درسنامه: تعریف انواع تابع و مفاهیم مرتبط با آن

مفهوم تابع

وقتی کمیتی وابسته به کمیتی دیگر باشد، مفهوم تابع به‌وجود می‌آید. مثلاً اگر فرمول مساحت دایره‌ای به شعاع r را در نظر بگیریم $(S=\pi r^{۲})$، مساحت دایره، یعنی S به شعاع دایره، یعنی r بستگی دارد. در این جا کمیت مساحت به کمیت شعاع وابسته است و می‌گوییم **S تابعی از r** است. دقت کنید در این رابطه، r متغیر مستقل و S متغیر وابسته است. خاصیت هر تابعی این است که برای هر مقدار از **متغیر مستقل** فقط یک مقدار برای **متغیر وابسته** ایجاد می‌شود. واضح است به ازای یک شعاع مشخص برای دایره، قطعاً یک و فقط یک مساحت به‌دست خواهد آمد.

تعریف دامنه و برد تابع: به مجموعه مقادیری که متغیر مستقل می‌گیرد، دامنه‌ی تابع و به مجموعه مقادیری که متغیر وابسته می‌گیرد، برد تابع می‌گویند.

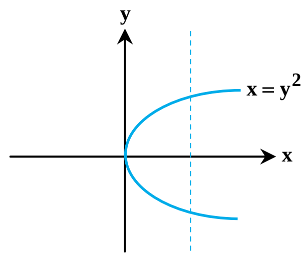
نماد تابع: برای اینکه بتوانیم بحث مشخص‌تری داشته باشیم، فرض می‌کنیم x متغیر مستقل و y متغیر وابسته باشد (البته این دو حرف بیشتر در مورد تابع به کار می‌رود، هر چند که اجباری نیست. مثلاً همان‌طور که دیدید مساحت دایره S، تابعی از متغیر مستقل r بود). برای نمایش ضابطه‌ی تابع از تساوی $y=f(x)$ استفاده می‌کنیم که خوانده می‌شود « y مساوی اِف x است»، اگر x مقدار خاصی مانند c داشته باشد، آن‌گاه مقدار نظیر y برابر با $f(c)$ است و مقدار f در نقطه‌ی c نامیده می‌شود.

شرط تابع بودن: به شرطی می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=f(x)$ تابع است که به ازای هر مقدار x، **فقط یک مقدار برای y** ایجاد شود. مثلاً ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ یک تابع است، چون هر مقداری که به x بدهیم، فقط و فقط یک مقدار برای y پدید می‌آید (دقت کنید اگر به ازای دو مقدار مختلف از x، یک مقدار یکسان برای y ایجاد شود، باز هم خواهیم گفت ضابطه داده شده، تابع است. همان‌طور که در ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ به ازای $x=۱$ و $x=-۱$ یک مقدار یکسان، یعنی $y=۱$ ایجاد می‌شود). اما ضابطه‌ی $x=y^{۲}-۲$، تابعی برحسب x نیست. چون اگر به x مثلاً مقدار $x=۲$ را بدهیم، آن‌گاه برای y دو مقدار متفاوت $y=\pm ۲$ ایجاد می‌شود.

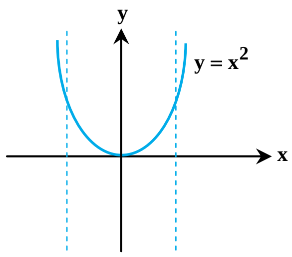
محک خط قائم برای تشخیص تابع بودن:

منحنی $y=f(x)$ فقط وقتی تابعی از x است که اگر خط قائمی در دستگاه مختصات رسم کنیم، این خط قائم، نمودار تابع را **بیش از یک بار قطع نکند**.

برای مثال به دو نمودار مقابل توجه کنید:



(ب)



(الف)

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، هر خط قائمی که بر نمودار $y=x^{۲}$ رسم کنیم، فقط در یک نقطه، نمودار تابع را قطع می‌کند (شکل (الف)) و بنابراین می‌توان گفت ضابطه‌ی $y=x^{۲}$ تابعی برحسب x است. اما همان‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، خط قائمی که بر نمودار $x=y^{۲}$ رسم کرده‌ایم، نمودار تابع را در دو نقطه (یعنی بیش از یک نقطه) قطع کرده است. پس می‌توانیم بگوییم ضابطه‌ی $x=y^{۲}$ تابعی برحسب x نیست.

تعریف دیگر تابع:

فرض کنید P، جمعیت جهان باشد که به زمان t وابسته است و ارتباط آن‌ها به‌صورت جدول مقابل باشد. همان‌طور که می‌بینید، به ازای هر مقدار t، مقدار متناظری از P وجود دارد پس در این حالت هم می‌توانیم بگوییم P تابعی از زمان است. یعنی به ازای هر زمان مشخص، فقط یک مقدار جمعیت وجود دارد. پس همیشه قرار نیست نمایش تابع، به شکل ضابطه‌ی $y=f(x)$ باشد. یعنی تعریف زیر را داریم:

سال (t)	P جمعیت (میلیون)
۱۹۰۰	۱۶۵۰
۱۹۱۰	۱۷۵۰
۱۹۲۰	۱۸۶۰
۱۹۶۰	۳۰۴۰
۱۹۸۰	۴۴۵۰
۱۹۹۰	۵۲۸۰
۲۰۰۰	۶۰۸۰

فرض کنید رابطه‌ی f مجموعه‌ای از جفت‌های مرتب و متمایز از اعداد حقیقی باشد، به طوری که هیچ دو جفت (x,y) در f، دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتبی در رابطه‌ی f مؤلفه‌ی اول یکسان داشتند، در این صورت مؤلفه‌ی دوم آن‌ها نیز برابر باشد. به عبارت ساده‌تر اگر به ازای xهای یکسان، yهای یکسان داشته باشیم، در این صورت رابطه‌ی f را تابع می‌نامیم.

مثال ۱: به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $f=\{(۳,۲),(۱,۲),(m,۱),(۳,m^{۲}+m)\}$ یک تابع می‌باشد؟

۱) ۲- و ۱　　۲) ۱　　۳) ۲-　　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» چون زوج‌های $(۳\,,\,۲)$ و $(۳,m^{۲}+m)$ در ضابطه‌ی این تابع قرار دارند، پس باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم برابر باشد (به دلیل تساوی مؤلفه‌ی اول آنها)؛ پس داریم:

$$m^{۲}+m=۲\to m^{۲}+m-۲=۰\to (m-۱)(m+۲)=۰\to m=۱\,,\,m=-۲$$

اگر $m=۱$ باشد، آن‌گاه زوج‌های $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ ایجاد می‌شود که نمی‌توانند در ضابطه‌ی یک تابع باشند، پس $m=-۲$ قابل قبول است.

تذکر ۱: رابطه‌هایی که در آنها متغیر وابسته (در ضابطه‌هایی به شکل $y=f(x)$ منظور y است)، داخل قدرمطلق، براکت، دارای توان زوج و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، **معمولاً** تابع نیستند. متغیر وابسته را با y نشان می‌دهیم، مگر آن‌که در صورت سؤال، شرط دیگری داده شده باشد.

مثال ۲: کدام‌یک از روابط زیر می‌تواند بیانگر تابعی با متغیر مستقل x باشد؟

۱) $|y|+(x-1)^2=1$ ۲) $\sin y=x$ ۳) $(y-1)^2+(x-1)^2=0$ ۴) $\lfloor y\rfloor=x$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به تذکر ۱، ضابطه‌ی گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ تابع نمی‌باشد. برای مثال در همه‌ی آن‌ها به ازای $x=1$ چند مقدار برای y به‌دست می‌آید. اما در رابطه‌ی گزینه‌ی (۳) با آن که توان y زوج است، ولی تنها زوج مرتب $A(1,1)$ متعلق به رابطه می‌باشد و ضابطه، تابع است.

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم آن‌ها بر هم، روی دامنه‌ی تعریفشان تابع هستند. برای مثال دامنه‌ی توابع $f+g$، $f-g$ و fg برابر است با اشتراک دامنه‌ی f و دامنه‌ی g و برای تابع $\frac{f}{g}$، هم باید اشتراک دامنه‌ها را در نظر بگیریم و هم مراقب باشیم که $g(x)$ صفر نشود.

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\,,\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\,,\ D_{f-g}=D_f\cap D_g$

۳) $(f\,.\,g)(x)=f(x)\,.\,g(x)\,,\ D_{f\,.\,g}=D_f\cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,,\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

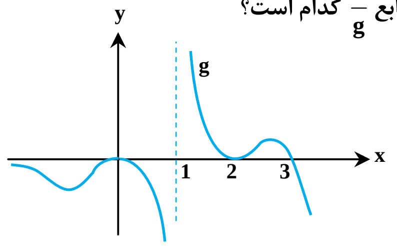
مثال ۳: نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر است، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

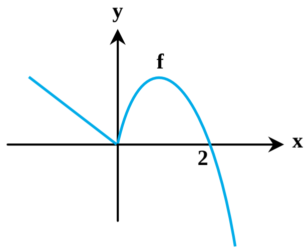
۱) $\mathbb{R}-\{1\}$

۲) $\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$

۳) $\mathbb{R}-\{1,3\}$

۴) $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$





پاسخ: گزینه «۲»

$$\left.\begin{array}{l} D_f:\mathbb{R} \\ D_g:\mathbb{R}-\{1\} \\ g(x)=0\ \Rightarrow\ x=0,1,2,3 \end{array}\right\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$$

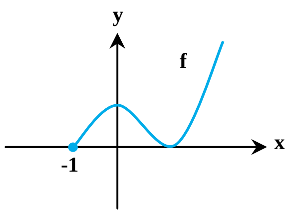
مثال ۴: نمودار $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. دامنه‌ی $f-g$ کدام است؟

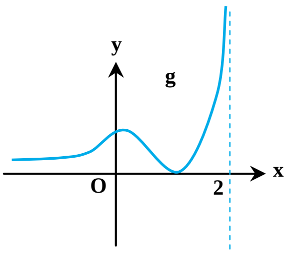
۱) $[1,+\infty)$

۲) $[2,+\infty)$

۳) $[-1,2)$

۴) $[-1,2]$





پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نمودارها $D_g=(-\infty,2)$ و $D_f=[-1,+\infty)$. لذا داریم:

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=(-\infty,2)\cap[-1,+\infty)=[-1,2)$$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند؛ هرگاه علاوه بر این‌که ضابطه‌ی آنها با هم برابر است، دامنه‌ی آنها نیز با هم برابر باشد.

مثال ۵: توابع $f(x)=x+3$ و $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ با هم مساوی نیستند. زیرا دامنه‌ی $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$، ولی دامنه‌ی $g(x)$ برابر $\mathbb{R}-\{3\}$ می‌باشد.

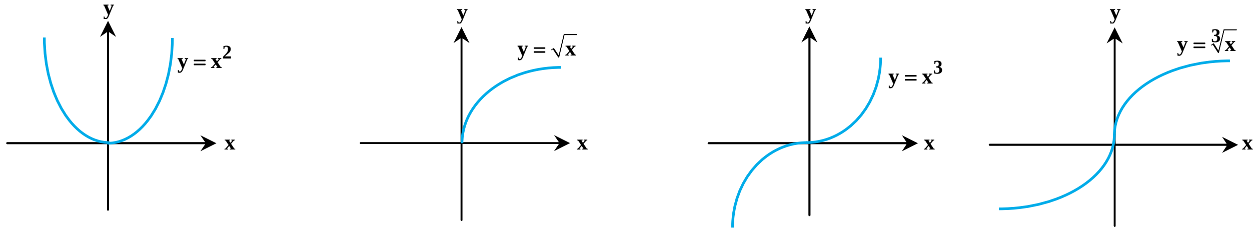
انواع تابع

۱) تابع چندجمله‌ای: به ازای هر عدد صحیح نامنفی $n\geq 0$، تابع $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ را یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامیم. در این تعریف، ضرایب $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ اعداد ثابت دلخواه هستند و $a_n\neq 0$ است. برای مثال هر چندجمله‌ای درجه‌ی دو به صورت $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ است که در آن $a_2\neq 0$ و a_0 و a_1 اعداد ثابت دلخواه هستند.

۲) تابع گویا: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، تابع $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم. برای مثال $f(x)=\frac{x^2+1}{3x+2}$ تابعی گویاست، اما $g(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}$ تابعی گویا نیست. زیرا درجه‌ی هر چندجمله‌ای باید عددی صحیح و نامنفی باشد و به همین علت $\sqrt{x}+1$ یک چندجمله‌ای محسوب نمی‌شود.

۳) **تابع توانی:** توابعی مانند $\sqrt{x}$، $\sqrt[۳]{x^۵}$، ... در دسته‌ای از توابع قرار دارند که به آن‌ها توابع توانی می‌گوییم. هر تابع توانی به صورت $y=cx^a$ است که در آن a و c اعداد ثابت دلخواه هستند. در یک تابع توانی، توان x می‌تواند عددی صحیح یا اعشاری باشد.

بهتر است نمودار توابع توانی و چندجمله‌ای معروف را که در اینجا رسم شده است، به خاطر داشته باشید.



نکته۱: توابع $y=x^a$ و $y=x^b$ همواره در $x=۰$ و $x=۱$ یکدیگر را قطع می‌کنند و اگر $b-a$ عددی زوج باشد، در $x=-۱$ نیز با یکدیگر برخورد می‌کنند.

برای مثال $y=x^{\frac{۴}{۳}}$ و $y=x^{\frac{۵}{۳}}$ فقط در $x=۰$ و $x=۱$ با هم تلاقی دارند. اما در $x=-۱$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا $b-a=\frac{۵}{۳}-\frac{۴}{۳}=\frac{۱}{۳}$.

۴) **تابع نمایی:** تابع‌هایی به شکل $f(x)=a^x$ که a عددی ثابت و مثبت است را تابع نمایی می‌نامند. مثلاً $f(x)=۲^x$ و $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ توابعی نمایی هستند.

۵) **تابع لگاریتمی:** این‌گونه توابع به شکل $f(x)=\log_a x$ هستند که a عدد ثابت و مثبت است. در توابع لگاریتمی شرط $x>۰$ حتماً باید برقرار باشد، در واقع دامنه‌ی این‌گونه توابع $(۰,\infty)$ است.

۶) **تابع چندضابطه‌ای:** گاهی مقدار یک تابع در دامنه‌اش با بیش از یک ضابطه بیان می‌شود. برای مثال در اداره‌ی پست برای ارسال بسته‌های پستی با توجه به وزن آن‌ها، هزینه تعیین می‌شود. مثلاً طبق یک دستورالعمل، برای ارسال محموله‌هایی که وزن آن‌ها از یک کیلوگرم کمتر است، وزن محموله‌ی پستی در ۵۰۰۰ تومان ضرب می‌شود و برای ارسال محموله‌های بیشتر یا مساوی یک کیلوگرم، وزن محموله‌ی پستی در ۱۰,۰۰۰ تومان ضرب می‌شود. پس در این جا با تابعی سروکار داریم که دو ضابطه‌ای است، یعنی داریم:

$$\text{تابع هزینه}=C=\begin{cases}۵۰۰۰x & ; \ x<۱\\ ۱۰,۰۰۰x & ; \ x\geq ۱\end{cases}$$

حال اگر شما یک بسته‌ی نیم‌کیلویی تحویل پست دهید $(x=۰/۵)$، قیمت آن باید از ضابطه‌ی بالایی حساب شود، یعنی باید (تومان) $۵۰۰۰\times ۰/۵=۲۵۰۰$ پرداخت کنید و اگر یک بسته‌ی ۳ کیلویی تحویل پست دهید $(x=۳)$، باید (تومان) $۱۰,۰۰۰\times ۳=۳۰,۰۰۰$ پرداخت کنید. به مثال زیر توجه کنید:

مثال۶: **تابع** $f(x)=\begin{cases}۲x^۳-۱ & ; \ x\leq ۲\\ \frac{۱}{x-۲} & ; \ ۲<x\leq ۳\\ ۲x-۵ & ; \ x>۳\end{cases}$ **مفروض است، مقدار $f(\sqrt{۸})$ کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}-۵$ ۴) $۳\sqrt{۲}-۱$

پاسخ: گزینه «۱» عدد $\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$ بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ می‌باشد. لذا باید از ضابطه‌ی دوم تابع، مقدار $f(\sqrt{۸})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\sqrt{۸})=\frac{۱}{\sqrt{۸}-۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۲}\times\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۲\sqrt{۲}+۲}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۴}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$$

تذکر۲: روابط چندضابطه‌ای در شرایطی می‌توانند تابع باشند، که اولاً هر یک از ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریف تابع باشد، ثانیاً دامنه‌ی آنها نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد یا اگر دارای ناحیه (یا نقطه) مشترک بودند به ازای x های مشترک، y های برابر حاصل شود.

برای مثال رابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x-۱ & ; \ x\geq ۱\\ x^۲-۱ & ; \ x\leq ۱\end{cases}$ یک تابع می‌باشد.

۷) **تابع ثابت:** تابعی است که به ازای هر x متعلق به دامنه، یک مقدار ثابت برای y به‌دست آید، یعنی $f(x)=c$. برای مثال تابع $f(x)=\sqrt{x-|x|}$ تابع ثابت است، زیرا برای هر x که در دامنه‌ی آن باشد، داریم $f(x)=۰$.

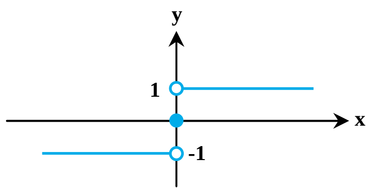
تذکر۳: نمودار تابع ثابت در صورتی که دامنه $\mathbb{R}$ باشد، خطی موازی محور x ها می‌باشد.

۸) **تابع همانی:** تابعی است که هر عضو دامنه را به خود آن عضو از دامنه نسبت دهد $(f(x)=x)$. این تابع را با $I(x)$ هم نمایش می‌دهیم. نمودار تابع همانی، نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

تذکر۴: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر می‌باشد.

۹) **تابع علامت (تابع سیگنال):** این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود و نمودارش به شکل مقابل است:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & ; \ x>۰\\ ۰ & ; \ x=۰\\ -۱ & ; \ x<۰\end{cases}$$



۱۰) **تابع قدرمطلق:** این تابع به‌صورت روبرو تعریف می‌شود: $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & ; \ x\geq ۰\\ -x & ; \ x<۰\end{cases}$

به عبارت دیگر اگر عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، قدرمطلق آن برابر است با خودش و اگر عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، قدرمطلق آن برابر است با قرینه‌اش.

خواص قدرمطلق

۱) $|x| \geq ۰$

۲) $|-x| = |x|$

۳) $|x| = a \xrightarrow{a>۰} x = \pm a$

۴) $x^۲ \leq a^۲ \Rightarrow |x| \leq a \xrightarrow{a>۰} -a \leq x \leq a$

۵) $|x| \geq a \xrightarrow{a>۰} x \geq a$ یا $x \leq -a$

۶) $|xy| = |x||y|$

۷) $\sqrt[۲n]{x^{۲n}} = |x|$

۸) $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ ؛ (نامساوی مثلث)

۹) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

۱۰) $-|x| \leq x \leq |x|$

۱۱) $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; \ f(x) \geq ۰ \\ -f(x) & ; \ f(x) < ۰ \end{cases}$

نکته۲: طبق نامساوی مثلث، داریم: $||x|-|y|| < |x+y| \leq |x|+|y|$ اگر x و y هم‌علامت باشند، سمت راست به تساوی تبدیل می‌شود: $|x+y| = |x|+|y|$

و اگر x و y مختلف‌العلامت باشند، سمت چپ به تساوی تبدیل می‌شود: $||x|-|y|| = |x+y|$

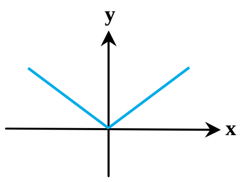
مثال۷: به ازای کدام مقدار x معادله‌ی $|(x^۲+۴x+۹)+(۲x-۳)| = |x^۲+۴x+۹|+|۲x-۳|$ همواره برقرار است؟

۱) $x \geq \frac{۲}{۳}$ ۲) $x \geq \frac{۳}{۲}$ ۳) $x \geq \frac{۹}{۴}$ ۴) $x \geq \frac{۴}{۹}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مطالب فوق، تساوی وقتی برقرار است که $x^۲+۴x+۹$ و $۲x-۳$ هم‌علامت باشند. از طرفی چون $x^۲+۴x+۹$ همواره مثبت است، لذا باید $۲x-۳ \geq ۰$ باشد، یعنی $x \geq \frac{۳}{۲}$.

رسم تابع قدرمطلق: برای رسم تابع $y = |f(x)|$ ریشه‌های داخل قدرمطلق را به‌دست آورده و عبارت را تعیین علامت می‌کنیم، سپس برای ضابطه‌های مختلف به‌دست آمده در فواصل مختلف نمودار آن را رسم می‌کنیم. در این‌جا نمودار $y = |x|$ را نشان داده‌ایم:

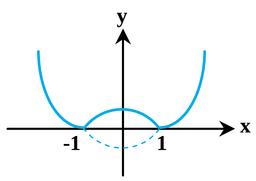
$$y = |x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq ۰ \\ -x & ; \ x < ۰ \end{cases}$$



تذکر۵: به‌طور کلی برای رسم نمودار توابعی به شکل $y = |f(x)|$، نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت از منحنی که زیر محور x ها واقع است را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال۸: تابع $y = |x^۲-۱|$ را رسم کنید.

پاسخ : ابتدا تابع $y = x^۲-۱$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

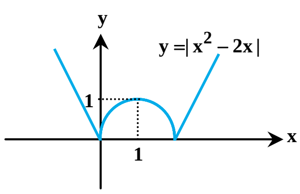


مثال۹: اگر تابع‌های $y = |x^۲-۲x|$ و $y = k$ در چهار نقطه متقاطع باشند، حدود k کدام است؟

۱) $k > ۱$ ۲) $۰ < k < ۲$ ۳) $۰ < k < ۱$ ۴) $۰ < k \leq ۱$

پاسخ : گزینه «۳»

با توجه به نمودار تابع $y = |x^۲-۲x|$، ملاحظه می‌شود برای این‌که خط $y = k$ نمودار تابع را در چهار نقطه قطع کند، باید $۰ < k < ۱$ باشد.



مثال۱۰: مجموعه جواب نامعادله‌ی $۲x+|x-۱| < ۸$ کدام است؟

۱) $x < ۳$ ۲) $۳ < x < ۷$ ۳) $x < ۱$ ۴) $۱ < x < ۳$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow ۲x+x-۱ < ۸ \to ۳x < ۹ \to x < ۳ \to ۱ \leq x < ۳ \quad (۱) \\ ۲)\ x-۱ < ۰ \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow ۲x+۱-x < ۸ \to x < ۷ \to x < ۱ \quad (۲) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع (۱) و (۲)}} x < ۳$$

۱۱) تابع جزء صحیح (براکت): هر عدد حقیقی را می‌توان به‌صورت مجموع یک عدد صحیح (n) و یک عدد حقیقی نامنفی $(۰ \leq p < ۱)$ نمایش داد. به عبارتی:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x = n + p, ۰ \leq p < ۱$$

عدد صحیح n را جزء صحیح x می‌نامیم و با علامت $\lfloor x \rfloor$ نمایش می‌دهیم. برای مثال، جزء صحیح $x = ۳/۷$ برابر ۳ و جزء صحیح $x = -۱/۶$ برابر ۲- می‌باشد.

تذکر۶: برای یافتن $\lfloor a \rfloor$ بر روی محور، اگر a عدد صحیح باشد که $\lfloor a \rfloor = a$ و اگر a عدد صحیح نباشد، از روی نقطه‌ی $x = a$ به سمت چپ محور xها حرکت می‌کنیم. اولین عدد صحیح واقع در سمت چپ a همان $\lfloor a \rfloor$ خواهد بود.

خواص تابع جزء صحیح:

۱) $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + ۱$

۲) $x - ۱ < \lfloor x \rfloor \le x$

۳) $۰ \le p = x - \lfloor x \rfloor < ۱$

۴) $\lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor = ۰$

۵) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \,,\, (n \in \mathbb{Z})$

۶) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} ۰ \;,\; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ \;,\; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۷) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + ۱$ یا $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

۸) $\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = ۲\lfloor x \rfloor$

مثال۱۱: جواب معادله‌ی $\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor + \dfrac{\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor}{۴}$ کدام است؟

۱) $۱ \le x < ۲$ ۲) $۰ \le x < ۱$ ۳) $۲ \le x < ۳$ ۴) $۳ \le x < ۴$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به خاصیت (۸) جزء صحیح داریم:

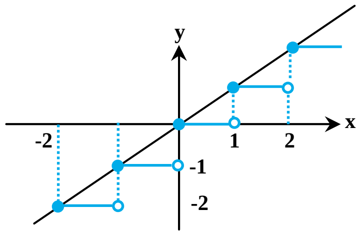
$$\frac{۲\lfloor x \rfloor}{۴} + \lfloor x \rfloor = ۲\lfloor x \rfloor \Rightarrow \frac{\lfloor x \rfloor}{۲} = \lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۲\lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۰ \Rightarrow ۰ \le x < ۱$$

رسم توابع $y = \lfloor f(x) \rfloor$: برای رسم نمودار این‌گونه توابع، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس خطوط $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را رسم می‌کنیم تا نمودار $y = f(x)$ را قطع کند و روی آن پاره‌خط‌های مساوی ایجاد کند، قسمتی از نمودار را که بین نقطه‌های برخورد دو خط $y = k$ و $y = k + ۱$ با نمودار $y = f(x)$ قرار دارد بر خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت ذکر این نکته لازم است که به نقاط ابتدا و انتها از لحاظ توپر و یا توخالی بودن باید توجه کرد.

مثال۱۲: نمودار تابع $y = \lfloor x \rfloor$ را در فاصله $-۲ \le x < ۲$ رسم کنید.

پاسخ :

$$\begin{aligned}
-۲ \le x < -۱ &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = -۲ \Rightarrow y = -۲ \\
-۱ \le x < ۰ &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = -۱ \Rightarrow y = -۱ \\
۰ \le x < ۱ &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\
۱ \le x < ۲ &\Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۱ \Rightarrow y = ۱
\end{aligned}$$



مثال۱۳: حاصل $\big| \lfloor ۵x \rfloor - \lfloor ۷x \rfloor \big|$ به ازای $x = -\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ : گزینه «۴»

$$\left| \left\lfloor -\frac{۷}{۲} \right\rfloor - \left| \left\lfloor -\frac{۵}{۲} \right\rfloor \right| \right| = \big| \lfloor -۳/۵ \rfloor - |\lfloor -۲/۵ \rfloor| \big| = \big| -۴ - |-۳| \big| = |-۷| = ۷$$

مثال۱۴: مجموعه جواب‌های معادله‌ی $\lfloor x \rfloor^۲ + ۲\lfloor x \rfloor - ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) $-۳ \le x < -۲$ ۲) $۱ \le x \le ۲$ ۳) $۱ < x < ۲$ ۴) $\begin{cases} ۱ \le x < ۲ \\ -۳ \le x < -۲ \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۴» مجموع ضرایب صفر است، پس یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه‌ی دیگر معادله برابر $\frac{c}{a}$ یعنی (۳-) است، پس داریم:

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor = -۳ \to -۳ \le x < -۲ \\ \lfloor x \rfloor = ۱ \to ۱ \le x < ۲ \end{cases}$$

بررسی تقارن‌های یک منحنی

برخی از منحنی‌ها نسبت به محورهای مختصات یا خطوط معروف دیگر، تقارن دارند. برای تشخیص این تقارن‌ها ابتدا با آوردن همه‌ی متغیرها به یک سمت تساوی معادله‌ی منحنی را به‌صورت $f(x,y) = c$ بنویسید. حالا از این موارد استفاده کنید:

۱) **تقارن نسبت به محور x ها:** اگر تبدیل y به $-y$، معادله منحنی را تغییر ندهد، یعنی $f(x,-y) = f(x,y)$ آن‌گاه نسبت به محور x تقارن دارد.

۲) **تقارن نسبت به محور y ها:** اگر تبدیل x به $-x$، معادله منحنی را تغییر ندهد، یعنی $f(-x,y) = f(x,y)$ آن‌گاه نسبت به محور y تقارن دارد.

۳) **تقارن نسبت به مبدأ مختصات:** اگر تبدیل همزمان x به $-x$ و y به $-y$ معادله را عوض نکند، یعنی $f(-x,-y) = f(x,y)$ آن‌گاه نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد.

۴) **تقارن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم):** اگر تبدیل x به y و تبدیل y به x معادله را عوض نکند، یعنی $f(x,y) = f(y,x)$، منحنی نسبت به خط $y = x$ تقارن دارد.

۵) **تقارن نسبت به خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم):** اگر تبدیل x به $-y$ و تبدیل y به $-x$ معادله را عوض نکند، یعنی $f(-y,-x) = f(x,y)$ منحنی نسبت به خط $y = -x$ تقارن دارد.

۶) تقارن نسبت به خط $x = a$: اگر معادله منحنی به ازای $a - x$ و $a + x$ تغییری نکند، یعنی $f(a - x, y) = f(a + x, y)$ نسبت به خط $x = a$ تقارن دارد. البته این شرط را می‌توان به صورت $f(2a - x, y) = f(x, y)$ هم نوشت.

۷) تقارن نسبت به خط $y = b$: اگر معادله منحنی به ازای $b - y$ و $b + y$ تغییری نکند، یعنی $f(x, b - y) = f(x, b + y)$ نسبت به خط $y = b$ تقارن دارد. البته این شرط را می‌توان به‌صورت $f(x, 2b - y) = f(x, y)$ هم نوشت.

مثال ۱۵: **نمودار تابع $g(x) = \left|\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4\right|$ و منحنی $xy + x^2y^2 = xy^2 + yx^2$ به ترتیب (از راست به چپ) نسبت به کدام خطوط متقارن هستند؟**

۱) $x = 2$ و $y = x$　　۲) $x = -1$ و $y = x$　　۳) $x = 2$ و $y = -x$　　۴) $x = -1$ و $y = -x$

پاسخ: گزینه «۱» بررسی تقارن منحنی $xy + x^2y^2 = xy^2 + yx^2$ نسبت به خطوط $y = x$ و $y = -x$ ساده است. ابتدا همه‌ی عبارات را به سمت چپ می‌آوریم:

$$f(x, y) = xy + x^2y^2 - xy^2 - yx^2 = 0$$

در این ضابطه به جای x، y قرار می‌دهیم و به جای y، x قرار می‌دهیم:

$$f(y, x) = yx + y^2x^2 - yx^2 - xy^2 = f(x, y)$$

پس این منحنی نسبت به خط $y = x$ متقارن است. اما اگر به جای y، $-x$ و به جای x، $-y$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$f(-y, -x) = (-y)(-x) + (-y)^2(-x)^2 - (-y)(-x)^2 - (-x)(-y)^2 = yx + y^2x^2 + yx^2 + xy^2 \neq f(x, y)$$

پس نسبت به خط $y = -x$ تقارن ندارد.

اکنون تقارن تابع $g(x) = \left|\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4\right|$ را بررسی می‌کنیم. اگر $g(a - x) = g(a + x)$ باشد این تابع نسبت به خط $x = a$ تقارن دارد. اگر به ضابطه‌ی $g(x)$ توجه کنیم، با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$g(x) = \left|\frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\right| = \frac{1}{2}\left|(x - 2)^3\right|$$

با بررسی تقارن نسبت به خط $x = 2$ خواهیم داشت:

$$g(2 - x) = \frac{1}{2}\left|(2 - x - 2)^3\right| = \frac{1}{2}\left|-x^3\right| = \frac{1}{2}\left|x^3\right|$$

$$g(2 + x) = \frac{1}{2}\left|(2 + x - 2)^3\right| = \frac{1}{2}\left|x^3\right|$$

پس $g(2 - x) = g(2 + x)$ است و نمودار $g(x)$ نسبت به خط $x = 2$ تقارن دارد.

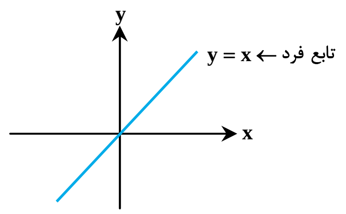
توابع زوج یا فرد

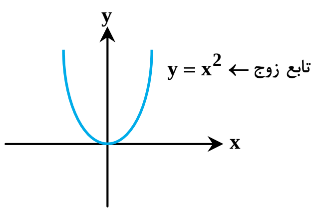
تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$ آن‌گاه:

۱) تابع $f(x)$ زوج است، هرگاه $f(x) = f(-x)$.　　۲) تابع $f(x)$ فرد است، هرگاه $f(x) = -f(-x)$.

بنابراین با توجه به تعریف‌های فوق، در توابع فرد $f(-x) + f(x) = 0$ و در توابع زوج $f(-x) - f(x) = 0$ خواهد بود.

نکته ۳: نمودار توابع فرد، نسبت به مبدأ مختصات و نمودار توابع زوج، نسبت به محور y ها متقارن است.





نکته ۴: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = c$ (یعنی تابع ثابت) تابعی زوج و تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 0$، تابعی هم زوج و هم فرد است.

مثال ۱۶: **کدام یک از توابع زیر هم فرد و هم زوج می‌باشد؟**

الف) $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor}$　　ب) $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases}$　　ج) $f(x) = \left\lfloor \frac{x^2}{x^2 + 1} \right\rfloor$　　د) $f(x) = \sqrt{\sin \pi \lfloor x \rfloor}$

۱) الف و ج　　۲) الف، ج و د　　۳) الف، ب و ج　　۴) الف و د

پاسخ: گزینه «۲» هر چهار تابع (الف تا د) را بررسی می‌کنیم:

الف) چون عبارت زیر رادیکال می‌باشد، لذا ضابطه‌ی دوم نمی‌تواند برقرار باشد؛ پس $f(x) = 0$ و $f(x)$ هم زوج و هم فرد است.

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & ; \ x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

ب) تابع علامت $\mathrm{sgn}(x)$ می‌باشد و این تابع، تابعی فرد است.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

ج) $f(x) = \left\lfloor \frac{x^2}{x^2 + 1} \right\rfloor \xrightarrow{0 \le x^2 < x^2 + 1} 0 \le \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x^2}{x^2 + 1} \right\rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. $f(x)$ تابعی هم زوج و هم فرد می‌باشد.

د) دقت شود که به ازای هر مقدار x، $\lfloor x \rfloor$ عددی صحیح مانند k است و می‌دانیم $\sin k\pi$ همواره برابر صفر می‌باشد، لذا $f(x) = \sqrt{\sin \pi \lfloor x \rfloor} = 0$ و در نتیجه هم زوج و هم فرد است.

نکات مهم در مورد توابع زوج و فرد

۱) شرط لازم برای آن‌که یک تابع فرد باشد، آن است که $f(0)=0$ یا تابع در $x=0$ تعریف نشده باشد.

۲) حاصل‌ضرب و تقسیم یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی فرد می‌باشد و حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع زوج یا دو تابع فرد، تابعی زوج است.

۳) مجموع و تفاضل توابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل توابع فرد، تابعی فرد است. مجموع و تفاضل یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی نه زوج نه فرد می‌باشد.

۴) اگر دامنه‌ی تابع f متقارن باشد، آن‌گاه $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ تابعی زوج و $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ تابعی فرد است و مجموع آن‌ها با $f(x)$ برابر است. به عبارتی هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به‌صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

۵) در توابع به شکل $y=\log(ax+\sqrt{bx^2+1})$ اگر $a^2=b$، آن‌گاه تابع فرد است.

۶) تابع علامت $\operatorname{sgn}(x)$ تابعی فرد می‌باشد.

۷) توابع زیر همواره توابعی فرد هستند:

$$1)\ y=\frac{a^x\pm a^{-x}}{a^x\mp a^{-x}} \qquad 2)\ y=\log\frac{a^x\pm 1}{a^x\mp 1} \qquad 3)\ y=\log\frac{ax\pm b}{ax\mp b}$$

مثال ۱۷: کدام‌یک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=x\cos x$ ۳) $y=x^3$ ۴) $y=\log(3x+\sqrt{9x^2+1})$

پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به نکات گفته شده، گزینه (۴) تابعی فرد است.

$1)\ f(x)=x\to f(-x)=-x=-f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است.

$2)\ f(x)=\cos x\to f(-x)=\cos(x)=f(x) \Rightarrow$ تابع زوج است.

$3)\ f(x)=\sin x\to f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x) \Rightarrow$ تابع فرد است.

تابع $y=x\sin x$ حاصل‌ضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و تابع $y=x\cos x$ تابعی فرد است.

مثال ۱۸: اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax\sin x+(b-2)x$ تابعی زوج و تابع با ضابطه‌ی $g(x)=(a+1)\cos x+bx^3$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(1,-2)$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(x)$ تابعی زوج است، پس باید تابع فرد $(b-2)x$ در ضابطه‌ی آن قرار نداشته باشد، لذا $b-2=0$ یا $b=2$ می‌باشد و تابع $g(x)$ تابعی فرد است و باید در ضابطه‌ی آن، تابع زوج $(a+1)\cos x$ قرار نداشته باشد، لذا $a+1=0$ یا $a=-1$ خواهد بود.

توابع یک به یک

تابع f را یک به یک گوییم؛ هرگاه به ازای هر $x_1, x_2\in D_f$، وقتی $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه بتوانیم نتیجه بگیریم که $x_1=x_2$.

مثال ۱۹: آیا تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ یک به یک می‌باشد؟

پاسخ : تابع یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\to\sqrt[3]{x_1-2}=\sqrt[3]{x_2-2}\to x_1-2=x_2-2\to x_1=x_2$$

نکته۵: هرگاه هر خط $y=c$ موازی محور x ها، نمودار تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

نکته۶: تابع $f(x)=0$ تابعی است هم زوج، هم فرد و غیر یک به یک.

نکته۷: تابع $f(x)=c$ تابعی غیر یک به یک است.

مثال ۲۰: کدام‌یک از توابع زیر در بازه‌ی $(0,1)$ یک به یک است؟

۱) $f(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$ ۲) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ۳) $f(x)=\sin 4x$ ۴) $f(x)=|2x-1|$

پاسخ : گزینه «۲» توابع شامل جزء صحیح، توابع مثلثاتی و تابع قدرمطلق معمولاً یک به یک نیستند. به همین دلیل ابتدا گزینه‌ی (۲) را بررسی می‌کنیم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{\frac{1}{x_1}}=e^{\frac{1}{x_2}}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

پس این گزینه یک به یک است.

در مورد سایر گزینه‌ها؛ برای توضیح بیشتر توجه کنید که در گزینه‌ی (۱) داریم $f(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{4})=0$. در گزینه (۳) مقدار $\sin 4x$ به ازای $x=0$ و $x=\pi$ یکسان است؛ یعنی $f(0)=f(\pi)=0$ و در گزینه (۴) مقدار این تابع برای $x=0$ و $x=1$ یکسان است؛ یعنی $f(0)=f(1)=1$. پس این گزینه‌ها یک به یک نیستند. تنها گزینه (۲) تابعی یک به یک است.

نکته۸: معمولاً اگر در ضابطه‌ی تابع، x داخل قدرمطلق یا جزء صحیح یا نسبت مثلثاتی باشد و یا x دارای توان زوج باشد، آن تابع یک به یک نیست. البته چنین توابعی ممکن است با محدود کردن x در برخی از بازه‌ها یک به یک باشند.

مثال۲۱: کدامیک از توابع زیر یک به یک نیستند؟

۱) $y = x^3 + x$ ۲) $y = \text{Lnx}$ ۳) $y = x^2 + x$ ۴) $y = e^x$

پاسخ : گزینه «۳» طبق نکته گفته شده توجه کنید که در گزینه (۳)، $f(0) = 0$ و $f(-1) = 0$، پس f یک به یک نیست.

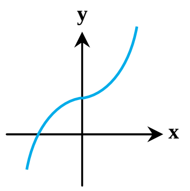
تابع پوششی (پوشا)

تابع $f : A \to B$ را پوششی گوییم؛ هرگاه برد تابع f برابر مجموعه‌ی B باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $y \in B$، عضوی مانند $x \in D_f$ موجود باشد به‌طوری‌که $y = f(x)$.

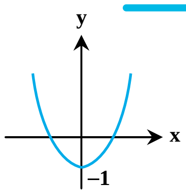
مثال۲۲: آیا تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ پوششی است؟

پاسخ : می‌دانیم $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$ بنابراین برد تابع f به شکل $[0,1)$ است که نمی‌تواند مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را بپوشاند.

مثال۲۳: تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $y = x^3 + 1$ پوشاست، زیرا به وضوح $R_f = \mathbb{R}$ (به ازای هر $y \in \mathbb{R}$ عددی مانند $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری‌که $y = x^3 + 1$) ولی تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $y = x^4 - 1$ پوشا نیست، زیرا برد آن $R_g = [-1, +\infty]$ است که با مجموعه‌ی اعداد حقیقی برابر نیست.



$f(x) = x^3 + 1$



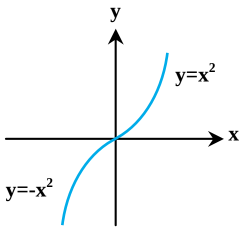
$g(x) = x^4 - 1$

نکته۹: تابع $f : A \to B$ پوششی (پوشا) است، اگر هر خط افقی به معادله‌ی $y = b \in B$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند.

مثال۲۴: در مورد تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \ge 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) پوشا و یک به یک است. ۲) فقط یک به یک است. ۳) فقط پوشاست. ۴) یک به یک و پوشا نیست.

پاسخ: گزینه «۱» با رسم نمودار تابع $y = x^2$ در فاصله‌ی $x \ge 0$ و نمودار $y = -x^2$ در فاصله‌ی $x < 0$ شکل مقابل را خواهیم داشت.

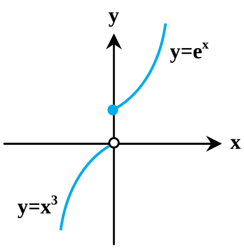


به راحتی از روی شکل مشخص است که اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار تابع را **حداکثر** در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک به یک است. از طرفی با توجه به شکل، برد تابع تمام $\mathbb{R}$ را می‌پوشاند، پس تابع پوشا نیز می‌باشد، به‌عبارت دیگر اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار تابع را **حداقل** در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال۲۵: تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} e^x & ; x \ge 0 \\ x^3 & ; x < 0 \end{cases}$، چگونه است؟

۱) یک به یک ـ نزولی ـ پوشا ۲) یک به یک ـ صعودی ـ غیرپوشا
۳) غیر یک به یک ـ صعودی ـ پوشا ۴) غیر یک به یک ـ نزولی ـ غیرپوشا

پاسخ: گزینه «۲» با رسم نمودار تابع $y = e^x$ در فاصله $x \ge 0$ و همچنین نمودار تابع $y = x^3$ در فاصله $x < 0$ شکل مقابل را داریم. ملاحظه می‌کنید که تابع یک به یک است، چون اگر خطی موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را **حداکثر** در یک نقطه قطع می‌کند. از طرفی در هر دو نمودار با افزایش x ملاحظه می‌شود که مقدار y هم زیاد می‌شود. پس تابع صعودی است. اگر خطی موازی محور xها در فاصله $0 \le y < 1$ رسم کنیم، آن‌گاه این خط نمودار تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، لذا این تابع پوشا نیست (برد تابع f، $\mathbb{R}$ داده شده است، اما این تابع تمام $\mathbb{R}$ را به غیر از فاصله‌ی $0 \le y < 1$ می‌پوشاند).



نکته۱۰: تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \ne 0$ یک به یک است، ولی پوشا نیست.

توابع صعودی و نزولی: تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید:

۱) تابع f را بر A صعودی گوییم، هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

۲) تابع f را بر A اکیداً صعودی گوییم، هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

۳) تابع f را بر A نزولی گوییم، هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

۴) تابع f را بر A اکیداً نزولی گوییم، هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

تذکر۷: توابع نزولی و صعودی را **یکنوا** و توابع **اکیداً صعودی** و **اکیداً نزولی** را **اکیداً یکنوا** نیز می‌گویند.

نکته۱۱: اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه یک به یک نیز می‌باشد. ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

تذکر۸: تعیین صعودی و نزولی بودن با استفاده از مشتق، ساده‌تر انجام می‌شود که در فصل سوم توضیح داده خواهد شد.

مثال۲۶: تابع $y=\sin x+\cos x$ در کدام فاصله نزولی است؟ (n عددی صحیح است)

۱) $\frac{\pi}{۶}+۲n\pi \le x \le \frac{\pi}{۶}+(۲n+۱)\pi$

۲) $\frac{\pi}{۴}+۲n\pi \le x \le \frac{\pi}{۴}+(۲n+۱)\pi$

۳) $\frac{\pi}{۶}+(۲n-۱)\pi \le x \le \frac{\pi}{۶}+۲n\pi$

۴) $\frac{\pi}{۴}+(۲n-۱)\pi \le x \le \frac{\pi}{۴}+۲n\pi$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا رابطه‌ی مثلثاتی مقابل را می‌نویسیم:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

اگـر دایـره‌ی مثلثـاتی را تجسـم کنیـد، تـابع $\cos x$ در زاویـه‌ی $\theta=۰$ مقـدارش $+۱$ اسـت و در زاویـه‌ی $\theta=\pi$ بـه مقـدار -۱ مـی‌رسـد. یعنـی $\cos x$ در فاصله‌ی $۰\le\theta\le\pi$ نزولی است. بـه همـین ترتیـب در دورهـای بعـدی، مقـدار $\cos x$ در $\theta=۲n\pi$ برابـر بـا $+۱$ اسـت و در $\theta=(۲n+۱)\pi$ بـه -۱ مـی‌رسـد.

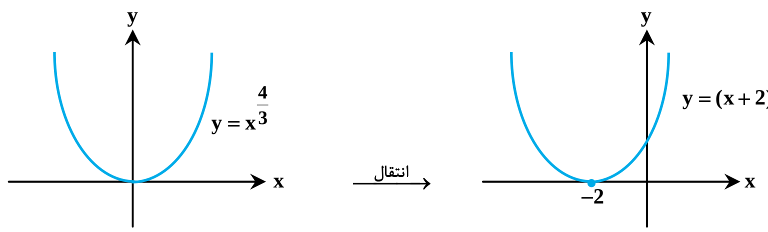
پس $\cos x$ در فاصله $۲n\pi\le x\le(۲n+۱)\pi$ نزولی است، بنابراین داریم:

$$۲n\pi \le x-\frac{\pi}{۴} \le (۲n+۱)\pi \rightarrow ۲n\pi+\frac{\pi}{۴}\le x\le(۲n+۱)\pi+\frac{\pi}{۴}$$

مثال۲۷: تابع $f(x)=(x+۲)^{\frac{۴}{۳}}$ در کدام بازه یک به یک است؟

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $(-۴,-۲)$ ۴) $(-\infty,۰)$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به تـابع $y=x^{\frac{۴}{۳}}$ توجـه کنیـد. عدد ۴، عددی زوج است و $y=(\sqrt[۳]{x})^۴$، پس نمودار ایـن تـابع توانی، مانند توان‌های زوج x همواره مثبت است. حـالا اگـر بـه جای x، $x+۲$ قرار دهیم، نمودار تابع ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌شود.

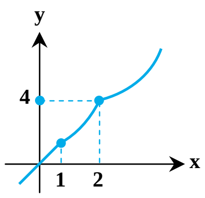


با توجه به نمودار تابع $f(x)$ می‌بینیم که این تابع در بازه‌های $(-\infty,-۲)$ و $(-۲,\infty)$ یکنـوا و در نتیجـه یـک‌بـه‌یـک اسـت. بـازه‌ی $(-۴,-۲)$ بـه طـور کامـل در بازه‌ی $(-\infty,-۲)$ قرار می‌گیرد، پس تابع $f(x)$ در این بازه یک‌به‌یک است.

مثال۲۸: اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x & ; x<۱\\ x^۲ & ; ۱\le x\le ۲\\ ۲^x & ; x>۲\end{cases}$ آن‌گاه f چگونه است؟

۱) پوشا ـ معکوس‌پذیر ۲) صعودی ـ غیرپوشا ۳) کراندار ـ صعودی ۴) غیرپوشا ـ یک به یک

پاسخ: گزینه «۱» دامنه‌ی $f(x)$ به قطعات $(-\infty,۱)$، $[۱,۲]$ و $(۲,\infty)$ تفکیـک شـده اسـت. نحـوه‌ی تغییـرات $f(x)$ را در هـر قسمت بررسی می‌کنیم و برای سهولت بیشتر، نمودار $f(x)$ را هم نشان می‌دهیم. در بازه‌ی $-\infty<x<۱$ داریم $f(x)=x$، پس $f(x)$ اکیداً صعودی و یک به یک است و همچنین $-\infty<f(x)<۱$. در فاصله‌ی $۱\le x\le ۲$ داریم: $f(x)=x^۲$. درست است که این تابع در کل $\mathbb{R}$ یک به یک نیست؛ اما در بازه‌ی $۱\le x\le ۲$ اکیداً صعودی و یک به یک است و مقدارش از ۱ به ۴ می‌رسد. در بازه‌ی $۲<x<\infty$ داریم: $f(x)=۲^x$ که تابعی اکیداً صعودی و یک به یک است و مقدارش از ۴ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. با توجه به بررسی‌های انجام شده و با یک نگاه به نمودار $f(x)$ واضح است که این تابع اکیداً صعودی است و از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنـد. بـه عبـارتی بـرد $f(x)$ شـامل همه‌ی اعداد حقیقی است؛ پس f پوشاست. هر تابع اکیداً صعودی، یک به یک است و در نتیجه معکوس‌پذیر است. در ضمن دیدیم کـه مقدار $f(x)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، پس بی‌کران است.



توابع معکوس

وارون یا معکوس تابع f رابطه‌ای است که از جابجا کردن مؤلفه‌های اول و دوم، در همه‌ی زوج‌های مرتب f به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}\\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\end{cases}$$

توضیح: شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد، این است که تابع f یک به یک باشد.

نکته۱۲: هر تابع پیوسته و اکیداً یکنوا بر $[a,b]$ وارون‌پذیر است.

مثال۲۹: اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\sin^{-1}x$، آن‌گاه دامنه gof کدام است؟

۱) $[۰,۰]$ ۲) $[۰,۱)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۰]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع $\sin^{-1}x$، باید نامساوی $-1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le 1$ برقرار باشد و همچنین چون در مخرج رادیکال داریم، لذا $1-x^2>0$ و این یعنی $-1<x<1$،

حالا باید نابرابری‌های $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le 1$ و $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ge -1$ را حل کنیم، نامساوی $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ge -1$ که همواره برقرار است، پس کافی است نامساوی $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le 1$ را حل کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2}\le 1 \Rightarrow 1\le 1-x^2 \Rightarrow x^2\le 0 \xrightarrow{\text{فقط یک جواب داریم}} x=0$$

دقت کنید که بازه‌ی $[a,a]$ همان تک عضوی $\{a\}$ است، پس $[0,0]=\{0\}$.

نحوه به‌دست آوردن تابع معکوس

برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به‌دست آورده و سپس نقش x و y را عوض می‌کنیم.

مثال ۳۰: ضابطه‌ی معکوس تابع $y=x^4-2x^2+1$ با شرط $x\ge 1$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ ۲) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ ۳) $y=-\sqrt{1+\sqrt{x}}$ ۴) $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=x^4-2x^2+1 \Rightarrow y=(x^2-1)^2 \xrightarrow{x\ge1} (x^2-1)=\sqrt{y} \Rightarrow x^2=1+\sqrt{y} \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{y}}$$

نکته ۱۳: اگر نقطه‌ی $A(a,b)$ روی منحنی f باشد، نقطه‌ی $A'(b,a)$ روی منحنی f^{-1} خواهد بود، یعنی نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگر می‌باشند.

مثال ۳۱: تابع وارون، تابع با ضابطه‌ی $y=x^3-6x^2+12x$ کدام است؟

۱) $y=2+\sqrt[3]{x+8}$ ۲) $y=-2-\sqrt[3]{x+8}$ ۳) $y=2+\sqrt[3]{x-8}$ ۴) $y=-2-\sqrt[3]{x-8}$

پاسخ: گزینه «۳» **روش اول:**

$$y=x^3-6x^2+12x=(x-2)^3+8 \Rightarrow (x-2)^3=y-8 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{y-8}$$

$$\Rightarrow x=2+\sqrt[3]{y-8} \xrightarrow{\text{نقش x و y عوض می‌شود}} y=f^{-1}(x)=2+\sqrt[3]{x-8}$$

روش دوم: با توجه به نکته‌ی گفته شده داریم: $A(2,8)\in f$ پس نقطه $A'(8,2)\in f^{-1}$ خواهد بود و تنها گزینه‌ای که اگر $x=8$ قرار دهیم، مقدار $y=2$ حاصل شود، گزینه (۳) می‌باشد.

نکته ۱۴: در توابع هموگرافیک به‌صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه ضابطه‌ی معکوس تابع با خود تابع برابرخواهد بود، یعنی $fof(x)=x$.

نکته ۱۵: معکوس یک تابع فرد در صورت وجود، تابعی فرد است.

نکته ۱۶: تابع زوج، معکوس‌پذیر و یک به یک نیست.

نکته ۱۷: اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز اکیداً صعودی است (این حکم برای اکیداً نزولی هم برقرار است).

مثال ۳۲: اگر $f(x)=\text{Arcsin}\frac{1}{x+1}$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sin x}{x}$ ۲) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ ۳) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$ ۴) $\frac{1-\sin x}{\sin x}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم. سپس نقش x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\text{Arc}\sin\frac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y=\frac{1}{1+x} \Rightarrow \sin y+x\sin y=1 \Rightarrow x=\frac{1-\sin y}{\sin y} \xrightarrow{\text{نقش x و y عوض می‌شود}} y=f^{-1}(x)=\frac{1-\sin x}{\sin x}$$

مثال ۳۳: ضابطه‌ی معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1}$ $(x>0)$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$ ۲) $\sqrt{\frac{1-e^x}{e^x}}$ ۳) $\sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}$ ۴) $\sqrt{\frac{1+e^x}{e^x}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=\text{Ln}\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1}=e^y \Rightarrow x^2-x^2e^y=e^y \Rightarrow x^2=\frac{e^y}{1-e^y} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{e^y}{1-e^y}} \xrightarrow{x>0} f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1-e^x}}$$