درسنامه: اعداد مختلط و خواص آن

اعداد مختلط

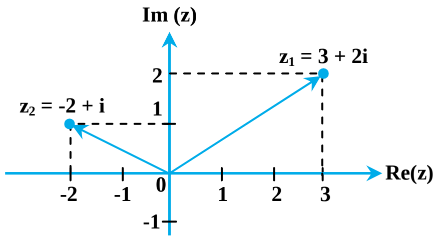
❖ **تعریف۱:** هر عدد مختلط به فرم $z = x + iy$ نمایش داده می‌شود که x و y دو عدد حقیقی بوده و $i = \sqrt{-۱}$ و لذا $i^۲ = -۱$ می‌باشد. از این رابطه در ضرب، تقسیم و روابط محاسباتی اعداد مختلط، زیاد استفاده می‌شود. (چون در مهندسی برق جریان را با i نمایش می‌دهند، به همین دلیل در بعضی کتب برق به جای i از حرف j جهت نشان دادن یکه‌ی موهومی استفاده می‌شود) اگر عدد مختلط z به صورت $z = x + iy$ تعریف شود، آن را فرم دکارتی عدد مختلط می‌گویند. x را قسمت **حقیقی** z و y را قسمت **موهومی** z می‌نامیم و آن را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x = \operatorname{Re} z \ , \quad y = \operatorname{Im} z$$

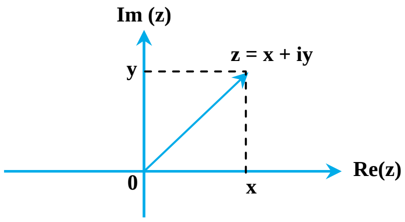
پس به طور کلی مجموعه اعداد مختلط به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \ , \ i^۲ = -۱\} =$ مجموعه اعداد مختلط

هر عدد حقیقی را می‌توان یک عدد مختلط فرض کرد که مؤلفه‌ی موهومی آن صفر است. مثلاً اگر x عددی حقیقی باشد، می‌توان آن را به شکل $z = x + ۰i$ نوشت. بنابراین اکثر مواقع می‌توان قواعد اعداد مختلط را بر روی اعداد حقیقی هم اجرا کرد.

برای نمایش عدد مختلط z، دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم، و بر روی محور افقی، قسمت حقیقی z و بر روی محور قائم، قسمت موهومی z را نشان می‌دهیم.



،



❖ **تعریف۲:** به ازای هر عدد مختلط $z = x + iy$، عدد مختلط $-z = -x - iy$ را قرینه‌ی z می‌نامیم.

❖ **تعریف۳:** قدر مطلق (اندازه) عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

برای مثال، قدر مطلق عدد مختلط $z = ۱ + i\sqrt{۳}$ برابر $|z| = ۲$ می‌باشد.

قدر مطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و غیرمنفی است و فاصله‌ی آن عدد مختلط تا مبدأ مختصات را نشان می‌دهد.

اعمال حسابی در اعداد مختلط

قوانین جمع، تفریق، تقسیم و ضرب اعداد مختلط، همانند اعداد حقیقی می‌باشد:

جمع: مجموع دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ به صورت روبرو است: $z_۱ + z_۲ = (x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲)$

تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ به صورت روبرو است: $z_۱ - z_۲ = (x_۱ - x_۲) + i(y_۱ - y_۲)$

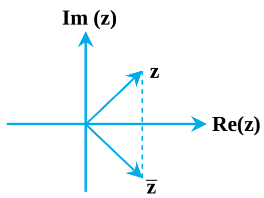
ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ کافی است دو عدد را به صورت معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و به جای $i^۲$، مقدار -۱ را قرار دهیم.

$$z_۱ . z_۲ = (x_۱ + iy_۱)(x_۲ + iy_۲) = x_۱x_۲ + ix_۱y_۲ + ix_۲y_۱ + i^۲ y_۱y_۲ = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲) + i(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)$$

تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{x_۱ + iy_۱}{x_۲ + iy_۲} \times \frac{x_۲ - iy_۲}{x_۲ - iy_۲} = \frac{x_۱x_۲ - ix_۱y_۲ + ix_۲y_۱ - i^۲ y_۱y_۲}{x_۲^۲ + y_۲^۲} = \frac{x_۱x_۲ + y_۱y_۲}{x_۲^۲ + y_۲^۲} + i\,\frac{x_۲y_۱ - x_۱y_۲}{x_۲^۲ + y_۲^۲}$$

مزدوج یک عدد مختلط



به ازای هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$، مزدوج z به صورت $\bar{z} = x - iy$ تعریف می‌شود و آن را «زِد بار» می‌خوانیم!

برای مثال مزدوج عدد مختلط $z = ۵ + ۲i$ به صورت $\bar{z} = ۵ - ۲i$ و مزدوج عدد مختلط $z = -i$ به صورت $\bar{z} = +i$ تعریف می‌شود. از نظر هندسی $\bar{z}$، قرینه‌ی z نسبت به محور حقیقی است.

تذکر۱: مزدوج هر عدد حقیقی خودش می‌شود. یعنی اگر برای عدد مختلط $z = x + iy$، مقدار y صفر باشد، آن‌گاه $z = x$ و لذا $\bar{z} = x$ خواهد بود.

نکته۱: چون $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$، آن‌گاه $z\bar{z}$ به شکل زیر حساب می‌شود:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^۲ - i^۲y^۲ = x^۲ - (-۱)y^۲ = x^۲ + y^۲$$

می‌دانیم $x^۲ + y^۲$ برابر با $|z|^۲$ است، پس تساوی زیر را داریم:

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^۲}$$

از تساوی فوق در پاسخ به سؤالات، زیاد استفاده می‌کنیم.

خواص اعداد مختلط

فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ۲) $|z| = |\bar{z}|$ ۳) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ۴) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

۵) $\overline{(\bar{z})} = z$ ۶) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ۷) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ۸) $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

۹) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ۱۰) $|z_1| - |z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$

مثال ۱: حاصل $A = (1+2i)(i+2)$ برابر است با:

۱) $5i$ ۲) $-5i$ ۳) $4+5i$ ۴) $4-5i$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از ضرب عدد مختلط داریم:

$$A = (1+2i)(2+i) = 2+i+4i+2i^2 = 2+5i-2 = 5i$$

مثال ۲: حاصل $A = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ کدام است؟

۱) i ۲) $-i$ ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه «۱» عبارت را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i^2}{(\sqrt{3})^2 - i^2} = \frac{4i}{4} = i$$

مثال ۳: حاصل $A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

۱) $\frac{i}{10}$ ۲) $-\frac{i}{10}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید پرانتزها را در هم ضرب کرده و سپس با استفاده از $i^2 = -1$، مخرج را ساده کنیم:

$$A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)} = \frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)} = \frac{1}{(1+3i)(3+i)} \Rightarrow A = \frac{1}{3+i+9i+3i^2} = \frac{1}{10i} = \frac{1}{10i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{10i^2} = -\frac{i}{10}$$

مثال ۴: مقدار $\frac{i^{36} - i^{27}}{i^{124} - i^{12} + i^5}$ برابر کدام است؟

۱) $1-i$ ۲) $1+i$ ۳) $i-1$ ۴) $-i-1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $i^2 = -1$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{i^{36} - i^{27}}{i^{124} - i^{12} + i^5} = \frac{(i^2)^{18} - (i^2)^{13} i}{(i^2)^{62} - (i^2)^6 + (i^2)^2 i} = \frac{(-1)^{18} - (-1)^{13} i}{(-1)^{62} - (-1)^6 + (-1)^2 i} = \frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i$$

نکته ۲: مجموع هر چهار توان متوالی از i برابر با صفر است، یعنی داریم:

$$\boxed{i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0}$$

مثال ۵: حاصل $S = \frac{1 + i^{1390} + i^{1391} + i^{1392} + i^{1393}}{1 - (i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} + i^{2014})}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-i$

پاسخ: گزینه «۲» طبق نکته‌ی فوق مجموع هر چهار توان متوالی از i برابر با صفر است. پس مجموع چهار توان i در صورت و مخرج صفرند، بنابراین فقط اعداد ۱ در صورت و مخرج باقی می‌مانند. پس $S = \frac{1}{1} = 1$ می‌شود.

مثال ۶: فرض کنید $z \in C$ و $|z+ai| = |z+bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a \ne b$)، در این صورت مقدار $z - \bar{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $z = x+iy$ داریم:

$$|x+iy+ai| = |x+iy+bi| \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2 \Rightarrow y+a = \pm(y+b) \Rightarrow y = -\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1)$$

$$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = 2yi \xrightarrow{(1)} z - \bar{z} = 2\left[-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]i = -(a+b)i$$

نکته۳: برای این که دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ با هم برابر باشند، باید دو شرط $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ برقرار شود.

مثال۷: در معادله مختلط $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

۱) $x = -1 , y = 2$　۲) $x = 1 , y = -2$　۳) $x = 0 , y = -2$　۴) $x = 1 , y = 0$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم:
$$(3x + 5y) + (2y - x)i = 7 + 5i$$
برای این که تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی با یکدیگر برابر باشند، یعنی داریم:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6y - 3x = 15 \end{cases} \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2 , x = -1$$

نکته۴: به ازای هر عدد مختلط $z = x + iy$، روابط زیر را داریم:
$$\mathrm{Re}\,z = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}\,z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

مثال۸: معادله‌ی خط $2x + 3y = 5$ در صفحه‌ی مختلط دارای چه معادله‌ای است؟

۱) $(3i - 2)z + (3 + 2i)\bar{z} = 5i$　۲) $(2i - 3)z + (3 + 2i)\bar{z} = 5i$　۳) $(3 + 2i)z + (3i - 2)\bar{z} = 10i$　۴) $(3 + 2i)z + (2i - 3)\bar{z} = 10i$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$، لذا داریم:
$$2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + 3\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 5 \Rightarrow z + \bar{z} + \frac{3}{2i}(z - \bar{z}) = 5 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 2i} (2i)z + (2i)\bar{z} + 3z - 3\bar{z} = 10i \Rightarrow (2i + 3)z + (2i - 3)\bar{z} = 10i$$

مثال۹: حاصل عبارت $k = \frac{\sqrt{1 + z^2} + iz}{z - i\sqrt{1 + z^2}}$ کدام است؟

۱) ۱　۲) $-i$　۳) -1　۴) $+i$

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با ضرب کردن مزدوج عبارت مخرج، در صورت و مخرج کسر داریم:
$$k = \frac{(\sqrt{1 + z^2} + iz)(z + i\sqrt{1 + z^2})}{(z - i\sqrt{1 + z^2})(z + i\sqrt{1 + z^2})} = \frac{z\sqrt{1 + z^2} + i(1 + z^2) + iz^2 + i^2 z\sqrt{1 + z^2}}{z^2 - i^2(1 + z^2)} = \frac{i(2z^2 + 1)}{2z^2 + 1} = i$$

روش دوم: راه حل ساده‌تر این است که با توجه به عبارت‌های صورت و مخرج، کسر را در عبارت $\frac{i}{i}$ ضرب کنیم و i را در صورت کسر، پشت پرانتز، نگه داشته و i در مخرج کسر را، در پرانتز ضرب کنیم:
$$\frac{(\sqrt{1 + z^2} + iz)}{(z - i\sqrt{1 + z^2})} \times \frac{i}{i} = \frac{i(\sqrt{1 + z^2} + iz)}{(iz + \sqrt{1 + z^2})} = i$$

مثال۱۰: اگر $|z| = 1$، آنگاه حاصل $\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right|$ برابر کدام گزینه است؟ (a و b اعدادی مختلط هستند، که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است)

۱) ۱　۲) ۲　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی $|z|^2 = z\bar{z}$ داریم:
$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right|^2 = \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)\left(\overline{\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}}\right) = \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)\left(\frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + a}\right)$$
چون $|z| = 1$ می‌باشد، لذا $z\bar{z} = |z|^2 = 1$، پس $\bar{z} = \frac{1}{z}$ می‌باشد و داریم:
$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right|^2 = \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)\left(\frac{\bar{a}\frac{1}{z} + \bar{b}}{b\left(\frac{1}{z}\right) + a}\right) = \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)\left(\frac{\frac{\bar{a} + \bar{b}z}{z}}{\frac{b + az}{z}}\right) = \left(\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right)\left(\frac{\bar{a} + \bar{b}z}{b + az}\right) = 1$$

مثال۱۱: فرض کنید $w = \frac{az + b}{cz + d}$، که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی هستند. می‌توان گفت: در تساوی $\frac{w - \bar{w}}{z - \bar{z}} = \frac{k}{|cz + d|^2}$ مقدار k برابر با .... می‌باشد و با شرط $k > 0$، مقادیر .... w و z هم علامت هستند.
(با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه تهران)

۱) $ad - bc$، موهومی　۲) $ad - bc$، حقیقی　۳) $\frac{a}{c} + b$، موهومی　۴) $\frac{a}{c} + b$، حقیقی

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا $w-\bar{w}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$w-\bar{w}=(\frac{az+b}{cz+d})-(\overline{\frac{az+b}{cz+d}})=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}}$$

با توجه به خواص اعداد مختلط و توجه به اینکه مزدوج هر عدد حقیقی خودش است، داریم:

$$w-\bar{w}=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)-(a\bar{z}+b)(cz+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}=\frac{acz\bar{z}+azd+bc\bar{z}+bd-a\bar{z}cz-a\bar{z}d-bcz-bd}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}$$

پس از ساده کردن صورت کسر داریم:

$$w-\bar{w}=\frac{ad(z-\bar{z})-bc(z-\bar{z})}{(cz+d)(\overline{cz+d})}=\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^۲}\Rightarrow \frac{\mathbf{w-\bar{w}}}{\mathbf{z-\bar{z}}}=\frac{\mathbf{ad-bc}}{\mathbf{|cz+d|^۲}}$$

بنابراین با توجه به صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت $k=ad-bc$ می‌باشد. خُب نقطه‌چین اول پُر شد! سراغ پُر کردن نقطه‌چین بعدی می‌رویم!

حل قسمت دوم راحت است، چون می‌دانیم « $w-\bar{w}$ » برابر با «دو برابر قسمت موهومی w » و « $z-\bar{z}$ » برابر با «دو برابر قسمت موهومی z» است، یعنی داریم:

$$\frac{w \text{ قسمت موهومی}}{z \text{ قسمت موهومی}}=\frac{k}{|cz+d|^۲}$$

با توجه به اینکه k و $|cz+d|$ مثبت هستند، پس هر علامتی که قسمت موهومی z داشته باشد، قسمت موهومی w نیز همان علامت را خواهد داشت.

ضرب داخلی و خارجی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $z_۱=x_۱+iy_۱$ و $z_۲=x_۲+iy_۲$ مفروضند. **ضرب داخلی** $z_۱$ و $z_۲$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{z_۱.z_۲=x_۱x_۲+y_۱y_۲}}$$

و **ضرب خارجی** $z_۱$ و $z_۲$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{z_۱\times z_۲=x_۱y_۲-y_۱x_۲}}$$

زاویه بین دو عدد (بردار) مختلط: زاویه بین دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ را می‌توان توسط یکی از دو رابطه زیر محاسبه نمود :

$$\boxed{\sin\theta=\frac{z_۱\times z_۲}{|z_۱||z_۲|}}\qquad \boxed{\cos\theta=\frac{z_۱.z_۲}{|z_۱||z_۲|}}$$

مثال ۱۲: اگر $z_۱=۳-۴i\,,\,z_۲=۳i-۴$ آنگاه حاصل $A=\frac{z_۱.z_۲}{z_۱\times z_۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۴) $\frac{۲۴}{۷}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\begin{cases} z_۱.z_۲=(۳)(-۴)+(-۴)(۳)=-۲۴ \\ z_۱\times z_۲=(۳)(۳)-(-۴)(-۴)=-۷ \end{cases}\Rightarrow A=\frac{z_۱.z_۲}{z_۱\times z_۲}=\frac{۲۴}{۷}$$

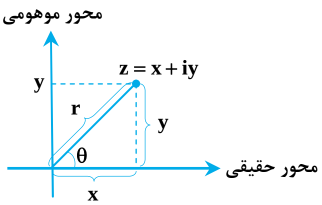
شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z=x+iy$، $(z\neq ۰)$ را می‌توان به شکل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. θ را **آرگومان** یا **آوند** یا **زاویه فاز** عدد مختلط z و r را **قدر مطلق، مدول** و یا **اندازه** عدد مختلط z می‌گویند و تساوی‌های مقابل را داریم: $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta$

محاسبه‌ی اندازه و آرگومانِ اعداد مختلط

عدد مختلط غیر صفر $z=x+iy$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل فاصله‌ی نقطه‌ی z تا مبدأ مختصات را با r نشان می‌دهیم و همان‌طور که گفتیم؛ به آن اندازه z گفته می‌شود و به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{r=|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}}}$$



توجه کنید که r عددی مثبت است و در $z=۰$، مختص θ تعریف نمی‌شود:

از طرفی مطابق شکل، منظور از یک آرگومان z، زاویه‌ای مانند θ است. چون $\frac{y}{x}=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}}$، $tg\theta=$ لذا داریم:

$$\boxed{\theta=\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})}$$

برای یک عدد مختلط با اضافه شدن مضارب ۲π، آرگومان‌های دیگر مشخص می‌شوند. برای این که به عدد مختلط z، آرگومان منحصر به فردی نسبت دهیم، θ را به بازه $(-\pi,\pi]$ محدود می‌کنیم و به این مقدار θ، **آرگومان اصلی** z می‌گوییم و آن را با $\mathrm{Arg}z$ نمایش می‌دهیم. مجموعه آوندهای عدد مختلط z را به صورت $\arg z$ نمایش می‌دهند: $\arg z=\{\mathrm{Arg}z+۲k\pi\ \ ,\ k\in z\}$

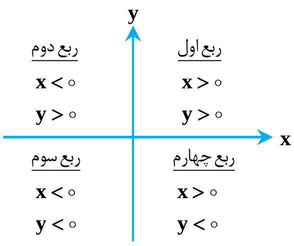
برای مثال عدد مختلط $z=۱+i$ را در نظر بگیرید؛ چون $x=y=۱$، بنابراین $\theta=\mathrm{Arctg}\frac{۱}{۱}$ و لذا $\theta=\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد. البته آرگومان‌های دیگری نیز می‌توان با اضافه کردن $\pm۲\pi$ به $+\frac{\pi}{۴}$ بیان کرد. در اکثر سؤالات برای هر عدد مختلط معمولاً آرگومان اصلی مدنظر است، مگر این که در صورت سؤال قید شود؛ پس از این‌جا به بعد آرگومان‌های اصلی مدنظرتان قرار گیرد.

تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی

یکی از مهم‌ترین مطالب در این بخش، تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی می‌باشد که البته تعیین θ اهمیت ویـژه‌ای دارد. مراحل زیر جهت این تبـدیل پیشنهاد می‌شود: (می‌خواهیم عدد مختلط $z=x+iy$ را به فرم $z=(r,\theta)$ بنویسیم.)

مرحله‌ی اول: بدست آوردن اندازه‌ی عدد مختلط (r): برای محاسبه‌ی r از رابطه‌ی $r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ استفاده می‌کنیم و به راحتی r حساب می‌شود.

مرحله‌ی دوم: تعیین ناحیه‌ای که نقطه‌ی (x,y) در آن قرار گرفته است: این موضوع را از دبیرستان بلدیم! اما برای یادآوری نمودار را دوباره رسم می‌کنیم!



۱) نقطه‌ی $z=۱+۲i$ در ربع اول قرار دارد، چون $x=۱$ و $y=۲$ می‌باشد.

۲) نقطه‌ی $z=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ در ربع دوم قرار دارد، چون $x=-\frac{۱}{۲}$ و $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد.

۳) نقطه‌ی $z=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}i$ در ربع سوم قرار دارد، چون $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

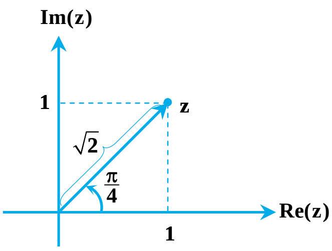
۴) نقطه‌ی $z=۱-i$ در ربع چهارم قرار دارد، چون $x=۱$ و $y=-۱$ می‌باشد.

مرحله‌ی سوم: تعیین آرگومان (θ): مهم‌ترین بخش در این عملیات، تعیین θ است و برای تعیین آن از دو رابطه‌ی زیر کمک می‌گیریم:

الف) اگر نقطه در ربع **اول** یا **چهارم** باشد: $\theta=\text{Arctg}\frac{y}{x}$

ب) اگر نقطه در ربع **دوم** و **سوم** باشد: $\theta=\pi+\text{Arctg}\frac{y}{x}$

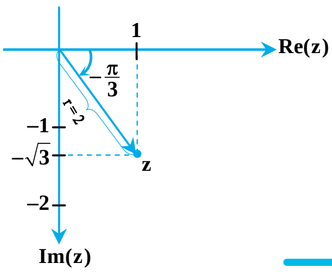
به بیان دیگر، در این روش برای عدد مختلط $z=x+iy$، ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $\theta=\text{Arctg}\frac{y}{x}$، مقدار θ را حساب می‌کنـیم. اگـر نقطـه در ربـع اول و یا چهارم بود، آن‌وقت همان θ را به عنوان آرگومان در نظر می‌گیریم. اما اگر نقطه در ربع دوم و یا سوم باشد، به عددی که برای θ از رابطه‌ی فـوق بدسـت آمده، عدد π را اضافه می‌کنیم. برای درک بهتر، چند مثال آورده شده است که البته شما در اکثر سؤالات لازم نیست شکل رسم کنید و خودتـان را درگیـر این ماجرا کنید، در این چند مثال برای درک بهتر شکل‌ها نیز رسم شده‌اند:



۱) $z=۱+i$

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}\\ \theta&=\text{Arctg}\frac{۱}{۱}=\frac{\pi}{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow z=(r,\theta)=(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$$

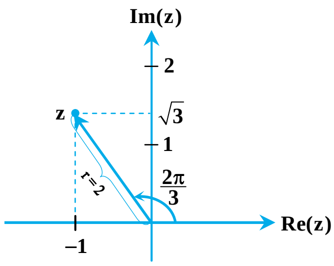
چون نقطه در ربع **اول** است، لذا $\theta=\frac{\pi}{۴}$ جواب موردنظر است.



۲) $z=۱-\sqrt{۳}i$

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{(-\sqrt{۳})^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲\\ \theta&=\text{Arctg}(\frac{-\sqrt{۳}}{۱})=-\text{Arctg}\sqrt{۳}=-\frac{\pi}{۳}\end{aligned}\right\}\Rightarrow z=(۲,-\frac{\pi}{۳})$$

چون نقطه در ربع **چهارم** قرار دارد، لذا $\theta=-\frac{\pi}{۳}$ جواب موردنظر است.

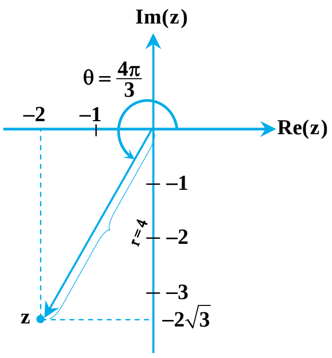


۳) $z=-۱+\sqrt{۳}i$

$$\left\{\begin{aligned} r&=\sqrt{(-۱)^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲\\ &\text{Arctg}(\frac{\sqrt{۳}}{-۱})=-\text{Arctg}\sqrt{۳}=-\frac{\pi}{۳}\end{aligned}\right.$$

چون نقطه در ربع **دوم** قرار دارد، باید به $-\frac{\pi}{۳}$، عدد π را اضافه کنیم، لذا $\theta=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$

و بنابراین $z=(۲,\frac{۲\pi}{۳})$ است.



۴) $z=-۲-۲\sqrt{۳}i$

$$\left\{\begin{aligned} r&=\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۲\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt{۴+۱۲}=۴\\ &\text{Arctg}(\frac{-۲\sqrt{۳}}{-۲})=\text{Arctg}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۳}\end{aligned}\right.$$

چون نقطه در ربع **سوم** است، پس باید به $\frac{\pi}{۳}$، عدد π اضافه شود، بنابراین $\theta=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$ جواب موردنظر است

و بنابراین $z=(۴,\frac{۴\pi}{۳})$ است.

تذکر ۲: آرگومان $z=ki$ برابر با $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $z=-ki$ برابر با $\theta=-\frac{\pi}{2}$ است (k عددی حقیقی و بزرگتر از صفر است.)

$$z=ki \Rightarrow \theta=\text{Arctg}\frac{k}{0}=\text{Arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2} \quad , \quad z=-ki \Rightarrow \theta=\text{Arctg}(\frac{-k}{0})=-\text{Arctg}\infty=-\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۳: اگر $z=i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$ ، آن‌گاه فرم قطبی z کدام است؟

۱) $(2,\frac{\pi}{6})$ ۲) $(2,\frac{\pi}{3})$ ۳) $(4,\frac{\pi}{6})$ ۴) $(4,\frac{\pi}{3})$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا پرانتزها را در هم ضرب می‌کنیم تا عبارت ساده شود:

$$z=(i-i^2\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)=(i+\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)=(\sqrt{3}+i)^2=(\sqrt{3})^2+i^2+2\sqrt{3}i=3-1+2\sqrt{3}i=2+2\sqrt{3}i$$

ابتدا اندازه‌ی z را حساب می‌کنیم:

$$r=|z|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+4\times 3}=\sqrt{16}=4$$

حالا باید آرگومان z را حساب کنیم و لذا داریم:

$$\text{Arctg}(\frac{y}{x})=\text{Arctg}(\frac{2\sqrt{3}}{2})=\text{Arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

چون θ در ربع اول قرار دارد، بنابراین همان $\theta=\frac{\pi}{3}$ مورد قبول است. پس $z=(4,\frac{\pi}{3})$ ، فرم قطبی مطلوب است.

شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ را می‌توان به فرم $z=re^{i\theta}$ نوشت که به آن فرم نمایی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z=re^{i\theta}$ را به شکل $z=r\measuredangle\theta$ نیز می‌توان نمایش داد که البته نمایش آخری در ریاضیات کمتر به چشم می‌خورد.

مثال ۱۴: عدد مختلط $z=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

پاسخ: با توجه به این‌که $r=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ می‌باشد، داریم:

$$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3}$$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

معمولاً برای **جمع یا تفریق** دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه **ضرب و تقسیم** دو عدد مختلط استفاده از فرم‌نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$2)\ z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{و} \quad 1)\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

مثال ۱۵: اگر $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$ ، مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

۱) $-i$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) i

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. یعنی؛ $z_1=e^{\frac{\pi}{5}i}$ و $z_2=e^{-\frac{\pi}{5}i}$ ، و داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2}=\frac{(e^{\frac{\pi}{5}i})^4}{e^{-\frac{\pi}{5}i}}=e^{\frac{4\pi}{5}i}.e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

تذکر ۳: روابط زیر بسیار کاربردی هستند، آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=e^{-\frac{3\pi}{2}i}=i \ , \ e^{-\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i \ , \ e^{\pi i}=e^{-\pi i}=-1 \ , \ e^{2\pi i}=e^{-2\pi i}=1$$

توان یک عدد مختلط و فرمول دموآور

برای به توان رساندن یک عدد مختلط، بهتر است ابتدا آن را به شکل قطبی یا نمایی بنویسیم و سپس آن را به توان برسانیم. فرض کنید $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ باشد، در این صورت داریم:

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{i(n\theta)} \Rightarrow \boxed{z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$$

یعنی اندازه را به توان n می‌رسانیم و کمان‌های sin و cos را در n ضرب می‌کنیم. فرمول فوق فرمول **دموآور** نام دارد که درآن n عددی طبیعی است.

مثال ۱۶: حاصل i^{-i} برابر چیست؟

۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$	۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$	۳) ۱	۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$، لذا داریم:

$$i^{-i} = (e^{\frac{\pi}{2}i})^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱۷: مقدار $(1+i)^{10}$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$، بنابراین داریم:

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{10} = 2^5 e^{\frac{10\pi}{4}i} = 32(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 32i$$

مثال ۱۸: حاصل $(2+2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

۱) $1024\measuredangle 60^\circ$	۲) $1024\measuredangle 300^\circ$	۳) $256\sqrt{2}\measuredangle 30^\circ$	۴) $256\sqrt{2}\measuredangle 60^\circ$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $2+2\sqrt{3}i = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$، بنابراین داریم:

$$(2+2\sqrt{3}i)^5 = (4e^{\frac{\pi}{3}i})^5 = 4^5(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1024\angle 300^\circ$$

مثال ۱۹: حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

۱) ۱	۲) ۱-	۳) $\frac{1}{2}$	۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تقسیم دو عبارت بر هم و توان ۸ برای صورت کسر بهتر است در مختصات نمایی سؤال را حل کنیم:

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \ ,\ -1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})} = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^8}{2^7 \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{8\pi}{3}i}}{e^{\frac{2\pi}{3}i}} = e^{\frac{6\pi}{3}i} = 1$$

مثال ۲۰: مقدار $\cos^4 x$ را با استفاده از اعداد مختلط بر حسب $\cos 4x$ و $\cos 2x$ بدست آورید.

پاسخ: توجه کنید که $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ و $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ لذا با جمع طرفین و تقسیم بر ۲ کردن داریم:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{2\cos x}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

(البته با کم کردن دو تساوی اول از هم به رابطه‌ی $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ می‌رسیم)، حالا به حل سؤال می‌پردازیم:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^4 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4 = \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}[(e^{ix}+e^{-ix})^2]^2 = \frac{1}{16}[e^{2ix}+e^{-2ix}+2e^{ix}.e^{-ix}]^2$$

$$= \frac{1}{16}[e^{2ix}+e^{-2ix}+2]^2 = \frac{1}{16}[(e^{2ix})^2+(e^{-2ix})^2+2^2+2e^{2ix}.e^{-2ix}+2(e^{2ix})(2)+2(e^{-2ix})\times 2]$$

$$= \frac{1}{16}[e^{4ix}+e^{-4ix}+4+2+4(e^{2ix}+e^{-2ix})] = \frac{1}{16}[2\cos 4x + 6 + 8\cos 2x] = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

مثال ۲۱: حاصل $z = 1+i+i^2+\cdots+i^{1392}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر	۲) ۱	۳) $\frac{i+1}{i-1}$	۴) $-\frac{i+1}{i-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با شرط $k \neq 1$، به ازای هر k همواره رابطه‌ی مقابل را داریم:

$$1+k+k^2+\cdots+k^{n-1} = \frac{k^n-1}{k-1}$$

با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت:

$$z = \frac{i^{1393}-1}{i-1} = \frac{i(i)^{1392}-1}{i-1} = \frac{i(i^2)^{696}-1}{i-1} = \frac{i(-1)^{696}-1}{i-1} = \frac{i-1}{i-1} = 1$$

مثال ۲۲: حاصل $A=(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$ کدام است؟

۱) $2^{n+1}\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}]$
۲) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2}-i\sin\frac{n\alpha}{2}]$
۳) $2^{n+1}\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2}-i\sin\frac{n\alpha}{2}]$
۴) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}]$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$، و همچنین $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$، با جایگذاری این مقادیر در رابطه داریم:

$$A=(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})^n$$

با فاکتورگیری از عبارت $2\cos\frac{\alpha}{2}$ داریم:

$$A=[2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})]^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}[\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}]$$

مثال ۲۳: اگر تابع $f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ax\sin n\alpha$ بر x^2+1 بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ چقدر باید باشد؟

۱) ۱
۲) ۲-
۳) ۱-
۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» برای اینکه تابع $f(x)$ بر x^2+1 بخش‌پذیر باشد، باید ریشه‌های معادله $x^2+1=0$ را بدست آوریم و آن‌ها را در ضابطه‌ی $f(x)$ به جای xها قرار دهیم. هر دو ریشه باید $f(x)$ را صفر کنند. پس اول ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$x^2+1=0\Rightarrow(x-i)(x+i)=0\Rightarrow x=\pm i$$

$$f(i)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=0\Rightarrow\cos n\alpha+i\sin n\alpha+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=0\Rightarrow(1+b)(\cos n\alpha)+i(1-a)\sin n\alpha=0$$

برای صفر شدن سمت چپ باید مقادیر حقیقی و موهومی صفر شوند، بنابراین $b=-1$ و $a=1$ می‌شود. اگر قرار دهیم $x=-i$ داریم:

$$f(-i)=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-a(-i)\sin n\alpha=0\Rightarrow\cos n\alpha-i\sin n\alpha+b\cos n\alpha+ai\sin n\alpha=0$$

$$\Rightarrow(1+b)\cos n\alpha+i(a-1)\sin n\alpha=0\Rightarrow b=-1,\ a=1$$

بنابراین $a-b=1-(-1)=2$ می‌شود.

تذکر ۴: به کمک اعداد مختلط می‌توان برخی سؤالات مشکل را راحت‌تر حل کرد.

مثال ۲۴: حاصل انتگرال $I=\int_0^1 e^{ax}\cos bx\,dx$، را به کمک اعداد مختلط حساب کنید.

پاسخ: حاصل این انتگرال را قبلاً در ریاضی (۱) به کمک قاعده‌ی جزء به جزء حساب کرده‌ایم. اما با استفاده از اعداد مختلط راحت‌تر حل می‌شود. می‌توانیم به جای انتگرال فوق، قسمت حقیقی انتگرال $\int_0^1 e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx$ را حساب کنیم. برای این منظور از رابطه‌ی $e^{ibx}=\cos bx+i\sin bx$ استفاده می‌کنیم:

$$I=\text{Re}[\int_0^1 e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx]=\text{Re}[\int_0^1(e^{ax}.e^{ibx})dx]=\text{Re}[\int_0^1 e^{(a+ib)x}dx]=\text{Re}[\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}]_0^1$$

$$=\text{Re}\{\frac{1}{a+ib}[e^{a+ib}-1]\}=\text{Re}\{\frac{a-ib}{a^2+b^2}[e^a(\cos b+i\sin b)-1]\}=\frac{e^a(a\cos b+b\sin b)-a}{a^2+b^2}$$

واضح است اگر می‌خواستیم حاصل انتگرال $\int_0^1 e^{ax}\sin bx\,dx$ را حساب کنیم، باید قسمت موهومی انتگرال فوق را حساب می‌کردیم.

مثال ۲۵: حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $e^{\sin x}\cos(\sin x)$
۲) $e^{\cos x}\cos(\sin x)$
۳) $e^{\cos x}\cos(\sin\pi x)$
۴) $e^{\sin x}\cos(\sin\pi x)$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}=e^u$، اگر فرض کنیم در این سری $u=e^{ix}$ آن‌گاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}=e^{e^{ix}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}=e^{e^{ix}}=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}.e^{i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]$$

اما سری داده شده در صورت سؤال قسمت حقیقی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$ است، پس جواب سؤال، به صورت $e^{\cos x}(\cos(\sin x))$ است.

واضح است اگر مقدار $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ خواسته شده بود، حاصل برابر با $e^{\cos x}\sin(\sin x)$ می‌شد.

ریشه‌ی یک عدد مختلط

برای محاسبه ریشه‌ی یک عدد مختلط، ابتدا آنرا به فرم نمایی یا قطبی می‌نویسیم. برای $z = re^{i\theta}$، ریشه nام یعنی $\sqrt[n]{z}$، از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{2k\pi+\theta}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})], k = 0, 1, \ldots, n-1$$

با توجه به مقادیر مختلف k، نتیجه می‌شود $\sqrt[n]{z}$ دارای n جواب متمایز است که به ازای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.
ریشه‌ای که به ازای $k = 0$ به دست می‌آید را **مقدار اصلی ریشه nام z** می‌نامند.

مثال ۲۶: **ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = 8i$ را بدست آورید.**

پاسخ: می‌دانیم $z = 8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$، بنابراین داریم:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})} = \sqrt[3]{8}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})]$$

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \sqrt{3} + i \\ k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = -\sqrt{3} + i \\ k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i \end{cases}$$

مثال ۲۷: **حاصل $z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟**

۱) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$
۲) $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i$
۴) $\sqrt{\sqrt{3}+i}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$، پس باید ریشه‌های دوم این عدد را حساب کنیم، بنابراین داریم:

$$z = \sqrt{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})} = \sqrt{2}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}) + i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲۸: **یکی از کعب‌های عدد $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟**

۱) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$
۲) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
۳) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$
۴) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و در نهایت پس از نوشتن فرم نمایی z، ریشه‌های سوم z را حساب می‌کنیم:

$$z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2} = \frac{1+i}{1+i+1+i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} \xrightarrow[\text{در عبارت } (1+i)]{\text{ضرب صورت و مخرج}} z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{+2} = i \Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})] \xrightarrow{k=0} \sqrt[3]{z} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

مثال ۲۹: **اگر $z = -1$، آنگاه مقدار آرگومان $z^{\frac{2}{3}}$ برابر با کدام گزینه است؟**

۱) $\frac{4\pi}{3}$
۲) $\frac{5\pi}{3}$
۳) $\frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{4\pi}{3}$
۴) $\frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{4\pi}{3}$ یا 2π

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $z = -1$ را می‌توان به صورت $z = e^{i\pi}$ نوشت و بنابراین $r = 1$ و $\theta = \pi$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1}e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{3})} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} z^{\frac{2}{3}} = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{3})\times 2} = e^{i[\frac{2}{3}(\pi+2k\pi)]} \quad , \quad k = 0,1,2 \Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}(\pi+2k\pi) \quad , \quad k = 0,1,2$$

آرگومان $z^{\frac{2}{3}}$ می‌تواند هر کدام از سه مقدار زیر باشد که به ازای سه مقدار k به دست می‌آید:

$$k = 0 \Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}}) = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad k = 1 \Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}(3\pi) = 2\pi \quad , \quad k = 2 \Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}(5\pi) = \frac{10\pi}{3}$$

البته می‌دانیم که $\frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ همان زاویه‌ی $\frac{4\pi}{3}$ است.

چند نکته در مورد ریشه‌های nام عدد یک

اگر ω ریشه‌ی nام واحد باشد، به طوری که $\omega = e^{\frac{i۲\pi}{n}}$، آنگاه دو رابطه‌ی زیر را همواره داریم:

$$\prod_{k=۱}^{n-۱}(z-\omega^k) = ۱+z+z^۲+\cdots+z^{n-۱} = \frac{z^n-۱}{z-۱} \quad , \quad \prod_{k=۱}^{n}(z-\omega^k) = z^n - ۱$$

برای درک بهتر به اثبات دو تساوی بالا می‌پردازیم:

فرض کنید $z^n - ۱ = ۰$ در این صورت ریشه‌های معادله عبارتند از ω، $\omega^۲$، $\omega^۳$ ... ω^n (یعنی ریشه‌های nام واحد) پس می‌توان نوشت:

$$z^n - ۱ = (z-\omega)(z-\omega^۲)\cdots(z-\omega^n)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید؛ رابطه بالا همان تساوی سمت چپ است، حالا سراغ اثبات تساوی سمت راست می‌رویم؛ با توجه به تساوی سمت چپ و با بیرون آوردن جمله‌ی آخر در عبارت داریم:

$$(z-\omega^n)\prod_{k=۱}^{n-۱}(z-\omega^k) = z^n - ۱$$

از طرفی چون $\omega = e^{\frac{i۲\pi}{n}}$ داده شده است، لذا $\omega^n = e^{(\frac{i۲\pi}{n})n} = e^{i۲\pi} = ۱$ و بنابراین داریم:

$$(z-۱)\prod_{k=۱}^{n-۱}(z-\omega^k) = z^n - ۱ \Rightarrow \prod_{k=۱}^{n-۱}(z-\omega^k) = \frac{z^n-۱}{z-۱} = ۱+z+z^۲-۱+۱+\cdots z^{n-۱} = \frac{z^n-۱}{z-۱}$$

مثال ۳۰: اگر ۱، ω، $\omega^۲$، $\omega^۳$، $\omega^۴$ ریشه‌های پنجم واحد باشند، آنگاه حاصل $A = (۳-\omega)(۳-\omega^۲)(۳-\omega^۳)(۳-\omega^۴)$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۲۴۳ ۴) ۲۴۲

پاسخ: گزینه «۲» طبق تساوی سمت راست، به ازای $z = ۳$ و $k = ۵$ داریم:

$$A = ۱+۳+۳^۲+\cdots+۳^۴ = \frac{۳^۵-۱}{۳-۱} = ۱۲۱$$

مثال ۳۱: اگر ۱، ω، $\omega^۲$، $\omega^۳$ و... $\omega^{۱۳۹۴}$ ریشه‌های « ۱۳۹۵ام» واحد باشند، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = (۱۳۹۴-\omega)(۱۳۹۴-\omega^۲)(۱۳۹۴-\omega^۳)\cdots(۱۳۹۴-\omega^{۱۳۹۵})$$

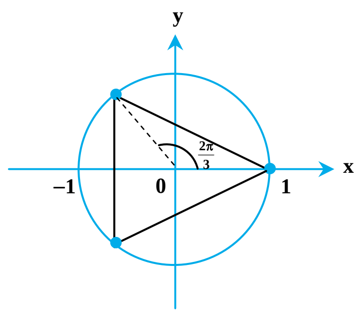
۱) ۰ ۲) $(۱۳۹۵)^{۱۳۹۴} - ۱$ ۳) $(۱۳۹۴)^{۱۳۹۵} - ۱$ ۴) $(۱۳۹۴)^{۱۳۹۵}$

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید در این سؤال پرانتزها به اندازه ۱۳۹۵ تا هستند، یعنی باید از تساوی سمت چپ استفاده کنیم؛ با توجه به نکته گفته شده، در این سؤال $n = ۱۳۹۵$ و $z = ۱۳۹۴$ می‌باشد و با توجه به تساوی سمت چپ داریم:

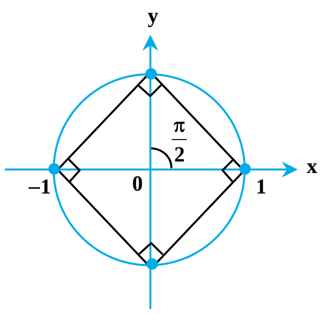
$$A = (۱۳۹۴)^{۱۳۹۵} - ۱$$

نکته۵: از نظر هندسی، ریشه‌های« nام» متمایز عدد مختلط و غیرصفر z، با قدرمطلق $\underline{r}$، رأس‌های n ضلعی منتظمی محاط در دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به مرکز مبدأ مختصات در صفحه‌ی مختلط هستند و فاصله‌ی این رئوس بر روی دایره از هم $(\frac{۲\pi}{n})$ است. (طبیعی است برای $n \geq ۳$ این شرط برقرار است، چون در غیر این صورت، n ضلعی تشکیل نمی‌شود!) بنابراین اندازه‌ی تمام ریشه‌های nام با یکدیگر مساوی و برابر با $\sqrt[n]{r}$ خواهد بود و در واقع تفاوت این ریشه‌ها در زاویه (آرگومان) آن‌ها است.

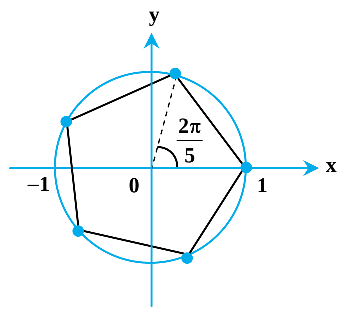
برای مثال برای ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم عدد «یک» اشکال زیر را داریم که فاصله‌ی ریشه‌ها بر روی دایره‌ها مطابق زوایای نشان داده شده است:



$(\sqrt[3]{1})$



$(\sqrt[4]{1})$



$(\sqrt[5]{1})$