt[6]{\frac{a^2b^3}{ab}} = \sqrt[6]{ab^2}$$

پاسخ: گزینه «۱»

توجه شود در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه‌ها با هم برابر نبودند، لذا کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم.

مثال ۳: حاصل عبارت $A = 2\sqrt[3]{54} + \sqrt{12} - \sqrt[3]{128}$ را بدست آورید.

پاسخ: $A = 2\sqrt[3]{27 \times 2} + \sqrt{3 \times 4} - \sqrt[3]{4^3 \times 2} = 6\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{3}$

مثال ۴: حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ (x > 0) کدام است؟

۱) \sqrt{x} ۲) \sqrt{x} ۳) $\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$ ۴) $\sqrt[6]{x^5}$

پاسخ: گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها در هم به یک رادیکال برسیم:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2} \times x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[6]{\frac{x}{x^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$$

مثال ۵: ساده شده عبارت $A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{1}{4}\sqrt{80}$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳»

$$A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{1}{4}\sqrt{80} = 2\sqrt{2^2 \times 5} - \sqrt{3^2 \times 5} + \frac{1}{4}\sqrt{2^4 \times 5} = 2 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \frac{1}{4} \times 2^2 \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

مثال ۶: حاصل $A = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{64}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $1 - 2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2} - 1$ ۴) -۱

پاسخ: گزینه «۴» چون $1 - \sqrt{2}$ ، عددی منفی است، پس وقتی می‌خواهیم آن را از قدر مطلق بیرون بیاوریم آن را در یک منفی ضرب می‌کنیم.

$$A = |1 - \sqrt{2}| + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt[3]{2^6} \Rightarrow A = -(1 - \sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt[3]{2^3}$$

$$A = -1 + \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \Rightarrow A = -1 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2} + 2 - 2}{\sqrt{2}} = -1$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a) = g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ اتحاد می باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2 - 1 = 3$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a = \pm 2$ برقرار می باشد، انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می دهد به شرح زیر می باشد:

- | | |
|--|--|
| ۱) $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ | ۶) $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$ |
| ۲) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3b^2a$ | ۷) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$ |
| ۳) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ | ۸) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$ |
| ۴) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ | ۹) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ |
| ۵) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ | ۱۰) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ |

مثال ۷: اگر $x - \frac{1}{x} = -1$ باشد آنگاه حاصل $A = x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$A = x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}_{-1} + 3(x) \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{-1} = (-1)^3 + 3 \times 1 \times (-1) = -4$$

مثال ۸: تفاضل دو عدد ۹ و حاصل ضرب آن دو ۱۸- بوده؛ «مربع مجموع آنها» چقدر است؟

- ۱) ۴۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از اتحادها داریم:

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ xy = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 9^2 - 2 \times 18 = 45 \\ (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 45 + 2xy = 45 - 2 \times 18 = 9 \end{cases}$$

توجه: اگر مجموع مربعات خواسته می شد باید $x^2 + y^2$ را محاسبه می کردیم که در این حالت گزینه (۱) صحیح می شد.

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب. م. م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک. م. م) اشاره کرد.

مثال ۹: عبارات زیر را تجزیه کنید:

- | | |
|--|--|
| ۱) $x^2 - 27 = (x-3)(x^2 + 9 + 3x)$ | ۳) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ |
| ۲) $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2 + 4)$ | ۴) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$ |

مثال ۱۰: حاصل $\frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 4} + \frac{3}{x+2}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{x-2}$ ۲) $\frac{x}{x-2}$ ۳) $\frac{x}{x+2}$ ۴) $\frac{2}{x+2}$

پاسخ: گزینه «۲» با تجزیه عبارت مخرج داریم:

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 4} + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2 - x + 6}{(x-2)(x+2)} + \frac{3}{x+2} = \frac{x^2 - x + 6 + 3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x + 6 + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x-2}$$



مثال ۱۱: عبارت $\frac{1-y+y^3-y^6}{1-y}$ با کدام عبارت زیر هم ارز است؟

(۱) y^3 (۲) $y^3 + 1$ (۳) $1 - y + y^3$ (۴) $y^3 - y^6$

$$\frac{1-y+y^3-y^6}{1-y} = \frac{1-y+y^3(1-y)}{1-y} = \frac{(1-y)(1+y^3)}{1-y} = 1+y^3$$

پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۱۲: ساده شده عبارت $A = \frac{(x^2 - 2x^2 + x - 2)(x^2 + 3x + 2)}{(x^2 - 4)(x^2 - x + 1)}$ کدام است؟

(۱) $(x+1)$ (۲) $(x+1)^2$ (۳) 1 (۴) -1

$$A = \frac{[x^2(x-2) + (x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)} = (x+1)^2$$

پاسخ: گزینه «۲»

گویا کردن مخرج کسرها:

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارات یکی از جمله‌های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در پرانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$ جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد.

۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}} = \frac{\text{صورت کسر}}{a-b}$ جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ در مخرج کسر می‌باشد.

۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو یا چند عبارت (عدد):

برای بدست آوردن (ب.م.م) دو عبارت (عدد) پس از تجزیه دو عبارت (عدد) به حاصلضرب عوامل، حاصلضرب عوامل اول مشترک با کوچکترین توان را به عنوان (ب.م.م) و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (ک.م.م) تعیین می‌کنیم.

مثال ۱۳: (ب.م.م) و (ک.م.م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید:

پاسخ: $24 = 3 \times 8 = 3 \times 2^3$, $54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$

(ب.م.م) برابر $3 \times 2 = 6$ و (ک.م.م) برابر $3^3 \times 2^3 = 216$ می‌باشد.

مثال ۱۴: (ک.م.م) دو عبارت $A = (x^2 - 1)$, $B = (x-1)^2(x+1)^2$ را بدست آورید.

پاسخ: $A = x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, $B = (x-1)^2(x+1)^2$

ک.م.م = $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)$

معادلات و نامعادلات

معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax + b = 0$ با شرط $a \neq 0$ است که در این حالت $x = -\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A = ax + b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است، مشخص است که علامت عبارت $A = ax + b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax + b = 0$ موافق علامت ضریب x (a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	مخالف علامت a
	موافق علامت a

نکته ۱: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱۵: عبارتهای $A = 3x + 6$ و $B = 4 - 2x$ را تعیین علامت کنید.

$$1) A = 3x + 6 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$A = 3x + 6$	-	0	+

$$2) B = 4 - 2x \Rightarrow 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$B = 4 - 2x$	+	0	-

مثال ۱۶: عبارت $A = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2(x+4)}$ را تعیین علامت کنید.

X	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
A	-	0	+	-	+

توجه شود که در این مثال چون $(x-1)^2$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تأثیری در علامت A ندارد. همچنین دقت شود ریشه‌ها از کوچکترین مقدار از سمت چپ به راست در جدول مرتب می‌شوند.

لازم به توضیح است که نقاط $x = 1$ و $x = -4$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بعنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

نتیجه: اگر $x > 3$ یا $2 < x < -4$ - آنگاه $A > 0$ خواهد بود.

اگر $x < -4$ یا $3 < x < 2$ - آنگاه $A < 0$ خواهد بود.

نکته ۲: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف [در مثال قبل $(x-1)^2$] صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} ax + b < 0 \\ \text{یا} \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

مثال ۱۷: نامعادله $-\frac{3}{2}x - 1 < \frac{1}{2}x + 4$ را حل کنید.

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x > -5 \rightarrow 2x > -5 \xrightarrow{\div 2} x > -\frac{5}{2}$$

پاسخ:

نکته ۳: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.



معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^2 + bx + c = 0$ که $a \neq 0$ و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta = b^2 - 4ac$ بیان می‌شود و داریم:

(۱) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

(۲) اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

(۳) اگر $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

نکته ۴: اگر در معادله درجه دوم $a + b + c = 0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته ۵: اگر در معادله درجه دوم $a + c = b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (-۱) و ریشه دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

نکته ۶: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta = a^2$ خواهد بود.

نکته ۷: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(K+1)^2}{K}$

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۸: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است.

نکته ۹: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است.

نکته ۱۰: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2 + bnx + cn^2 = 0$ است.

نکته ۱۱: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ است.

مثال ۱۸: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ است؟

(۱) $x^2 - 5x - 4 = 0$ (۲) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (۳) $x^2 + 6x - 4 = 0$ (۴) $x^2 - 5x + 4 = 0$

پاسخ: گزینه «۲» باتوجه به نکته ۱۰، در این مثال $n = 2$ می‌باشد.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است:

اگر x' و x'' دو ریشه معادله درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S = x' + x''$ و $P = x' \cdot x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ بیان می‌شود.

مثال ۱۹: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشد.

$$\begin{cases} S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ P = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} S = x' + x'' = -\frac{b}{a} \rightarrow \text{حاصل جمع دو ریشه} \\ P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \rightarrow \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} \begin{cases} x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P \\ x'^3 + x''^3 = S^3 - 3SP \\ \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \\ |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \end{cases}$$

مثال ۲۰: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - kx + 24 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2$ برابر است با:

- (۱) $-k^2$ (۲) k^2 (۳) 24 (۴) -24

پاسخ: گزینه «۲» مجموعه ریشه‌های معادله داده شده برابر k و حاصلضرب ریشه‌ها برابر 24 است، یعنی:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1x_2 = 24 \end{cases}$$

بنابراین: $(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 = k^2$

مثال ۲۱: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - k^2x + k = 0$ باشند، مقدار عبارت $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) $-k$ (۴) k

پاسخ: گزینه «۴» $\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{k^2}{k} = k$

تعیین علامت عبارت $A = ax^2 + bx + c$:

اگر x_1 و x_2 دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه:

X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
A	موافق علامت a	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نکته ۱۲: شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که: $a > 0, \Delta < 0$

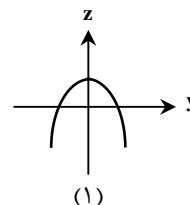
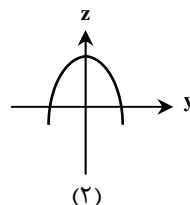
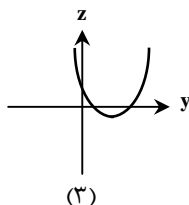
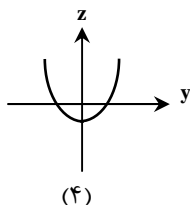
نکته ۱۳: شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که: $a < 0, \Delta < 0$

تابع با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید، داریم:

نکته ۱۴: اگر $a > 0$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a < 0$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

نکته ۱۵: مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ می‌باشد.

مثال ۲۲: نمودار $z = y^2 - 6y + 5$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب y^2 مثبت است لذا نمودار تابع دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند

اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

تذکره ۵: خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن تابع $y = ax^2 + bx + c$ است.

تذکره ۶: در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال ۲۳: در تابع $y = x^2 - kx + 2$ ، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) -4 (۲) 2 (۳) -2 (۴) 4

پاسخ: گزینه «۱» طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت: $x = \frac{k}{2} = -2 \rightarrow k = -4$



محاسبه باقیمانده چند جمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ بر $mx + n$

برای محاسبه باقیمانده عبارت $P(x)$ بر عبارتی مانند $mx + n$ باید به جای x در ضابطه $P(x)$ ریشه معادله $mx + n = 0$ ، یعنی $x = -\frac{n}{m}$ را قرار دهیم.

مثال ۲۴: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $8x^3 + 4x^2 - 10x$ بر دو جمله‌ای $2x - 1$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

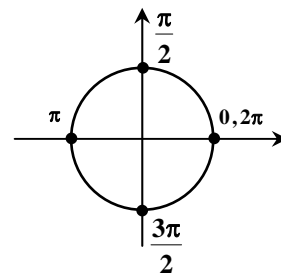
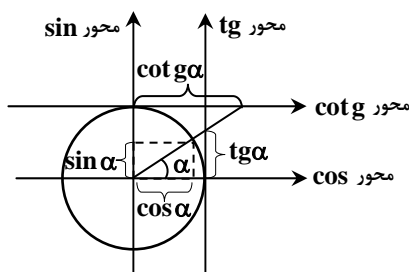
پاسخ: گزینه «۱» $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10 \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} - 5 = 1 + 1 - 5 = -3$

مثال ۲۵: اگر باقیمانده تقسیم $x^2 - ax + 3a$ بر $x - a$ عدد ۶ باشد. آن‌گاه a برابر است با:

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به صورت مسئله مقدار $P(a)$ برابر ۶ می‌باشد. $P(a) = 6 \Rightarrow a^2 - a^2 + 3a = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

مثلثات



نسبت‌های مثلثاتی:

علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع دایره مثلثاتی در جدول زیر آمده است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin x	+	+	-	-
cos x	+	-	-	+
tg x	+	-	+	-
cotg x	+	-	+	-

تذکره ۷: توجه شود که فقط کافی است علامتهای sin و cos در چهار ربع حفظ شود، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت sin و cos در هم بدست خواهد آمد.

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	0	-۱	0
cos x	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-۱	0	۱
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot x	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

تذکره ۸: واحدهای استفاده شده در جدول فوق بر حسب رادیان (R) می‌باشد در صورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول

$$\text{جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.} \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

نسبت‌های $\pi \pm \alpha$ ، $2n\pi \pm \alpha$ ، $(\frac{2n+1}{2})\pi \pm \alpha$:

(الف) کمان $(-\alpha)$:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (1) \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha \quad (3) \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \quad (4)$$

(ب) کمان $(\pi - \alpha)$:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad (1) \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha \quad (3) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \quad (4)$$

(ج) کمان $(\pi + \alpha)$:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad (1) \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha \quad (3) \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha \quad (4)$$

(د) کمان $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \quad (1) \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \quad (3) \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{tg} \alpha \quad (4)$$

(س) کمان $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$:

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \quad (1) \quad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \quad (3) \quad \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\text{tg} \alpha \quad (4)$$

(ش) کمان $(2\pi - \alpha)$:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \quad (1) \quad \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha \quad (3) \quad \cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha \quad (4)$$

(ن) کمان $(2\pi + \alpha)$:

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha \quad (1) \quad \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha \quad (2) \quad \text{tg}(2\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha \quad (3) \quad \cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha \quad (4)$$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت تر توجه فرمایید.

● نکته ۱۶: برای tg و $\cot \text{g}$ مضارب فرد و زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر tg و $\cot \text{g}$ عبارت بعد از مضارب فرد یا زوج π محاسبه می‌شود و برای \sin و \cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد π را حذف می‌کنیم.)

● نکته ۱۷: برای \sin و \cos مضارب زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر \sin و \cos عبارت بعد از مضارب زوج π محاسبه می‌شود.)

● نکته ۱۸: در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامت نسبت مثلثاتی آن کمان را مشخص می‌کنیم، در صورت وجود مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ ، \sin را به \cos و tg را به $\cot \text{g}$ و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

✍ مثال ۲۶: مقادیر $\text{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ ، $\sin(\pi + \alpha)$ ، $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ را تعیین کنید. (α زاویه‌ای حاده می‌باشد)

☑ پاسخ:

۱) $\text{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \underline{\underline{-\cot \alpha}}$ تکته ۱۸	۲) $\sin(\pi + \alpha) = \underline{\underline{-\sin \alpha}}$ تکته ۱۶	۳) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \underline{\underline{-\sin \alpha}}$ تکته ۱۸
---	---	--

✍ مثال ۲۷: اگر $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد آنگاه $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

☑ پاسخ: گزینه «۲»

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \xrightarrow[\text{و } \cos \alpha \text{ در این ناحیه منفی است}]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع دوم است}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اما با توجه به نکته ۱۸ داریم:



اتحادهای مهم مثلثاتی:

$$\begin{aligned} \text{tg}\alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (۲) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \quad (۱) \\ \text{tg}\alpha \cdot \cot g\alpha &= 1, (\alpha \neq \frac{k\pi}{2}) \quad (۴) & \cot g\alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (۳) \\ 1 + \cot g^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, (\alpha \neq n\pi) \quad (۶) & 1 + \text{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, (\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2}) \quad (۵) \\ \sin \alpha - \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \quad (۸) & \sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \quad (۷) \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha, \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (۹) \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases} \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \quad (۱۳) & \cos 2\alpha &= \frac{1 - \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} \quad (۱۲) & \text{tg} 2\alpha &= \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} \quad (۱۱) \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \quad (۱۵) & \sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \quad (۱۴) \end{aligned}$$

مثال ۲۸: حاصل عبارت $(1 - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cot g \theta) - \tan \theta \cdot \cot g \theta$ برابر کدام است؟

(۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $-\sin^2 \theta$ (۳) $\cos^2 \theta$ (۴) $-\cos^2 \theta$

پاسخ: گزینه «۴»

$$A = (1 - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cot g \theta) - \tan \theta \cot g \theta$$

$$A = (1 - \cos \theta)(1 + \cancel{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\cancel{\sin \theta}}) - 1 = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) - 1 = 1 - \cos^2 \theta - 1 = -\cos^2 \theta$$

مثال ۲۹: حاصل عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

$$A = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x=7/5^\circ} A = \frac{1}{4} \times \sin(4 \times 7/5^\circ) = \frac{1}{4} \sin 3^\circ = \frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۳۰: اگر $\text{tg} x + \cot g x = 3$ باشد حاصل $A = \text{tg}^3 x + \cot g^3 x$ کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۹ (۳) ۲۷ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» بر طبق اتحاد $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ داریم:

$$\text{tg}^3 x + \cot g^3 x = (\text{tg} x + \cot g x)^3 - 3 \text{tg} x \cot g x (\text{tg} x + \cot g x) = 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 18$$

مثال ۳۱: اگر $\sin \alpha = \frac{a^2 + 1}{2a}$ باشد $\cos 2\alpha$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) -۱