## درسنامه۳: رتبه‌ی ماتریس

در این بخش می‌خواهیم با مفهوم رتبه‌ی ماتریس آشنا شده و روش محاسبه‌ی آن را شرح دهیم. پیش از آن لازم است با مفهوم استقلال و وابستگی خطی آشنا شوید. در این قسمت از درس، ماتریس‌های سطری یا ستونی را گاهی اوقات بردار می‌نامیم.

### استقلال و وابستگی خطی

ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\3&5&10\\7&11&22\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. سطرهای آن را می‌توانیم به صورت $A_1=[1\quad 1\quad 2]$، $A_2=[3\quad 5\quad 10]$ و $A_3=[7\quad 11\quad 22]$ نامگذاری کنیم. آیا می‌توانید رابطه‌ای که بین سطرهای ماتریس وجود دارد را پیدا کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شوید که اگر سطر دوم را دو برابر کرده و با سطر اول جمع کنیم، سطر سوم به دست می‌آید. به عبارتی $A_3=2A_2+A_1$ است. اگر رابطه‌ای بین سطرهای ماتریس وجود داشته باشد، مانند مثال بالا، که توانستیم سطر سوم را با استفاده از سطرهای اول و دوم تولید کنیم، در این حالت می‌گویند سطرهای ماتریس $A$ به یکدیگر **وابسته‌ی خطی‌اند.**

در یک نمونه‌ی دیگر به ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\5&7\end{bmatrix}$ دقت کنید، داریم $A_1=[1\quad 0]$ و $A_2=[5\quad 7]$. اما این بار $A_1$ و $A_2$ هیچ رابطه‌ای با هم ندارند. در واقع $A_2$ مضرب $A_1$ نیست. مثلاً اگر $A_1$ را در ۵ ضرب کنید، $A_2$ تولید نمی‌شود:

$$5A_1=5[1\quad 0]=[5\quad 0]\neq A_2$$

در این حالت می‌گویند سطرهای ماتریس $A$ **مستقل خطی** هستند. در ریاضیات، برای اطمینان از مستقل خطی بودنِ $A_1$ و $A_2$ ابتدا فرض می‌کنند $c_1A_1+c_2A_2=\bar{0}$ شده باشد. اگر از این معادله بتوانیم نتیجه بگیریم که $c_1=c_2=0$ است، نشان داده‌ایم که $A_1$ و $A_2$ مستقل خطی هستند. مثلاً در این مثال از تساوی $c_1A_1+c_2A_2=\bar{0}$ خواهیم داشت:

$$c_1[1\quad 0]+c_2[5\quad 7]=[0\quad 0]\Rightarrow[c_1+5c_2\quad 7c_2]=[0\quad 0]\Rightarrow c_1+5c_2=0\quad,\quad 7c_2=0$$

پس باید $c_2=0$ و $c_1=0$ باشد. یعنی $A_1$ و $A_2$ مستقل خطی هستند.

**نکته۱۶:** در مورد هر نوع ماتریس با هر مرتبه و هر تعداد سطر، وقتی دو سطر از ماتریس، مضرب هم نباشند، حتماً نسبت به هم مستقل خطی هستند.

**نکته۱۷:** سطرهای ماتریس $A$ وابسته‌ی خطی‌اند اگر بتوانیم یکی از آن‌ها را به صورت ترکیب خطی سایر سطرها بنویسیم. مثلاً سطرهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&-4&2\\1&-2&7\end{bmatrix}$ مستقل خطی نیستند، زیرا می‌توانیم سطر سوم را به صورت مجموع سطرهای اول و دوم بنویسیم: $A_3=A_1+A_2$. سطرهای این ماتریس، وابسته‌ی خطی هستند.

❖ **تعریف:** اگر بتوانیم یک ترکیب خطی پیدا کنیم که در آن $c_1A_1+\cdots+c_mA_m=\bar{0}$ باشد اما همه‌ی ضرایب $c_i$ صفر نباشند، می‌گوییم $A_1$، $A_2$، ... و $A_m$ وابسته‌ی خطی هستند. اما اگر تنها حالتی که به صفر می‌رسد همان حالتِ $c_1=\cdots=c_m=0$ باشد، می‌گوییم $A_1$، $A_2$، ... و $A_m$ مستقل خطی هستند.

تا اینجا با مفهوم استقلال و وابستگی خطی آشنا شدیم. اما به یک ابزار قوی‌تر برای تشخیص آن‌ها احتیاج داریم. این ابزار همان دترمینان ماتریس‌های مربع است.

**قضیه:** اگر $\det A=0$ باشد، نشان می‌دهد که سطرهای ماتریس $A$ نسبت به هم وابسته‌ی خطی‌اند. به همین ترتیب اگر $\det A\neq 0$ باشد، ثابت می‌شود سطرهای $A$ نسبت به هم مستقل خطی‌اند.

**مثال۵۷: به ازای کدام مقدار m بردارهای (۲,m,۱) و (۱,۳,۲−) و (۱,۴,۳) وابسته خطی‌اند؟**

۱) ۲−　　۲) ۱−　　۳) ۱　　۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شرط آن که سه بردار وابستگی خطی داشته باشند آن است که دترمینان مربوط به این سه بردار مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix}2&m&1\\-1&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2(9-8)-m(-3-2)+1\times(-4-3)=0\Rightarrow 2+5m-7=0\Rightarrow 5m=5\Rightarrow m=1$$

## رتبه ماتریس

ابتدا توجه کنید که **رتبه‌ی** ماتریس و **مرتبه‌ی** ماتریس را با هم اشتباه نگیرید! همان‌طور که قبلاً گفتیم؛ هر ماتریس با $m$ سطر و $n$ ستون را از مرتبه‌ی $m\times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس مربعِ $A_{n\times n}$ را یک ماتریس مرتبه‌ی $n$ می‌گوییم. اما رتبه‌ی ماتریس یک بحث مفهومی‌تر است. در واقع **رتبه‌ی یک ماتریس، تعداد سطرهای مستقل خطی آن را نشان می‌دهد.**

**تعریف رتبه:** تعداد سطرهای مستقل خطیِ ماتریس $A_{m\times n}$ را رتبه‌ی آن می‌نامیم و با علامت $\text{rank}(A)$ یا $r(A)$ نشان می‌دهیم. در برخی از منابع، تعداد سطرهای مستقل خطی $A$ را رتبه‌ی سطری آن و تعداد ستون‌های مستقل خطی $A$ را رتبه‌ی ستونی آن می‌نامند. اما چون ثابت می‌شود که رتبه‌های سطری و ستونی $A$ با هم برابرند، این مفاهیم کاربرد چندانی ندارند. البته بهتر است تساوی زیر را به یاد داشته باشید:

$$\text{rank}(A) = (A \text{ تعداد سطرهای مستقل خطی}) = (A \text{ تعداد ستون‌های مستقل خطی})$$

وقتی یک ماتریس دارای $k$ سطر مستقل خطی باشد، حتماً دارای $k$ ستون مستقل خطی است و برعکس. بنابراین در ماتریس $A_{m\times n}$، رتبه‌ی $A$ نمی‌تواند از تعداد سطرها یا تعداد ستون‌ها بیشتر باشد.

**نتیجه:** در هر ماتریس $A_{m\times n}$، که $m$ سطر و $n$ ستون دارد، رتبه‌ی ماتریس $A$ نمی‌تواند از $n$ و $m$ بیشتر باشد، پس داریم:

$$\forall A \quad ; \quad 0 \le \text{rank}(A) \le \min(n,m)$$

از طرفی، تنها ماتریسی که رتبه‌اش صفر می‌شود، ماتریس صفر $\bar{0}$ است. رتبه‌ی هر ماتریس غیرصفر، حداقل برابر با یک است. بنابراین داریم:

$$\text{اگر} \quad A \ne \bar{0} \Rightarrow 1 \le \text{rank}(A) \le \min(n,m)$$

**روش‌های پیدا کردن رتبه:** برای تعیین رتبه‌ی ماتریس $A$ دو راه مختلف وجود دارد. یکی از آن‌ها استفاده از دترمینانِ زیرماتریس‌های مربع است و راه دوم، انجام عملیات سطری برای سطری ـ اشلی کردنِ ماتریس است که به روش حذفی گاوس معروف است. (مفهوم سطری ـ اشلی را در ادامه توضیح می‌دهیم) اکنون این روش‌ها را به طور کامل شرح می‌دهیم:

**الف) استفاده از دترمینان:** هر ماتریس $m\times n$ در درون خودش دارای زیرماتریس‌هایِ مربعی است. مثلاً یک ماتریسِ $3\times 4$ دارای زیرماتریس‌های $3\times 3$ و $2\times 2$ و $1\times 1$ است. برای مثال در شکل زیر، زیرماتریس‌های $3\times 3$ و برخی از زیرماتریس‌های $2\times 2$ را نشان داده‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، لزومی ندارد سطرها و ستون‌های زیرماتریس‌ها از بین سطرها و ستون‌های کنار هم انتخاب شود. در واقع در ماتریس $A_{3\times 4}$ می‌بینیم که ۴ زیرماتریس $3\times 3$ داریم که در ۲ تای آنها، ۲ ستون کنار هم و ۱ ستون با فاصله از آنها انتخاب شده و تشکیل زیر ماتریس‌های $3\times 3$ داده است. ابتدا از بزرگترین زیرماتریس‌های مربع آغاز می‌کنیم. دترمینان آن‌ها را می‌گیریم. به محض آن که دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر شود، مرتبه‌ی آن، رتبه‌ی ماتریس را مشخص می‌کند.

$$A=\begin{bmatrix}4&-2&-3&1\\2&1&-2&4\\2&5&-3&11\end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}4&-2&-3\\2&1&-2\\2&5&-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&-3&1\\1&-2&4\\5&-3&11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-3&1\\2&-2&4\\2&-3&11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-2&1\\2&1&4\\2&5&11\end{bmatrix}}_{\text{(زیرماتریس‌های } 3\times 3)} , \underbrace{\begin{bmatrix}4&\boxed{-2}&-3&\boxed{1}\\2&1&-2&4\\2&\boxed{5}&-3&\boxed{11}\end{bmatrix}}_{\text{(برخی از زیرماتریس‌های } 2\times 2)}$$

فرض کنید می‌خواهیم رتبه‌ی ماتریس $A_{3\times 4}$ را تعیین کنیم. این ماتریس خودش مربعی نیست؛ اما می‌توانیم در داخل آن ماتریس‌های مربعی انتخاب کنیم. آن‌ها را زیرماتریس‌های مربعی می‌نامیم. بررسی را از زیرماتریس‌های $3\times 3$ آغاز می‌کنیم. یکی از آن‌ها با استفاده از ۳ ستون سمت راست و دیگری با استفاده از ۳ ستون سمت چپ و دوتای دیگر به‌صورت آرایش کنار هم دو ماتریس $2\times 2$ و $3\times 1$ هستند.

ابتدا دترمینان این ماتریس‌های $3\times 3$ را حساب می‌کنیم. اگر دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، متوجه می‌شویم که رتبه‌ی $A$ برابر با ۳ است. اما اگر دترمینان هر دوی آن‌ها صفر شود، متوجه می‌شویم که رتبه‌ی $A$ از ۳ کمتر است و باید به سراغ زیرماتریس‌های $2\times 2$ برویم:

$$\begin{vmatrix}4&-2&-3\\2&1&-2\\2&5&-3\end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix}-2&-3&1\\1&-2&4\\5&-3&11\end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix}4&-3&1\\2&-2&4\\2&-3&11\end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix}4&-2&1\\2&1&4\\2&5&11\end{vmatrix}=0$$

پس لازم شد که به زیرماتریس‌های $2\times 2$ توجه کنیم. تعداد آن‌ها زیاد است و ما در شکل، برخی از آن‌ها را نشان داده‌ایم. به محض آن که دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر شد، دیگر نیازی به ادامه‌ی کار نداریم.

$$\begin{vmatrix}4&-2\\2&1\end{vmatrix}=8\ne 0$$

پس مطمئن شدیم که رتبه‌ی $A$ برابر با ۲ است. اگر دترمینان همه‌ی $2\times 2$ها هم صفر می‌شد، نتیجه می‌گرفتیم که رتبه‌ی $A$ برابر با یک است. دو نکته‌ی مهم را باید به یاد داشته باشید:

۱ـ فقط ماتریس صفر $A=\bar{0}$ دارای رتبه‌ی صفر است و سایر ماتریس‌ها حداقل رتبه‌ی یک دارند.

۲ـ در این روش حتماً از ماتریس‌های مربعِ بزرگ بررسی را شروع کنید.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم رتبه‌ی ماتریس $A_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را تعیین کنیم. بزرگترین زیرماتریس‌های مربع در این ماتریس، ۳×۳ هستند. ابتدا دترمینان آن‌ها را حساب می‌کنیم. اگر یکی از آن‌ها صفر نشود کار تمام است و رتبه‌ی A برابر با ۳ می‌شود:

$$\det\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} = ۰ \quad , \quad \det\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} = ۰$$

هر دو دترمینان، صفر شدند. پس مطمئن می‌شویم که رتبه‌ی A کمتر از ۳ است. حالا به زیرماتریس‌های ۲×۲ توجه کنیم. خوشبختانه اولین آن‌ها دترمینان غیر صفر دارد: $\det\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = -۶ \neq ۰$ بنابراین رتبه‌ی ماتریس A برابر با دو است: $\text{rank}(A) = ۲$

**مثال۵۸: رتبه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.**

☑ **پاسخ:** نیازی نیست در چنین مثال ساده‌ای از دترمینان استفاده کنیم. سطرهای دوم و سوم مضرب‌هایی از سطر اول هستند. سطر دوم، دو برابر سطر اول است و سطر سوم سه برابر آن است. $A_۲ = ۲A_۱$ و $A_۳ = ۳A_۱$. پس واضح است که رتبه‌ی A برابر است با یک: $\text{rank}(A) = ۱$.

---

**مثال۵۹: رتبه (RANK) ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۵ & ۹ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» اگر دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کنیم، سطر سوم به دست می‌آید و این نشان می‌دهد که سطر سوم وابسته است. سطر چهارم نیز برابر تفاضل سطر دوم و سطر اول است، پس این نشان می‌دهد که سطرهای اول و دوم ماتریس مستقل می‌باشند، پس رتبه ماتریس برابر ۲ می‌باشد.

---

**مثال۶۰: رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ & ۷ & ۱۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۳ & ۶ & ۹ & ۱۵ \end{bmatrix}$، کدام است؟** (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

**روش اول:** به سادگی مشاهده می‌شود که ستون‌های اول و دوم ماتریس مستقل خطی هستند، ولی ستون سوم، جمع دو ستون قبلی است. بنابراین ماتریس A فقط دو سطر مستقل خطی دارد و در نتیجه $r(A) = ۲$ است.

**روش دوم:** واضح است که دو سطر اول و دوم مضربی از یکدیگر نیستند، پس مستقل خطی‌اند. اما با کمی دقت متوجه می‌شویم که سطر سوم مضربی از سطر دوم می‌باشد. بنابراین ماتریس A فقط دو سطر مستقل خطی دارد و در نتیجه $\text{rank}(A) = ۲$ است.

---

**مثال۶۱: رتبه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟**

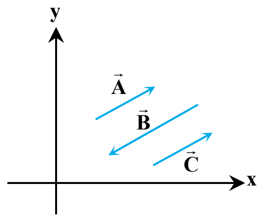
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» سطرهای اول و سوم مضرب یکدیگر نیستند. اما سطر دوم کاملاً صفر است. می‌توان گفت سطر دوم همان سطر اول است که در صفر ضرب شده است. بنابراین سطرهایی که کاملاً صفر هستند مستقل خطی محسوب نمی‌شوند. پس به طریق مفهومی واضح است که رتبه‌ی A برابر با ۲ می‌باشد. $\text{rank}(A) = ۲$

---

# درسنامه۴: بردارها در فضای سه بعدی

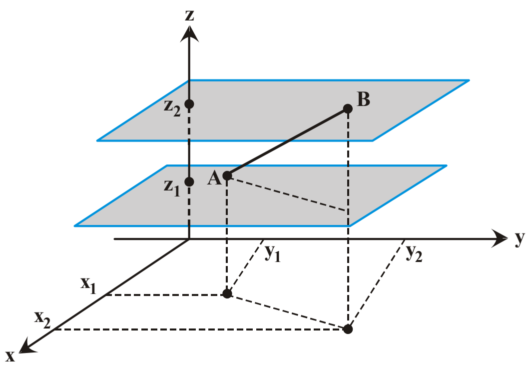
برخی از کمیت‌ها را می‌توان با یک عدد حقیقی بیان کرد. برای مثال، قد و وزن یک شخص، دمای محیط، فاصله‌ی دو شهر و مدت زمان پرواز یک هواپیما، هر کدام از این‌ها را می‌توانیم با یک عدد حقیقی بیان کنیم. این کمیت‌ها را کمیت‌های **اسکالر** می‌نامیم. اما نوع دیگری از کمیت‌ها وجود دارد که علاوه بر مقدار، دارای جهت نیز هستند.




کمیت‌هایی مانند نیرو، سرعت و شتاب را، که علاوه بر اندازه، دارای جهت هم هستند کمیت‌های **برداری** می‌نامیم. اگر دو بردار داشته باشیم که موازی هم باشند، آن‌ها را **هم‌راستا** می‌نامیم. بردارهای هم‌راستا ممکن است هم‌جهت یا غیرهم‌جهت باشند. در شکل مقابل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هم‌راستا هستند، اما هم‌جهت نیستند.

## دستگاه مختصات قائم

هندسه‌ی تحلیلی، یعنی هندسه‌ای که در یک دستگاه مختصات بررسی شده باشد. برای اشکال مسطح، فقط به دو محور x و y نیاز داریم. اما در یک دستگاه سه بعدی با محورهای x، y و z می‌توانیم علاوه بر اشکال مسطح، اشکال فضایی را نیز تحلیل کنیم.

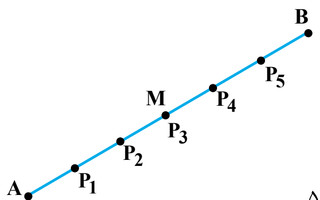



در این دستگاه هر نقطه دارای سه **مؤلفه** یا **مختص** است. معمولاً مؤلفه‌های x، y و z را به ترتیب طول، عرض و ارتفاع آن نقطه می‌نامیم. اگر A و B دو نقطه از دستگاه سه بعدی باشند، فاصله‌ی آن‌ها از رابطه‌ی زیر که نتیجه‌ی قضیه‌ی فیثاغورث است به دست می‌آید:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

اگر پاره‌خط AB را نصف کنیم، نقطه‌ی وسطِ پاره‌خط AB از میانگین مؤلفه‌های A و B به دست می‌آید:

$$M=\frac{(A+B)}{۲}=(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$$




این فرمول یک حالت کلی‌تر هم دارد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم پاره‌خط AB را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم. برای مثال، تصور کنید می‌خواهیم پاره‌خط AB را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کنیم. مطابق شکل، ۵ نقطه‌ی $P_۱$، ...، و $P_۵$ باید مشخص شوند. مختصات نقاط $P_i$ چگونه به دست می‌آید؟ به روابط زیر دقت کنید. هرچه به B نزدیک‌تر می‌شویم ضریب B آن بزرگتر می‌شود.

$$P_۱=\frac{۵A+B}{۶}\qquad P_۲=\frac{۴A+۲B}{۶}\qquad P_۳=\frac{۳A+۳B}{۶}\qquad P_۴=\frac{۲A+۴B}{۶}\qquad P_۵=\frac{A+۵B}{۶}$$

در حالت کلی اگر بخواهیم پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم نقاط $P_i$ از رابطه‌ی $P_i=\frac{(n-i)A+iB}{n}$ به ازای $i=۱,۲,\cdots,n-۱$ به‌دست می‌آیند.

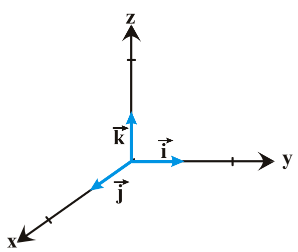
## بردار

هر پاره‌خط جهت‌دار را یک بردار می‌نامیم. برداری که ابتدای آن در نقطه‌ی A و انتهای آن در B باشد را با علامت $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم. اگر O مبدأ مختصات باشد، بردار $\overrightarrow{OA}$ را اغلب با همان علامت $\vec{A}$ نشان می‌دهیم. برای نشان دادن بردارها دو روش وجود دارد.

**روش اول:** مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ را به این صورت می‌نویسیم: $\overrightarrow{AB}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱)$

همیشه باید مؤلفه‌های انتهای بردار را منهای مؤلفه‌های ابتدای آن کنیم. برای مثال برداری که از $A(۱,۲,-۳)$ به $B(۴,-۲,۶)$ می‌رود برابر است با:

$$\overrightarrow{AB}=(۴-۱,-۲-۲,۶-(-۳))=(۳,-۴,۹)$$




**روش دوم:** از بردارهای واحد برای نوشتن بردار $\overrightarrow{AB}$ استفاده می‌کنیم. مطابق شکل بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهایی به اندازه‌ی واحد و در جهت محورهای x، y و z هستند. هر بردار دیگر، ترکیب خطی این سه بردار است. برای مثال داریم: $\overrightarrow{AB}=(۳,-۴,۹)=۳\vec{i}-۴\vec{j}+۹\vec{k}$

**اندازه بردار:** اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی B، به عبارتی داریم:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}}$$

**تساوی بردارها:** دو بردار را که اندازه و جهت یکسانی داشته باشند، با هم برابر می‌گوییم. به لحاظ تحلیلی برای تساوی بردارها باید مؤلفه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

**اعمال جبری روی بردارها:** برای بردارها چهار عمل جبری تعریف می‌شود که عبارتند از جمع برداری، ضرب اسکالر، ضرب داخلی و ضرب خارجی، که در ادامه، طرز محاسبه و کاربرد هر یک را شرح می‌دهیم.

**ضرب اسکالر در بردار:** حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی مانند $\lambda$ در بردار $\vec{A}$، برداری مانند $\vec{B}$ است که اگر $\lambda$ مثبت باشد، $\vec{B}$ برداری است هم جهت با $\vec{A}$ و اگر $\lambda$ منفی باشد، $\vec{B}$ برداری است در خلاف جهت $\vec{A}$. و اندازه‌ی $\vec{B}$، $|\lambda|$ برابر اندازه بردار $\vec{A}$ خواهد بود. $(\vec{B}=\lambda\vec{A})$

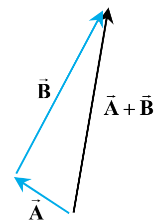
**حاصل‌جمع و تفاضل دو بردار:** اگر دو بردار $\vec{A}(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $\vec{B}(x_۲, y_۲, z_۲)$ مفروض باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\vec{A}+\vec{B}=(x_۱+x_۲\,,\,y_۱+y_۲\,,\,z_۱+z_۲)\ ,\ \vec{A}-\vec{B}=(x_۱-x_۲, y_۱-y_۲, z_۱-z_۲)$$

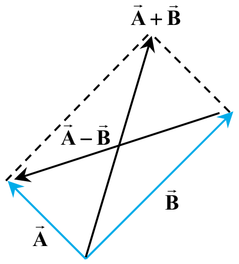
برای رسم هندسیِ بردار $\vec{A}+\vec{B}$ دو راه وجود دارد:

**روش اول:** مطابق شکل سمت راست پایین، ابتدا بردار $\vec{A}$ را رسم می‌کنیم، از انتهای آن بردار $\vec{B}$ را رسم می‌کنیم، سپس ابتدای $\vec{A}$ را به انتهای $\vec{B}$ وصل می‌کنیم. مثلثی به دست می‌آید که اضلاع آن $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{A}+\vec{B}$ هستند. این را روش مثلث می‌نامیم.

**روش دوم:** مطابق شکل سمت چپ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم. سپس از انتهای بردار $\vec{A}$، برداری موازی و هم‌اندازه با $\vec{B}$ رسم می‌کنیم. از انتهای بردار $\vec{B}$، برداری موازی و هم‌اندازه با $\vec{A}$ رسم می‌کنیم. متوازی‌الاضلاعی که با این بردارها ساخته می‌شود را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل، یکی از قطرها $\vec{A}+\vec{B}$ و قطر دیگر $\vec{A}-\vec{B}$ را نشان خواهد داد. بردار $\vec{A}-\vec{B}$ از انتهای $\vec{B}$ به انتهای $\vec{A}$ رسم می‌شود.



قانون مثلث



قانون متوازی‌الاضلاع

**امتداد نیمساز دو بردار:** برداری که امتداد نیمساز بردارهای غیرصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را نشان می‌دهد به صورت $\vec{C}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}+\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ نوشته می‌شود. برای مثال اگر $\vec{A}=(۲,۲,۱)$ و $\vec{B}=(۰,۳,۴)$ باشند داریم:

$$\vec{C}=\frac{(۲,۲,۱)}{۳}+\frac{(۰,۳,۴)}{۵}=(\frac{۲}{۳},\frac{۱۹}{۱۵},\frac{۱۷}{۱۵})$$

**مثال ۶۷:** امتداد نیمساز زاویه بین $\vec{u}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{v}=(۳,۰,-۴)$ با امتداد کدام بردار مشخص می‌شود؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱۴}{۱۵}i-\frac{۲}{۳}j-\frac{۲۲}{۱۵}k$
۲) $\frac{۱۴}{۱۵}i+\frac{۲}{۳}j-\frac{۲۲}{۱۵}k$
۳) $\frac{۱۴}{۱۵}i+\frac{۲}{۳}j+\frac{۲۲}{۱۵}k$
۴) $\frac{۱۴}{۱۵}i-\frac{۲}{۳}j+\frac{۲۲}{۱۵}k$

**پاسخ:** گزینه «۲» امتداد نیمساز دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با برآیند بردارهای یکه شده‌ی آن‌ها:

$$\text{بردار نیمساز}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}+\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(۱,۲,-۲)}{\sqrt{۱+۴+۴}}+\frac{(۳,۰,-۴)}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{(۱,۲,-۲)}{۳}+\frac{(۳,۰,-۴)}{۵}=(\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۵},\frac{۲}{۳}+۰,-\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۵})=(\frac{۱۴}{۱۵},\frac{۲}{۳},\frac{-۲۲}{۱۵})$$

**کسینوس‌های هادی یک بردار:** اگر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایایی باشند که بردار دلخواه $\vec{u}=(a,b,c)$ با جهت‌های مثبت محورهای $x$، $y$ و $z$ می‌سازد، آن‌گاه $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بردار یا خط می‌گوییم و از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$\cos\alpha=\frac{a}{|\vec{u}|}\quad \text{و}\quad \cos\beta=\frac{b}{|\vec{u}|}\quad \text{و}\quad \cos\gamma=\frac{c}{|\vec{u}|}$$

با توجه به تعریف فوق بلافاصله نتیجه زیر را داریم:

$$\boxed{\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱}$$

**مثال ۶۸:** اگر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایایی باشند که خط $d$ با محورهای مختصات می‌سازد، کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $\alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ$
۲) $\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta+\sin^۲\gamma=۲$
۳) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=۱$
۴) $\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$

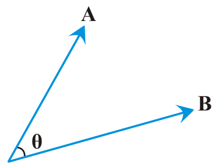
**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایای هادی هستند، پس داریم:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱\Rightarrow ۱-\sin^۲\alpha+۱-\sin^۲\beta+۱-\sin^۲\gamma=۱\Rightarrow \sin^۲\alpha+\sin^۲\beta+\sin^۲\gamma=۲$$

## حاصل‌ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با علامت $\vec{A}.\vec{B}$ نشان می‌دهند. برای محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{B}=(x_2,y_2,z_2)$ دو راه وجود دارد، می‌توانیم اندازه دو بردار را در کسینوسِ زاویه‌ی بین دو بردار ضرب کنیم: $\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|\cos\theta$

همچنین می‌توانیم آن را با استفاده از مؤلفه‌ها، به دست آوریم:



$$\vec{A}.\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$$

که با توجه به رابطه فوق زاویه بین دو بردار از فرمول زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\boxed{\cos\theta=\frac{x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}$$

**شرط عمود بودن دو بردار:** دو بردار $\vec{A}(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ و $\vec{B}(x_2\ ,y_2\ ,\ z_2)$ در صورتی بر هم عمود هستند که داشته باشیم:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0}$$

**خواص ضرب داخلی:**

۱) ضرب داخلی بردارها خاصیت جابجایی دارد یعنی داریم: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$.

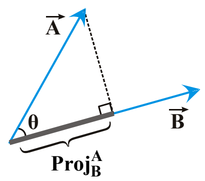
۲) ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با اندازه‌اش به توان دو: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^2$

۳) بیشترین مقدار ضرب داخلی دو بردار وقتی به دست می‌آید که $\theta=0$ باشد. بنابراین داریم: $|\vec{A}.\vec{B}|\le|\vec{A}||\vec{B}|$

۴) ضرب داخلی در جمع بردارها بخش‌پذیر است: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

**طول تصویر یک بردار:**

در شکل مقابل، تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ را با علامتِ $\text{Proj}_B^A$ نشان داده‌ایم. در مثلث قـائم‌الزاویـه، می‌دانید که کسینوسِ زاویه‌ی $\theta$ برابر با نسبتِ ضلع مجاور، به وتر است. به عبارتی داریم:



$$\cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{\text{Proj}_B^A}{|\vec{A}|}\Rightarrow \text{Proj}_B^A=|\vec{A}|\cos\theta$$

از طرفی دیدیم که $\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ است. با جایگذاری این تساوی در رابطه‌ی قبلی داریم:

$$\boxed{\text{Proj}_B^A=|\vec{A}|\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

**مثال ۶۹:** تصویر بردار $\vec{A}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ بر $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$ ۲) $\frac{4}{9}\vec{i}-\frac{2}{9}\vec{j}+\frac{4}{9}\vec{k}$ ۳) $-\frac{2}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}+\frac{6}{9}\vec{k}$ ۴) $-\frac{1}{4}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$

**پاسخ:** گزینه «۲»

$$\text{تصویر } \vec{A} \text{ بر } \vec{B}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\vec{B}=\frac{-2-2+6}{4+1+4}(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=\frac{4}{9}\vec{i}-\frac{2}{9}\vec{j}+\frac{4}{9}\vec{k}$$

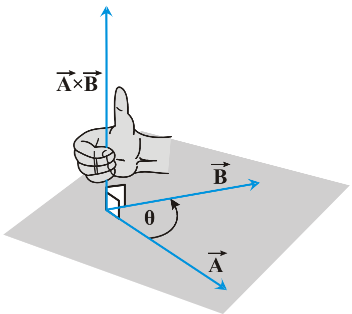
**مثال ۷۰:** اگر $a=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$، $b=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ در این صورت $\text{Proj}_b^a$ (تصویر a در امتداد b) عبارت است از: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}-\frac{1}{6}\vec{k}$ ۲) $\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{6}\vec{j}-\frac{1}{6}\vec{k}$ ۳) $-\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{6}\vec{j}+\frac{1}{6}\vec{k}$ ۴) $-\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}+\frac{1}{6}\vec{k}$

**پاسخ:** گزینه «۴»

$$\overrightarrow{\text{Proj}_b a}=(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\frac{2\times1+1\times(-1)-1\times2}{2^2+1^2+(-1)^2})(2,1,-1)=(\frac{-1}{3},\frac{-1}{6},\frac{1}{6})$$

## حاصل‌ضرب خارجی دو بردار




بردارهای $\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ و $\vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برداری است مانند $\vec{C}$ که بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است. برای تشخیص جهت آن نیز از قانون دست راست مطابق شکل استفاده می‌کنیم. البته این کار برای مسائل فیزیکی لازم می‌شود.

در مسائل فیزیکی، برای تشخیص جهت صحیح بردار $\vec{C}$، از قانون دست راست، مطابق شکل استفاده می‌کنند. اگر چهار انگشت را روی $\vec{A}$ و هم‌جهت با آن قرار داده و به سمت $\vec{B}$ ببندیم، انگشت شصت، جهت $\vec{C}$ را نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی ضرب خارجی از دترمینان استفاده می‌کنیم:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

**مثال ۷۱: بردار عمود بر مثلثی با رئوس $(1,2,1),(1,1,-1),(2,-1,2)$ برابر است با:** (معماری کشتی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(7,-2,-1)$　　۲) $(3,-2,1)$　　۳) $(-1,4,3)$　　۴) $(7,2,-1)$

**پاسخ:** گزینه «۴» برای یافتن بردار عمود بر مثلث ABC ابتدا با توجه به رئوس داده شده دو بردار از مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}A:(1,2,1)\\ B:(1,1,-1)\\ C:(2,-1,2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{AB}:(0,-1,-2)\\ \overline{BC}:(1,-2,3)\end{cases}$$

بردار عمود بر مثلث، در راستای حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ خواهد بود.

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-7,-2,1)$$

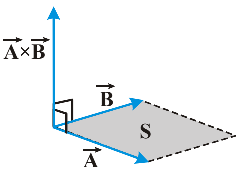
بدیهی است که قرینه بردار فوق نیز بر صفحه مثلث عمود خواهد شد.

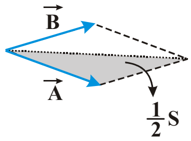
---

**تذکر ۵:** اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که با نماد $\vec{A}\times\vec{B}$ نشان داده می‌شود برابر است با:

$$\boxed{|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}|.|\vec{B}|\sin\theta}$$

که θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.




**نکته ۱۸:** اندازه $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته شده است. همچنین مساحت مثلث حاصل از دو بردار A و B برابر $\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$ می‌باشد.

**مثال ۷۲: اگر S مساحت متوازی‌الاضلاعی باشد که بر روی دو بردار $v_1(a_1,b_1)$ و $v_2(a_2,b_2)$ ساخته می‌شود، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\cdot[v_1 \quad v_2]$ کدام است؟** (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) S　　۲) $S^2$　　۳) $\sqrt{S}$　　۴) 2S

**پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$A=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}.[v_1 \quad v_2]=\begin{bmatrix}v_1.v_1 & v_1.v_2\\ v_1.v_2 & v_2.v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|v_1|^2 & v_1.v_2\\ v_1.v_2 & |v_2|^2\end{bmatrix}$$

حال دترمینان ماتریس اخیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\det A=|v_1|^2|v_2|^2-(v_1.v_2)^2=|v_1|^2|v_2|^2-|v_1|^2|v_2|^2\cos^2\theta=|v_1|^2|v_2|^2\sin^2\theta=S^2$$

---

**نکته ۱۹:** گفتیم که بردار $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود می‌باشد. بنابراین اگر $\vec{A}\times\vec{B}$ را در $\vec{A}$ یا $\vec{B}$ ضرب داخلی کنیم، حاصل آن صفر خواهد شد:

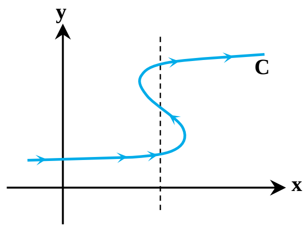
$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{A}=0 \quad , \quad (\vec{A}\times\vec{B}).\vec{B}=0$$

همچنین اگر برداری مانند $\vec{D}$ با بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در یک صفحه قرار داشته باشد (یعنی این ۳ بردار هم‌صفحه باشند) چون بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است پس بر $\vec{D}$ هم عمود است و خواهیم داشت: $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{D}=0$.

# درسنامه۲: منحنی‌های پارامتری و تعریف توابع برداری

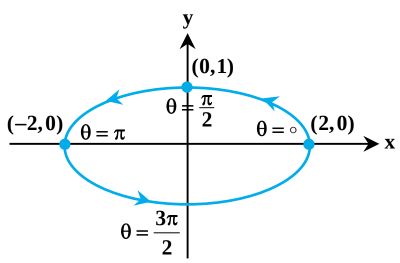
برای بررسی منحنی‌های فضایی از ابزارهایی مانند پارامتری کردن منحنی استفاده می‌کنیم. سرعت حرکت روی منحنی یا مقدار خمیدگی آن را با استفاده از توابعی به نام توابع برداری اندازه‌گیری می‌کنیم. در این بخش با مفهوم منحنی‌های پارامتری و توابع برداری آشنا می‌شویم.

## منحنی‌های پارامتری




فرض کنید متحرکی در صفحه‌ی $xoy$ روی منحنی $C$ در حال حرکت باشد. همان‌طور که می‌دانید اگر مطابق شکل یک خط عمودی، بیشتر از یک بار منحنی $C$ را قطع کند، دیگر نمی‌توان آن را به‌صورت تابع $y=f(x)$ بیان کرد. پس برای نوشتن معادله‌ی مسیر حرکت این متحرک، به جای رابطه‌ی دکارتی $y=f(x)$ باید از شیوه‌ی دیگری استفاده کنیم. یکی از روش‌ها استفاده از معادلات پارامتری است. در این روش به جای این که $y$ برحسب $x$ یا $x$ برحسب $y$ نوشته شود، هر دوی آن‌ها به متغیر دیگری مانند $t$ وابسته می‌شوند. این متغیر سوم را **پارامتر** می‌نامیم.

برای مثال در منحنی $y^۲=x$ نمی‌توانید $y$ را به صورت تابعی از $x$ بنویسید. اگر هم سعی کنید، به تساوی $y=\pm\sqrt{x}$ می‌رسید که تابع نیست، زیرا به ازای هر $x\geq ۰$، دو مقدار $y$ به‌دست می‌آید. اما همین منحنی را می‌توانیم با معادلات پارامتری $\begin{cases}x=t^۲\\y=t\end{cases}$ بیان کنیم و حالا به ازای هر مقدار $t$، فقط یک $x$ و یک $y$ به‌دست می‌آید. پس منحنی $y^۲=x$ تابعی برحسب $x$ نیست اما می‌توان آن را به صورت تابعی برحسب متغیر $t$ نوشت. البته معادلات پارامتری می‌توانند توابع $y=f(x)$ را هم نشان دهند. برای مثال تابع $y=۲x^۳+x$ را می‌توانیم به صورت $\begin{cases}x=t\\y=۲t^۳+t\end{cases}$ پارامتری کنیم. اگر پارامتر $t$ نشان‌دهنده‌ی زمان باشد، با جایگذاری مقادیر مختلف به جای آن می‌توانیم مشخص کنیم که در هر لحظه، کدام نقطه از منحنی به‌دست می‌آید. بنابراین معادلات پارامتری می‌توانند انواع مختلفی از منحنی‌ها را نشان دهند در حالی که معادله‌ی $y=f(x)$ فقط برای منحنی‌هایی که تابعی از $x$ باشند، قابل استفاده است.



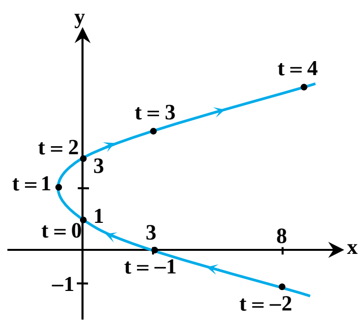

به طور خلاصه یک منحنی پارامتری، منحنی‌ای است که مختصات نقاط آن با جایگذاری یک پارامتر مانند $t$ در فرمول‌های $x=x(t)$ و $y=y(t)$ به‌دست می‌آیند. اگرچه اغلب اوقات از پارامتر $t$ استفاده می‌کنیم اما این کار الزامی نیست. برای مثال در منحنی $C:\begin{cases}x=۲\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ از پارامتر $\theta$ استفاده شده است. به ازای $\theta=۰$ داریم $(x,y)=(۲,۰)$ و به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۱)$ به‌دست می‌آید و به همین ترتیب می‌توانیم با قرار دادن مقادیر مختلف $\theta$ نقاط مختلف $C$ را تعیین کنیم.

**تذکر ۵:** گاهی اوقات می‌توانیم از معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ متغیر $t$ را حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم $x$ و $y$ را پیدا کنیم. برای مثال اگر $x=t^۲-۲t$ و $y=t-۱$ باشد، با ایجاد مربع کامل در ضابطه‌ی $x$ خواهیم داشت $x=(t^۲-۲t+۱)-۱=(t-۱)^۲-۱$ و اکنون از تساوی $y=t-۱$ استفاده می‌کنیم و به تساوی $x=y^۲-۱$ می‌رسیم. یک راه دیگر آن است که از رابطه‌ی $y=t-۱$ نتیجه بگیریم $t=y+۱$ و این نتیجه را در معادله‌ی پارامتری $x$ قرار بدهیم: $x=t^۲-۲t=(y+۱)^۲-۲(y+۱)=y^۲-۱$

**مثال ۱۷: منحنی $C$ با معادلات پارامتری $y=t+۱$ ، $x=t^۲-۲t$ تعریف شده است. این منحنی را رسم کرده و نوع آن را تعیین کنید.**

**پاسخ:** در این منحنی پارامتر $t$ محدود نشده است. بنابراین $-\infty<t<+\infty$ خواهد بود. با قرار دادن برخی از مقادیر $t$ در معادلات پارامتری، چند نقطه از منحنی را مشخص می‌کنیم. سپس با حرکت در جهت افزایش $t$ می‌توانیم این منحنی را رسم کنیم.

| t | x | y |
|---|---|---|
| −۲ | ۸ | −۱ |
| −۱ | ۳ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | −۱ | ۲ |
| ۲ | ۰ | ۳ |
| ۳ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۸ | ۵ |



از نمودار به‌دست آمده معلوم می‌شود که این منحنی یک سهمی است. البته برای اطمینان بیشتر از این موضوع می‌توانیم متغیر $t$ را از معادلات فوق حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم بین $x$ و $y$ را پیدا کنیم. از تساویِ $y=t+1$ معلوم می‌شود که $t=y-1$ است. حالا با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی $x$ خواهیم داشت:

$$x=t^2-2t=(y-1)^2-2(y-1)=y^2-4y+3$$

بنابراین منحنی $x=y^2-4y+3$ یک سهمی است.

---

**تذکر ۶:** فرض کنید منحنی $C$ با معادلات پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ مشخص شده باشد. اگر در این معادلات، به جای $t$ از $2t$ استفاده کنیم، منحنی $x=x(2t)$ ، $y=y(2t)$ همان منحنی قبلی است؛ فقط سرعت حرکت روی آن دو برابر شده است. (البته شیوه‌ی دقیق محاسبه‌ی سرعت را در بخش‌های بعدی خواهیم خواند). در واقع معادله‌ی پارامتری یک منحنی، منحصر به فرد نیست و ممکن است برای یک منحنی بتوانیم معادلات پارامتری متفاوتی را پیدا کنیم.

## تبدیل منحنی‌های دکارتی به پارامتری

گاهی اوقات ترجیح می‌دهیم یک منحنی دکارتی را به‌صورت پارامتری بنویسیم. برای انجام این کار از دسته‌بندی زیر استفاده می‌کنیم:

**۱ـ پارامتری کردن تابع $y=f(x)$**

اگر ضابطه‌ی $y$ را برحسب $x$ دارید، کافیست فرض کنید $x=t$ و آن‌گاه $y=f(t)$ به‌دست می‌آید. پس معادله‌ی پارامتری منحنی $y=f(x)$ به‌صورت $r(t)=(t,f(t))$ خواهد بود. دقت کنید که حدود $t$ همان حدود $x$ هستند زیرا $x=t$ است.

**توجه:** بدیهی است که معادله‌ی $x=f(y)$ را می‌توان به‌صورت $y=t$ و $x=f(t)$ پارامتری کرد. در این صورت حدود $t$، همان حدود $y$ هستند.

**۲ـ پارامتری کردن پاره‌خط AB**

فرض کنیم $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطه از فضای سه بعدی باشند. اگر مسیر حرکت یک متحرک، از نقطه‌ی $A$ تا نقطه‌ی $B$ باشد، برای پارامتری کردن این مسیر به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:

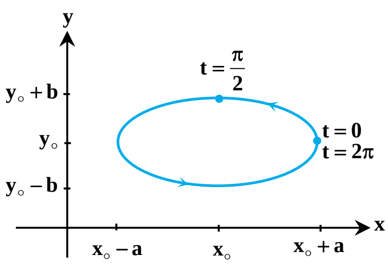
$$\vec{R}(t)=A+(B-A)t \quad , \quad 0\le t\le 1$$

به عبارت بهتر، مؤلفه‌های $\vec{R}(t)$ چنین هستند:

$$\vec{R}(t)=(x_1+(x_2-x_1)t,\, y_1+(y_2-y_1)t,\, z_1+(z_2-z_1)t)$$

به ازای $t=0$ در نقطه‌ی $A$ قرار داریم و در $t=1$ به نقطه‌ی $B$ می‌رسیم.

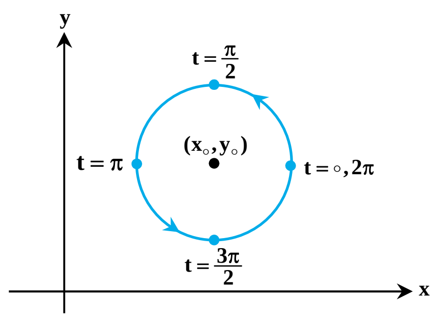
**۳ـ پارامتری کردن بیضی و دایره**




می‌دانید که معادله‌ی یک بیضی در حالت کلی به‌صورت $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ است. $(x_0,y_0)$ مرکز بیضی و $a$ و $b$ شعاع‌های افقی و عمودی آن هستند. از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ برای پارامتری کردن این معادله استفاده می‌کنیم. با این فرض که $\frac{x-x_0}{a}=\cos t$ و $\frac{y-y_0}{b}=\sin t$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=x_0+a\cos t \\ y=y_0+b\sin t \end{cases}$$

به ازای $t=0$ نقطه‌ی $(x_0+a,y_0)$ به‌دست می‌آید که گوشه‌ی سمت راستِ بیضی است.




به ازای $t=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی $(x_0,y_0+b)$ به‌دست می‌آید که بالاترین نقطه‌ی بیضی است و به همین ترتیب در جهت مثلثاتی روی بیضی حرکت می‌کنیم.

در $t=2\pi$ دوباره به نقطه‌ی $(x_0+a,y_0)$ می‌رسیم بنابراین، در یک بیضی کامل $0\le t\le 2\pi$ است.

در معادله بیضی اگر $a=b$ باشد، معادله‌ی دایره به‌دست می‌آید. بنابراین دایره‌ی $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$ که دایره‌ای به مرکز $(x_0,y_0)$ و شعاع $a$ است به این صورت پارامتری می‌شود:

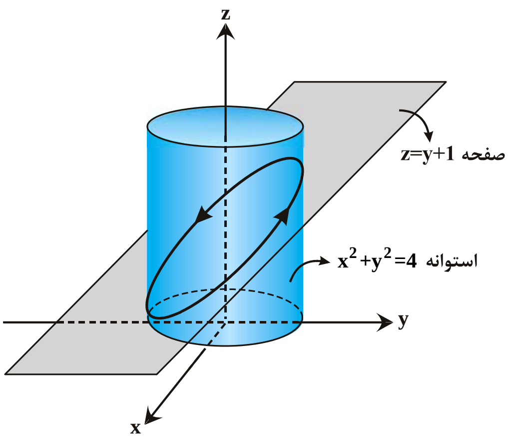
$$\begin{cases} x=x_0+a\cos t \\ y=y_0+a\sin t \end{cases}$$

برای یک دایره‌ی کامل که در جهت مثلثاتی طی می‌شود، حدود $t$ عبارتند از: $0\le t\le 2\pi$.

**خم‌های فضایی:** منحنی‌های پارامتری که در صفحه‌ی $xoy$ قرار دارند، دارای دو مؤلفه به‌صورت $\vec{R}(t)=(x(t),y(t))$ هستند. همان‌طور که مشاهده کردید گاهی اوقات می‌توانیم با حذف $t$ از معادلات پارامتری، رابطه‌ی دکارتی بین $x$ و $y$ را پیدا کنیم. اما منحنی‌های فضایی دارای سه مؤلفه به شکل $\vec{R}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ هستند. اگر بخواهیم معادله‌ی پارامتری یک خم فضایی را به معادله‌ی دکارتی تبدیل کنیم، معمولاً دو معادله دکارتی به‌دست می‌آید که هر کدام رویه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ هستند و منحنی مورد نظر، محل برخورد آنها با یکدیگر است.

برای مثال منحنی فضایی C با معادله‌ی پارامتری $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=t \\ z=2t\end{cases}$ را در نظر بگیرید. با حذف t از این معادلات به دو معادله‌ی دکارتی به شکل $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2y\end{cases}$ می‌رسیم که نشان می‌دهند منحنی C محل برخورد استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحه‌ی $z=2y$ است.

**مثال ۱۸:** **منحنی پارامتری $\vec{R}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 1+2\sin t)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید.**




**پاسخ:** با توجه به معادله‌ی پارامتری داده شده داریم: $x=2\cos t$، $y=2\sin t$، $z=2\sin t+1$. رابطه‌ی بین z و y خیلی واضح است. تساوی $z=y+1$ برقرار است و نشان می‌دهد که منحنی $\vec R(t)$ روی صفحه‌ی $z=y+1$ قرار گرفته است. از طرف دیگر با کمک اتحاد مثلثاتی $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ می‌توانیم رابطه‌ی x و y را بنویسیم:

$x^2+y^2=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4$

معادله‌ی $x^2+y^2=4$ استوانه‌ای در فضای سه بعدی است. از اینجا هم نتیجه می‌گیریم که منحنی $\vec R(t)$ روی این استوانه قرار دارد. به طور خلاصه با استفاده از معادلات پارامتری $\vec R(t)$ داریم:

$\vec R(t):\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=y+1\end{cases}$

منحنی $\vec R(t)$ محل برخورد استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ و صفحه‌ی $z=y+1$ است.

## توابع برداری

به تابع $f(t)=t^2+1$ توجه کنید. در این تابع با قرار دادن هر عدد حقیقی به جای t، یک عدد حقیقی دیگر به‌دست می‌آید. مثلاً به ازای $t=1$ مقدار $f(1)=2$ به‌دست می‌آید. این نوع از توابع را **توابع حقیقی** می‌نامند. اما توابعی هم هستند که با قرار دادن هر عدد حقیقی در آن‌ها یک بردار به‌دست می‌آید. برای مثال به تابع $\vec F(t)=(2t+1)\vec i+3t\vec j-t^2\vec k$ دقت کنید. با قرار دادن $t=1$ در این تابع به بردار $\vec F(1)=3\vec i+3\vec j-\vec k$ می‌رسیم. چنین توابعی را **توابع برداری** می‌نامند. در حالت کلی یک تابع برداری به‌صورت $\vec F(t)=f_1(t)\vec i+f_2(t)\vec j+f_3(t)\vec k$ یا $\vec F(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ نوشته می‌شود. توابع حقیقی $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ را مؤلفه‌های $\vec F(t)$ می‌نامند. معمولاً توابع برداری را با حروف بزرگ و توابع حقیقی را با حروف کوچک نشان می‌دهیم.

فرض کنید ذره‌ای در فضا در حال حرکت باشد و مکان این ذره در لحظه‌ی t توسط بردار $\vec R(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$ مشخص شده باشد. $\vec R(t)$ را بردار مکان می‌نامیم. بردار مکان، حالتِ خاصی از توابع برداری است که در بررسی مسائل فیزیکی مربوط به حرکت، سرعت و شتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد. دقت کنید که هر چه در مورد توابع برداری گفته می‌شود، برای بردار مکان $\vec R(t)$ هم قابل استفاده است.

**حد توابع برداری:** برای محاسبه‌ی حد تابع برداری $\vec F(t)$ در نقطه‌ی $t_0$ کافیست از مؤلفه‌های آن در این نقطه حد بگیریم. به عبارتی داریم:

$$\lim_{t\to t_0}\vec F(t)=\lim_{t\to t_0} f_1(t)\vec i+\lim_{t\to t_0} f_2(t)\vec j+\lim_{t\to t_0} f_3(t)\vec k$$

پس حد $\vec F(t)$ در $t_0$ فقط وقتی وجود دارد که همه‌ی مؤلفه‌های آن در این نقطه دارای حد باشند.

**پیوستگی توابع برداری:** یک تابع حقیقی مانند $f(t)$ به شرطی در $t_0$ پیوسته است که حد آن در این نقطه با مقدارش برابر باشد یعنی $\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$ باشد. حالا به تابع برداریِ $\vec F(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ توجه کنید. اگر مؤلفه‌های $\vec F(t)$ همگی در $t_0$ پیوسته باشند، می‌گوییم $\vec F(t)$ در $t_0$ پیوسته است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to t_0}\vec F(t)=\vec F(t_0)$$

**مثال ۱۹:** **به ازای چه مقادیری از a تابع $\vec F(t)=\begin{cases}\sin t\,\vec i+a(t+2)\vec j+\frac{tgt}{t}\vec k & ; t\neq 0\\ \vec j+\vec k & ; t=0\end{cases}$ در نقطه $t=0$ پیوسته است؟**

۱) $0$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $1$ ۴) $\frac{3}{2}$

**پاسخ:** گزینه «۲» از صورت سؤال معلوم است که در $t=0$ داریم $\vec F(0)=\vec j+\vec k$. حالا مقدار $\lim_{t\to 0}\vec F(t)$ را حساب می‌کنیم، حاصل این حد باید با $\vec F(0)$ برابر باشد.

$$\lim_{t\to 0} F(t)=\lim_{t\to 0}(\sin t)\vec i+\lim_{t\to 0} a(t+2)\vec j+\lim_{t\to 0}\frac{tgt}{t}\vec k=2a\vec j+\vec k=\vec F(0)\Rightarrow 2a\vec j+\vec k=\vec j+\vec k\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

**مشتق‌گیری از توابع برداری:** تابع برداری $\vec{F}(t)$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر مؤلفه‌های آن در این نقطه، مشتق‌پذیر باشند. مشتق‌گیری از تابع برداری $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ با مشتق‌گیری از تک‌تک مؤلفه‌ها انجام می‌شود: $\vec{F}'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$

با مشتق‌گیری دوباره از مؤلفه‌ها می‌توانیم بردار $\vec{F}''(t)$ را بنویسیم: $\vec{F}''(t)=(f_1''(t),f_2''(t),f_3''(t))$

**قواعد مشتق‌گیری از توابع برداری:** پیش از آغاز بحث، به اعمال جبری متنوعی که روی توابع برداری انجام می‌شوند اشاره می‌کنیم. فرض کنید $\vec{F}(t)$ و $\vec{G}(t)$ توابع برداری و $h(t)$ تابعی حقیقی باشد. انواع اعمال دوتایی که با این توابع ایجاد می‌شوند عبارتند از $\vec{F}oh(t)$، $h(t)\vec{F}(t)$، $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ که مفهوم هر کدام و نحوه‌ی مشتق‌گیری از آن را شرح می‌دهیم. $\vec{F}oh(t)$ تابعی برداری است که از ترکیب $h(t)$ و $\vec{F}(t)$ به‌دست می‌آید. اگر در تابع $\vec{F}(t)$ به جای همه‌ی tها، $h(t)$ را قرار دهید $\vec{F}oh(t)$ به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $\vec{F}(t)=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ و $h(t)=3t$ باشد، ترکیب آن‌ها $\vec{F}oh(t)=\sin 3t\vec{i}+\cos 3t\vec{j}+3t\vec{k}$ است. تابع برداری $h(t)\vec{F}(t)$ حاصل‌ضرب یک تابع حقیقی در یک تابع برداری است. اگر $\vec{F}(t)$ و $h(t)$ همان توابع قبلی باشند داریم: $h(t)\vec{F}(t)=3t(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t\vec{k})=3t\sin t\vec{i}+3t\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}$. علاوه بر این دو تابع برداری $\vec{F}(t)$ و $\vec{G}(t)$ را می‌توان در هم ضرب داخلی و خارجی کرد که آن‌ها را با $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ نشان می‌دهیم. در اینجا نحوه‌ی مشتق‌گیری از این اعمال دوتایی را مرور می‌کنیم.

۱) $(\vec{F}oh)'(t)=h'(t)\vec{F}'(h(t))$ ۲) $(h\vec{F})'(t)=h'(t)\vec{F}(t)+h(t)\vec{F}'(t)$

۳) $(\vec{F}.\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t).\vec{G}(t)+\vec{F}(t).\vec{G}'(t)$ ۴) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

در مورد حاصل‌ضرب خارجی دقت کنید که نباید توابع برداری را جابجا کنید. برای مثال اگر $\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$ را به‌صورت $\vec{G}'(t)\times\vec{F}(t)$ بنویسید نادرست خواهد بود. اما در مورد حاصل‌ضرب داخلی جابجا کردن توابع اشکالی ایجاد نمی‌کند.

**نکته۶:** اگر میدان برداری $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ را در خودش ضرب داخلی کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{F}(t).\vec{F}(t)=f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)=|\vec{F}(t)|^2$$

حالا اگر تابع برداری $\vec{F}(t)$ دارای اندازه‌ی ثابت $|\vec{F}(t)|=C$ باشد، خواهیم داشت: $\vec{F}(t).\vec{F}(t)=C^2$. حالا با مشتق‌گیری از طرفین معلوم می‌شود که $\vec{F}'(t).\vec{F}(t)=0$ است. به عبارتی اگر اندازه‌ی $F(t)$ ثابت باشد، بردارهای $\vec{F}'(t)$ و $\vec{F}(t)$ بر هم عمودند. عکس این مطلب هم برقرار است. اگر $\vec{F}(t)$ و $\vec{F}'(t)$ بر هم عمود باشند، اندازه‌ی $\vec{F}(t)$ ثابت است.

**انتگرال‌گیری از توابع برداری:** انتگرال معین تابع برداری $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ در بازه‌ی $a\le t\le b$ به‌صورت مؤلفه به مؤلفه انجام می‌شود. یعنی به این صورت:

$$\int_a^b\vec{F}(t)\,dt=(\int_a^b f_1(t)\,dt,\int_a^b f_2(t)\,dt,\int_a^b f_3(t)\,dt)$$

البته می‌توانیم از نمایش زیر هم استفاده کنیم:

$$\vec{F}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}\ \Rightarrow\int_a^b\vec{F}(t)\,dt=(\int_a^b f_1(t)\,dt)\vec{i}+(\int_a^b f_2(t)\,dt)\vec{j}+(\int_a^b f_3(t)\,dt)\vec{k}$$

**مثال۲۰: انتگرال معین تابع برداری $(0<t<\infty)$ $\vec{F}(t)=(e^t)\vec{i}+(Lnt)\vec{j}$ را در بازه‌ی $1\le t\le 2$ به‌دست آورید.**

**پاسخ:**

$$\int_1^2\vec{F}(t)\,dt=(\int_1^2 e^t dt)\vec{i}+(\int_1^2 Lnt dt)\vec{j}=\left[e^t\right]_1^2\vec{i}+[tLnt-t]_1^2\vec{j}=(e^2-e)\vec{i}+(2Ln2-1)\vec{j}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید حاصل انتگرال معین $\vec{F}(t)$ یک بردار است نه یک عدد حقیقی.

## بردارهای سرعت و شتاب

در ادامه‌ی بحث، روی تابع برداری $\vec{R}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ متمرکز می‌شویم که بردار مکانِ یک ذره‌ی متحرک در لحظه‌ی t است و نمودار آن مسیر حرکت این ذره را نشان می‌دهد. می‌خواهیم مفاهیم فیزیکیِ سرعت و شتاب را با داشتن معادله‌ی پارامتری $\vec{R}(t)$ بررسی کنیم.

یادآوری می‌کنیم که سرعت هر متحرک یک مفهوم برداری دارد. با مشتق‌گیری از $\vec{R}(t)$ نسبت به زمان، می‌توانیم بردار سرعت را به‌دست آوریم. این بردار را معمولاً $\vec{V}(t)$ می‌نامیم.

$$\boxed{\vec{V}(t)=\frac{d\vec{R}(t)}{dt}=(x'(t),y'(t),z'(t))}$$

**بردار $\vec{V}(t)$ در هر نقطه از منحنی مماس بر آن است و جهت حرکت روی آن را نشان می‌دهد. اندازه‌ی بردار سرعت را «تندی» حرکت می‌نامند.**

$$|\vec{V}(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$$

# فصل سوم

## « توابع چند متغیره »

## درسنامه: دامنه، برد، حد و پیوستگی توابع چند متغیره

بخش زیادی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مربوط به توابع یک متغیره می‌باشد که در آن‌ها با داشتن مقدار متغیر مستقل (معمولاً $x$)، مقدار تابع (معمولاً $y$) مشخص می‌شود. اما بسیاری از توابع در ریاضیات و کاربردهای آن، توابعی از دو یا چند متغیر می‌باشند. اغلب کمیت‌ها در جهان واقعی، به تعداد زیادی از متغیرها وابسته هستند. برای مثال، میزان سود فروشگاه به عوامل زیادی مانند هزینه‌ی حمل و نقل، تعداد مشتریان، مقدار خرید هر مشتری، هزینه‌ی اجاره‌ی محل فروشگاه، ... وابسته است. پس سود یک فروشگاه، تابعی چند متغیره است.

در این درسنامه توابع چند متغیره را معرفی کرده و دامنه، برد، حد و پیوستگی این توابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### تعریف توابع چند متغیره

تابع $z=x^2+y^2$ را یک تابع دو متغیره می‌گوییم، زیرا به ازای دو مقدار $x$ و $y$ می‌توان مقدار تابع یعنی $z$ را به‌دست آورد. تابع $u=xe^{2y}+z^3e^{-x}$ را یک تابع سه متغیره می‌گوییم، زیرا وقتی مقدار متغیرهای $x$، $y$ و $z$ معلوم باشند، می‌توان مقدار تابع یعنی $u$ را محاسبه کرد.

**مثال ۱: اگر $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$ باشد $f(x,y)$ برابر است با:**

۱) $\frac{x(1+y)}{1-y}$    ۲) $\frac{x^2(1-y)}{1+y}$    ۳) $\frac{y(1-x)}{1+y}$    ۴) $\frac{y^2(1+y)}{1-x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

**روش اول:** قرار می‌دهیم $u=x+y$ و $v=\frac{y}{x}$ در این صورت داریم: $v+1=\frac{y}{x}+1=\frac{x+y}{x}=\frac{u}{x}$ و $x=\frac{u}{v+1}$، بنابراین داریم:

$$f(u,v)=\underbrace{(x+y)}_{u}(x-y)=u.x(1-\frac{y}{x})=u.\frac{u}{v+1}(1-v)=\frac{u^2(1-v)}{1+v}\ \Rightarrow\ f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

**روش دوم:** در رابطه $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$، به جای $x$ و $y$ در هر دو طرف $x=1$ و $y=2$ قرار می‌دهیم در این صورت $f(3,2)=1^2-2^2=-3$.
در بین گزینه‌ها فقط در گزینه (۲)، وقتی به جای $x$ و $y$ به ترتیب ۳ و ۲ قرار دهیم حاصل (۳-) می‌شود.

---

**مثال ۲: اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ به‌صورت $f(x,y)=(x+y,x,y)$ و $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ به‌صورت $g(x,y,z)=(x-y,z-x)$ تعریف شده باشد. در این صورت fog کدام است؟**

۱) $(y+z,x+y,x+z)$    ۲) $(z-y,x-y,z-x)$    ۳) $(x-y,y-z,z-x)$    ۴) $(y-z,x,y)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم منظور از fog همان $f(g(x,y,z))$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$fog=f(g(x,y,z))=f(x-y,z-x)=((x-y)+(z-x),x-y,z-x)=(z-y,x-y,z-x)$$

---

## دامنه و برد توابع چند متغیره

دامنه و برد توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شود. کلیه مقادیر $x$ و $y$ را که به ازای آن تابع $z=f(x,y)$ تعریف شده باشد را **دامنه** تابع $f$ می‌گوییم. مقادیر $z$ که به ازای $x$ و $y$ های مختلف در دامنه حاصل می‌شود را **برد** تابع $f$ می‌گوییم.

**مثال ۳: دامنه تابع $z=\sqrt{۴x^۲+y^۲-۸x}$ کدام مجموعه نقاط است؟** (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) خارج نیم بیضی ۲) داخل نیم بیضی ۳) خارج و روی بیضی ۴) داخل بیضی و روی بیضی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی داریم:

$$۴x^۲+y^۲-۸x\ge ۰\Rightarrow(۴x^۲-۸x)+y^۲\ge ۰\Rightarrow ۴(x^۲-۲x)+y^۲\ge ۰\Rightarrow ۴((x-۱)^۲-۱)+y^۲\ge ۰\Rightarrow ۴(x-۱)^۲+y^۲\ge ۴\Rightarrow (x-۱)^۲+\frac{y^۲}{۴}\ge ۱$$

بنابراین دامنه تابع موردنظر خارج و روی یک بیضی است. ضابطه $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲}=۱$، معادله یک بیضی به مرکز $(x_۰,y_۰)$ می‌باشد.

**مثال ۴: برد تابع دومتغیری $f(x,y)=\sqrt{۲۳+۶x+۴y-x^۲-y^۲}$ در کدام بازه است؟** (MBA ـ سراسری ۹۵)

۱) $[۱,۶]$ ۲) $[۰,۵]$ ۳) $[۰,۶]$ ۴) $[۱,۵]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا باید عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل تبدیل کنیم و داریم:

$$f(x,y)=\sqrt{-(x^۲-۶x+۹)-(y^۲-۴y+۴)+۳۶}\Rightarrow z=\sqrt{۳۶-(x-۳)^۲-(y-۲)^۲}=\sqrt{۳۶-[(x-۳)^۲+(y-۲)^۲]}$$

دو عبارت $(x-۳)^۲$ و $(y-۲)^۲$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، پس کمترین مقدارشان صفر است. پس بیشترین مقدار عبارت زیر رادیکال برابر با $\sqrt{۳۶-۰}$ یا همان ۶ است، از طرفی قطعاً عبارت زیر رادیکال نامنفی است پس $f\ge ۰$ خواهد بود.

**مثال ۵: حجم ناحیه محدود به دامنه تابع $f(x,y,z)=\sqrt{۸-x^۲-y^۲-z^۲+۲x}$ چقدر است؟**

۱) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۶۴\pi\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $۳۶\pi$ ۴) $۱۸\pi\sqrt{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، یعنی داریم:

$$۸-x^۲-y^۲-z^۲+۲x\ge ۰\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲-۲x\le ۸\Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲+z^۲\le ۹$$

بنابراین دامنه $f$، ناحیه درون و روی کره‌ای به شعاع ۳ می‌باشد، که حجم آن $\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳=۳۶\pi$ است.

**مثال ۶: برد تابع حقیقی به معادله $Q=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}}$ کدام بازه است؟**

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,+\infty)$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دامنه این تابع $(x,y)$ هایی هستند که $x^۲>y^۲$ باشد. برای محاسبه‌ی برد می‌دانیم که $x^۲+y^۲\ge x^۲-y^۲$، پس $\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}\ge ۱$.

از طرف دیگر اگر مخرج به سمت صفر میل کند، داریم $\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲}\to\infty$ لذا برد تابع $[۱,+\infty)$ است.

**مثال ۷: برد تابع $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y,z)=\frac{x}{|y|-|z|}$ کدام مجموعه است؟** (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\{(x,y,z):y\ne z)\}$ ۴) $\{(x,y,z):|y|\ne|x|\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به ازای هر مقدار $y$ و $z$ که برابر نباشند، تابع $f$ مقدار دارد و این یعنی تابع $f$ هر مقداری را می‌تواند داشته باشد؛ یعنی مثلاً به ازای $y=۱$ و $z=۰$، تابع $f$ به‌صورت $f(x,y,z)=x$ در می‌آید که برد آن $\mathbb{R}$ می‌باشد.

## حد توابع دو متغیره

**تعریف حد:** فرض کنید $X=(x,y)$ و $X_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ})$ نقطه‌ای دلخواه از دامنه تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ باشد، در این صورت می‌گوییم $\lim\limits_{X\to X_{\circ}} f(x,y)=L$ ، هرگاه: $\forall\varepsilon>\circ\ ,\ \exists\delta>\circ\ :\ \circ<|X-X_{\circ}|<\delta\ \Rightarrow |f(X)-L|<\varepsilon$

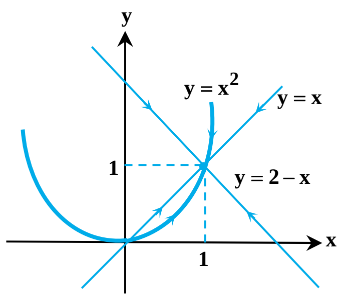
**توضیح:** در بالا منظور از نماد $|X-X_{\circ}|$، فاصله دو نقطه در صفحه $\mathbb{R}^{۲}$ می‌باشد که از رابطه $\sqrt{(x-x_{\circ})^{۲}+(y-y_{\circ})^{۲}}$ به‌دست می‌آید.

تعریف فوق شبیه حد توابع یک متغیره و در واقع تعمیم همان تعریف در حالت کلی‌تر است، بنابراین همان قضایا و نتایج یک متغیره در اینجا نیز برقرار هستند. توجه داشته باشید که اغلب در تست‌ها نیازی به تعریف فوق در محاسبه حد توابع چند متغیره نداریم و مانند توابع یک متغیره بیشتر از تکنیک‌ها و روش‌های حدگیری استفاده می‌کنیم.

**روش محاسبه حد توابع دومتغیره:** تابع دو متغیره $f(x,y)$ را در نظر بگیرید، برای وجود حد $\lim\limits_{(x,y)\to(x_{\circ},y_{\circ})} f(x,y)$ باید مقدار این حد مستقل از روش میل کردن $(x,y)$ به سمت $(x_{\circ},y_{\circ})$ باشد، به عبارت دیگر؛ اگر با چند روش مختلف میل کردن، جوابهای مختلف بدست آید، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست. بنابراین برای بررسی وجود حد توابع دو متغیره، مسیرهای مختلفی را در نظر می‌گیریم (برای نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ معمولاً مسیرهای $x=\circ$، $y=\circ$، $y=mx$ بررسی می‌شوند) اگر بر روی این مسیرها، حدهای مختلفی به‌دست آید حد وجود ندارد و اگر حدهای به‌دست آمده با هم برابر شوند، در مورد وجود حد نمی‌توانیم نظر قطعی بدهیم و در این صورت سعی می‌کنیم ثابت کنیم حد وجود دارد.

**پرسش دانشجو:** منظور از روش میل کردن چیست؟

اگر به یاد داشته باشید در حد یک متغیره برای وجود حد لازم بود حد چپ و حد راست موجود و با هم برابر باشند. در واقع در حد یک متغیره فقط دو روش برای نزدیک شدن به یک نقطه وجود داشت ولی در حدهای چند متغیره بیشمار روش برای نزدیک شدن به یک نقطه وجود دارد و برای وجود حد لازم است مقدار حد روی همه این مسیرها برابر شود. به‌طور مثال در شکل مقابل چند مسیر برای نزدیک شدن به نقطه $P(۱,۱)$ رسم شده‌اند.




**مثال ۸:** حد تابع $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ در نقطه $(\circ,\circ)$ کدام است؟

۱) حد ندارد ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای بررسی وجود حد، روی مسیر $y=mx$ به محاسبه حد می‌پردازیم، یعنی در تابع $f$ به جای $y$ها، $mx$ قرار می‌دهیم و آن را به یک حد یک متغیره تبدیل می‌کنیم.

$$\lim_{\substack{x\to\circ\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{x+mx}=\lim_{x\to\circ}\frac{x}{x(۱+m)}=\frac{۱}{m+۱}$$

جواب به‌دست آمده وابسته به $m$ است، پس حد وجود ندارد (چون با تغییر مقدار $m$ مقدار حد نیز عوض می‌شود).

**مثال ۹:** حد تابع $f(x,y)=\dfrac{y^{۲}+۲x^{۲}}{x^{۲}+۲y^{۲}}$ در نقطه $(\circ,\circ)$ در امتداد خط $y=۲x$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با جایگذاری $y=۲x$ در ضابطه $f$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{۴x^{۲}+۲x^{۲}}{x^{۲}+۸x^{۲}}=\lim_{x\to\circ}\frac{۶x^{۲}}{۹x^{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

**نکته۱:** روش دیگر بررسی حد توابع دومتغیره در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ استفاده از مختصات قطبی می‌باشد. با توجه به اینکه $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ می‌توانیم $f(x,y)$ را در مختصات قطبی نمایش دهیم و وقتی $r\to\circ$ مقدار حد را محاسبه کنیم، اگر مقدار حد وابسته به $\theta$ باشد، حد وجود ندارد؛ اما اگر مقدار حد عددی ثابت به‌دست آمد، **نمی‌توانیم** با اطمینان بگوییم که جواب حد همان عدد است، مگر در مواردی که مخرج کسر عبارت همگنی مانند $x^{۲}+y^{۲}$، $x^{۴}+y^{۴}$ یا $|x|+|y|$ باشد. در ضمن به یاد داشته باشید که $r\geq\circ$ است.

**مثال ۱۰:** مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کدام است؟

۱) دارای حد نیست.　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) $\frac{1}{2}$

**پاسخ :** گزینه «۳» با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta\cos\theta = 0$$

**نکته ۲:** برای محاسبه‌ی حد تابع $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(0,0)$ که در آن $f$ تابعی کسری است که در صورت و مخرج آن دو چندجمله‌ای برحسب $x$ و $y$ وجود دارد، وقتی حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

**۱ـ** ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا تابع $f$ در همسایگی محذوف مبدأ تعریف شده است یا خیر. به عبارت دیگر، آیا مخرج کسر به غیر از مبدأ در نقاط دیگری هم صفر می‌شود یا نه. اگر روی یکی از مسیرهای گذرنده از مبدأ، مخرج کسر صفر شود (این یعنی $f$ در همسایگی محذوف مبدأ تعریف شده نیست) اما صورت صفر نشود، حد وجود نخواهد داشت. مثلاً در تابع $z=\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ روی خطوط $y=\pm x$ مخرج صفر می‌شود؛ پس حد این تابع در مبدأ وجود ندارد؛ اما اگر روی همان مسیر، صورت کسر هم صفر شود، سعی می‌کنیم عامل صفرشونده را از صورت و مخرج ساده کنیم. در این صورت حد $f$ **معمولاً** وجود خواهد داشت. برای مثال در تابع $z=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ روی خط $y=x$ مخرج و صورت هر دو صفر می‌شوند. با ساده کردن این کسر به عبارت $z=x+y$ می‌رسیم که حد آن در مبدأ موجود و برابر صفر است.

**۲ـ** اگر تنها ریشه‌ی مخرج، نقطه‌ی $(0,0)$ باشد، یعنی تابع $f$ در همسایگی محذوف مبدأ تعریف شده باشد، در این صورت دو حالت زیر رخ می‌دهد:

**الف)** اگر هریک از جملات صورت، درجه‌ای بیشتر از تک‌تک جملات مخرج داشته باشد حد تابع برابر صفر است. به‌طور مثال حد توابع $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$، $\dfrac{x^2y}{|x|+|y|}$، $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^4}$ و $\dfrac{x^3+y^5}{x^2+3y^2}$ در $(0,0)$ برابر صفر است (در مثال $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^4}$ دقت کنید که درجه‌ی $x^3y^3$، $\underline{6}$ در نظر گرفته می‌شود و لذا از درجه $y^4$ در مخرج بزرگ‌تر است).

**ب)** اگر درجه جملات صورت کوچک‌تر یا مساوی تک‌تک جملات مخرج باشد تابع حد ندارد. به‌طور مثال توابع $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$، $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ و $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ در $(0,0)$ حد ندارند.

**۳ـ** در بررسی حدود توابعی مانند تابع $\dfrac{x^a y^b}{x^m+y^n}$ بهتر است مسیر $x^m=ky^n$ را نیز بررسی کنید، یعنی مسیری که جملات مخرج را هم‌درجه کند. همچنین انتخاب مسیری که باعث هم‌درجه شدن صورت و مخرج شود نیز در بعضی از سؤالات مناسب است.

**مثال ۱۱:** حد عبارت $\dfrac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$ وقتی $(x,y)\to(1,\pi)$ کدام است؟　(MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) $-1$　　۲) $0$　　۳) $\infty$　　۴) ۱

**پاسخ:** گزینه «۱» حد داده شده مبهم نیست. لذا به راحتی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos xy}{1-x-\cos y} = \frac{\cos\pi}{-\cos\pi} = -1$$

**مثال ۱۲:** مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{1389}y}{(x^2+y^2)^5}$ برابر است با:　(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) وجود ندارد.

**پاسخ:** گزینه «۱» چون درجه صورت بیشتر از مخرج و تنها ریشه مخرج $(0,0)$ است، پس حد موجود و برابر صفر است.

**مثال ۱۳:** کدام حد وجود دارد؟　(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4}$　　۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$　　۴) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

**پاسخ:** گزینه «۳» در گزینه‌ی (۳) درجه‌ی جملات صورت از مخرج بیشتر است و تنها ریشه مخرج، مبدأ یعنی $(0,0)$ است و جملات مخرج هم‌درجه می‌باشند؛ پس حد موجود و برابر صفر است. در سایر گزینه‌ها درجه‌ی صورت یا با درجه مخرج برابر است یا از آن کمتر است، پس حد وجود ندارد.

بـا قـرار دادن $x=1$ و $z=\frac{1}{2}$ در معادلـه (۱)، $y=1$ حاصـل مـی‌شـود، پـس نقطـه $p(1,1,\frac{1}{2})$ نقطـه بحرانـی تـابع $f$ اسـت. بـرای تعیـین نـوع نقطـه $P$ ماتریس هسیان را محاسبه می‌کنیم:

$$H=\begin{bmatrix} 2z-2 & 1 & 2x \\ 1 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{x=1,y=1,z=\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

حال نوع ماتریس هسیان را مشخص می‌کنیم:

$$H_1=-1<0\ ,\ H_2=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1<0\ ,\ H_3=|H|=2>0$$

چون ماتریس $H$ نامعین است پس نقطه $P$ زینی است.

**مثال ۳۰۸: ماکزیمم موضعی تابع $f(x,y,z)=4xyz-x^4-y^4-z^4$، برابر کدام گزینه است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه «۱»

$$f(x,y,z)=4xyz-x^4-y^4-z^4$$

ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f_x=4yz-4x^3=0 \\ f_y=4xz-4y^3=0 \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(1,1,1) \\ f_z=4xy-4z^3=0 \end{cases}$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی $A$ از ماتریس هسیان زیر استفاده می‌کنیم:

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow H=\begin{bmatrix} -12x^2 & 4z & 4y \\ 4z & -12y^2 & 4x \\ 4y & 4x & -12z^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A(1,1,1)} H=\begin{bmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس $H$ معین منفی است، پس نقطه $A$ ماکزیمم است و داریم:

$$f(x,y,z)=4(1)(1)(1)-1-1-1=1$$

یعنی گزینه (۱) یعنی عدد ۱ برابر ماکزیمم موضعی تابع است.

## به‌دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع مقید با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم یک تابع را تحت قیود یا شرایط جنبی پیدا کنیم. به طور مثال فرض کنیـد دو نـوع کـالای I و II در یک کارخانه تولید می‌شوند و $f(x,y)$ سود حاصل از فروش این دو نوع کالا باشد که $x$ تعداد کالای از نوع I و $y$ تعداد کـالای از نـوع II باشد. اما تولید این دو نوع کالا توسط سرمایه کنترل می‌شود یعنی مقیدیم تحت رابطه $g(x,y)=c$ کار کنیم. در نتیجه می‌خواهیم تابع $z=f(x,y)$ را در بـین تمام $(x,y)$های صادق در $g(x,y)=c$ بهینه (ماکزیمم) کنیم.

برای حل مسائلی به شکل فوق معمولاً از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای یادگیری روش ضرایب لاگرانژ ابتـدا ایـن روش را در مـورد یـک مثـال ساده به کار می‌بریم، تا اصول کلی روش مشخص شود. سپس روش را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**مثال ۳۰۹: مقدار مینیمم تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را با شرط $x+2y=10$ به‌دست آورید.**

**پاسخ:**

**روش اول (روش ضرایب لاگرانژ):** شرط داده شده در مسأله را به‌صورت $g(x,y)=x+2y-10=0$ می‌نویسیم. (یعنی کل معادله را به یک طرف منتقـل می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.)

طبق روش لاگرانژ برای یافتن مینیمم یا ماکزیمم کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \quad :(\text{شرط مسأله}) \\ f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \end{cases}$$

در واقع همواره در روش لاگرانژ همواره شرط داده شده در مسأله به عنوان یک معادله مورد استفاده قرار می‌گیرد، و بقیه معادله‌های مورد نیاز به این صورت نوشته می‌شوند که از تابع موردنظر بر حسب یک متغیر (مثلاً $x$) مشتق می‌گیریم و آن را مساوی $\lambda$ برابر مشتق شرط بر حسب همان متغیر (مثلاً $x$) قـرار می‌دهیم. و این کار را برای همه متغیرها تکرار می‌کنیم. ($\lambda$ را ضریب لاگرانژ می‌گویند) در مورد این مثال دستگاه لاگرانژ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x=\lambda\times 1 \\ 2y=\lambda\times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=10 & (1) \\ \lambda=2x & (2) \\ \lambda=y & (3) \end{cases}$$

از معادله (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $y=2x$، که با جایگزینی در معادله (۱) خواهیم داشت: $x+2(2x)=10 \Rightarrow x=2\,,\ y=4$

به ازای $x=2$ و $y=4$ مقدار تابع $f$ برابر $f(2,4)=2^2+4^2=20$ به‌دست می‌آید.

**روش دوم (روش جایگذاری):** در برخی مسائل به جای استفاده از روش لاگرانژ، می‌توان همه‌ی متغیرها را برحسب یکی از آن‌ها محاسبه و در تابع موردنظر جایگزین کرد و سپس ماکزیمم یا مینیمم تابع یک متغیره‌ی به‌وجود آمده به‌دست آورد، ولی این روش نمی‌تواند یک جایگزین همیشگی برای روش لاگرانژ باشد. اما در این مثال می‌توانیم از این روش استفاده کنیم. از شرط داده شده نتیجه می‌شود $x=10-2y$، که با جایگزینی در تابع $f$، خواهیم داشت:

$$f(y)=(10-2y)^2+y^2=100-40y+5y^2$$

تابع به‌دست آمده در بالا فقط بر حسب متغیر $y$ است، برای یافتن مقدار مینیمم مشتق آن را بر حسب $y$ مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(y)=-40+10y=0 \Rightarrow y=4$$

به ازای $y=4$، از شرط $x+2y=10$ مقدار $x=2$ به‌دست می‌آید. یعنی مانند روش لاگرانژ نقطه مینیمم $A(2,4)$ و مقدار مینیمم تابع برابر ۲۰ است.

**روش سوم (روش ساده شده لاگرانژ):** در اغلب مسائل می‌توان روش لاگرانژ را بدون دخالت دادن ضریب لاگرانژ یعنی $\lambda$ حل نمود. (فقط توجه داشته باشید که این یک روش تستی است و در اکثر تست‌ها محاسبات را ساده‌تر می‌کند ولی در حالتی که تابع اصلی شامل سه متغیر باشد، ولی شرط داده شده در مسأله شامل دو متغیر باشد، استفاده از آن مشکلاتی را ایجاد می‌کند.

در این روش شرط داده شده در مسأله، مانند روش اصلی به عنوان یک معادله استفاده می‌شود، و برای نوشتن سایر معادله‌ها کسرهایی در نظر می‌گیریم که صورت آن‌ها مشتق تابع بر حسب یک متغیر و مخرج آن‌ها مشتق شرط بر حسب همان متغیر می‌باشد و این کسرها را مساوی هم قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ \dfrac{f_x}{g_x}=\dfrac{f_y}{g_y} \end{cases}$$

در این مثال دستگاه فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} x+2y-10=0 & (1) \quad \text{(شرط مسأله)}: \\ \dfrac{2x}{1}=\dfrac{2y}{2} & (2) \end{cases}$$

از معادله (۲)، $y=2x$ به‌دست می‌آید که با جایگزینی در معادله (۱) نتیجه می‌شود: $x+2(2x)-10=0 \Rightarrow x=2\,,\ y=4 \Rightarrow z=2^2+4^2=20$

**قضیه (قاعده ضرایب لاگرانژ):** فرض کنید $f$ و $g$ دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول پیوسته در همسایگی نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ باشند، و نقطه $P$ نقطه اکسترمم تابع $f$ باشد، به طوری که نقطه $P$ یک نقطه مرزی سطح $g(x,y,z)=c$ نباشد و در نقطه $P$ گرادیان مساوی صفر نباشد، آن‌گاه نقطه $P$ در دستگاه $\begin{cases} g(x,y,z)=c \\ \vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g \end{cases}$ صدق می‌کند.

**توضیحات در مورد قضیه:**

۱) در قضیه بالا $\lambda$ را ضریب لاگرانژ می‌گویند.

۲) نقطه $P$ در قضیه بالا در معادله $\vec{\nabla}f(P)\times\vec{\nabla}g(P)=\vec{O}$ صدق می‌کند، زیرا طبق معادله دوم دستگاه $\vec{\nabla}f(P)$ و $\vec{\nabla}g(P)$ موازیند.

۳) بردار $\vec{\nabla}f(P)$ بر سطح رویه $g(x,y,z)=c$ در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ عمود است.

۴) نقاطی که در دستگاه فوق صدق می‌کنند لزوماً نقطه اکسترمم تابع $f$ نخواهند بود.

**مثال ۳۱۰:** اکسترمم تابع $f(x,y,z)=2x-3y+z-1$ با شرط $x^2+y^2+z^2=14$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۵ و ۱۳ ۲) ۱۵ و ۱۳− ۳) ۱۳ و ۱۵− ۴) ۱۳− و ۱۵−

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع $f=2x-3y+z-1$ و قید $g: x^2+y^2+z^2=14$ را در نظر گرفته و از ضریب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{2x}=\frac{-3}{2y}=\frac{1}{2z} \Rightarrow 4y=-6x\ ,\ 4z=2x \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x\ ,\ z=\frac{1}{2}x$$

با جایگذاری این نتایج در معادله‌ی قید $g$ داریم:

$$x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2=14 \Rightarrow \frac{14}{4}x^2=14 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow y=\pm 3 \Rightarrow z=\pm 1$$

با جایگذاری این مقادیر در $f$ داریم: $\max f=4+9+1-1=13$ و $\min f=-4-9-1-1=-15$ .

**مثال ۳۱۱:** ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$، روی یک هشتم کره $x^2+y^2+z^2=25$ با شرط $x>0$، $y>0$، $z>0$، کدام است؟

۱) $\ln 25\sqrt{15}$ ۲) $\ln 75\sqrt{15}$ ۳) $\ln 75\sqrt{5}$ ۴) $\ln 125\sqrt{5}$

**پاسخ:** گزینه «۲» از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25\ ,\ x>0\ ,\ y>0\ ,\ z>0 \\ (2x,2y,2z)=\lambda(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{3}{z}) \Rightarrow \lambda=2x^2=2y^2=\frac{2z^2}{3} \Rightarrow x^2=y^2=\frac{z^2}{3} \end{cases}$$

از معادله $x^2=y^2=\frac{z^2}{3}$ و جایگزینی در $x^2+y^2+z^2=25$، نتیجه می‌شود:

$$x^2+x^2+3x^2=25 \Rightarrow 5x^2=25 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{5}\ ,\ y=\sqrt{5}\ ,\ z=\sqrt{15}$$

در این صورت ماکزیمم $f$ برابر $\ln\sqrt{5}+\ln\sqrt{5}+3\ln\sqrt{15}=\ln 75\sqrt{15}$

**مثال ۳۱۲:** ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ در ناحیه $x^2+y^2\le 4$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ و ۴− ۲) ۲ و ۲− ۳) ۴ و ۰ ۴) ۴ و ۴−

**پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به معادله دایره $x^2+y^2\le 4$ بیشترین مقدار عبارت $x^2-y^2$ وقتی حاصل می‌شود که $x=2$ و $y=0$ باشد و کمترین مقدار آن هنگامی است که $x=0$ و $y=2$ باشد پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۴ و مینیمم مطلق تابع برابر ۴− می‌باشد.

**مثال ۳۱۳:** کمترین مقدار تابع $z=x^2-y^2-2xy$ با شرط $2x+y=6$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۵)

۱) ۶۴− ۲) ۵۴− ۳) ۳۶− ۴) ۷۲−

**پاسخ:** گزینه «۴» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

**روش اول (راه‌حل ریاضی عمومی (۲)):** از روش لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$f=x^2-y^2-2xy$ (تابع هدف)

$g=2x+y=6$ (قید)

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{2x-2y}{2}=\frac{-2y-2x}{1} \Rightarrow 2x-2y=-4y-4x \Rightarrow 6x=-2y \Rightarrow y=-3x$$

تساوی $y=-3x$ را در معادله $g$ قرار می‌دهیم:

$$2x-3x=6 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow y=18$$

حالا این مقادیر را در تابع هدف قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f_{min}=36-18^2+2(6)(18)=18(2)-18(18)+18(12)=-4\times 18=-72$$

**روش دوم: (راه‌حل ریاضی عمومی (۱)):** از شرط $2x+y=6$ داریم $y=6-2x$. با قرار دادن آن در ضابطه‌ی $f$ آن را یک‌متغیره می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-(6-2x)^2-2x(6-2x) \Rightarrow f(x)=x^2-4x^2+24x-36-12x+4x^2 \Rightarrow f(x)=x^2+12x-36$$

حالا نقطه‌ی بحرانی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=2x+12=0 \Rightarrow x=-6$$

با جایگذاری در $f(x)$ داریم:

$$f_{min}=(-6)^2+12(-6)-36=-72$$

توجه کنید که در $x=-6$ داریم $f''(-6)=2>0$ پس این نقطه، مینیمم $f(x)$ است نه ماکزیمم آن.

**مثال ۳۱۴:** کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ با شرط $x^2y=16$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{118}{9}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

**پاسخ:** گزینه «۳» یک روش استفاده از روش ضرایب لاگرانژ و یک راه دیگر تبدیل تابع دو متغیره به یک تابع تک متغیره است:

$$x^2y=16 \Rightarrow x^2=\frac{16}{y} \quad \text{و} \quad f(x,y)=x^2+y^2=\frac{16}{y}+y^2=\frac{16+y^3}{y}$$

$$f'=\frac{3y^2\times y-1\times(16+y^3)}{y^2}=\frac{2y^3-16}{y^2}\ ,\ f'=0 \Rightarrow 2y^3-16=0 \Rightarrow y^3=8 \Rightarrow y=2 \xrightarrow{x^2=\frac{16}{y}} x^2=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$$

بنابراین کمترین مقدار $x^2+y^2$ برابر است با:

$$f_{min}=x^2+y^2=8+4=\mathbf{12}$$

**مثال ۳۱۵:** ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=e^{x^2}$ روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ کدام است؟ (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sqrt{e}$ ۲) $e^{\sqrt{2}}$ ۳) $e^2$ ۴) $e^4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نقاط بحرانی $f(x,y,z)=e^{x^2}$ را تحت قید $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=2$ تعیین می‌کنیم. اگر $\lambda$ ضریب لاگرانژ باشد داریم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow \lambda=\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\frac{0}{2y}=\frac{0}{2z}$$

بنابراین یا $x=0$ است و $y$ و $z$ دلخواه هستند و یا $x\neq 0$ است و $y=z=0$. که در این صورت با توجه به معادله‌ی $g=2$ باید $x=\pm\sqrt{2}$ باشد.

به عبارتی نقاط بحرانی عبارتند از نقاط $(0,y,z)$ و $(\pm\sqrt{2},0,0)$.

مقادیر بحرانی $f$ را حساب می‌کنیم: $f(0,y,z)=e^0=1$ و $f(\pm\sqrt{2},0,0)=e^2$. پس بیش‌ترین مقدار $f$ با شرط $g=2$ برابر است با $e^2$.

**مثال ۳۱۶:** مختصات نقطه‌ای از رویه‌ی $z=x^2+3y^2$ که در آن تابع $f(x,y,z)=x^2-2y+3z$ مقدار اکسترمم خود را اختیار می‌کند کدام است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ علوم دریایی و اقیانوسی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(0,0,0)$ ۲) $(-1,0,1)$ ۳) $(-1,2,13)$ ۴) $(0,\frac{1}{9},\frac{1}{27})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اکسترمم مشروط تابع $f=x^2-2y+3z$ را تحت قید $g:z-x^2-3y^2=0$ می‌خواهیم.

تناسب لاگرانژ را می‌نویسیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2x}{-2x}=\frac{-2}{-6y}=\frac{3}{1}$$

از تساوی $\frac{2x}{-2x}=\frac{3}{1}$ داریم $-6x=2x$ یعنی الزاماً باید $x=0$ باشد.

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=-6x\\-2=-18y\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\y=\frac{1}{9}\end{matrix}$$

با جایگذاری $x=0$ و $y=\frac{1}{9}$ در معادله‌ی $g$ داریم $z=\frac{3}{81}=\frac{1}{27}$ پس جواب نقطه‌ی $(0,\frac{1}{9},\frac{1}{27})$ است.

**مثال ۳۱۷:** ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=(Lnx+Lny+3Lnz)^5$ بر بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=125$ که در آن $z>0, y>0, x>0$ به‌صورت $(LnA)^5$ می‌باشد، مقدار $A$ کدام گزینه است؟ (MBA ـ سراسری ۹۶)

۱) $\sqrt{3}(25)^5$ ۲) $\sqrt{3}(5)^5$ ۳) $3\sqrt{3}(25)^5$ ۴) $3\sqrt{3}(5)^5$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $f$ را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $f(x,y,z)=(Ln(xyz^3))^5$

گفته شده ماکزیمم تابع روی کره $x^2+y^2+z^2=125$ در ربع اول به صورت $(LnA)^5$ است؛ برای یافتن مقدار $A$ می‌توانیم بیشترین مقدار عبارت $w=xyz^3$ را روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=125$ به دست بیاوریم. (البته با شرط $x>0$، $y>0$ و $z>0$).

از تناسب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{yz^3}{2x}=\frac{xz^3}{2y}=\frac{3xyz^2}{2z}$$

با انجام طرفین وسطین داریم:

$$\begin{cases}2y^2z^3=2x^2z^3\Rightarrow y^2=x^2\Rightarrow y=x\\2yz^4=6x^2yz^2\Rightarrow z^2=3x^2\Rightarrow z=\sqrt{3}x\end{cases}$$

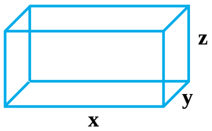
(دقت کنید که می‌دانیم $x$، $y$ و $z$ همگی مثبت هستند)

با جایگذاری $y=x$ و $z=\sqrt{3}x$ در معادله‌ی کره داریم: $x^2+y^2+z^2=125\Rightarrow x^2+x^2+3x^2=125\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=5\ ,\ y=5\ ,\ z=5\sqrt{3}$

با جایگذاری در $w$ داریم: $w=xyz^3=5\times5\times5^3\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}(5)^5\Rightarrow A=3\sqrt{3}(5)^5$

**مثال ۳۱۸:** حوضی به شکل مکعب مستطیل با حجم ۲۵۶ واحد مکعب مورد نیاز است. ارتفاع حوض چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق‌بندی آن مینیمم شود؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸




☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طول، عرض و ارتفاع حوض را به ترتیب $x$، $y$ و $z$ در نظر می‌گیریم. در این صورت مساحت سطوح حوض برابر $f(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ خواهد بود، توجه داشته باشید که حوض سقف ندارد!
بنابراین می‌خواهیم عبارت $f(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ را تحت قید $g=xyz-256=0$ بهینه کنیم.

**روش اول:** چون $f$ برابر مجموع سه عبارت $xy$، $2xz$ و $2yz$ است و حاصل‌ضرب این عبارات یعنی $(xy)(2xz)(2yz)=4x^2y^2z^2$ ثابت است بنابراین مینیمم وقتی رخ می‌دهد که سه عبارت برابر باشند یعنی $xy=2xz=2yz$ و یا $x=y=2z$، با جایگذاری $x$ و $y$ بر حسب $z$ در معادله $xyz-256=0$ نتیجه می‌شود $4z^3-256=0$، و بنابراین $z=4$ به‌دست می‌آید.

**روش دوم:** از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم، توجه کنید که $\vec{\nabla}f=(y+2z,x+2z,2x+2y)$ و $\vec{\nabla}g=(yz,xz,xy)$، بنابراین از معادله $\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} y+2z=\lambda yz & (1)\\ x+2z=\lambda xz & (2)\\ 2x+2y=\lambda xy & (3)\end{cases}\qquad \xrightarrow{(1)\div(2)}\frac{y+2z}{x+2z}=\frac{y}{x}\Rightarrow x=y \qquad \xrightarrow{(2)\div(3)}\frac{y+2z}{x+2y}=\frac{z}{y}\Rightarrow y=2z$$

از دو معادله اخیر $x=y=2z$ به‌دست می‌آید که با توجه به معادله $xyz-256=0$ می‌توان نتیجه گرفت $z=4$، $y=8$ و $x=8$ است.

---

**مثال ۳۱۹:** حجم بزرگترین مکعب مستطیلی را که می‌توان داخل نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$، محاط کرد، چقدر است؟

۱) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$   ۲) $\frac{a^3}{2}$   ۳) $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$   ۴) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض کنیم نقطه‌ی $P(x,y,z)$ رأسی از این مکعب باشد که در $\frac{1}{8}$ اول و روی سطح نیم‌کره قرار دارد. در این صورت طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل به ترتیب $2x$، $2y$ و $z$ خواهد بود. (اگر کره‌ی کامل را داشتیم، ارتفاع مکعب هم $2z$ می‌شد ولی در این مثال فقط نیم‌کره‌ی $z\ge 0$ را داریم.) بنابراین حجم مکعب مستطیل $V=(2x)(2y)z$ می‌باشد که تحت قید $g:x^2+y^2+z^2=a^2$ بایستی ماکزیمم شود.

$$\frac{V_x}{g_x}=\frac{V_y}{g_y}=\frac{V_z}{g_z}\Rightarrow\frac{4yz}{2x}=\frac{4xz}{2y}=\frac{4xy}{2z}\Rightarrow y^2z=x^2z\ ,\ z^2x=y^2x\Rightarrow x^2=y^2=z^2\xrightarrow{\text{در } \frac{1}{8} \text{ اول است } P}x=y=z$$

با توجه به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ داریم $3x^2=a^2$ پس $x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$ و $V=4xyz=\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

**توضیح:** به‌طور کلی هرگاه در قید داده شده و تابع داده شده، تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر معادله را عوض نکند، نقطه‌ی اکسترمم وقتی رخ می‌دهد که $x=y=z$ باشد.

---

**مثال ۳۲۰:** کمترین حجم محدود به محورهای مختصات و صفحه‌ی مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=1$، در یک هشتم اول ناحیه‌ی $x>0$، $y>0$ و $z>0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$   ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$   ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$   ۴) $2\sqrt{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض می‌کنیم که صفحه مذکور در نقطه به مختصات $A(x_0,y_0,z_0)$ بر کره $x^2+y^2+z^2=1$ مماس باشد.
بردار عمود بر سطح کره در این نقطه برابر است با:

$$f:x^2+y^2+z^2-1=0$$

$$\vec{\nabla}f=(2x,2y,2z)\xrightarrow{A(x_0,y_0,z_0)}(2x_0,2y_0,2z_0)$$

معادله خط عمود بر سطح: $f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

$$2x_0x-2x_0^2+2yy_0-2y_0^2+2zz_0-2z_0^2=0$$

با توجه به این که $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ می‌باشد، داریم:
$$xx_0+yy_0+zz_0=1$$

نقاط تلاقی این صفحه، با محورهای مختصات به ترتیب برابر است با $A(\frac{1}{x_0},0,0)$ و $B(0,\frac{1}{y_0},0)$ و $C(0,0,\frac{1}{z_0})$ می‌باشد.

هدف ما پیدا کردن ماکزیمم حجم هرم به‌دست آمده توسط این نقاط روی محورهای مختصات می‌باشد که داریم:

$$V=\frac{1}{6}abc \quad \text{حجم هرم}$$
$$V=\frac{1}{6}(\frac{1}{x_0y_0z_0})$$

با توجه به این که $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ می‌باشد، پس مجموع متغیرها، مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که عامل‌ها با هم برابر باشند، یعنی: $x_0=y_0=z_0$ و داریم:

$$x_0^2+x_0^2+x_0^2=1 \Rightarrow 3x_0^2=1 \Rightarrow x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}=y_0=z_0 \Rightarrow V=\frac{1}{6}\times\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^3}=\frac{1}{6}\times\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(توجه داشته باشید که در این مثال قید مسئله فقط ناحیه یک هشتم اول فضا می‌باشد.)

**مثال ۳۲۱: منطقه‌ای کوهستانی وجود دارد که ارتفاع در هر نقطه دلخواه مانند $(x,y)$ از این ناحیه برابر $f(x,y)=4x^2y+y^3$ است. در این ناحیه راهی وجود دارد که تصویر آن بر صفحه $xoy$ منحنی $2x^2+y^2=6$ است. مرتفع‌ترین و پست‌ترین نقطه واقع در این مسیر کدام است؟**

(از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه Harvard)

☑ **پاسخ:** ارتفاع نقاط، همان تابع $f$ است و در واقع می‌خواهیم ماکزیمم و مینیمم $f$ را با شرط $2x^2+y^2=6$ به‌دست آوریم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}2x^2+y^2=6\\ 8xy=\lambda(4x)\\ 4x^2+3y^2=\lambda(2y)\end{cases} \Rightarrow 4x(2y-\lambda)=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad y=\frac{\lambda}{2}$$

اگر $x=0$ آن‌گاه $y=\pm\sqrt{6}$ خواهد بود یعنی نقاط $A(0,\sqrt{6})$ و $B(0,-\sqrt{6})$ به‌دست می‌آیند.

با جایگذاری رابطه $y=\frac{\lambda}{2}$ در معادله سوم نتیجه می‌شود:

$$4x^2+3(\frac{\lambda}{2})^2=\lambda(\lambda) \Rightarrow x^2=\frac{\lambda^2}{16}\xrightarrow{\text{در معادله } 2x^2+y^2=6}\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^2}{4}=6 \Rightarrow \lambda=\pm 4$$

به ازای $\lambda=4$، نقاط $C(1,2)$ و $D(-1,2)$ و به ازای $\lambda=-4$ نقاط $E(1,-2)$ و $F(-1,-2)$ به‌دست می‌آیند. با مقایسه مقادیر $f$ در نقاط به‌دست آمده مشخص است که نقاط $C$ و $D$ بیشترین و $E,F$ کمترین ارتفاع را دارند.

$$f(0,\sqrt{6})=6\sqrt{6}\ ,\ f(0,-\sqrt{6})=-6\sqrt{6}\ ,\ f(1,2)=16\ ,\ f(-1,2)=16\ ,\ f(1,-2)=-16, f(-1,-2)=-16$$

**مثال ۳۲۲: کم‌ترین مقدار تابع $f(x,y)=3x-2y+1$ تحت شرایط $9x^2+4y^2=18$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟** (نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $(-2,3)$
۲) $(1,-\frac{3}{2})$
۳) $(2,-3)$
۴) $(-1,\frac{3}{2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» داریم $f(x)=3x-2y+1$ و $g(x,y)=9x^2+4y^2=18$. برای یافتن اکسترمم‌های مقید (مشروط) تابع $f$ از دستگاه لاگرانژ به این شکل استفاده کنیم: ($\lambda$ ضریب لاگرانژ است.)

$$\begin{cases}f_x=\lambda g_x\\ f_y=\lambda g_y\\ g(x,y)=18\end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \lambda=\frac{3}{18x}=\frac{-2}{8y} \Rightarrow y=\frac{-36x}{24}=-\frac{3}{2}x\xrightarrow{\text{جایگذاری در قید } g} 9x^2+4(\frac{9}{4})x^2=18$$
$$\Rightarrow 18x^2=18 \Rightarrow x=\pm1, y=\mp\frac{3}{2}$$

دو نقطه اکسترمم مقید برای $f(x,y)$ یافتیم که عبارتند از: $A(1,-\frac{3}{2})$ و $B(-1,\frac{3}{2})$. مقدار $f$ را در این دو نقطه حساب می‌کنیم:

$$f(A)=3+3+1=7 \qquad f(B)=-3-3+1=-5$$

پس کم‌ترین مقدار $f$ تحت شرط داده شده $-5$ است و در نقطه‌ی $B(-1,\frac{3}{2})$ رخ می‌دهد.

**مثال ۳۲۳:** مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=e^{-xy}$ محدود به ناحیه $x^۲+۴y^۲\le ۱$، به ترتیب کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۵)

۱) $e^{-\frac{۱}{۴}}, e^{\frac{۱}{۴}}$ ۲) $۱, e^{\frac{۱}{۴}}$ ۳) $e$, صفر ۴) ۱, صفر

**پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی $f$ را درون این ناحیه تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x=-ye^{-xy}=۰ \\ f_y=-xe^{-xy}=۰ \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(۰,۰)$$

در این نقطه داریم $f(۰,۰)=e^۰=۱$ حالا باید اکسترمم‌های $f$ را روی مرز $g:x^۲+۴y^۲=۱$ نیز جداگانه بررسی کنیم. از ضریب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow \frac{-ye^{-xy}}{۲x}=\frac{-xe^{-xy}}{۸y}\Rightarrow ۸y^۲e^{-xy}=۲x^۲e^{-xy}\Rightarrow x^۲=۴y^۲\Rightarrow x=\pm ۲y$$

با جایگذاری در معادله $g$ داریم:

$$x^۲+۴y^۲=۱\Rightarrow ۴y^۲+۴y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۱}{۸}\Rightarrow y=\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

با محاسبه‌ی $f$ در نقاط $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}},\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})$ داریم:

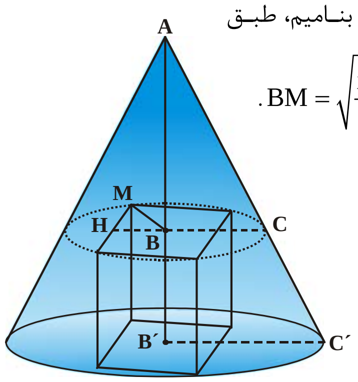
$$f(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}},\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})=e^{\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}}=e^{\pm\frac{۱}{۴}}$$

بنابراین از بین ۳ مقدار $e^{-\frac{۱}{۴}}, e^{\frac{۱}{۴}}$ و ۱ داریم:

$$f_{max}=e^{\frac{۱}{۴}}\ ,\ f_{min}=e^{-\frac{۱}{۴}}$$

**مثال ۳۲۴:** در مخروط قائم با ارتفاع ۹ و شعاع قاعده ۳، مکعب مستطیلی با بیشترین حجم محاط می‌کنیم. حجم این مکعب چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) ۶




**پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به شکل مقابل، اگر طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را به ترتیب $x$، $y$ و $z$ بنامیم، طبق قضیه فیثاغورث در مثلث $\overset{\Delta}{BHM}$ که در آن $BH$ برابر $\frac{y}{۲}$ و $MH$ برابر $\frac{x}{۲}$ می‌باشد، داریم: $BM=\sqrt{\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{۲}$.

اندازه‌ی $BC$ با $BM$ برابر است زیرا هر دو شعاع یک دایره هستند. حال طبق تشابه در مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AB'C'}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\frac{۹-z}{۹}=\frac{\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{۲}}{۳}\Rightarrow\frac{۹-z}{۳}=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+y^۲}=۲(۹-z)\Rightarrow ۹(x^۲+y^۲)=۴(۹-z)^۲$$

$$\Rightarrow ۹(x^۲+y^۲)=۳۲۴-۷۲z+۴z^۲\Rightarrow ۹x^۲+۹y^۲-۴z^۲+۷۲z=۳۲۴$$

بنابراین می‌خواهیم $V=xyz$ را با قید فوق بهینه کنیم:

$$\begin{cases} ۹x^۲+۹y^۲-۴z^۲+۷۲z=۳۲۴ \\ \frac{yz}{۱۸x}=\frac{xz}{۱۸y}=\frac{xy}{-۸z+۷۲} \end{cases}\Rightarrow x^۲=y^۲\ ,\ -۸z^۲+۷۲z=۱۸x^۲\xrightarrow{\text{در معادله‌ی قید قرار می‌دهیم}}\Rightarrow -۸z^۲+۷۲z-۴z^۲+۷۲z=۳۲۴$$

$$\Rightarrow z^۲-۱۲z+۲۷=۰\Rightarrow (z-۹)(z-۳)=۰\Rightarrow z=۹\ ,\ z=۳$$

به ازای $z=۹$ داریم: $x=y=۰$، پس $V=۰$، اما به ازای $z=۳$ داریم: $x=y=۲$ و در نتیجه $V=۱۲$ بیشترین حجم مکعب است.

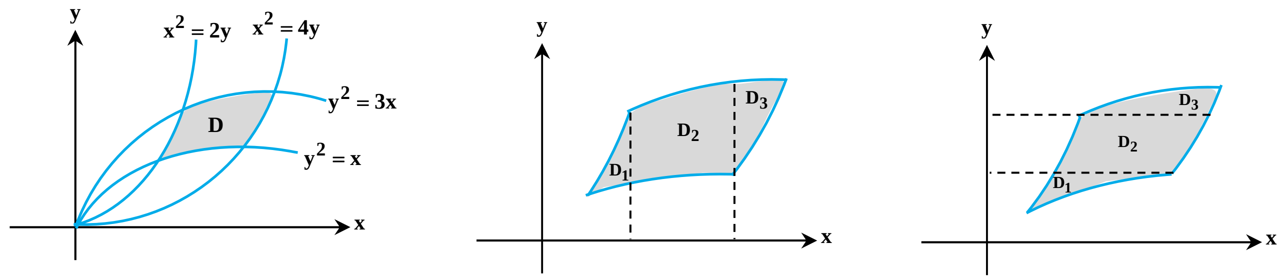
**توجه:** هر گاه در مسأله‌ای بخواهیم فاصله منحنی یا رویه را از مبدأ مینیمم (یا ماکزیمم) کنیم، چون فاصله یک نقطه دلخواه مانند $A(x,y)$ یا $A(x,y,z)$ (در فضا) از مبدأ برابر $d=\sqrt{x^۲+y^۲}$ یا $d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ می‌باشد، به جای آن به ترتیب از $f(x,y)=x^۲+y^۲$ و $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ استفاده می‌کنیم. چون محاسبه مشتق دو تابع اخیر ساده‌تر از حالت رادیکالی می‌باشد و وقتی $f$ مینیمم یا ماکزیمم شود، فاصله یا همان $d$ نیز مینیمم یا ماکزیمم می‌شود. در حالت کلی، اگر بخواهیم فاصله از نقطه‌ی $(a,b,c)$ را مینیمم (یا ماکزیمم) کنیم، تابع $f(x,y,z)=(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲$ را در نظر می‌گیریم.

## درسنامه۲: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

در برخی از انتگرال‌های دوگانه، تعویض ترتیب متغیرها نیز کمکی به حل انتگرال نمی‌کند. این مشکل ممکن است به خاطر ضابطه‌ی $f(x,y)$ یا شکل خاصِ ناحیه‌ی $D$ به وجود آمده باشد. به نمونه‌های زیر دقت کنید:

**نمونه ۱:** اگر تابع زیر انتگرال، $e^{x^2}$ باشد، ترتیب $\iint_D e^{x^2}dydx$ مناسب است. اگر $e^{y^2}$ باشد، ترتیب $\iint_D e^{y^2}dxdy$ خوب است. اما انتگرالِ $\iint_D e^{x^2+y^2}dA$ با هیچ‌کدام از این ترتیب‌ها قابل حل نیست. به همین ترتیب، انتگرال دوگانه‌ی $I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ با هیچکدام از ترتیب‌های $dxdy$ و $dydx$ به سادگی حل نمی‌شود.

**نمونه ۲:** ناحیه‌ی $D$ که به منحنی‌های $x^2=2y$، $x^2=4y$، $y^2=x$ و $y^2=3x$ محصور شده است را در نظر بگیرید.




این ناحیه لوزی‌گون است و در راستای هیچ‌کدام از محورها منظم نیست. اگر بخواهیم در راستای محور yها از پایین به بالا مرزهای ورودی و خروجی را تعیین کنیم مجبور می‌شویم ناحیه‌ی $D$ را به سه ناحیه‌ی $D_1$، $D_2$ و $D_3$ بشکنیم (شکل وسط). به همین ترتیب اگر در راستای محورxها از چپ به راست حرکت کنیم باز هم مجبوریم سه ناحیه‌ی $D_1$، $D_2$ و $D_3$ را ایجاد کنیم (شکل سمت راست). بنابراین عوض کردن ترتیب متغیرها کمکی به حل انتگرال دوگانه روی این ناحیه نخواهد کرد.

**راه‌حل چیست؟** اکنون که مشکل را توضیح دادیم، باید راه‌حل آن را هم شرح دهیم. در چنین مواردی با معرفی متغیرهای جدید $u$ و $v$، تلاش می‌کنیم انتگرال دوگانه را از دستگاه محورهای $xoy$ به دستگاه محورهای $uov$ ببریم طوری که در دستگاه جدید انتگرال ساده‌تری داشته باشیم. در واقع باید برای انجام این کار با یک **تبدیل یک به یک** از فضای $xoy$ به فضای $uov$ برویم. در این فرآیند باید مراحل زیر طی شوند:

**الف)** انتخاب $u$ و $v$ به شکلی باشد که باعث ساده‌تر شدن تابع زیر انتگرال یا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری شود.

**ب)** تعیین کران‌های $u$ و $v$ و در صورت نیاز، رسمِ شکل ناحیه $D$ در دستگاه جدید $uov$.

**ج)** تبدیل انتگرال دوگانه‌ای که بر حسب $x$ و $y$ است به انتگرال دوگانه‌ای که بر حسب $u$ و $v$ است. باید دید به جای $f(x,y)$ و $dxdy$ چه عباراتی قرار می‌گیرند.

اکنون این مراحل را گام به گام شرح می‌دهیم.

همه‌ی انتگرال‌هایی که نیاز به تغییر متغیر $u$ و $v$ دارند در یکی از این سه دسته قرار می‌گیرند:

**دسته اول: انتگرال‌هایی که در آن‌ها تابع زیر انتگرال پیچیده است و نمی‌توان از آن نسبت به x یا y انتگرال گرفت.** در این حالت $u$ و $v$ را با توجه به ضابطه‌ی $f(x,y)$ انتخاب می‌کنیم. در توابع $\sin(\frac{ax+by}{cx+dy})$، $\cos(\frac{ax+by}{cx+dy})$ یا $e^{\frac{ax+by}{cx+dy}}$، با انتخاب $u=ax+by$ و $v=cx+dy$ می‌توانیم به توابع ساده‌ترِ $\sin\frac{u}{v}$ یا $\cos(\frac{u}{v})$ یا $e^{\frac{u}{v}}$ برسیم. با رعایت این نکته به شکل ساده‌تری از انتگرال دوگانه خواهیم رسید. برای مثال در انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x}e^{\frac{x-y}{x+y}}dydx$ تغییر متغیر $u=x-y$، $v=x+y$ باعث ساده‌تر شدن انتگرال می‌شود. واضح است که این تغییر متغیر را برای هر تابعی که به صورت $f(\frac{ax+by}{cx+dy})$ باشد می‌توان به کار برد.

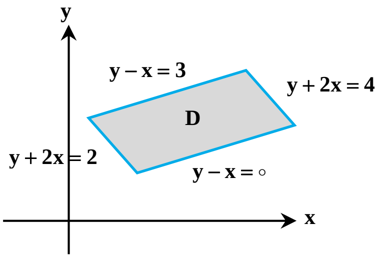
اگرچه مثال‌های زیادی با همین ایده حل می‌شوند اما قاعده‌ی کلی‌تر آن است که با توجه به عبارات به کار رفته در ضابطه‌ی $f(x,y)$، متغیرهای $u$ و $v$ را انتخاب کنیم. برای مثال در انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}})dydx$ اگر نیاز به تغییر متغیر داشتیم، انتخاب $u=xy$ و $v=\frac{y}{x}$ مناسب است.

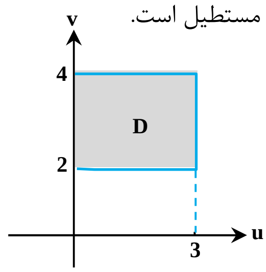
**دسته دوم: در برخی از مثال‌ها، تابع f(x,y) پیچیدگی ندارد، اما ناحیه‌ی D لوزی‌گون است. نواحی لوزی‌گون معمولاً نامنظم هستند. حتی اگر منظم باشند، نوشتن حدود x و y در آن‌ها ساده نیست.** در این صورت انتخاب $u$ و $v$ با توجه به معادله‌ی مرزهای $D$ انجام می‌شود. نواحی لوزی‌گون دارای چهار مرز هستند که وقتی معادله‌ی آن‌ها را مرتب می‌کنیم متوجه می‌شویم دو تا از مرزها به صورت $h(x,y)=c_1$ و $h(x,y)=c_2$ و دو مرز دیگر به شکل $g(x,y)=c_3$ و $g(x,y)=c_4$ هستند. ابتدا معادله‌ی مرزها را طوری بنویسید که در سمت راست عددی ثابت باقی بماند. مثلاً به جای $y=\frac{2}{x}$ بنویسید $xy=2$ یا به جای $y=x+1$ بنویسید $y-x=1$. وقتی $h(x,y)$ و $g(x,y)$ را تشخیص دادیم، تغییر متغیر مناسب $u=h(x,y)$ و $v=g(x,y)$ است. به دو نمونه‌ی زیر توجه کنید:

**نمونه۱:** فرض کنید ناحیه‌ی $D$ به خطوط $y=2-2x$ ، $y=4-2x$ ، $y=x+3$ و $y=x$ محدود شده باشد. این چهار معادله را به این شکل می‌نویسیم:

$$y+2x=4 \quad , \quad y+2x=2 \quad , \quad y-x=3 \quad , \quad y-x=0$$

در سمت چپ تساوی‌ها عبارات $h(x,y)=y-x$ و $g(x,y)=y+2x$ را داریم. یکی را $u$ و دیگری را $v$ می‌نامیم. واضح است که با انتخاب $u=y-x$ و $v=y+2x$ مرزهای داده شده تبدیل به خطوط $u=0$ ، $u=3$ ، $v=2$ و $v=4$ می‌شوند. پس کران‌های $u$ و $v$ به اعداد ثابت تبدیل شده‌اند و ناحیه‌ی $D$ در دستگاه جدید یک مستطیل است.



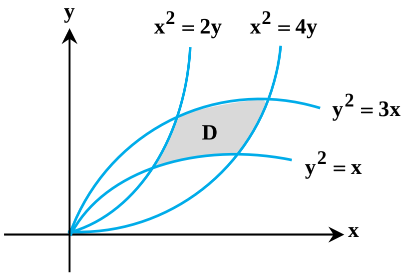



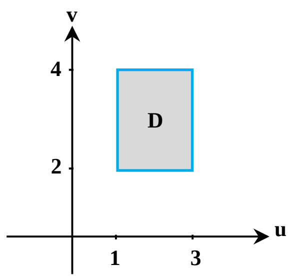

پس از تعیین ناحیه‌ی $D$ در دستگاه جدید، در تابع زیر انتگرال هم باید $x$ و $y$ را برحسب $u$ و $v$ جایگذاری کنیم. اگر روابط $u=y-x$ و $v=y+2x$ را از هم کم کنیم، خواهیم داشت: $v-u=3x$ . بنابراین $x=\frac{1}{3}(v-u)$ است و با جایگذاری آن در روابط، $y=\frac{1}{3}(v+2u)$ حاصل می‌شود. حالا می‌توانیم تابع $f(x,y)$ را برحسب $u$ و $v$ بنویسیم.

**نمونه ۲:** فرض کنیم ناحیه‌ی $D$ به منحنی‌های $x^2=2y$ ، $x^2=4y$ ، $y^2=x$ و $y^2=3x$ محدود شده باشد. قبلاً دیده‌اید که این ناحیه لوزی‌گون است. معادله‌ی مرزهای $D$ را طوری می‌نویسیم که سمت راستِ تساوی‌ها عدد ثابت داشته باشیم. به این صورت:

$$\frac{y^2}{x}=3 \quad , \quad \frac{y^2}{x}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{y}=4 \quad , \quad \frac{x^2}{y}=2$$

در سمت چپ تساوی‌ها عبارات $h(x,y)=\frac{y^2}{x}$ و $g(x,y)=\frac{x^2}{y}$ را داریم. تغییر متغیر $u=\frac{y^2}{x}=x^{-1}y^2$ و $v=\frac{x^2}{y}=x^2y^{-1}$ معادله‌ی مرزها را به شکل $u=1$ ، $u=3$ ، $v=4$ و $v=2$ ساده خواهد کرد. ضمن آن که کران‌های $u$ و $v$ به‌صورت $1\le u\le 3$ و $2\le v\le 4$ به‌دست آمدند. شکل تبدیل یافته‌ی $D$ در دستگاه $uov$ یک مستطیل است.



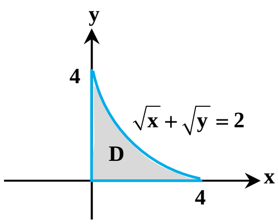

در این نمونه هم اگر $f(x,y)$ را داشتیم باید آن را برحسب متغیرهای $u$ و $v$ می‌نوشتیم.

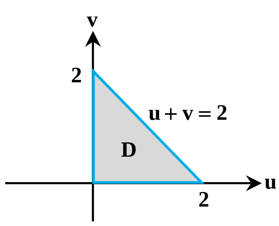
**دسته سوم: گاهی اوقات ناحیه‌ی $D$ یک ناحیه‌ی مثلث‌گون است که به محورهای مختصات و منحنی $h(x)+g(y)=c$ محدود شده است. در چنین مواردی با انتخاب $u=h(x)$ و $v=g(y)$ می‌توانیم ناحیه‌ی $D$ را به یک مثلث ساده در صفحه‌ی $uov$ تبدیل کرده و انتگرال دوگانه را حل کنیم.** بر خلاف دو دسته‌ی قبلی که در آن‌ها تابع زیر انتگرال پیچیده است یا ناحیه‌ی $D$ نامنظم است، در این دسته از انتگرال‌ها عبارت زیر انتگرال معمولاً ساده است و ناحیه‌ی $D$ هم منظم است. ولی با این حال، مرزهای $D$ معادله‌ی ساده‌ای ندارند و انجام تغییر متغیر ضروری است.

**مثال ۸۷: هرگاه ناحیه‌ی $D$ به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ محدود شده باشد، تغییر متغیر مناسب و کران‌های $u$ و $v$ در دستگاه جدید را بیابید.**

**پاسخ:** ناحیه‌ی $D$ به محورهای مختصات ($x=0$ و $y=0$) و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ محدود شده است. فرض می‌کنیم $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ باشد. حالا باید معادله‌ی مرزهای $D$ را در دستگاه جدید $uov$ بنویسیم:

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow v=0 \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \Rightarrow u+v=2 \end{cases}$$

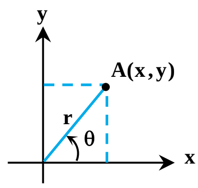


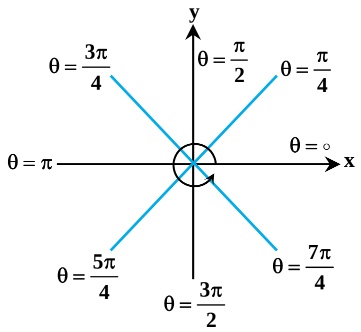

بنابراین در صفحه‌ی $uov$ مثلثی داریم که به خطوط $u=0$ ، $v=0$ و $u+v=2$ محدود است. کران‌های $u$ به شکل $0\le u\le 2$ هستند و برای $v$ اگر از پایین به بالا حرکت کنیم، خط $v=0$ مرز ورودی و خط $v=2-u$ مرز خروجی است. یعنی $0\le v\le 2-u$ است.

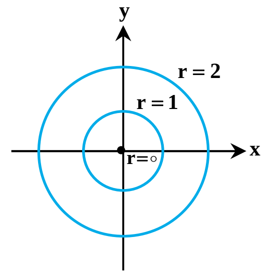
**توضیح:** در صفحه‌ی $xoy$ ناحیه‌ی $D$ مرزی با معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ داشت که نوشتن $x$ بر حسب $y$ یا نوشتن $y$ بر حسب $x$ را مشکل می‌کرد. با انجام تغییر متغیر، این مرز به خطی با معادله‌ی $u+v=2$ تبدیل شد که معادله‌ی بسیار ساده‌تری دارد.

## تغییر متغیر قطبی




هرگاه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه، بخشی از یک دایره یا ناحیه‌ی بین دو دایره باشد، ترجیح می‌دهیم از تغییر متغیر قطبی (دایروی) استفاده کنیم. در دستگاه قطبی، مختصات هر نقطه با مؤلفه‌های $(r,\theta)$ مشخص می‌شود. $\theta$ زاویه با جهت مثبت محور $x$ هاست و $r$ فاصله‌ی هر نقطه تا مبدأ را می‌دهد.
در یک دور کامل حول مبدأ داریم $0 \le \theta \le 2\pi$ یا $-\pi \le \theta \le \pi$. مقادیر مهم $\theta$ در شکل زیر داده شده‌اند.




چگونگی افزایش مقدار $r$ در شکل سمت راست مشخص شده است. در مبدأ $r=0$ است و با افزایش شعاع دایره‌های به مرکز مبدأ، مقدار $r$ افزایش می‌یابد.

**نکته ۴:** در اغلب موارد، وجود عبارت $x^2+y^2$ یک نشانه برای ما است که از تغییر متغیر قطبی برای حل انتگرال دوگانه استفاده کنیم. بنابراین دایروی بودنِ ناحیه‌ی $D$ و وجودِ عاملِ $x^2+y^2$ در تابع زیر انتگرال، نشانه‌های معمولِ استفاده از دستگاه قطبی هستند.

مثلاً در انتگرال‌های دوگانه‌ی $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ و $\iint_D \frac{dA}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ و $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$، استفاده از دستگاه قطبی می‌تواند مفید باشد.

**ژاکوبین دستگاه قطبی:** استفاده از مختصات قطبی، در واقع نوعی تغییر متغیر است که در آن به جای $u$ و $v$ از متغیرهای $r$ و $\theta$ استفاده می‌کنیم. در واقع می‌خواهیم انتگرال را از دستگاه $xoy$ به‌دستگاه $ro\theta$ ببریم. روابط بین متغیرهای $x$ و $y$ از دستگاه دکارتی و متغیرهای $r$ و $\theta$ در دستگاه قطبی را می‌توان به شکل $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ نوشت. در این صورت با محاسبه‌ی ژاکوبین $J_{r\theta}$ داریم:

$$J_{r\theta}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

به همین دلیل در تغییر دستگاه از دکارتی به قطبی خواهیم داشت:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$

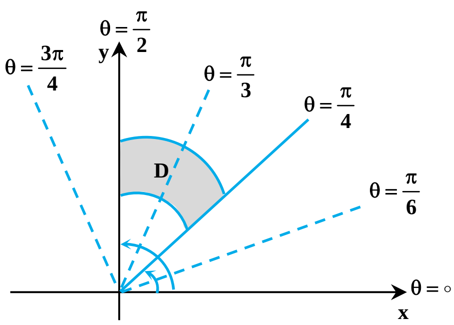
در نوشتن انتگرالده برحسب متغیرهای $r$ و $\theta$ از این روابط استفاده می‌کنیم:

$$x=r\cos\theta\quad,\quad y=r\sin\theta\quad,\quad x^2+y^2=r^2\quad,\quad tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\theta$$

**یافتن کران‌ها در دستگاه قطبی:** در دستگاه قطبی، کران‌های $\theta$ به‌صورت دو عدد ثابت به‌دست می‌آیند و کران‌های $r$ ممکن است ثابت یا توابعی برحسب $\theta$ باشند. به همین دلیل معمولاً کران‌های $\theta$ را در انتگرال بیرونی و کران‌های $r$ را در انتگرال میانی می‌نویسیم. بنابراین ترتیب زیر را خواهیم داشت:

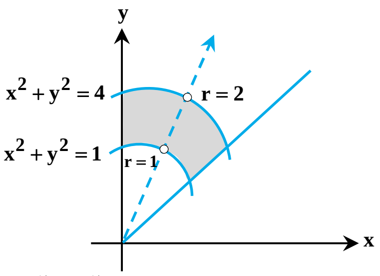
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int\int_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

پیدا کردن کران‌های $\theta$ معمولاً به سادگی انجام می‌شود. شعاع‌هایی را تصور کنید که از مبدأ به اطراف رسم می‌شوند. در جهت مثلثاتی حرکت کنید. اولین و آخرین شعاع‌هایی که با ناحیه‌ی $D$ تماس دارند را در نظر بگیرید. کمترین و بیشترین مقدار $\theta$ در ناحیه‌ی $D$ کران‌های $\theta$ را تشکیل می‌دهند.




در شکل مقابل، ناحیه‌ی $D$ بین دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$، محور $y$ ها و خط $y=x$ قرار گرفته است. می‌خواهیم کران‌های $\theta$ را مشخص کنیم. مطابق شکل از نیم‌خط $\theta=0$ در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم. نیم‌خط $\theta=0$ هیچ برخوردی با ناحیه‌ی $D$ ندارد. نیم‌خط $\theta=\frac{\pi}{6}$ نیز ناحیه‌ی $D$ را قطع نمی‌کند. اما $\theta=\frac{\pi}{4}$ اولین شعاعی است که از ناحیه‌ی $D$ می‌گذرد. به همین ترتیب در جهت مثلثاتی پیش می‌رویم. ملاحظه می‌کنید که $\theta=\frac{\pi}{2}$ آخرین زاویه‌ای است که با ناحیه‌ی $D$ در تماس است و بعد از آن از این ناحیه خارج می‌شویم.

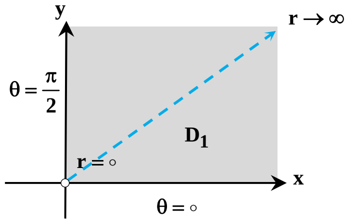
بنابراین حدود $\theta$ در این ناحیه به‌صورت $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ هستند. حالا نوبت به تعیین حدود $r$ می‌رسد. یکی از شعاع‌هایی که از مبدأ آغاز شده و از ناحیه‌ی $D$ می‌گذرد را رسم کنید. در شکل مقابل می‌بینید که این شعاع، از دایره‌ی $x^2+y^2=1$ وارد ناحیه‌ی $D$ شده و از دایره‌ی $x^2+y^2=4$ از آن خارج می‌شود. روی مرز ورودی داریم $r=1$ و روی مرز خروجی $r=2$ است. بنابراین حدود $r$ به شکل $1\le r\le 2$ هستند.



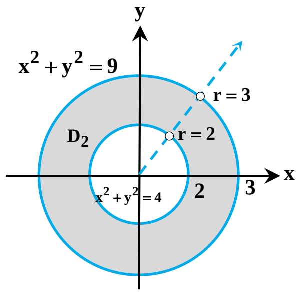

**تذکر ۸:** اگر ناحیه‌ی $D$ درون دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ باشد، کران‌های $r$ به‌صورت $0\le r\le a$ هستند. در ناحیه‌ی بین دو دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=b^2$ خواهیم داشت $a\le r\le b$ و در خارج از دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ حدود $r$ به‌صورت $a\le r<\infty$ هستند.

**مثال ۱۱۲: در نواحی مقابل کران‌های $\theta$ و $r$ را مشخص کنید.**

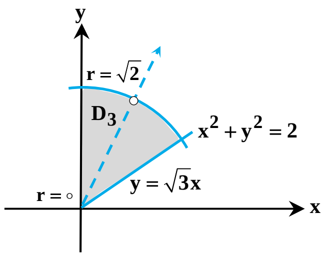
**پاسخ:**




ناحیه‌ی $D_1$ ربع اول صفحه‌ی $xoy$ است. این ناحیه از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ ادامه دارد و اگر شعاعی از مبدأ رسم کنیم، از همان $r=0$ وارد ناحیه شده و تا $r=\infty$ ادامه خواهد یافت. پس داریم: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r<\infty$.



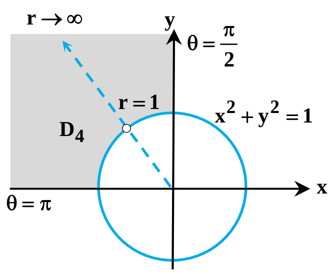

ناحیه‌ی $D_2$ بین دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=9$ قرار دارد. در این ناحیه یک دور کامل حول مبدأ داریم پس $0\le\theta\le 2\pi$ است. البته می‌توانید حدود $\theta$ را به‌صورت $-\pi\le\theta\le\pi$ هم بنویسید. حالا شعاعی را تصور کنید که از مبدأ آغاز شده و از ناحیه‌ی $D$ عبور می‌کند. این شعاع از دایره‌ای به شعاع $r=2$ وارد ناحیه می‌شود و از دایره‌ای به شعاع $r=3$ خارج می‌شود. بنابراین $2\le r\le 3$ است.




ناحیه‌ی $D_3$ بین خط $y=\sqrt{3}x$ و محور $y$ها قرار گرفته است. همچنین به دایره‌ی $x^2+y^2=2$ محدود شده است که دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ است. روی محور $y$ها می‌دانیم که $\theta=\frac{\pi}{2}$ است. روی خط $y=\sqrt{3}x$ داریم:

$$\theta=tg^{-1}(\frac{y}{x})=tg^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

بنابراین $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ است. کران‌های $r$ نیز از مبدأ مختصات یعنی $r=0$ آغاز شده و تا دایره‌ای به شعاع $r=\sqrt{2}$ ادامه دارند. پس $0\le r\le\sqrt{2}$ است.

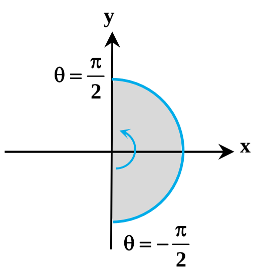


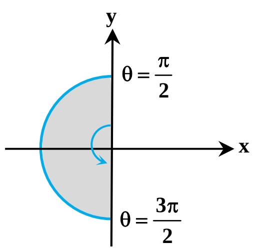

ناحیه‌ی $D_4$ خارج از دایره‌ی $x^2+y^2=1$ و در ربع دوم قرار دارد. کمترین و بیشترین مقدار $\theta$ در این ناحیه $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\theta=\pi$ هستند. اکنون شعاعی را رسم کنید که از مبدأ شروع شود و از $D_4$ بگذرد. در مرز ورودی $r=1$ است و این ناحیه تا $r=\infty$ ادامه دارد. پس حدود $\theta$ و $r$ به این صورت هستند:

$$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\ ,\ 1\le r<\infty$$

مراقب باشید که منفی بودن $x$ باعث منفی بودن $r$ نخواهد شد. طبق فرمول $r=\sqrt{x^2+y^2}$ همواره $r\ge 0$ است.

**تذکر ۹:** همانطور که می‌دانید زوایای $\frac{3\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ از نظر هندسی بر هم منطبق هستند. هرگاه این زاویه یکی از کران‌های $\theta$ باشد، باید دقت کنید که از کدام مقدار آن استفاده می‌کنید. اگر این زاویه، کران بالای $\theta$ باشد، آن را $\frac{3\pi}{2}$ نامیده و هرگاه کران پایین $\theta$ باشد آن را $-\frac{\pi}{2}$ می‌نامیم. به ویژه برای نیم‌دایره‌های سمت راست و سمت چپ باید این موضوع را رعایت کنید.




برای نیم‌دایره‌ی سمت راست کران‌های $\theta$ را به شکل $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم، اما برای نیم دایره‌ی سمت چپ کران‌های $\theta$ به‌صورت $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$ نوشته می‌شوند.

## درسنامه۴: انتگرال‌های سه‌گانه

اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک ناحیه‌ی سه‌بعدی باشد که توپُر و دارای حجم است، دیگر نمی‌توانیم فقط با نوشتن محدوده‌ی تغییرات $x$ و $y$ آن را بیان کنیم. بنابراین نیاز به انتگرال سه‌گانه‌ای داریم که کران‌هایش حدود تغییرات $x$، $y$ و $z$ را در ناحیه‌ی موردنظر نشان دهند. شکل کلی انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z)$ در ناحیه‌ی $D$ چنین است:

$$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ \boxed{dz}\ \boxed{dy}\ \boxed{dx}$$

وقتی از تابع $f(x,y,z)$ نسبت به $z$ انتگرال می‌گیریم و حدود $z$ را به جای آن قرار می‌دهیم تابع دو متغیره‌ی $F(x,y)$ به‌دست می‌آید. سپس با انتگرال‌گیری نسبت به $y$ و قرار دادن حدود $y$ در آن به تابع یک متغیره‌ی $G(x)$ می‌رسیم. در نهایت با انتگرال‌گیری نسبت به $x$ عددی حقیقی به‌دست می‌آید که پاسخ نهایی انتگرال است.

**مثال ۱۹۸: حاصل انتگرال سه‌گانه‌ی $I=\int_0^1\int_{-x}^{x}\int_0^{\sqrt{x+y}} \frac{z(x-y)}{x+y}dzdydx$ را بیابید.**

☑ **پاسخ:** ابتدا انتگرال میانی را نسبت به متغیر $z$ خواهیم گرفت. از آنجا که $x$ و $y$ را ثابت فرض می‌کنیم عبارت $\frac{x-y}{x+y}$ ضریبی ثابت است و داریم:

$$\int_0^{\sqrt{x+y}} \frac{z(x-y)}{x+y}dz = \frac{x-y}{x+y}\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{x+y}} = \frac{x-y}{x+y}\times\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}(x-y)$$

حاصل این انتگرال، تابع دو متغیره‌ی $F(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)$ است. اکنون از عبارت به‌دست آمده، انتگرال دوم را نسبت به $y$ می‌گیریم. در این انتگرال، $x$ عددی ثابت و $y$ متغیر است.

$$\int_{-x}^{x}\frac{1}{2}(x-y)dy = \frac{1}{2}(xy-\frac{y^2}{2})\Bigg|_{-x}^{x} = \frac{1}{2}(x^2-\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{x^2}{2}) = x^2$$

با انتگرال‌گیری نسبت به $z$ و $y$ تا اینجا به تابع یک متغیره‌ی $G(x)=x^2$ رسیده‌ایم. آخرین انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

جواب نهایی انتگرال سه‌گانه، یک عدد حقیقی است. همان‌طور که در انتگرال دوگانه مشاهده کردید، این عدد ممکن است مفهوم فیزیکی یا هندسی داشته باشد.

### ترتیب متغیرها در انتگرال سه‌گانه

مطابق قضیه‌ی فوبینی برای توابع انتگرال‌پذیر، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، مقدار انتگرال دوگانه تغییر نخواهد کرد. همین مطلب برای انتگرال سه‌گانه نیز برقرار است. توجه داشته باشید که تعویض ترتیب متغیرها در انتگرال‌های سه‌گانه خیلی مورد سؤال نیست، اما نکات مطرح شده در تعویض ترتیب انتگرال دوگانه را رعایت خواهیم کرد.

برای مثال اگر $f(x,y,z)=e^{\frac{x}{z}}$ زیر انتگرال باشد، چون در ضابطه‌اش متغیر $y$ وجود ندارد، پس بهتر است $dy$ در انتگرال میانی باشد و در ادامه با توجه به آن که در $e^{\frac{x}{z}}$ متغیر $z$ در مخرج کسر و $x$ در صورت کسر آمده است، ابتدا نسبت به $x$ و در پایان نسبت به $z$ انتگرال می‌گیریم. بنابراین ترتیب $I=\iiint_D e^{\frac{x}{z}}dydxdz$ بهترین راه برای حل این انتگرال است.

**مثال ۱۹۹: ترتیب مناسب برای حل انتگرال $\iiint_D ye^{z^2}dzdydx$ را بنویسید.**

☑ **پاسخ:** در تابع $ye^{z^2}$ متغیر $x$ حضور ندارد، بنابراین ترجیح می‌دهیم $dx$ در انتگرال میانی باشد. در ضمن به علت وجود $e^{z^2}$ انتگرال‌گیری نسبت به $z$ مشکل است، بنابراین $dz$ را به انتگرال بیرونی می‌آوریم. پس بهترین ترتیب برای این انتگرال به‌صورت $\iiint_D ye^{z^2}dxdydz$ است.

**مثال ۲۰۰: فرض کنید $\int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y}dzdydx=\iiint dxdydz$. حدود انتگرال سمت راست کدام است؟** (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\int_0^2\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz$
۲) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-y} dxdydz$
۳) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dxdydz$
۴) $\int_0^1\int_0^2\int_0^{1-z} dxdydz$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اغلب حدود انتگرال اعداد ثابت هستند، فقط کران بالای $z$ به صورت $z=1-y$ است که اکنون با جابجا شدن آن‌ها، کران بالای $y$ به صورت $y=1-z$ خواهد بود. سایر حدود به همان شکل جابجا می‌شوند.

**مثال۲۰۱:** کدام مورد با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری معادل انتگرال $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dzdy\,dx$ است؟ (مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

۲) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

۳) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

۴) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به گزینه‌های داده شده، می‌خواهیم ترتیب $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ را بنویسیم. ابتدا باید کمترین و بیشترین مقدار z را در این ناحیه به‌دست آوریم.

طبق صورت سؤال، در این ناحیه داریم $-1\le x\le 1$، $x^2\le y\le 1$ و $0\le z\le 1-y$.

با توجه به آن‌که $-1\le x\le 1$ است، داریم $0\le x^2\le 1$. بنابراین، کمترین و بیشترین مقدار ممکن برای y در این ناحیه عبارتند از $0\le y\le 1$. با در نظر گرفتن حدود z یعنی $0\le z\le 1-y$ و قرار دادن $y=0$ و $y=1$ در این عبارات، متوجه می‌شویم که در تمام این ناحیه $0\le z\le 1$ است.

حالا حدود y را برحسب z می‌نویسیم: $z=1-y \Rightarrow y=1-z$

بنابراین همان‌طور که در همه‌ی گزینه‌ها تصریح شده است، حدود y به صورت $0\le y\le 1-z$ هستند.

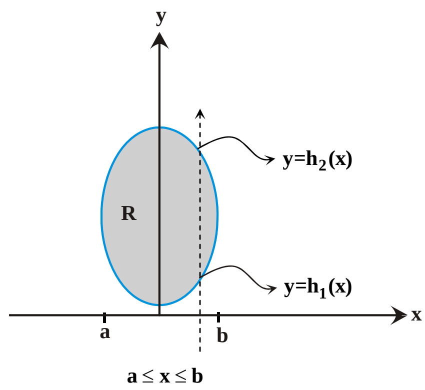
برای تعیین حدود x برحسب y و z به روابطی که در آن‌ها رابطه‌ی x با سایر متغیرها معلوم شده است، توجه می‌کنیم. $y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

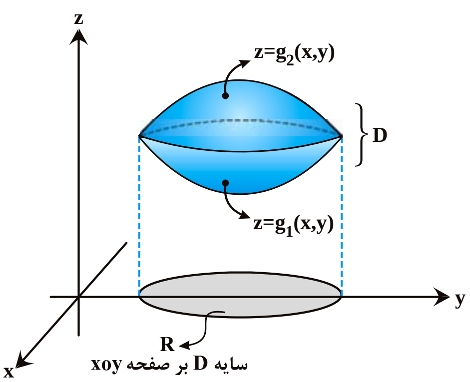
به این ترتیب خواهیم داشت: $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)dxdydz$

دقت کنید لازم نیست حل به طور کامل انجام شود؛ چون $y=x^2$ یکی از مرزها است، پس برای dx باید از $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}$ باشد، لذا گزینه‌های (۱) و (۲) غلط هستند. از طرفی چون $0\le z\le 1-y$ لذا z نمی‌تواند منفی باشد و این یعنی گزینه (۳) غلط است.

## تعیین حدود انتگرال سه‌گانه

هر ناحیه‌ی سه‌بعدی مانند D، یک تصویر دوبعدی (سایه) بر صفحه‌ی xoy دارد. (البته این تصویر در صفحات zox و zoy هم می‌تواند باشد.) اگر تصویر در صفحه‌ی xoy را با R نشان دهیم، حدود x و y با توجه به ناحیه‌ی R در صفحه‌ی xoy مانند انتگرال دوگانه نوشته می‌شوند. اما حدود z را با عبور از ناحیه‌ی D در امتداد محور zها و تشخیص رویه‌های پایینی و بالایی تعیین می‌کنیم. در شکل سمت چپ ناحیه‌ی D و سایه‌ی آن بر صفحه‌ی xoy را می‌بینید. در شکل سمت راست فقط سایه‌ی D بر صفحه‌ی xoy رسم شده است.




بنابراین در هر مسأله‌ی انتگرال سه‌گانه با یک ناحیه‌ی توپر و سه‌بعدی به نام D و یک ناحیه‌ی دوبعدی به نام R روبرو هستیم که R سایه‌ی D بر صفحه‌ی xoy است. در ادامه نشان می‌دهیم که بدون نیاز به رسم شکل، چطور می‌توانیم کران‌های انتگرال سه‌گانه را تعیین کنیم. البته اگر بتوانید ناحیه‌ی D یا حداقل سایه‌ی آن بر صفحه‌ی xoy را رسم کنید، تعیین حدود انتگرال ساده‌تر خواهد شد.

**تعیین حدود انتگرال سه‌گانه بدون رسم ناحیه‌ی D**

فرض کنید می‌خواهیم حدود انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z)$ را روی ناحیه‌ی D بدون رسم این ناحیه بنویسیم. این فرآیند را می‌توان در سه مرحله‌ی زیر شرح داد:

**مرحله اول:** به تابع زیر انتگرال دقت کرده و یک ترتیب مناسب برای حل انتگرال انتخاب می‌کنیم. همان‌طور که شرح دادیم اغلب اوقات ترتیب $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ مناسب است. مگر آن که به دلیل خاصی بخواهیم ترتیب متغیرها عوض شود.

**مرحله دوم:** در این مرحله می‌خواهیم کران‌های $z$ را برحسب $x$ و $y$ به‌دست آوریم. این کار بسیار ساده و بدون نیاز به ترسیم رویه‌ها انجام می‌شود. در صورت سؤال معادله‌ی رویه‌هایی که ناحیه‌ی $D$ را محدود کرده‌اند، داده شده است. از این معادلات می‌توانیم $z$ را برحسب $x$ و $y$ به‌دست آورده و کران‌هایی به‌صورت $z=g_1(x,y)$ و $z=g_2(x,y)$ پیدا کنیم. معمولاً با دقت به‌صورت سؤال مشخص می‌شود که کدام یک از آن‌ها کران بالا و کدام یک کران پایین است اما اگر تردید دارید که کدام یک از آن‌ها کران پایین و کدام کران بالاست، صبر کنید تا حدود $x$ و $y$ مشخص شوند. سپس یک نقطه‌ی $(x,y)$ از این ناحیه انتخاب کرده و در $g_1(x,y)$ و $g_2(x,y)$ قرار دهید. هر کدام که مقدارش بیشتر بود، کران بالاست. برای مثال اگر ناحیه‌ی $D$ به رویه‌های $z=2-x-y$ و $z=2x^2+y^2$ محدود باشد و در ناحیه‌ی $x^2+y^2\le 1$ قرار داشته باشد، نقطه‌ی $(x,y)=(0,0)$ را از این ناحیه انتخاب می‌کنیم و با قرار دادن آن در کران‌های $z$ داریم $\begin{cases}2-x-y=2-0=2\\ 2x^2+y^2=0+0=0\end{cases}$. بنابراین $z=2-x-y$ کران بالا و $z=2x^2+y^2$ کران پایین است.

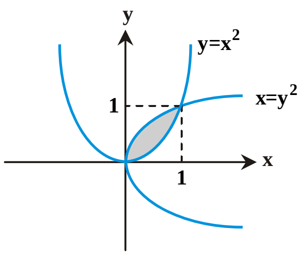
در این مرحله ممکن است به جای دو تابع $g_1$ و $g_2$ با سه تابع $z=g_1(x,y)$، $z=g_2(x,y)$ و $z=g_3(x,y)$ روبرو شویم؛ در این صورت باید با دقت به علامت $z$ و سایر اطلاعات داده شده در صورت سؤال، کران‌های $z$ را از بین آن‌ها تشخیص دهیم.

مثلاً فرض کنید ناحیه‌ی $D$ از بالا به کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود شده باشد، از معادله‌ی مخروط داریم $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و از معادله‌ی کره دو رابطه‌ی $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ به‌دست می‌آیند. از میان این سه، باید دو کران برای $z$ انتخاب کنیم. از آنجا که یکی از مرزها مخروط و دیگری کره است، معلوم می‌شود که $z=\sqrt{x^2+y^2}$ یکی از کران‌هاست. در صورت سؤال تأکید شده که مخروط کران پایین برای $D$ است. چون $z=\sqrt{x^2+y^2}$ مثبت است، کران بالا هم باید مثبت باشد، یعنی کران بالا $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ است.

**مرحله سوم:** حالا می‌خواهیم کران‌های $x$ و $y$ را پیدا کنیم. ابتدا باید تصویر ناحیه‌ی $D$ در صفحه‌ی $xoy$ را پیدا کنیم. به ضابطه‌ی رویه‌های داده شده دقت می‌کنیم. اگر برخی از این رویه‌ها معادله‌ای برحسب $x$ و $y$ داشته باشند، مثلاً استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ همین معادله می‌تواند تصویر $D$ در صفحه $xoy$ را مشخص کند. اما اگر در معادله‌ی همه‌ی رویه‌ها متغیر $z$ وجود داشته باشد و آن‌ها نتوانند یک ناحیه‌ی بسته در صفحه‌ی $xoy$ را مشخص کنند، باید آن‌ها را با هم برخورد داده و با حذف $z$ از این معادلات رابطه‌ای برحسب $x$ و $y$ به‌دست آوریم.

برای نمونه فرض کنید ناحیه‌ی $D$ به مخروط $z^2=x^2+y^2$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ محدود شده باشد، در هر دو معادله، متغیر $z$ حضور دارد. بنابراین آن‌ها را برخورد می‌دهیم و خواهیم داشت $x^2+y^2+x^2+y^2=4$ به عبارتی $x^2+y^2=2$ که دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ و مرکز مبدأ است. از این دایره، می‌توانیم حدود $x$ و $y$ را بنویسیم.

**مثال ۲۰۲:** ناحیه‌ی $D$ یک جسم توپر است که به سطوح $z=xy$، $y=x^2$ و $x=y^2$ و صفحه‌ی $z=0$ محدود شده است. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ را روی این ناحیه بنویسید.




**پاسخ:** ابتدا دقت کنید که از معادلات داده شده، دو مقدار برای $z$ به‌دست می‌آید: $z=0$ و $z=xy$ بنابراین کران‌های $z$ همین‌ها هستند. اگر تردید دارید که کدام‌یک از آن‌ها کران پایین است، باید کمی حوصله کنید تا حدود $x$ و $y$ بهتر مشخص شوند. معادلات $y=x^2$ و $x=y^2$ یک ناحیه در صفحه‌ی $xoy$ را مشخص می‌کنند. محل برخورد این دو منحنی در $(0,0)$ و $(1,1)$ است.

برای $x$ داریم $0\le x\le 1$ و برای $y$ با حرکت از پایین به بالا مرز ورودی $y=x^2$ و مرز خروجی $y=\sqrt{x}$ است. در نتیجه حدود $y$ به شکل $x^2\le y\le\sqrt{x}$ به‌دست می‌آیند. حالا که محدوده‌ی تغییرات $x$ و $y$ را فهمیدیم، مشخص شد که در این ناحیه $x$ و $y$ نامنفی هستند؛ بنابراین در مورد کران‌های $z$ با اطمینان می‌توان گفت که $z=xy$ کران بالا و $z=0$ کران پایین است در نتیجه $0\le z\le xy$ و حدود انتگرال به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{xy}f(x,y,z)dzdydx$$

**مثال ۲۰۳:** اگر $S$ ناحیهٔ بستهٔ محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ به معادلهٔ $x+y+z=1$ باشد مقدار $\iiint_S z^2dxdydz$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{60}$ ۴) $\frac{1}{20}$

**پاسخ:** گزینه «۳»

$$\iiint_S z^2dxdydz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}z^2dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^3}{3}dydx=\int_0^1-\frac{(1-x-y)^4}{12}\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x)^4}{12}dx=\frac{-(1-x)^5}{60}\Big|_0^1=\frac{1}{60}$$

**مثال ۲۰۴:** مقدار $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\sin x\cos(\sin y)dydxdz$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\pi\sin 1$ ۲) $-\pi\cos 1$ ۳) $\pi\sin 1$ ۴) $\pi\cos 1$

**پاسخ:** گزینه «۳»

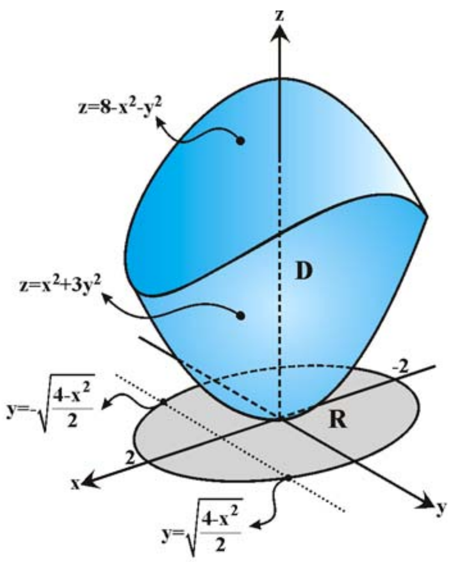
$$\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\sin x\cos(\sin y)dydxdz=\int_0^{\pi}dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\sin x\cos(\sin y)dydx\xrightarrow{\text{تعویض ترتیب انتگرال‌گیری}}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos(\sin y)dxdy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\cos(\sin y)\Big|_y^{\frac{\pi}{2}}dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\cos(\sin y)dy=\pi\sin(\sin y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\sin 1$$

**مثال ۲۰۵:** ناحیه‌ی $D$ توسط رویه‌های $z=x^2+3y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ محصور شده است. کران‌های انتگرالِ سه‌گانه‌ی $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ را مشخص کنید.

**پاسخ:** با توجه به رویه‌های داده شده، واضح است که حدود $z$ عبارتند از $z=8-x^2-y^2$ و $z=x^2+3y^2$. اگر شکل را رسم نکرده باشیم، در حال حاضر نمی‌دانیم کدام‌یک از آن‌ها کران پایین و کدام‌یک کران بالاست. این مشکل را در ادامه حل خواهیم کرد. برای نوشتن کران‌های $x$ و $y$ از آن‌جا که هیچ‌کدام از رویه‌ها ناحیه‌ای در صفحه‌ی $xoy$ به ما نمی‌دهند، باید آن دو را برخورد دهیم و با حذف $z$، رابطه‌ای بین $x$ و $y$ پیدا کنیم.

$$\begin{cases}z=x^2+3y^2\\ z=8-x^2-y^2\end{cases}\Rightarrow x^2+3y^2=8-x^2-y^2\Rightarrow x^2+2y^2=4$$




معادله‌ی $x^2+2y^2=4$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضی است. شعاع‌های افقی و عمودی این بیضی را تعیین می‌کنیم. به ازای $x=0$ داریم $y=\pm\sqrt{2}$ و به ازای $y=0$ داریم $x=\pm 2$. در نتیجه یک بیضی با شعاع عمودی $\sqrt{2}$ و شعاع افقی ۲ داریم. کران‌های $x$ به‌صورت $-2\le x\le 2$ هستند و برای کران‌های $y$ از معادله‌ی بیضی $x^2+2y^2=4$ خواهیم داشت: $y=\pm\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$، به عبارتی داریم:

$$-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$$

اکنون وقت آن رسیده است که کران‌های بالا و پایین $z$ را بهتر بشناسیم. یک نقطه از درون این بیضی انتخاب کنید. مثلاً نقطه‌ی $(x,y)=(0,0)$ در این ناحیه قرار دارد. با جایگذاری آن در کران‌های $z$ داریم:

$$\begin{cases}z=8-x^2-y^2=8\\ z=x^2+3y^2=0\end{cases}$$

پس $z=8-x^2-y^2$ کران بالا و $z=x^2+3y^2$ کران پایین است:

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}f(x,y,z)dzdydz$$

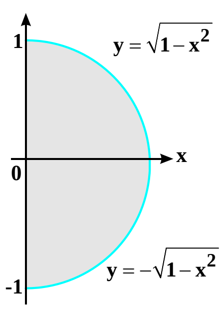
**مثال ۲۰۶:** مقدار انتگرال $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dzdydx$ کدام است؟ (مواد و متالوژی ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{108\pi}{35}$ ۲) $\frac{92\pi}{35}$ ۳) $\frac{72\pi}{35}$ ۴) $\frac{46\pi}{35}$

**پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا انتگرال داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\iint\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dzdydx=\iint_D(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(8-2(x^2+y^2))dydx$$

حالا ناحیه‌ی $D$ را رسم می‌کنیم:




همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، با یک نیم‌دایره روبه‌رو هستیم، پس با توجه به وجود عامل $x^2+y^2$ در زیر انتگرال، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم:

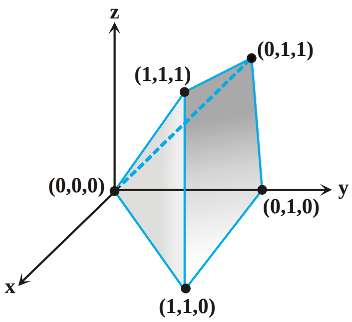
$$I=\iint_D(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(8-2(x^2+y^2))dydx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(r^2)^{\frac{3}{2}}(8-2r^2)rdrd\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(8r^4-2r^6)drd\theta=(\pi)(\frac{8r^5}{5}-\frac{2r^7}{7})\Big|_0^1=\pi(\frac{8}{5}-\frac{2}{7})=\pi(\frac{56-10}{35})=\frac{46\pi}{35}$$

**مثال ۲۰۷:** مقدار انتگرال $\iiint_R \sin(\pi y^3)dv$ که در آن R هرم به رئوس $(0,0,0)$، $(0,1,0)$، $(1,1,0)$، $(1,1,1)$ و $(0,1,1)$ است، کدام است؟

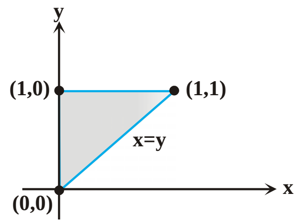
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{2}{3\pi}$ ۲) $\frac{4}{3\pi}$ ۳) $\frac{3}{4\pi}$ ۴) $\frac{3}{2\pi}$




**پاسخ:** گزینه «۱» چهار تا از این نقاط یعنی نقاط $(0,1,0)$، $(1,1,0)$، $(0,1,1)$ و $(1,1,1)$ روی صفحه‌ی $y=1$ قرار دارند.

نقاط $(0,0,0)$، $(0,1,1)$ و $(1,1,1)$ نیز روی صفحه‌ی $z=y$ قرار دارند، زیرا در همه‌ی آن‌ها مقدار y و z یکسان است. بنابراین حدود z به‌صورت $0 \le z \le y$ به‌دست می‌آیند. در ضمن اگر فقط به مؤلفه‌های $(x,y)$ در این نقاط توجه کنیم، متوجه می‌شویم که تصویر این هرم در صفحه xy مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(0,1)$ است.




این ناحیه را در شکل مقابل نشان داده‌ایم:

در این ناحیه داریم: $0 \le y \le 1$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، $x=0$ مرز ورودی و $x=y$ مرز خروجی است. پس $0 \le x \le y$.

با نوشتن حدود انتگرال سه‌گانه خواهیم داشت: $V=\int_0^1\int_0^y\int_0^y \sin(\pi y^3)\,dz\,dx\,dy$

در مورد ترتیب $dz\,dx\,dy$ توجه کنید که چون تابع زیر انتگرال برحسب متغیر y است، بهتر است انتگرال‌گیری نسبت به y را در آخرین مرحله انجام دهیم تا محاسبه انتگرال‌های میانی ساده‌تر شود.

$$V=\int_0^1\int_0^y \sin(\pi y^3)[z]_0^y\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^y y\sin(\pi y^3)\,dx\,dy=\int_0^1 y\sin(\pi y^3)[x]_0^y\,dy=\int_0^1 y^2\sin(\pi y^3)\,dy=\frac{-1}{3\pi}[\cos(\pi y^3)]_0^1$$

$$\Rightarrow V=-\frac{1}{3\pi}[\cos(\pi)-\cos(0)]=\frac{2}{3\pi}$$

**مثال ۲۰۸:** اگر R ناحیه محصور به صفحات $z=y$ و $z=0$، $y=\frac{\pi}{2}$، $x=-1$ و $y-x=1$ باشد، حاصل $\iiint_R y\cos z\,dv$، کدام است؟

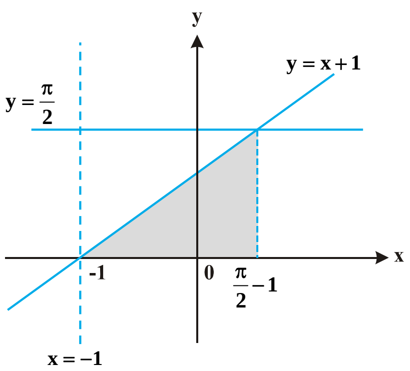
(نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $\pi-2$ ۲) $2$ ۳) $\pi$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

**پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به آنکه $0 \le z \le y$ داریم:

$$I=\iiint_R y\cos z\,dv=\iint_{R_{xy}}\int_0^y y\cos z\,dz\,dA=\iint_{R_{xy}} y\sin z\Big|_0^y dA=\iint_{R_{xy}} y\sin y\,dA$$

با رسم خطوط $y=\frac{\pi}{2}$، $x=-1$ و $y-x=1$ در صفحه‌ی xy داریم:




$$I=\iint_{R_{xy}} y\sin y\,dA=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}} y\sin y\,dy\,dx$$

به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء (یا از روش جدولی) داریم:

$$I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(\sin y-y\cos y)\Big|_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(1-\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1))\,dx$$

$$=x+2\cos(x+1)+(x+1)\sin(x+1)\Big|_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}=\pi-2$$

**نوشتن کران‌ها برای یک هشتم اول یک ناحیه:**

همان‌طور که می‌دانیم؛ هر کدام از محورهای $x$، $y$ و $z$ دارای یک نیمه‌ی مثبت و یک نیمه‌ی منفی هستند. به همین خاطر در صفحه‌ی $xoy$ ما چهار ربع مختلف داریم که حالت $x \ge 0$، $y \ge 0$ نشان‌دهنده‌ی ربع اول آن است. بنابراین در فضای $(x,y,z)$ ما $2\times2\times2=8$ حالت مختلف از نظر علامت داریم که یک هشتمِ اول آن مربوط به حالتِ $x,y,z \ge 0$ است. در برخی از سؤالات مقدار انتگرال را برای $\frac{1}{8}$ اول از ناحیه‌ی $D$ می‌خواهند. در این صورت شما می‌توانید مانند حالت عادی کران‌ها را روی ناحیه‌ی $D$ به‌دست آورید و در پایان اگر کران پایین برخی از متغیرها منفی بود به جای آن باید صفر را قرار دهیم.

**مثال ۲۰۹:** **انتگرال سه‌گانه‌ی $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ روی ناحیه‌ی $D$ که به استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحات $z+y=2$ و $z=1$ محدود می‌شود، داده شده است.**

**الف) حدود انتگرال را روی این ناحیه مشخص کنید.**

**ب) حدود انتگرال را برای $\frac{1}{8}$ اول از این ناحیه تعیین کرده و با حدود به‌دست آمده در حالت (الف) مقایسه کنید.**

☑ **پاسخ:** هر کدام از دو قسمت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

**الف)** ناحیه‌ی $D$ به رویه‌های $z=1$، $z=2-y$ و $x^2+y^2=1$ محدود شده است. بنابراین کران‌های $z$ عبارتند از $z=1$ و $z=2-y$.

برای نوشتن کران $x$ و $y$ از آنجا که معادله‌ی $x^2+y^2=1$ دایره‌ای در صفحه‌ی $xoy$ را به ما می‌دهد، نیازی به برخورد دادن رویه‌های دیگر نداریم. در این دایره $-1\le x\le 1$ است و از معادله‌ی دایره به روابط $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ می‌رسیم که کران‌های $y$ هستند. در ضمن اگر تردید داریم که ترتیب کران‌های $z$ چگونه است کافیست یک نقطه از درون این دایره مثلاً نقطه‌ی $(x,y)=(0,0)$ را در آن‌ها قرار دهیم:

$$\begin{cases} z=1 \\ z=2-y=2 \end{cases}$$

می‌بینیم که $2-y>1$ است. پس $z=1$ کران پایین و $z=2-y$ کران بالاست.

$$\iiint_D f(x,y,z)dzdydx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{2-y} f(x,y,z)dzdydx$$

**ب)** برای نوشتن کران‌ها در $\frac{1}{8}$ اول، کافیست در حالت (الف) به کران‌های پایین دقت کنیم و اگر منفی هستند، به جای آن‌ها صفر را قرار دهیم:

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_1^{2-y} f(x,y,z)dzdydx$$

اگر جواب‌های به‌دست آمده در حالات (الف) و (ب) را مقایسه کنید، می‌بینید که کران‌های $z$ تغییری نکرده‌اند. زیرا مثبت هستند، اما کران‌های $x$ و $y$ به جای مقادیر منفی از $x=0$ و $y=0$ آغاز شده‌اند.

**مثال ۲۱۰:** **مقدار انتگرال $\iiint_R xdv$ که در آن $R$ منشور واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $y=5$ و $x+z=2$ می‌باشد، کدام است؟**

(علوم دریایی و اقیانوسی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3}{20}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{20}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به آن‌که $R$ در $\frac{1}{8}$ اول واقع است شرایط $x\ge0$ و $y\ge0$ و $z\ge0$ را داریم. هم‌چنین از برخورد صفحه $x+z=2$ با صفحه $z=0$ خط $x=2$ را خواهیم داشت. با توجه به آن‌که $y=5$ نیز یکی از مرزهای داده شده است داریم: $0\le x\le 2$ و $0\le y\le 5$. کران‌های $z$ نیز عبارتند از $z=0$ و $z=2-x$.

$$I=\iiint_R xdv=\int_0^2\int_0^5\int_0^{2-x} xdzdydx=\int_0^2\int_0^5 xz\Big|_0^{2-x}dydx=\int_0^2\int_0^5 x(2-x)dydx$$

$$=\int_0^2 x(2-x)y\Big|_0^5dx=\int_0^2 5x(2-x)dx=\int_0^2(10x-5x^2)dx=(5x^2-\frac{5}{3}x^3)\Big|_0^2=\frac{20}{3}$$

**مثال ۲۱۱:** **مقدار $\iiint_D (x^2+y^2)dV$ را بیابید که در آن $D$ ناحیه محدود به $\frac{1}{8}$ اول و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و استوانه $r=\sin\theta$ می‌باشد.**

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{6}{75}$ ۲) $\frac{7}{75}$ ۳) $\frac{9}{75}$ ۴) $\frac{8}{75}$

## درسنامه۵: تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

همانند انتگرال دوگانه، در حل انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیه، ممکن است نوشتن کران‌ها یا حل انتگرال در دستگاه مختصات دکارتی مشکل یا نـاممکن باشد. در این درسنامه خواهید دید که گاهی اوقات می‌توانیم با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب کاری کنیم که نوشتن کران‌ها و حل انتگرال ساده‌تر شود.
فرض کنید در تابع زیر انتگرال یا در معادله‌ی رویه‌های داده شده، برخی از عبارات تکرار شده باشند، با نامگذاری آن‌ها به‌صورت $u$، $v$ و $w$ تلاش مـی‌کنـیم عبـارت زیـر انتگـرال و معادلـه‌ی مرزهـای $D$ برحسـب ایـن متغیرهـای جدیـد، سـاده‌تـر از قبـل شـوند. مـثلاً اگـر ناحیـه‌ی داده شـده درونِ رویـه‌ی $(x+y+z)^۲+(x-۲y+z)^۲+(z-x)^۲=۱$ باشـد، بـا انتخـاب $u=x+y+z$، $v=x-۲y+z$ و $w=z-x$ معادلـه‌ی ایـن رویـه بـه‌صـورت $u^۲+v^۲+w^۲=۱$ تبدیل می‌شود که معادله‌ی کره‌ی واحد در دستگاه $(u,v,w)$ است.
برای انجام تغییر متغیر، رعایت ترتیب در انجام کارها بسیار اهمیت دارد. این کار را می‌توان در چهار گام به‌صورت زیر انجام داد:
**گام اول:** با توجه به معادله‌ی رویه‌های داده شده، یا با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x,y,z)$ متغیرهای جدید $u$، $v$ و $w$ را انتخاب می‌کنیم. مثلاً اگر ناحیـه‌ی انتگرال‌گیری به رویه‌ی $(x+y)^۲=(y-z)^۲+(z+x)^۲$ محدود شده باشد، انتخاب $u=z+x$، $v=y-z$ و $w=x+y$ مناسب است.
**گام دوم:** حالا که ضابطه‌ی $u$، $v$ و $w$ را برحسب متغیرهای $x$، $y$ و $z$ داریم می‌توانیم مشتق‌های جزئی آن‌ها را محاسبه کرده و ژاکوبین دستگاه جدیـد را به‌دست آوریم. نمادهای $J_{uvw}$ و $J_{xyz}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J_{uvw}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix} \quad , \quad J_{xyz}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$

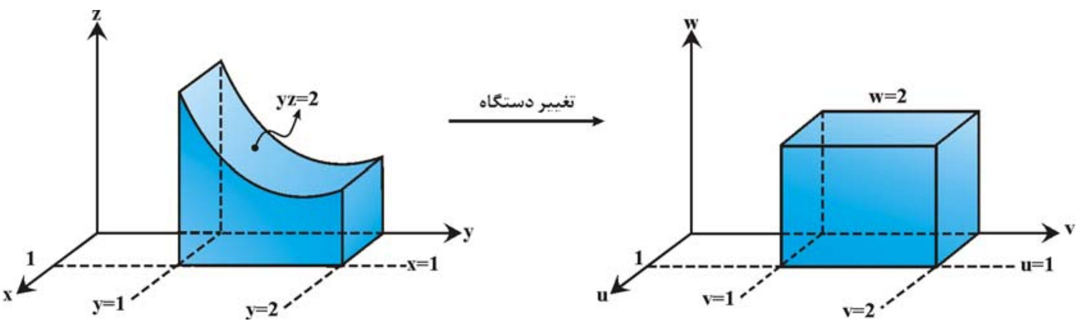
البته در عمل محاسبه‌ی $J_{xyz}$ ساده‌تر است. زیرا معمولاً ما ضابطه‌ی $u$ و $v$ و $w$ را برحسـب متغیرهـای $x$، $y$ و $z$ داریـم. بنـابراین ابتـدا $J_{xyz}$ را بـه‌دست می‌آوریم و سپس با معکـوس کـردن آن $J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}$ مشـخص مـی‌شـود. در هـر صـورت وقتـی از دسـتگاه مختصـات دکـارتی $(x,y,z)$ بـه دستگاه جدید $(u,v,w)$ می‌رویم، جایگذاری زیر لازم است:

$$\boxed{dzdydx=|J_{uvw}|dwdvdu=\left|\frac{۱}{J_{xyz}}\right|dwdvdu}$$

**گام سوم:** به معادله‌ی رویه‌های داده شده در دستگاه $(x,y,z)$ توجه کنید. باید آن‌ها را به معـادلاتی برحسـب $u$، $v$ و $w$ تـبدیل کنیـد. در ایـن مرحلـه، مرزهای قدیمی به مرزهای جدید در دستگاه $(u,v,w)$ تبدیل می‌شوند. اگر توانستیم، ناحیه‌ی $D$ را در دستگاه جدید رسم می‌کنیم اما ایـن کـار ضـروری نیست. در این مرحله کران‌های بالا و پایین انتگرال نیز مشخص می‌شوند.
**گام چهارم:** قدرمطلق ژاکوبین را در تابع $f(x,y,z)$ ضرب می‌کنیم. حالا این تابع را برحسب متغیرهای جدید $u$، $v$ و $w$ می‌نویسیم. تنها کاری کـه بـاقی می‌ماند، حل انتگرال است.

**مثـال۲۲۵:** ناحیــه‌ی $D$ در فضــای $(x,y,z)$ بــه وســیله‌ی نامعــادلاتِ $۰\le x\le ۱$، $۱\le y\le ۲$ و $۰\le yz\le ۲$ مشــخص شــده اســت، حاصــل انتگــرال $\iiint_D xzy^۳e^{y^۲}dydxdz$ روی این ناحیه را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ: گام اول:** به نامعادلات داده شده برای مشخص‌کردن ناحیه‌ی $D$ توجه کنید. اگر فـرض کنـیم $u=x$، $v=y$ و $w=yz$ آن‌گـاه ناحیـه‌ی $D$ در دستگاه $(u,v,w)$ با نامعادلات $۰\le u\le ۱$، $۱\le v\le ۲$ و $۰\le w\le ۲$ مشخص می‌شود، یعنی به یک مکعب مستطیل تبدیل می‌شود.




**گام دوم:** حالا باید ژاکوبین دستگاه جدید را محاسبه کنیم. ابتدا $J_{xyz}$ را به‌دست می‌آوریم و سپس آن را وارونه می‌کنیم.

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & z & y\end{vmatrix}=y \quad \Rightarrow \quad J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}=\frac{۱}{y}$$

**گام سوم:** در این مثال کران‌های $u$، $v$ و $w$ به سادگی مشخص می‌شوند. ناحیه‌ی انتگرال‌گیری با نامعادلات $0 \le x \le 1$، $1 \le y \le 2$ و $0 \le yz \le 2$ داده شده است. با توجه به انتخاب $u = x$، $v = y$ و $w = yz$ واضح است که کران‌های $u$، $v$ و $w$ به‌صورت $0 \le u \le 1$، $1 \le v \le 2$ و $0 \le w \le 2$ هستند.

**گام چهارم:** می‌خواهیم قدرمطلق ژاکوبین را در تابع زیر انتگرال ضرب کنیم. دیدیم که $|J_{uvw}| = |\frac{1}{y}|$ است. در ناحیه‌ی D مقدار y مثبت است پس $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{y}$ خواهد بود. پس از ضرب‌کردن قدرمطلق ژاکوبین در تابع زیر انتگرال، آن را برحسب متغیرهای جدید $(u, v, w)$ می‌نویسیم:

$$f(x, y, z)dzdydx = xzy^3e^{y^2}\,dzdydx = xzy^3e^{y^2} \times \frac{1}{y} \times dwdvdu = xzy^2e^{y^2}\,dwdvdu$$

حالا با توجه به آن که $u = x$، $v = y$ و $w = yz$ است داریم:

$$f(x, y, z)dzdydx = (wuve^{v^2})dwdvdu$$

بنابراین تابع زیر انتگرال هم با این تغییر متغیر کمی ساده‌تر شده است. فقط می‌ماند حلِ انتگرال در دستگاه جدید:

$$I = \int_0^1\int_1^2\int_0^2 (wuve^{v^2})dwdvdu = \int_0^1\int_1^2 uve^{v^2}\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^2 dvdu = \int_0^1\int_1^2 (2uve^{v^2})\,dvdu = \int_0^1 u\left[e^{v^2}\right]_1^2 du$$

$$I = \int_0^1 (e^4 - e)u\,du = (e^4 - e)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^4 - e)$$

در پایان به این موضوع توجه کنیم که انجام این تغییر متغیر چه ضرورتی داشت؟ اگر بخواهیم این انتگرال را در همان دستگاه دکارتی حل کنیم، در اولین گام باید انتگرال $\int xzy^3e^{y^2}dy$ را حل می‌کردیم که انتگرال مشکلی بود. اما با انجام تغییر متغیر، هم انتگرال‌گیری‌ها ساده‌تر شد و هم حدود انتگرال به اعداد ثابتی تبدیل شدند.

---

**مثال ۲۲۶: حاصلِ انتگرال سه‌گانه‌ی $I = \int_0^3\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} [4(\frac{2x-y}{2})^3 - 3(\frac{2x-y}{2})^2]e^{(\frac{z}{3})^2}\,dxdydz$ کدام است؟**

۱) $0$     ۲) $\frac{e}{6}$     ۳) $\frac{e}{12}$     ۴) $\frac{1}{6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در تابع انتگرالده عبارت‌های $\frac{2x-y}{2}$ و $\frac{z}{3}$ به کار رفته‌اند. در کران‌های انتگرال نیز عبارت $\frac{y}{2}$ تکرار شده است. بنابراین به نظر می‌رسد با تغییر متغیر $u = \frac{2x-y}{2} = x - \frac{y}{2}$، $v = \frac{y}{2}$ و $w = \frac{z}{3}$ به انتگرال ساده‌تری خواهیم رسید. ژاکوبین دستگاه جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$J_{xyz} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \Rightarrow J_{uvw} = \frac{1}{J_{xyz}} = 6$$

بنابراین عبارت زیر انتگرال در ۶ ضرب خواهد شد. برای تشخیص حدود انتگرال در دستگاه جدید باید به کران‌های فعلیِ آن دقت کنیم. هر کدام از کران‌های انتگرال در دستگاه $(x, y, z)$ را به یکی از کران‌ها در دستگاه $(u, v, w)$ تبدیل می‌کنیم:

| مرزهای جدید | ارتباط بین متغیرهای جدید و قدیم | مرزهای قدیمی |
|---|---|---|
| $w = 0$ | $w = \frac{z}{3}$ | $z = 0$ |
| $w = 1$ | $w = \frac{z}{3}$ | $z = 3$ |
| $v = 0$ | $v = \frac{y}{2}$ | $y = 0$ |
| $v = 2$ | $v = \frac{y}{2}$ | $y = 4$ |
| $u = 0$ | $u = x - \frac{y}{2}$ | $x = \frac{y}{2}$ |
| $u = 1$ | $u = x - \frac{y}{2}$ | $x = 1 + \frac{y}{2}$ |

پس حدود انتگرال در این دستگاه به‌صورت $0\le u\le 1$ ، $0\le v\le 2$ و $0\le w\le 1$ هستند. اکنون تـابع زیـر انتگـرال را در قـدرمطلق ژاکـوبین ضـرب کـرده و برحسب متغیرهای جدید می‌نویسیم:

$$I=\iiint_D[4u^3-3u^2]e^{w^2}(6)dudvdw=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 6[4u^3-3u^2]e^{w^2}dudvdw$$

همه‌ی کران‌ها اعداد ثابت هستند و تابع زیر انتگرال هم حاصل‌ضرب توابع یک متغیره است، پس می‌توانیم انتگرال سه‌گانه را به حاصـل‌ضـرب سـه انتگـرال یگانه تبدیل کنیم:

$$I=6\left(\int_0^1 dv\right)\left(\int_0^2 e^{w^2}dw\right)\left(\int_0^1(4u^3-3u^2)du\right)$$

مقدار آخرین انتگرال صفر است: $\int_0^1(4u^3-3u^2)du=[u^4-u^3]_0^1=0$ . بنابراین نیازی به محاسبه‌ی دو انتگرال اول نیست (هـر چنـد انتگـرال دوم قابل محاسبه هم نیست!) پس: $I=0$ .

**مثال ۲۲۷:** اگر $T$ ناحیه‌ی محدود به صفحات $\begin{cases}x+y+z=\pm 2\\ x-y+z=\pm 3\\ x+y-z=\pm 1\end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\iiint_T yzdv$ ، کدام است؟

۱) ۴    ۲) ۸    ۳) ۱۶    ۴) ۳۲

**پاسخ:** گزینه «۱» با معرفی $u=x+y+z$ و $v=x-y+z$ و $w=x+y-z$ داریم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{ساروس}}(1+1+1+1+1-1)=4\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{J_{xyz}}=\frac{1}{4}$$

با توجه به‌صورت سؤال در دستگاه جدید $u=\pm 2$ و $v=\pm 3$ و $w=\pm 1$ معادلات مرزهای انتگرال هستند. در ضمن $y=\frac{u-v}{2}$ و $z=\frac{u-w}{2}$ پس داریم:

$$I=\iiint_T yz\,dzdydx=\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{u-v}{2}\right)\left(\frac{u-w}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)dwdudv=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(u^2-uw-vu+vw)\,dwdudv$$

با توجه به متقارن بودن بازه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به $w$ ، جملاتی که نسبت به $w$ فرد هستند، انتگرالشان صفر می‌شود، بـه عبـارتی $\int_{-1}^{1}(-uw+vw)\,dw=0$ پس خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(u^2-vu)\,dwdudv=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}2(u^2-vu)\,dudv$$

در اینجا هم $\int_{-2}^{2}vudu=0$ است زیرا $vu$ نسبت به $u$ فرد است. پس داریم:

$$I=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}2u^2\,dudv=\frac{1}{8}\int_{-3}^{3}\frac{16}{3}dv=\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{16}{3}\right)(6)=\frac{12}{3}=4$$

**مثال ۲۲۸:** اگر D ناحیه‌ای از فضای xyz باشد، که به شکل $1\le x\le 2$ ، $0\le x^2y\le 2$ ، $0\le z\le 1$ تعریف شده است؛ و $I=\iiint_D(x^4y+3x^6y^2z)dxdydz$ باشد، آنگاه با تغییر متغیر $u=x^2$ و $v=x^2y$ و $w=3z$ مقدار I در دستگاه uvw کدام است؟ (ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $I=\frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_1^4(v+3v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$

۲) $I=\frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_1^4(v+v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$

۳) $I=6\int_0^3\int_0^2\int_1^4(u+v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$

۴) $I=6\int_0^3\int_0^2\int_1^4(v+3v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$

**پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا ژاکوبین را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x&0&0\\2xy&x^2&0\\0&0&3\end{vmatrix}\Rightarrow\frac{1}{J}=2x\times x^2\times 3=6x^3\Rightarrow J=\frac{1}{6x^3}\Rightarrow J=\frac{1}{6u\sqrt{u}}\Rightarrow dxdydz=\frac{dudvdw}{6u\sqrt{u}}$$

با جایگذاری تغییر متغیرهای در نظر گرفته شده در تابع زیر انتگرال داریم:

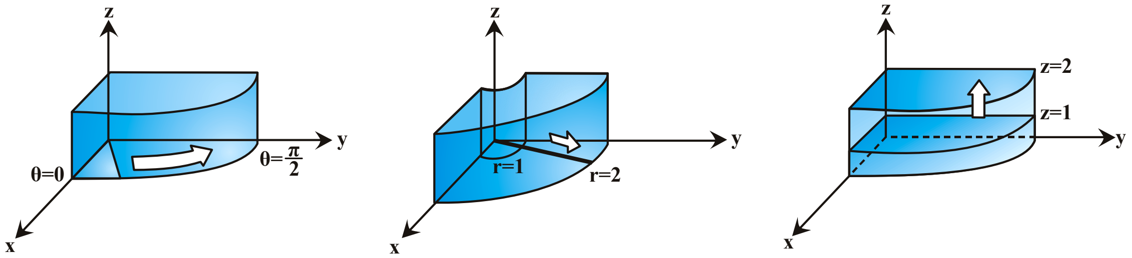
$$I=\int_0^3\int_0^2\int_1^4(u\times v+u\times v^2\times w)\frac{dudvdw}{6u\sqrt{u}}\Rightarrow I=\frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_1^4(v+v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$$

## دستگاه مختصات استوانه‌ای

اگر تصویر D بر صفحه xoy قطاعی از دایره یا بین دو دایره باشد، می‌توانیم به جای کران‌های x و y حدود r و $\theta$ را در این ناحیه بنویسیم. به عبارتی به جای مؤلفه‌های $(x,y,z)$ از مؤلفه‌های $(r,\theta,z)$ استفاده کنیم. رابطه‌ی متغیرهای r و $\theta$ با متغیرهای x و y همان است که در مختصات قطبی مطالعه کردیم. بنابراین داریم: $r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$ و همان‌طور که در دستگاه قطبی برای انتگرال دوگانه دیدید ژاکوبین دستگاه $(r,\theta,z)$ برابر با $J_{r\theta z}=r$ است.

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dzdydx=\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,dzdrd\theta}$$

در شکل‌های زیر نحوه‌ی حرکت در امتداد متغیرهای دستگاه استوانه‌ای را مشاهده می‌کنید. در صفحه‌ی xoy در جهت مثلثاتی با چرخش حول مبدأ مقدار $\theta$ افزایش می‌یابد و با دور شدن از مبدأ مقدار r افزوده می‌شود. حرکت در امتداد محور zها از پایین به بالا باعث افزایش مقدار z می‌شود.



چرخش در جهت افزایش $\theta$ — حرکت شعاعی در امتداد r — حرکت عمودی در راستای z

البته مهم‌ترین مسأله در اینجا، چگونگی تشخیص استفاده از این دستگاه است. همان‌طور که در ابتدای متن گفته شد، اگر تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه xoy بخشی از یک دایره یا بین دو دایره باشد، استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب است. همچنین وجود عبارت $x^2+y^2$ در تابع زیر انتگرال، می‌تواند یک نشانه برای به کار بستن دستگاه استوانه‌ای باشد.

**تذکر ۱۲:** هرگاه ناحیه‌ی D، محدود به رویه‌های زیر باشد، معمولاً استفاده از دستگاه استوانه‌ای توصیه می‌شود.

الف ـ استوانه و کره    ب ـ استوانه و صفحه    ج ـ مخروط و صفحه    د ـ کره و صفحه

**تذکر ۱۳:** هرگاه ناحیه‌ی D از برخورد یک استوانه‌ی قائم و یک استوانه افقی به‌دست آمده باشد، با این که تصویر آن بر صفحه‌ی xoy دایره است، ممکن است نوشتن کران‌ها و حل انتگرال در همان دستگاه دکارتی ساده‌تر از استوانه‌ای باشد. برای مثال اگر ناحیه‌ی D درون استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ قرار داشته باشد، حل انتگرال در دستگاه دکارتی ساده‌تر از استوانه‌ای است. بهتر است مراقب این حالتِ خاص باشید!

اما اگر مثلاً ناحیه‌ی D درون استوانه‌ی $x^2+y^2=۲$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=۴$ قرار داشته باشد، بهتر است از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم.

**تذکر ۱۴:** دستگاه استوانه‌ای برای انتگرال‌های سه‌گانه و دستگاه قطبی برای انتگرال‌های دوگانه به کار گرفته می‌شوند. این دو دستگاه شباهت زیادی به هم دارند. ژاکوبین هر دوی آن‌ها r است و هر دوی آن‌ها را وقتی استفاده می‌کنیم که ناحیه‌ی مورد نظر در صفحه‌ی xoy دایره یا بخشی از دایره باشد. تفاوت آن‌ها در این است که در دستگاه قطبی فقط متغیرهای $(r,\theta)$ را داریم اما در دستگاه استوانه‌ای علاوه بر r و $\theta$، متغیر z نیز حضور دارد.

$$(x,y,z)\xrightarrow{\text{دستگاه استوانه‌ای}}(r,\theta,z) \qquad (x,y)\xrightarrow{\text{دستگاه قطبی}}(r,\theta)$$

## تعیین حدود انتگرال‌ها در دستگاه استوانه‌ای

در دستگاه استوانه‌ای معمولاً ترتیب متغیرها را به‌صورت $\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdzdrd\theta$ نوشته و انتگرال را حل می‌کنیم، زیرا نوشتن کران‌ها با این ترتیب ساده‌تر است. برای تعیین حدود $\theta$، r و z در دستگاه استوانه‌ای روندی مشابه با دستگاه دکارتی را در پیش می‌گیریم.

ابتدا به رویه‌ها و محدودیت‌های داده شده، توجه کنید. اگر یکی از آن‌ها برحسب x و y باشد و بتواند تصویر D بر صفحه xoy را مشخص کند، از روی همین ناحیه کران‌های r و $\theta$ را تعیین می‌کنیم. برای مثال اگر یکی از رویه‌ها، استوانه‌ی $x^2+y^2=a^2$ باشد، تصویر آن بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است و کران‌های r و $\theta$ را با توجه به ناحیه‌ی درون این دایره می‌نویسیم.

اما اگر همه‌ی رویه‌های داده شده، دارای متغیر z باشند، ناچاریم با برخورد دادن آن‌ها و حذف z از معادلات، رابطه‌ای برحسب x و y پیدا کرده و کران‌های r و $\theta$ را با توجه به آن معادله تعیین کنیم. برای مثال وقتی ناحیه‌ی D به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=b$ محدود شده باشد، با برخورد دادن رویه‌ها داریم $\sqrt{x^2+y^2}=b$ پس تصویر D بر صفحه xoy دایره‌ی $x^2+y^2=b^2$ است و در این دایره $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le b$ است.

پس از تعیین حدود $\theta$ و r می‌توانیم به معادله‌ی رویه‌های داده شده در مسأله دقت کنیم و از آنجا دو کران برای z به شکل $z=g_1(x,y)$ و $z=g_2(x,y)$ پیدا کنیم. البته پس از انجام این کار با جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ کران‌های z را برحسب r و $\theta$ می‌نویسیم.

مدرسان شریف

# فصل پنجم

## « انتگرال روی خط یا انتگرال روی منحنی »

### درسنامه: انتگرال روی خط یا انتگرال روی مسیر

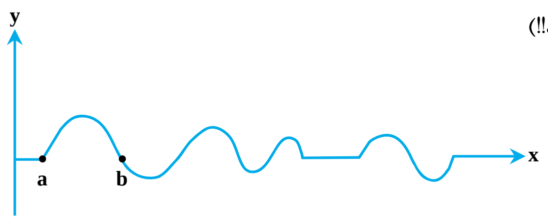
در این بخش می‌خواهیم مبحث جدیدی تحت عنوان «انتگرال روی خط» و یا به عبارت صحیح‌تر «انتگرال روی منحنی» را با هم یاد بگیریم. (نظر شخصی بنده این است که انتگرال روی منحنی صحیح‌تر است، چرا که اصولاً ما اغلب در این فصل روی منحنی انتگرال می‌گیریم تا روی خط! اما چون در کتاب‌ها بیشتر انتگرال روی خط استفاده می‌شود ما هم در این کتاب این عبارت را بیشتر به کار می‌بریم!)

هیچ تردیدی نیست اکثر دانشجویان در درک مطالب این مبحث دچار مشکل هستند، اما اگر کمی به کار دل دهید! قول می‌دهم مشکل شما را برای همیشه حل کنم! اما بِریم سراغ آموزش! بحث ما در مورد این نوع انتگرال‌ها به دو بخش اصلی ۱ـ انتگرال خطِ **توابع عددی** و ۲ـ انتگرال خطِ **توابع برداری**، دسته‌بندی می‌شوند که ابتدا انتگرال خط توابع عددی را بررسی می‌کنیم.

### ۱ـ انتگرال روی منحنی برای توابع عددی

در این حالت ما می‌خواهیم انتگرال یک «تابع عددی» مثلاً $f(x,y)=xy$ را روی یک منحنی یا خط حساب کنیم. اما قبل از ورود کامل به بحث، بهتر است ابتدا کمی با مفهوم انتگرال روی خط آشنا شویم. اگر خاطر شریفتان باشد؛ وقتی در ریاضی عمومی (۱) می‌خواستیم حاصل انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را حساب کنیم، از تابع $f(x)$ در فاصله‌ی a تا b روی محور x ها انتگرال می‌گرفتیم. خُب اگه محور x ها یک خط صاف افقی نبود! در واقع همین انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را می‌شد اسمشُ گذاشت انتگرال روی منحنی!

یعنی اگر مثلاً محور x ها به‌صورت مقابل بود، (که اینجوری واقعاً محور چقدر زشت می‌شد!!)




اونوقت می‌شد؛ انتگرال $I=\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال روی منحنی نام‌گذاری کرد!

یا به عبارت دیگر می‌توان گفت؛ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ که در ریاضی عمومی (۱) یاد گرفتیم، به نوعی انتگرال خط روی محور x ها (روی یک خط صاف و افقی) بود.

توجه کنید؛ درست است که ما در کتاب ریاضی (۲) هستیم، اما در حل اکثر سؤالات انتگرال روی منحنی، با یک انتگرال‌گیری عادی یگانه سر و کار داریم. اما تفاوت‌ها به همین‌جا ختم نمیشه، چون در این‌جا ما به جای $f(x)$ با $f(x,y,z)$ یا در حالت کمی ساده‌تر، با $f(x,y)$ سر و کار داریم.

خُب تا اینجا سعی کردم شما کمی وارد باغ شوید و نترسید و بدانید بحث خیلی هم سخت نیست. برای قدم زدن آرام در باغ! ابتدا با تابع دو متغیره $f(x,y)$ شروع می‌کنیم و آگاه باشید که اگر تابع حتی $f(x,y,z)$ هم باشه، ماجرا تفاوت چندانی نداره! از همه‌ی این‌ها که بِگذریم، شما بالاخره عشقِ فرمول هستید و ما هم اعتقاد داریم بی‌فرمول که نمیشه! پس بِریم سراغ فرمول و چند مثال آموزشی.

**فرض کنید بخواهیم از تابع $f(x,y)$ روی منحنی C با ضابطه‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b به طوری که $a\le t\le b$ می‌باشد، انتگرال بگیریم، فرمول محاسبه به شکل زیر است:**

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{x_t'^{\,2}+y_t'^{\,2}}\,dt}$$

فارسی این فرمول یعنی چی؟ یعنی این که انتگرال سمت چپُ بی‌خیال شُو، و به جای اون، انتگرال سمت راستی رو حساب کُن، می‌دونم نیاز به توضیح نیست، ولی من برای اون یه درصدی که شاید نَدونن انتگرال سمت راستی داستانِش چیه؟ باید توضیح بِدم! برای این که از انتگرال سمت چپ به انتگرال سمت راست برسیم، باید تو ضابطه‌ی $f(x,y)$، به جای تمام x ها، $x(t)$ و به جای تمام y ها، $y(t)$ قرار بِدیم و همچنین از $x(t)$ و $y(t)$ مشتق بگیریم و هر کدوم رو به توان دو برسونیم و با هم جمع کنیم و یک رادیکال هم بالا سر اونا بذاریم و در نهایت این رادیکالُ در dt ضرب کنیم و به جای ds قرار بِدیم.
توجه دارید که همه‌ی متغیرها بر حسب t نوشته شدند و دیگه خبری از متغیرهای دیگر نیست! حل چند مثال موضوع را بهتر روشن می‌کند:

**مثال ۱: حاصل انتگرال $\int_C xyds$ که در آن C منحنی پارامتری با معادله‌ی $\vec{C}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}$ می‌باشد، از نقطه‌ی $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1$ ۳) $2$ ۴) $3$

**پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی $C(t)$، واضح است؛ $x(t)=\cos t$ و $y(t)=\sin t$، بنابراین $xy=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$، از طرفی $x'(t)=-\sin t$ و $y'(t)=\cos t$ و لذا داریم:

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\sqrt{1}\,dt=1dt$$

همه چی آماده‌ی یک انتگرال‌گیری ساده و معمولی یگانه از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ شده است، بنابراین داریم:

$$\int_C xyds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2t)\times 1\times dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos(2\times\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cos(0)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$$

**مثال ۲: مقدار انتگرال $\int_C(x+y)ds$ که در آن C منحنی $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2\pi,0)$ می‌باشد، کدام است؟** (عمران ـ سراسری ۹۶)

۱) $4\pi+\frac{16}{3}$ ۲) $4\pi+\frac{32}{3}$ ۳) $8\pi+\frac{16}{3}$ ۴) $8\pi+\frac{32}{3}$

**پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا المان طول قوس را به دست می‌آوریم:

$$ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\Rightarrow ds=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1-2\cos t}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2|\sin\frac{t}{2}|$$

حالا با جایگذاری معادلات پارامتری داده شده داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}(t-\sin t+1-\cos t)(2\sin\frac{t}{2})dt=\int_0^{2\pi}[(2t\sin\frac{t}{2}-4\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}(2\cos^2\frac{t}{2}-1)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(2t\sin\frac{t}{2}-4\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2})dt=(-4t\cos\frac{t}{2}+8\sin\frac{t}{2}-\frac{8}{3}\sin^3\frac{t}{2}-8\cos\frac{t}{2}+\frac{8}{3}\cos^3\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$=[-4(2\pi)(-1)+0-0-8(-1)+\frac{8}{3}(-1)^3]-[0+0-0-8+\frac{8}{3}]=8\pi+\frac{32}{3}$$

برای حل انتگرال $\int_0^{2\pi}2t\sin\frac{t}{2}dt$ از روش جدول استفاده کرده‌ایم.

همچنین توجه داشته باشید که در بازه‌ی ۰ تا $2\pi$ عبارت $\sin\frac{t}{2}$ همواره مثبت می‌باشد و از قدرمطلق مثبت بیرون می‌آید.

| | |
|---|---|
| $2t$ | $\sin\frac{t}{2}$ |
| $2$ | $-2\cos\frac{t}{2}$ |
| $0$ | $-4\sin\frac{t}{2}$ |

**مثال ۳: حاصل انتگرال $\int_C ye^{-x}ds$ در صورتی که C منحنی مسطح $0\le t\le\sqrt{3}$ ، $\begin{cases}x=Ln(t^2+1)\\ y=2\text{arctg}(t)-t\end{cases}$ باشد کدام گزینه است؟** (آمار ـ سراسری ۸۹)

۱) $0$ ۲) $\frac{\pi^2}{9}-Ln2$ ۳) $\frac{\pi^2}{9}$ ۴) $\pi+Ln2-e^{-4}$

**پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا لازم است عنصر طول قوس یعنی ds را به‌دست آوریم:

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{(\frac{2t}{t^2+1})^2+(\frac{2}{1+t^2}-1)^2}\,dt=\sqrt{\frac{4t^2+1+t^4-2t^2}{(t^2+1)^2}}\,dt=\sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2}}\,dt=dt$$

بنابراین انتگرال موردنظر برابر است با:

$$I=\int_C ye^{-x}ds=\int_0^{\sqrt{3}}(2\text{Arctg}\,t-t)\underbrace{e^{-Ln(t^2+1)}}_{\frac{1}{t^2+1}}dt=\int_0^{\sqrt{3}}(\frac{2\text{Arctg}\,t}{t^2+1}-\frac{t}{t^2+1})dt=((\text{Arctg}\,t)^2-\frac{1}{2}Ln(t^2+1))\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi^2}{9}-Ln2$$

در قسمت اول حل انتگرال، Arctgt را u فرض کردیم که مشتق آن برابر $\frac{1}{1+t^2}$ می‌باشد. ضمناً از خاصیت $e^{-Lnb}=\frac{1}{b}$ هم در حل کمک گرفتیم.

## پارامتری کردن منحنی‌ها

کلید حل سؤالات انتگرال‌های منحنی‌الخط، پیدا کردن ضابطه‌ی منحنی پارامتری C و از آن مهم‌تر تعیین حدود تغییرات t باشد (البته در بعضی از سؤالات، منحنی C به وضوح داده می‌شود) به همین دلیل قبل از ادامه‌ی بحث، با هم چند تمرین در این خصوص انجام می‌دهیم.

**۱) C قسمتی از منحنی $y=x^3$، از نقطه‌ی $A(1,1)$ تا نقطه‌ی $B(2,8)$ است.**

راحت‌ترین و شاید بهترین نوع پارامتری کردن منحنی‌هایی به شکل کلی $y=f(x)$، در نظر گرفتن $x=t$ و در نتیجه $y=f(t)$ می‌باشد، یعنی $x=t$ و بنابراین $y=t^3$ و لذا منحنی پارامتری C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t)=t\vec{i}+t^3\vec{j}$$

و چون $1\le x\le 2$، لذا حدود تغییرات t نیز به‌صورت $1\le t\le 2$ می‌باشد.

**۲) C منحنی $\begin{cases}y=x^2\\ z=x^3\end{cases}$ از نقطه‌ی $x=1$ تا $x=2$ می‌باشد.**

با فرض $x=t$، آن‌گاه $y=t^2$ و $z=t^3$ و لذا $C(t)$ به‌صورت $\vec{C}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$، می‌باشد و چون $1\le x\le 2$، لذا حدود تغییرات t نیز به‌صورت $1\le t\le 2$ است.

**۳) C پاره‌خطی است که نقطه‌ی $A(\pi^2,0)$ را به نقطه‌ی $B(\pi^2,\frac{\pi}{2})$ می‌رساند.**

چون طول دو نقطه ثابت و فقط عرض آن‌ها تغییر می‌کند، با فرض این که $x=\pi^2$، آن‌گاه $y=t$ است و لذا معادله پارامتری C به‌صورت $\vec{C}(t)=\pi^2\vec{i}+t\vec{j}$ می‌باشد و چون $0\le y\le\frac{\pi}{2}$ و داریم $y=t$، لذا $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

روش دیگر برای پارامتری کردن پاره‌خط AB، استفاده از فرمول کلی $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ است. با جایگذاری مختصات نقاط A و B در این فرمول به رابطه‌ی $\vec{C}(t)=(x(t),y(t))$ می‌رسیم که منظور همان معادله‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ است. در این روش همواره $0\le t\le 1$ خواهد بود.

در این مثال با جایگذاری $A(\pi^2,0)$ و $B(\pi^2,\frac{\pi}{2})$ خواهیم داشت: $\vec{C}(t)=A+(B-A)t=(\pi^2,0)+(0,\frac{\pi}{2})t=(\pi^2,\frac{\pi}{2}t)=\pi^2\vec{i}+\frac{\pi}{2}t\vec{j}\ ,\ 0\le t\le 1$

توجه داشته باشید که در این روش کلی، همواره $0\le t\le 1$ است اما در روش اول با توجه به تغییرات y حدود t را مشخص کردیم.

**۴) C پاره‌خطی است که نقطه‌ی $A(0,1,-1)$ را به نقطه‌ی $B(1,2,1)$ وصل می‌کند.**

ابتدا از روش کلی پارامتری کردن پاره‌خط‌ها استفاده می‌کنیم. در این روش می‌نویسیم $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ و حدود t همواره به‌صورت $0\le t\le 1$ هستند. پس داریم:

$$\vec{C}(t)=(0,1,-1)+(1-0,2-1,1+1)t=(t,1+t,-1+2t)=t\vec{i}+(1+t)\vec{j}+(-1+2t)\vec{k}\ ;\ 0\le t\le 1$$

یک راه دیگر آن است که ابتدا معادله‌ی خط AB را بنویسیم و سپس آن را پارامتری کنیم:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Rightarrow\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z+1}{1-(-1)}\Rightarrow x=y-1=\frac{z+1}{2}$$

با فرض $x=t$، آن‌گاه $y=t+1$ و $z=2t-1$ و لذا معادله‌ی پارامتری C به شکل زیر است، دقت کنید چون $0\le x\le 1$، و $x=t$ لذا $0\le t\le 1$ می‌باشد.

$$\vec{C}(t)=t\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(2t-1)\vec{k}\ \ ,\ \ 0\le t\le 1$$

در این مثال خاص، تغییرات t از هر دو روش به‌صورت $0\le t\le 1$ به‌دست آمد. این موضوع کاملاً تصادفی است. همان‌طور که گفتیم؛ در روش استفاده از فرمول $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ همیشه $0\le t\le 1$ است، اما در سایر روش‌ها، حدود t با توجه به محدوده‌ی تغییر متغیرها مشخص می‌شود.

**۵) C قسمتی از منحنی $y=1-|1-x|$ است که نقطه‌ی $(0,0)$ را به نقطه‌ی $(2,0)$ وصل می‌کند.**

با توجه به وجود قدرمطلق، باید مسیر را به دو بخش تقسیم کنیم:

$$y=\begin{cases}x & ;\ 0\le x\le 1\\ -x+2 & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}\xrightarrow{x=t}\begin{cases}y=t & ;\ 0\le t\le 1\\ y=-t+2 & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}\xrightarrow{\vec{C}(t)=\vec{C}_1(t)+\vec{C}_2(t)}\begin{cases}\vec{C}_1(t)=t\vec{i}+t\vec{j} & ;\ 0\le t\le 1\\ \vec{C}_2(t)=t\vec{i}+(-t+2)\vec{j} & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

**۶) C منحنی $x^2+y^2=1$ است.**

یکی از منحنی‌های پارامتری $x^2+y^2=1$ به‌صورت $x(t)=\cos t$ و $y(t)=\sin t$ است، چون می‌توان نوشت: $\cos^2 t+\sin^2 t=1$، اما حدود تغییرات t، به‌صورت $0\le t\le 2\pi$ است. یادتان باشد به طور کلی دایره $x^2+y^2=r^2$ را می‌توان به‌صورت $\vec{C}(t)=(r\cos t)\vec{i}+(r\sin t)\vec{j}$ پارامتری کرد.

**۷) C بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد که مرکز بیضی، مبدأ مختصات است.**

برای این بیضی فرض می‌کنیم؛ $\frac{x}{a}=\cos t$ و به عبارت دیگر $x(t)=a\cos t$، همچنین $\frac{y}{b}=\sin t$ و به عبارت دیگر $y(t)=b\sin t$ و لذا معادله‌ی پارامتری C به شکل $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$ می‌باشد، حدود تغییرات t نیز برای بیضی $0\le t\le 2\pi$ است. یادتان باشد به طور کلی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$ را می‌توان به‌صورت $\vec{C}(t)=(ra\cos t)\vec{i}+(rb\sin t)\vec{j}$ پارامتری کرد.

**۸) C منحنی تقاطع مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=2$ است.**

واضح است باید به جای z، عدد ۲ را قرار دهیم و بنابراین $\sqrt{x^2+y^2}=2$ و به عبارت دیگر $x^2+y^2=4$ و می‌دانیم معادله‌ی پارامتری این دایره به‌صورت $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$ می‌باشد و بنابراین معادله‌ی C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+2\vec{k}$$

و با توجه به تغییرات $\cos t$ و $\sin t$، در بازه صفر تا $2\pi$، لذا $0\le t\le 2\pi$ خواهد بود.

**۹) C محل برخورد صفحه $y=x$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول صفحه است.**

$y=x$ را در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم و به معادله‌ی مقابل می‌رسیم: $x^2+x^2+z^2=4 \Rightarrow 2x^2+z^2=4$

به نظر شما به جای x و z چی قرار دهیم که حاصل $\underline{4}$ شود، راهنمایی می‌کنم؛ حتماً باید دو عبارت بر حسب سینوس و کسینوس باشند، برای جلوگیری از اتلاف وقت به نظر می‌رسد باید خودم جواب دهم! فرض کنید؛ $x=\sqrt{2}\cos t$ و $z=2\sin t$، چون به شکل زیر تساوی برقرار می‌شود:

$$2(\sqrt{2}\cos t)^2+(2\sin t)^2=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4\quad,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

چون در یک هشتم اول صفحه است لذا $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته می‌شود.

**۱۰) C منحنی فصل مشترک کره $x^2+y^2+z^2=3$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $x^2+y^2=2z$ است.**

با تلاقی دادن دو منحنی داریم:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x^2+y^2=2z\end{cases}\Rightarrow z^2+2z=3\Rightarrow z^2+2z-3=0\Rightarrow (z+3)(z-1)=0\Rightarrow z=1\ ,\ z=-3$$

اما $z=-3$ قابل قبول نیست، چون معادله‌ی سهمی به‌صورت $x^2+y^2=2z$ است و چگونه ممکن است $x^2+y^2$ برابر با عددی منفی $(2z=2(-3)=-6)$ شود!؟ بنابراین فقط $z=1$ مورد قبول است و به ازای آن معادله‌ی $x^2+y^2=2$ را داریم و این یعنی یک دایره داریم که معادله‌ی پارامتری آن با فرض $x=\sqrt{2}\cos t$ و $y=\sqrt{2}\sin t$ به‌صورت مقابل است: $\vec{C}(t)=(\sqrt{2}\cos t)\vec{i}+(\sqrt{2}\sin t)\vec{j}+1\vec{k}$

و حدود تغییرات t نیز از ۰ تا $2\pi$ است (چون دایره‌ای به مرکز مبدأ داریم).

## روش حل انتگرال روی منحنی (یا انتگرال روی خط)

با توجه به توضیحات داده شده می‌توان مراحل حل انتگرال روی خط را برای تابع $f(x,y,z)$ به شکل زیر دسته‌بندی نمود:

۱) اگر منحنی C به وضوح داده نشده باشد، ابتدا منحنی C را بر حسب t پارامتری می‌کنیم و با توجه به حدود داده شده برای متغیرهای x، y یا z حدود t را برای انتگرال جدید تعیین می‌کنیم.

۲) پس از تعیین ضابطه‌ی C بر حسب t، درضابطه‌ی $f(x,y,z)$، تمام متغیرها را بر حسب t می‌نویسیم، در این جایگذاری با توجه به ضابطه‌ی $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ به جای تمام x ها $x(t)$، به جای تمام y ها $y(t)$ و به جای تمام z ها $z(t)$ قرار می‌دهیم.

۳) مرحله‌ی بعدی نوشتن ds بر حسب t می‌باشد که همواره از ضابطه‌ی $ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt$ تعیین می‌شود.

۴) در این مرحله یک انتگرال معین معمولی برحسب یک متغیر t داریم که به راحتی با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$$

**مثال ۴:** حاصل $\int_C x^۲ds$ ، در امتداد فصل مشترک دو صفحه $x-y+z=۰$ و $x+y+۲z=۰$ ، از مبدأ تا نقطه‌ی $(۳,۱,-۲)$ کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۹\sqrt{۱۴}$ ۴) $۳\sqrt{۱۴}$

**پاسخ:** گزینه «۴» فصل مشترک دو صفحه با تلاقی دادن دو صفحه $x-y+z=۰$ و $x+y+۲z=۰$ ، حاصل می‌شود که یک خط به معادله‌ی $۲x+۳z=۰$ است، با فرض $x=t$ ، آن‌گاه $z=-\frac{۲}{۳}t$ و لذا $y=\frac{۱}{۳}t$ و بنابراین معادله‌ی پارامتری C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t)=(t)\vec{i}+(\frac{۱}{۳}t)\vec{j}+(-\frac{۲}{۳}t)\vec{k}\Rightarrow|\vec{C}'(t)|=\sqrt{۱+(\frac{۱}{۳})^۲+(\frac{-۲}{۳})^۲}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}\Rightarrow ds=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}dt$$

بنابراین داریم:

$$\int_C x^۲ds=\int_۰^۳ t^۲(\frac{\sqrt{۱۴}}{۳})dt=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}[\frac{t^۳}{۳}]_۰^۳=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}(\frac{۲۷}{۳})=۳\sqrt{۱۴}$$

**مثال ۵:** حاصل $\int_C(x+y+z)ds$ که در آن C محل برخورد صفحه $y=x$ و کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ در یک هشتم اول با جهت از نقطه $(\sqrt{۲},\sqrt{۲},۰)$ به $(۰,۰,۲)$ می‌باشد کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $۴+۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}+۲$

**پاسخ:** گزینه «۱» خم C را به‌صورت مقابل پارامتری می‌کنیم:

$$x=\sqrt{۲}\cos t\ ,\ y=\sqrt{۲}\cos t\ ,\ z=۲\sin t\quad ,\quad ۰\le t\le\frac{\pi}{۲}$$

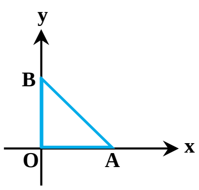
$$ds=\sqrt{x_t'^۲+y_t'^۲+z_t'^۲}\,dt\Rightarrow ds=\sqrt{(-\sqrt{۲}\sin t)^۲+(-\sqrt{۲}\sin t)^۲+(۲\cos t)^۲}\,dt=۲dt$$

$$\Rightarrow I=\int_C(x+y+z)ds=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}۲(۲\sqrt{۲}\cos t+۲\sin t)dt=(۴\sqrt{۲}\sin t-۴\cos t)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۴\sqrt{۲}+۴$$

**مثال ۶:** حاصل انتگرال $\int_C(x+y)ds$ که در آن C دورگرد (محیط) مثلثی با رئوس $O(۰,۰)$ ، $B=(۰,۱)$ و $A(۱,۰)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}+۱$ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{۲}+\frac{۱}{۴}$

**پاسخ:** گزینه «۲» برای درک بهتر مسیر C را ترسیم می‌کنیم:




همان‌طور که مشخص است مسیر C شامل سه مسیر متفاوت OB ، BA و AO است:

$$\int_C(x+y)ds=\int_{OB}(x+y)ds+\int_{BA}(x+y)ds+\int_{AO}(x+y)ds$$

پس برای هر سه مسیر باید جداگانه معادلات پارامتری را بنویسیم.

در مسیر OB داریم، $\begin{cases}x=۰\\y=t\end{cases}$ ، بنابراین $OB=۰\vec{i}+t\vec{j}=t\vec{j}$ که $۰\le t\le ۱$ است و در مسیر BA داریم:

$$\overrightarrow{BA}=B+(A-B)t=(۰,۱)+(۱-۰,۰-۱)t=(t,۱-t)=t\vec{i}+(۱-t)\vec{j}\ ;\quad ۰\le t\le ۱$$

و بالاخره روی مسیر AO داریم $x=۱-t$ و $y=۰$ که $۰\le t\le ۱$. حالا با جایگذاری معادلات پارامتری داریم:

$$\int_C(x+y)ds=\int_۰^۱(۰+t)\sqrt{۰^۲+۱^۲}dt+\int_۰^۱(t+۱-t)\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}dt+\int_۰^۱(۱-t+۰)\sqrt{(-۱)^۲+۰^۲}dt$$

$$=[\frac{t^۲}{۲}]_۰^۱+[\sqrt{۲}t]_۰^۱+[t-\frac{t^۲}{۲}]_۰^۱=\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{۲}+۱$$

**توضیح:** در انتگرال توابع حقیقی روی مسیر C که به صورت $\int_C fds$ هستند، جهت حرکت روی منحنی C تأثیری بر جواب ندارد، به این شرط که همواره در جهت افزایش t حرکت کنید. وقتی روی یک مسیر $a\le t\le b$ است، باید کران‌ها را به صورت $\int_a^b$ بنویسید. در همین مثال، وقتی از نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی O می‌رویم، مقدار x از $x=۱$ تا $x=۰$ در حال کاهش است، اما ما نباید انتگرال‌ها را در جهت کاهش t حساب کنیم. به همین دلیل از معادله‌ی $x=۱-t$ استفاده می‌کنیم که با افزایش t از $t=۰$ تا $t=۱$ مقدار x از ۱ به ۰ می‌رسد. در واقع استفاده از فرمول کلی پارامتری کردن پاره‌خط‌ها شما را به معادله‌ی $x=۱-t$ می‌رساند: $A+(O-A)t=(۱,۰)+(۰-۱,۰-۰)t=(۱-t,۰)$

**توجه:** هرگاه از تابع $\theta = \text{Arctg}\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم، لازم است به علامت $x$ دقت کنیم تا مقدار $\theta$ را به درستی تشخیص دهیم. اگر مقدار $x$ منفی باشد، باید به زاویه‌ی به‌دست آمده، $\pi$ را اضافه کنید. برای مثال همه می‌دانیم که $\text{Arctg}(۱) = \frac{\pi}{۴}$ است. حالا فرض کنید نقاط $A(۲,۲)$ و $B(-۲,-۲)$ ابتدا و انتهای مسیر باشند. در نقطه‌ی $A$ داریم $\frac{y}{x} = \frac{۲}{۲} = ۱$، در نقطه‌ی $B$ هم $\frac{y}{x} = \frac{-۲}{-۲} = ۱$؛ پس اگر بی‌دقتی کنیم در هر دو نقطه $\theta = \text{Arctg}(۱) = \frac{\pi}{۴}$ را به‌دست می‌آوریم. اما با دقت به علامت $x$ این‌طور عمل می‌کنیم: در نقطه‌ی $A$، $x > ۰$ است پس $\theta = \text{Arctg}(\frac{۲}{۲}) = \frac{\pi}{۴}$. در نقطه‌ی $B$، $x < ۰$ است پس $\theta = \text{Arctg}(\frac{-۲}{-۲}) = \frac{\pi}{۴} + \pi = \frac{۵\pi}{۴}$.

**مثال ۸۸:** مقدار انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^۲ + y^۲}$ روی منحنی $C: x^۲ + y^۲ - x - y = ۰$ از $(۱,۰)$ تا $(۰,۱)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۱)

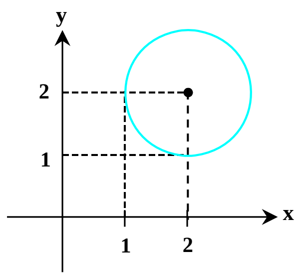
۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $۰$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به مطالب متن درس کافی است مقدار زاویه نقاط داده شده را در مختصات قطبی به‌دست آوریم. نقطه $(۱,۰)$ روی محور $x$ ها واقع است، بنابراین $\theta_۱ = ۰$، و نقطه $(۰,۱)$ روی محور $y$ ها واقع است و بنابراین $\theta_۲ = \frac{\pi}{۲}$. در نتیجه داریم: $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^۲ + y^۲} = \theta_۲ - \theta_۱ = \frac{\pi}{۲}$

**مثال ۸۹:** اگر $C$ دایره‌ای با مرکز $(۲,۲)$ و شعاع ۱ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است در این صورت مقدار $\int_C \frac{-y}{x^۲ + y^۲}dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲}dy$ کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۹۷)

۱) $-۲\pi$ ۲) $۰$ ۳) $\pi$ ۴) $۲\pi$




☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا منحنی $C$ را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم. اگر به خاطر داشته باشید برای تابع $\vec{F} = (\frac{-y}{x^۲ + y^۲}, \frac{x}{x^۲ + y^۲})$ تساوی $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ برقرار است ولی در همه‌جا پایستار نیست. برای این میدان مقدار $\oint_C \vec{F}.\vec{dr}$ روی هر منحنی بسته که مبدأ درون ناحیه‌ی محصور توسط آن خم قرار نداشته باشد برابر صفر است. با توجه به اینکه ناحیه داده شده در سؤال شامل مبدأ نمی‌شود پس طبق قضیه گرین حاصل انتگرال موردنظر صفر است.

**مثال ۹۰:** مقدار $\oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^۲ + y^۲}$، که در آن $C$ دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = a^۲$ است که یکبار در جهت مثلثاتی طی شده است، چقدر است؟

۱) $۰$ ۲) $۲\pi$ ۳) $-۲\pi$ ۴) $۴\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دایره $x^۲ + y^۲ = a^۲$ را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم: $x = a\cos t \quad , \quad y = a\sin t \quad , \quad ۰ \le t \le ۲\pi$

بنابراین داریم:

$$\oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^۲ + y^۲} = \oint_۰^{۲\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)}{a^۲\cos^۲ t + a^۲\sin^۲ t}dt = \int_۰^{۲\pi} \frac{-a^۲}{a^۲}dt = \int_۰^{۲\pi} -dt = \mathbf{-۲\pi}$$

البته سؤال بالا را می‌توان با توجه به نتایج دو تابع برداری گفته شده در نکته‌ی قبل نیز پاسخ داد، دقت کنید که انتگرال این سؤال را می‌توان به دو قسمت به شکل مقابل تفکیک کرد:

$$I = -\oint_C \frac{-y}{x^۲ + y^۲}dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲}dy + \oint_C \frac{x}{x^۲ + y^۲}dx + \frac{y}{x^۲ + y^۲}dy$$

خُب گفتیم انتگرال دوم روی هر مسیر بسته برابر با صفر است، پس فقط می‌ماند انتگرال اول، گفتیم حاصل این انتگرال وقتی در جهت مثلثاتی طی می‌شود، برابر با $۲\pi$ است، اما چون یک علامت منفی پشت آن قرار دارد، حاصل $\mathbf{-۲\pi}$ می‌شود.

**مثال ۹۱:** اگر خم C قوسی از دایره $x^۲+y^۲=۴$، از نقطه‌ی $A(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ تا $B(-۲,۰)$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار $\int_C \frac{-ydx+xdy}{x^۲+y^۲}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $۲\pi$ ۴) $۰$

**پاسخ:** گزینه «۲» نظر به این که $\mathrm{curl}\vec{F}=۰$ و $\vec{F}$ ناحیه داده شده پیوسته است، با توجه به مطالب متن کتاب، حاصل انتگرال اختلاف زاویه‌ی انتهایی و ابتدایی است، بنابراین کافیست زاویه‌ی نقاط ابتدایی و انتهایی را حساب کنیم. نقطه‌ی ابتدایی $A(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ و نقطه‌ی انتهایی $B(-۲,۰)$ است، لذا داریم:

$$\theta_{\text{ابتدایی}}=\mathrm{Arctg}(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}})=\mathrm{Arctg}۱=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \theta_{\text{انتهایی}}=\mathrm{Arctg}(\frac{۰}{-۲})=\pi \Rightarrow I=\theta_{\text{انتهایی}}-\theta_{\text{ابتدایی}}=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

---

**مثال ۹۲:** فرض کنیم $I=\oint\frac{ydx-xdy}{x^۲+y^۲}$ مقدار I روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $a>۰$ در جهت مثلثاتی کدام است؟ (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $-۲\pi$ ۲) $۲\pi$ ۳) صفر ۴) $۲\pi a$ یعنی محیط دایره

**پاسخ:** گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

**روش اول:** طبق نکات گفته شده در درس $\int\frac{xdy-ydx}{x^۲+y^۲}$ روی هر مسیر بسته شامل مبدأ برابر $۲\pi$ است، بنابراین مقدار انتگرال خواسته شده در مسأله $-۲\pi$ خواهد بود.

**روش دوم:** دایره به شعاع a را به‌صورت پارامتری $x=a\cos t$، $y=a\sin t$ می‌نویسیم که $t\in[۰,۲\pi]$. در این صورت:

$$\frac{ydx-xdy}{x^۲+y^۲}=\frac{a\sin t\times(-a\sin tdt)-a\cos t\times(a\cos tdt)}{a^۲\cos^۲t+a^۲\sin^۲t}=-dt$$

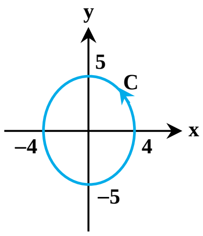
بنابراین داریم:

$$\int_C\frac{ydx-xdy}{x^۲+y^۲}=\int_۰^{۲\pi}-dt=-۲\pi$$

---

**مثال ۹۳:** اگر C منحنی $r=۴+\sin^۲\theta$ باشد که $۰\le\theta\le۲\pi$، مقدار $\int_C\frac{ydx-xdy}{x^۲+y^۲}$ کدام است؟

۱) $۲\pi$ ۲) $-۲\pi$ ۳) صفر ۴) $۴\pi$




**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به نمودار مسیر C که به صورت مقابل می‌باشد، این منحنی مبدأ را در برمی‌گیرد و همچنین با توجه به این که مؤلفه‌های P و Q با توجه به نکته گفته شده در این سؤال قرینه شده‌اند، پس حاصل انتگرال برابر $-۲\pi$ می‌باشد.

---

**مثال ۹۴:** حاصل انتگرال $I=\oint_C\frac{-۲\alpha y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{۲\alpha x}{x^۲+y^۲}dy$، در صورتی که C منحنی بسته‌ی $x^۸+y^۸=۱$ باشد، که دو بار در جهت مثلثاتی طی شده برابر با $۲\pi^۲$ است، مقدار $\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲\pi$

**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که C منحنی بسته‌ای است که مبدأ در ناحیه‌ی محصور این خم قرار دارد و ۲ بار پیموده شده است، بنابراین داریم:

$$I=۲\alpha\int\frac{-y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{x}{x^۲+y^۲}dy=۲\alpha(۲\times۲\pi)=۸\alpha\pi\quad,\quad ۸\alpha\pi=۲\pi^۲\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

---

**مثال ۹۵:** فرض کنید C پاره‌خطی متشکل از خط واصل نقطه‌ی $(۱,۱)$ به $(۳,۰)$ و سپس پاره‌خط واصل از نقطه‌ی $(۳,۰)$ به $(-۱,-\sqrt{۳})$ باشد. اگر $\vec{F}_۱=\frac{x}{x^۲+y^۲}\vec{i}+\frac{y}{x^۲+y^۲}\vec{j}$ و $\vec{F}_۲=\frac{-y}{x^۲+y^۲}\vec{i}+\frac{x}{x^۲+y^۲}\vec{j}$ در این صورت حاصل $I=\int_C\vec{F}_۱.d\vec{r}-\int_C\vec{F}_۲d\vec{r}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}۲+\frac{۱۳\pi}{۶})$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}۲-\frac{۱۳\pi}{۶})$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}۲+\frac{\pi}{۶})$ ۴) $\mathrm{Ln}۲-\frac{\pi}{۶}$

**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که منحنی C از مبدأ عبور نمی‌کند، طبق مطالب متن کتاب می‌توان گفت؛ تابع پتانسیل $\vec{F}_1$ برابر با $f_1 = \frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$ و تابع پتانسیل $\vec{F}_2$ برابر با $f_2 = Arctg\frac{y}{x}$ است. در واقع $f_1 = Lnr$ و $f_2 = \theta$ است. دقت کنید در این سؤال نقطه‌ی ابتدایی $(1,1)$ و نقطه انتهایی $(-1,-\sqrt{3})$ است. پس داریم:

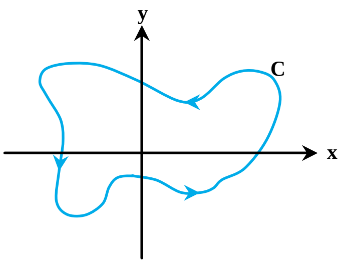
$$\int_C \vec{F}_1.d\vec{r} = Lnr_{\text{انتهایی}} - Lnr_{\text{ابتدایی}} = \frac{1}{2}Ln[(-1)^2+(-\sqrt{3})^2] - \frac{1}{2}Ln(1^2+1^2) = \frac{1}{2}Ln4 - \frac{1}{2}Ln2 = \frac{1}{2}Ln\frac{4}{2} = \frac{1}{2}Ln2$$

$$\int_C \vec{F}_2.d\vec{r} = \theta_{\text{انتهایی}} - \theta_{\text{ابتدایی}} = Arctg(\frac{-\sqrt{3}}{-1}) - Arctg(\frac{1}{1}) = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

پس داریم:

$$I = \frac{1}{2}Ln2 - \frac{13\pi}{12} = \frac{1}{2}(Ln2 - \frac{13\pi}{6})$$

**مثال ۹۶:** فرض کنید $\vec{F}(x,y) = \frac{(2x^3+2xy^2-2y)\vec{i} + (2y^3+2x^2y+2x)\vec{j}}{x^2+y^2}$ و C منحنی شکل زیر باشد، مقدار $\oint \vec{F}.d\vec{r}$، کدام است؟




۱) ۰

۲) $6\pi$

۳) $2\pi$

۴) $4\pi$

**پاسخ:** گزینه «۴» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ منحنی C مبدأ را در بر می‌گیرد، از طرفی چون عبارت $x^2+y^2$ در مخرج وجود دارد و باعث شده $\vec{F}$ در مبدأ ناپیوسته شود، پس باید سراغ روش پارامتری برویم. اما به نظر می‌رسد حجم محاسبات کمی کار را سخت کند! با نگاهی به ضابطه‌ی میدان $\vec{F}$ می‌توان دریافت که $\vec{F}$ قابل تفکیک به دو قسمت است که حاصل یکی از انتگرال‌های $\vec{F}$ را از قبل بلدیم:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{2x^3+2xy^2}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{2y^3+2x^2y}{x^2+y^2}\vec{j} + 2(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}) = \underbrace{2x\vec{i}+2y\vec{j}}_{\vec{F}_1} + 2\underbrace{(\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j})}_{\vec{F}_2}$$

بنابراین داریم:

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \oint_C \vec{F}_1.d\vec{r} + 2\oint_C \vec{F}_2.d\vec{r}$$

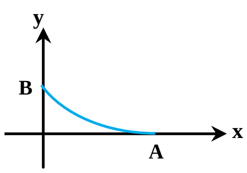
اما می‌دانیم حاصل $\int_C \vec{F}_2.d\vec{r}$، برابر با $2\pi$ است و با توجه به ضریب $\underline{\underline{2}}$ در پشت آن، حاصل قسمت دوم برابر با $2\times 2\pi = 4\pi$ می‌شود، پس کافیست حاصل $\int_C \vec{F}_1.d\vec{r}$ را به‌دست آورده و با $4\pi$ جمع کنیم، اما $\int_C \vec{F}_1.d\vec{r}$ به‌صورت مقابل است:

$$\oint_C \vec{F}_1.d\vec{r} = \oint_C 2xdx + 2ydy$$

اگر دقت کنید، ملاحظه می‌کنید؛ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$، و این یعنی حاصل انتگرال فوق صفر است و لذا حاصل کل انتگرال همان $4\pi$ می‌شود.

**مثال ۹۷:** مقدار انتگرال $I = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ کدام است؟ ( C منحنی $(\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{2})^{\frac{2}{3}} = 1$ در ربع اول و از نقطه $A\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix}$ تا نقطه $B\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$ است.)

(عمران ـ سراسری ۹۱)




۱) $Ln\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$

۲) $Ln\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}$

۳) $Ln\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$

۴) $Ln\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2}$

**پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا فرض می‌کنیم فرمول کتاب را نمی‌دانیم و قرار است تست را کامل حل کنیم:

$$I = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

انتگرال فوق را می‌توان به‌صورت انتگرال برداری $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ در نظر گرفت که در آن $\vec{F}$ به این صورت می‌باشد:

$$\vec{F} = \frac{x-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$\vec{F}$ یک میدان پایستار (کامل) است زیرا با فرض $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ و $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ داریم $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. پس تابع پتانسیل آن را پیدا می‌کنیم.

تابع پتانسیل از فرمول $V=\int Pdx+\int Qdy$ به‌دست می‌آید، اما در عبارت Q جملاتی را که شامل x باشند در نظر نمی‌گیریم. پس کسر $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ به طور کلی حذف می‌شود، زیرا شامل متغیر x است. $V=\int\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\int(0)\,dy=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)-Arctg(\frac{x}{y})+c$

اکنون می‌توانیم انتگرال روی مرز را مانند انتگرال معین با جایگذاری نقطه‌ی ابتدا و انتهای مرز c در تابع پتانسیل حساب کنیم:

$$I=V_{\text{انتها}}-V_{\text{ابتدا}}=V(0,2)-V(3,0)=\frac{1}{2}Ln4-Arctg(0)-\frac{1}{2}Ln9+Arctg(\infty)=\frac{1}{2}Ln\frac{4}{9}+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}Ln(\frac{2}{3})^2+\frac{\pi}{2}=Ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$$

**توضیح:** تابع پتانسیل مربوط به $\vec{F}_1=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ تابع $\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)=Lnr$ است. همچنین تابع پتانسیل مربوط به $\vec{F}_2=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ همان $\theta=Arctg(\frac{y}{x})$ است. در این مثال میدان برداری $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ را داریم. پس می‌توانیم بدون حل انتگرال بگوئیم: $V=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+Arctg(\frac{y}{x})+c$ و سپس با جایگذاری نقاط ابتدا و انتهای مسیر به جواب می‌رسیم.

البته تعجب نکنید که چرا در روش قبلی $-Arctg(\frac{x}{y})$ به‌دست آمده و در این روش $Arctg(\frac{y}{x})$ به وجود آمده است. زیرا $Arctg(\frac{y}{x})=\frac{\pi}{2}-Arctg(\frac{x}{y})$ و $\frac{\pi}{2}$ هم جزء ثابت انتگرال است و در جواب انتگرال معین تأثیری نمی‌گذارد.

---

**مثال ۹۸:** اگر C دایره $x^2+y^2=1$ باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است، آن‌گاه حاصل انتگرال زیر کدام است؟

$$I=\int_C[\frac{2xy^2}{x^4+y^4}+(tgx)e^{\cos x}-\frac{3y}{x^2+y^2}]dx+[\frac{3x}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}+(tgy)e^{\sin y}]dy$$

۱) $0$ ۲) $2\pi$ ۳) $8\pi$ ۴) $6\pi$

**پاسخ:** گزینه «۴» ظاهر سؤال کمی وحشتناک به نظر می‌رسد! اما اگر خوب به عبارات زیر انتگرال دقت کنیم، متوجه می‌شویم سؤال سخت نیست! ابتدا انتگرال را به سه انتگرال مجزا به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_C\frac{2xy^2}{x^4+y^4}dx-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}dy+\int_C(tgx)e^{\cos x}dx+(tgy)e^{\sin y}dy+3\int_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

خُب حالا هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم:

در انتگرال اول میدان پایستار نیست، چون در مخرج میدان داده شده در زیر انتگرال عبارت $x^4+y^4$ داریم، که در مبدأ پیوسته نیست، بنابراین با استفاده از روش پارامتری حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$I_1=\int_C\frac{2xy^2}{x^4+y^4}dx-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}dy=\int_0^{2\pi}[\frac{(2\cos t)(\sin t)^2\times(-\sin t)-2(\cos t)^2(\sin t)\cos t}{\cos^4t+\sin^4t}]dt$$

در صورت کسر از عبارت «$-2\sin t\cos t$» فاکتور گرفته و در مخرج کسر از اتحاد $\cos^4t+\sin^4t=1-2\sin^2t\cos^2t$ استفاده می‌کنیم:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin t\cos t(\sin^2t+\cos^2t)}{1-2\sin^2t\cos^2t}dt=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin 2tdt}{1-2(\frac{1}{2}\sin 2t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin 2t)dt}{1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2t)}=\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin 2t)2dt}{1+\cos^2 2t}=[Arctg(\cos 2t)]_0^{2\pi}=0$$

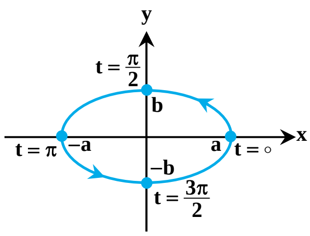
حالا سراغ انتگرال $I_2$ می‌رویم، در این انتگرال چون مبدأ هیچ‌گونه ناپیوستگی برای میدان داده شده ایجاد نمی‌کند، می‌توان شرط پایستار بودن را بررسی کرد: $\int_C(tgx)e^{\cos x}dx+(tgy)e^{\sin y}dy\ \Rightarrow\ P=(tgx)e^{\cos x},Q=(tgy)e^{\sin y}$

چون $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$، لذا میدان پایستار می‌باشد و چون منحنی C بسته است، پس حاصل این انتگرال صفر است. تا این‌جا مجموع دو انتگرال اول صفر شده است، بنابراین حاصل انتگرال I برابر با حاصل انتگرال سوم است و حاصل انتگرال سوم با دانستن نکته‌ی گفته شده نیاز به محاسبه ندارد، چون می‌دانیم حاصل این انتگرال برابر با $2\pi$ است و چون عدد ۳ در این انتگرال ضرب شده است، پس $I=3\times2\pi=6\pi$ می‌شود.

## نکاتی در مورد تعداد دفعات و جهت پیموده شدن منحنی‌های بسته

گاهی اوقات ممکن است با سؤالاتی برخورد کنیم که تعداد دفعات پیموده شدن و جهت حرکت بر روی منحنی به طور واضح و آشکار در صورت سؤال بیان نشده باشد و البته این موضوع در معادله‌ی پارامتری منحنی مشخص شده باشد. برای این که مطلب را خوب متوجه شوید، فرض می‌کنیم یک بیضی با شعاع‌های افقی $a$ و عمودی $b$ و مرکز مبدأ با معادله‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$ ، $۰\le t\le ۲\pi$ مشخص شده باشد. ضابطه‌ی پارامتری این منحنی دو مطلب را به ما می‌گوید؛ اول این که منحنی فقط یک دور کامل از $t=۰$ تا $t=۲\pi$ طی شده است و دوم این که در جهت مثلثاتی طی شده است. برای درک بهتر به شکل و توضیحات زیر توجه کنید:

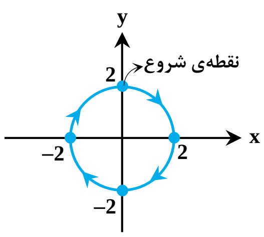
به ازای $t=۰$، در نقطه‌ی شروع، یعنی $(a,۰)$ هستیم، در $t=\frac{\pi}{۲}$ به نقطه‌ی $(۰,b)$، در $t=\pi$ به نقطه‌ی $(-a,۰)$، در $t=\frac{۳\pi}{۲}$ به نقطه‌ی $(۰,-b)$ و در $t=۲\pi$ دوباره به نقطه‌ی $A(a,۰)$ می‌رسیم که ابتدای منحنی است. پس در بازه‌ی زمانی $۰\le t\le ۲\pi$ یک دور کامل در جهت مثلثاتی طی کرده‌ایم.




حالا اگر همین منحنی به‌صورت $\vec{C}(t)=(a\cos ۲t)\vec{i}+(b\sin ۲t)\vec{j}$ ، $۰\le t\le ۲\pi$ پارامتری شده باشد، می‌توانیم بگوییم در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۲π، دو بار طی می‌شود (منحنی با سرعت بیشتری، یعنی با سرعت ۲ برابر طی می‌شود) چرا که به ازای $t=۰$ در نقطه‌ی $(a,۰)$، به ازای $t=\frac{\pi}{۲}$ در نقطه‌ی $(-a,۰)$ و به ازای $t=\pi$ در نقطه‌ی $(a,۰)$ یعنی اول منحنی هستیم. پس در بازه‌ی زمانی $۰\le t\le \pi$ یک دور کامل منحنی را طی کرده‌ایم و بنابراین در بازه‌ی زمانی $۰\le t\le ۲\pi$ دو بار منحنی را طی کرده‌ایم.

**نتیجه ۱: برای معادله‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=(a\cos kt)\vec{i}+(b\sin kt)\vec{j}$ می‌توان گفت؛ منحنی « $k$ دور» منحنی را در جهت مثلثاتی طی می‌کند، که هر دور در مدت زمان $\frac{۲\pi}{k}$، از $t=۰$ تا $t=\frac{۲\pi}{k}$ $(۰\le t\le \frac{۲\pi}{k})$، طی می‌شود.**

موضوع بعد، فهمیدن جهت طی شدن منحنی با توجه به منحنی پارامتری داده شده می‌باشد. دقت کنید برای $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$، چون با افزایش $t$، به سمت $y$ های مثبت حرکت می‌کنیم، پس یعنی در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم. ولی اگر مثلاً $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}-(b\sin t)\vec{j}$ را داشته باشیم چون با افزایش $t$ به سمت $y$ های منفی حرکت می‌کنیم، پس یعنی در جهت خلاف مثلثاتی (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) در حرکت هستیم و یا حتی اگر مثلاً $\vec{C}(t)=(a\sin t)\vec{i}+(b\cos t)\vec{j}$ را داشته باشیم، چون با افزایش $t$ از نقطه شروع $(۰,b)$ در حال حرکت به سمت نقطه‌ی $(a,۰)$ هستیم، پس در جهت عقربه‌های ساعت و یا همان جهت خلاف مثلثاتی حرکت می‌کنیم.




برای مثال، فرض کنید منحنی با ضابطه‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=(۲\sin \pi t)\vec{i}+(۲\cos \pi t)\vec{j}$ داده شده است، با توجه به توضیحات داده شده، در این جا $k=\pi$ می‌باشد، پس برای $t$ از صفر تا $\frac{۲\pi}{\pi}$ و به عبارت دیگر از ۰ تا ۲ $(۰\le t\le ۲)$، یک دور کامل دایره پیموده می‌شود. اگر به نقاط مختلف مسیر حرکت دقت کنید، در $t=۰$ در نقطه‌ی $(۰,۲)$، یا همان نقطه‌ی شروع هستیم، در $t=\frac{۱}{۲}$ به نقطه‌ی $(۲,۰)$، در $t=۱$ به نقطه‌ی $(۰,-۲)$، در $t=\frac{۳}{۲}$ به نقطه‌ی $(-۲,۰)$ و در نهایت در $t=۲$ دوباره به نقطه‌ی $(۰,۲)$ یا همان نقطه‌ی شروع می‌رسیم همان‌طور که دیدید به دلیل تعویض جای sin با cos، جهت حرکت تغییر کرد. بنابراین نتیجه زیر را داریم:

**نتیجه۲: اگر جای sinkt و coskt را با هم عوض کنیم، آن‌گاه جهت حرکت تغییر می‌کند و اگر علامت یکی از جملات sinkt و یا coskt را عوض کنیم، باز هم جهت حرکت تغییر می‌کند.**

**مثال۹۹: منحنی پارامتری $\vec{C}(t)=(۳\cos ۴t,\sin ۴t)$ و $۰\le t\le ۲\pi$ را در نظر بگیرید. حاصل انتگرال $\int_C \frac{-y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{x}{x^۲+y^۲}dy$، چقدر است؟**

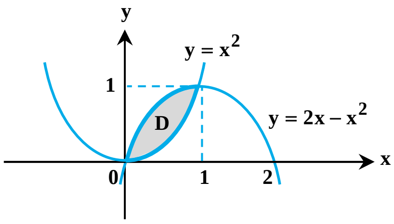
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۲π ۳) ۴π ۴) ۸π

**پاسخ:** گزینه «۴» اگر مبدأ درون ناحیه‌ی محدود به مرز C نباشد، آن‌گاه حاصل انتگرال صفر است اما با تبدیل منحنی از پارامتری به دکارتی داریم:

$$\vec{C}(t)=۳\cos ۴t\,\vec{i}+\sin ۴t\,\vec{j}\Rightarrow x=۳\cos ۴t\ ,\ y=\sin ۴t\Rightarrow \frac{x^۲}{۹}+y^۲=۱$$

پس مسیر یک بیضی است که مبدأ درون آن قرار دارد، اما دقت کنید نباید سریع گزینه (۲) را انتخاب نمایید، چون **۲π زمانی است که مسیر یکبار در جهت مثلثاتی طی شده باشد**، اما در این سؤال $\sin ۴t$ و $\cos ۴t$ داریم و این یعنی $k=۴$ و به عبارت دیگر برای این منحنی در $۰\le t\le \frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$،




$$I=\iint_D[(-1)-(2x^2y)]dA=-\int_0^1\int_{y=x^2}^{y=2x-x^2}(2x^2y+1)dydx=-\int_0^1[x^2y^2+y]_{x^2}^{2x-x^2}dx$$

$$=-\int_0^1[(x^2(2x-x^2)^2+2x-x^2)-(x^2\times x^4+x^2)]dx$$

$$=-\int_0^1[x^2(4x^2+x^4-4x^3)+2x-x^2-x^6-x^2]dx=-\int_0^1(4x^4-4x^5+2x-2x^2)dx$$

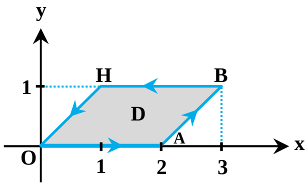
$$=-[\frac{4x^5}{5}-\frac{4x^6}{6}+x^2-\frac{2x^3}{3}]_0^1=-[\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}]=-(\frac{12-10+15-10}{15})=-\frac{7}{15}$$

**مثال ۱۱۶: حاصل انتگرال $\oint_C(3y^2+2xe^{y^2})dx+(2x^2ye^{y^2})dy$، در صورتی که C مرز متوازی‌الاضلاعی به رئوس (۰,۰)، (۲,۰)، (۳,۱) و (۱,۱) باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟**

۱) ۶-　　۲) ۶　　۳) ۱۲　　۴) ۱۲-

**پاسخ:** گزینه «۱» مرز C، مرز متوازی‌الاضلاع شکل زیر است:

با توجه به این که مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اگر دقت کنید ناحیه نسبت به محور y ها نامنظم است و برای رفع این مشکل ابتدا لازم است معادله‌ی خطوط OH و AB تعیین شوند:




$$\text{معادله‌ی خط } OH \Rightarrow y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)\Rightarrow y=x\Rightarrow x=y$$

$$\text{معادله‌ی خط } AB \Rightarrow y-0=\frac{1-0}{3-2}(x-2)\Rightarrow y=x-2\Rightarrow x=y+2$$

و با توجه به این که کران‌های y هم از ۰ تا ۱ تغییر می‌کنند، بنابراین داریم:

$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=y+2}(-6y)dxdy=\int_0^1[-6xy]_y^{y+2}dy=\int_0^1-12ydy=[-6y^2]_0^1=-6$$

**مثال ۱۱۷: انتگرال $\int_C(\cos x\sin y-x^3y)dx+\sin x\cos ydy$ روی دایره‌ی $C:x^2+y^2=1$ کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) $\frac{\pi}{2}$　　۴) $\pi$

**پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این‌که منحنی c بسته می‌باشد، با استفاده از قضیه گرین داریم:

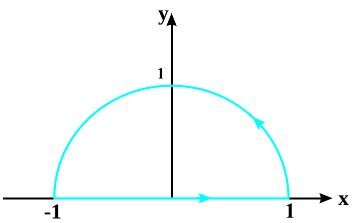
$$\int_c(\cos x\sin y-x^3y)dx+\sin x\cos ydy=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(\sin x\cos y)-\frac{\partial}{\partial y}(\cos x\sin y-x^3y)]dA$$

$$=\iint_D(\cos x\cos y-\cos x\cos y+x^3)dA=\iint_D x^3dxdy$$

با توجه به این‌که تابع زیر انتگرال فرد است و ناحیه داخل c (دایره به مرکز مبدأ) نسبت به محور y ها متقارن می‌باشد، حاصل انتگرال فوق برابر صفر است.

**مثال ۱۱۸: حاصل $\oint_C(2x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$ ، کدام است؟ ( C منحنی بسته نشان داده شده در شکل زیر است.)**

(معماری کشتی ـ سوانح طبیعی ـ نفت ـ سراسری ۹۷)




۱) $\frac{8}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) ۰

**پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه مسیر داده شده ساده و بسته است، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$I=\oint_C(2x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(2x-(-2y))dA=2\iint_D(x+y)dA$$

قبل از محاسبه این انتگرال، توجه کنید که ناحیه نسبت به متغیر x متقارن و تابع x در زیر انتگرال فرد است، پس انتگرال آن در این ناحیه صفر خواهد بود. حالا با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=2\iint_D ydA=2\int_0^\pi\int_0^1(r\sin\theta)rdrd\theta=2\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^1r^2dr=2(-\cos\theta|_0^\pi)(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1)=2(1+1)(\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$$

**مثال ۱۱۹:** مقدار $\int_C \frac{x^5+x^3y^2-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{yx^2+y^3+3x}{x^2+y^2}dy$، کدام است؟ هرگاه C منحنی $x^4+y^4=1$ در جهت مثلثاتی باشد.

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰ ۲) $2\pi$ ۳) $4\pi$ ۴) $6\pi$

**پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که در انتگرال داده شده مؤلفه‌های P و Q ساده نمی‌باشند، نمی‌توانیم حاصل انتگرال را به سادگی از روش پارامتری کردن مسیر به دست بیاوریم، پس با مرتب کردن و دسته‌بندی جملات در P و Q داریم:

$$I=\int_C \frac{x^3(x^2+y^2)-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{y(x^2+y^2)+3x}{x^2+y^2}dy=\int_C (x^3-\frac{3y}{x^2+y^2})dx+(y+\frac{3x}{x^2+y^2})dy$$

$$=\underbrace{\int_C x^3dx+ydy}_{I_1}+3\underbrace{\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_2}$$

برای محاسبه‌ی $I_1$ با استفاده از قضیه‌ی گرین داریم:

$$I_1=\iint_D (Q_x-P_y)dydx=\iint_D(0-0)dydx=0$$

در مورد $I_2$ که میدان برداری معروفی است، طبق متن کتاب چون نقطه‌ی $(0,0)$ درون مرز قرار دارد خواهیم داشت:

$$I_2=2\pi$$

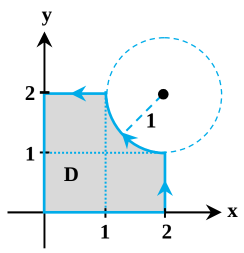
در نتیجه داریم:

$$I=I_1+3I_2=0+3(2\pi)=6\pi$$

**مثال ۱۲۰:** میدان برداری $\vec{F}=(y,2x+tg(tgy))$ را در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید و خم C را مرز ناحیه‌ی محدود $D=\{0\le x\le 2\,,\,0\le y\le 2 \text{ و } (x-2)^2+(y-2)^2\ge 1\}$، که در جهت مثلثاتی جهت‌گذاری شده است، در نظر بگیرید. حاصل $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی ۲ دانشگاه Harvard)

۱) $2+\frac{\pi}{2}$ ۲) $4-\frac{\pi}{2}$ ۳) $4-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2-\frac{\pi}{2}$




**پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به ناحیه D داده شده شکل به‌صورت مقابل است، با توجه به این که مسیر بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم:

$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_D(2-1)dA=\iint_D dA=\text{مساحت ناحیه } D$$

اما مساحت ناحیه D برابر با مقدار زیر است:

$$\text{مساحت ناحیه } D=(\text{مساحت مربعی به ضلع ۲})-\frac{1}{4}\times(\text{مساحت دایره‌ای به شعاع ۱})=2\times2-\frac{1}{4}\times\pi\times1=4-\frac{\pi}{4}$$

**توضیح:** استفاده از روش پارامتری‌سازی به محاسبات طولانی منجر خواهد شد و این مثال هم از آن مثال‌هایی است که می‌تواند ارزش قضیه گرین را مشخص کند!

**مثال ۱۲۱:** فرض کنید $\gamma$ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع R در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) است. اگر $\vec{F}=(F_1,F_2)$ میدان برداری باشد که $F_1=\frac{-y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2}$ و $F_2=\frac{x}{x^2+y^2}+x+tgy^2$، در این صورت $\oint_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $2\pi$ ۲) $\pi(R^2+1)$ ۳) $\pi(3R^2+2)$ ۴) $\pi(2R^2+2)$

**پاسخ:** گزینه «۳» مرز $\gamma$ بسته است. پس بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اما $F_1$ و $F_2$ در $(0,0)$ تعریف شده نیستند پس ناپیوستگی دارند. با این حال می‌توانیم قسمت‌های پیوسته آن‌ها را جدا کرده و برای آن قسمت‌ها از گرین استفاده کنیم:

$$I=\int_\gamma(-\frac{y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2})dx+(\frac{x}{x^2+y^2}+x+tgy^2)dy=\underbrace{\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_1}+\underbrace{\int_\gamma(-2y+e^{x^2})dx+(x+tgy^2)dy}_{I_2}$$

برای $I_2$ از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:

$$I_2=\iint_D(Q_x-P_y)dydx=\iint_D(1+2)dydx=3\times(\text{مساحت } D)=3\pi R^2$$

برای $I_1$، طبق متن درس می‌دانیم که با یک بار گردش حول مبدأ، حاصل این انتگرال می‌شود $2\pi$. پس $I_1=2\pi$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2=2\pi+3\pi R^2=\pi(3R^2+2)$$

**توضیح:** اگر متن درس را در مورد $I_1$ به‌خاطر نداشته باشید می‌توانید با پارامتری کردن دایره، حاصل آن را حساب کنید:

$$x=R\cos t\quad,\quad y=R\sin t\quad,\quad dx=-R\sin t\,dt\quad,\quad dy=R\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow I_1=\int_\gamma\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\Rightarrow I_1=\int_0^{2\pi}\frac{R^2\sin^2t+R^2\cos^2t}{R^2}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

مدرسان شریف

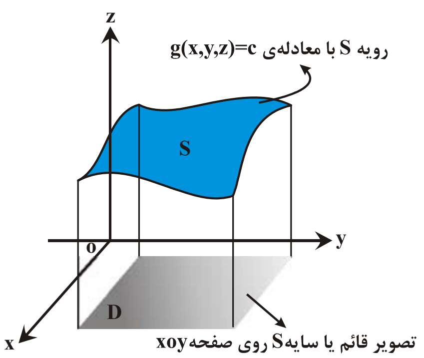
# فصل ششم

## « انتگرال روی سطح »

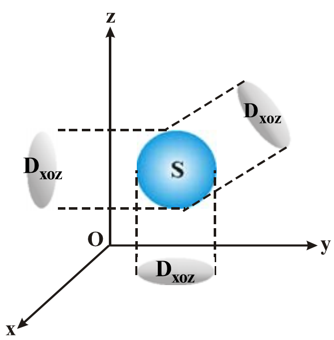
### درسنامه: انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی و کاربردهای آن

در فصل انتگرال روی‌خط با سؤالاتی آشنا شدیم که در آن‌ها، انتگرال تابعی بر روی یک خط و یا یک منحنی در فضا حساب می‌شد. در این فصل می‌خواهیم با انتگرال‌گیری بر روی یک **رویه در فضا** آشنا شویم.

در واقع برای محاسبه‌ی انتگرال روی یک سطح یا رویه، مهم‌ترین کاری که ما انجام می‌دهیم، تصویر کردن آن بر روی یک **صفحه** است و این کار به این دلیل انجام می‌گیرد که ما از فصل انتگرال‌های چندگانه روش‌های انتگرال‌گیری بر روی سطوح دو بعدی را بلدیم و به محض این که تصویر رویه مشخص شود، ما دیگر خیلی به فضا فکر نمی‌کنیم!! و سعی می‌کنیم در روی زمین به کار خود ادامه بدهیم!! همان‌طور که در شکل «الف» می‌بینید، رویه‌ی S بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده است. ذکر این نکته لازم است که رویه را در هر کدام از صفحات مختصات می‌توانیم تصویر کنیم (البته محدودیت‌هایی داریم که بعداً به ذکر آن‌ها می‌پردازیم) شکل «ب» تصویر یک کره را بر روی هر سه صفحه نشان داده که بدیهی است هر سه تصویر، دایره‌ای به شعاع کره هستند.




«شکل الف»




«شکل ب»

همانند فصل انتگرال روی‌خط، اینجا نیز با دو نوع تابع، یعنی توابع حقیقی (اسکالر) و توابع برداری سر و کار داریم. در این درسنامه روش محاسبه انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی را بیان کرده و سپس در درسنامه بعد، در مورد انتگرال روی سطح برای توابع برداری بحث می‌کنیم.

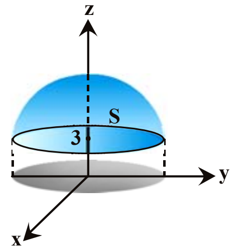
**انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی:** فرض کنید رویه‌ای مانند S به معادله‌ی $g(x,y,z)=C$ داریم و می‌خواهیم انتگرال تابعی حقیقی (اسکالر) مانند $f(x,y,z)$ را روی S حساب کنیم، یعنی قراره حاصل $I=\iint_S f d\sigma$ رو حساب کنیم، در این صورت اگر فرض کنیم D تصویر ناحیه S روی یکی از صفحات مختصات باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\iint_S f d\sigma=\iint_D f\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{p}|}dA$$

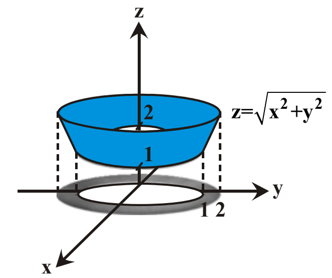
در این رابطه، $\vec{\nabla} g$، گرادیان رویه g و $\vec{p}$ برداری که عمود بر صفحه‌ی تصویر است. برای مثال اگر صفحه‌ی تصویر xoy باشد، آن‌گاه $\vec{p}=\vec{k}$ در نظر گرفته می‌شود. در واقع $\vec{p}$ یکی از سه بردار $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ می‌باشد، (صفحه‌ی تصویر همیشه طوری انتخاب می‌شود که $\vec{\nabla} g.\vec{p}\neq 0$ و این انتخاب همیشه امکان‌پذیر است.) همچنین dA، المان مساحت در ناحیه‌ای است که رویه موردنظر تصویر شده است. (برای صفحه xoy برابر با dxdy، برای صفحه xoz برابر با dxdz و برای صفحه zoy برابر با dzdy است.)

قبل از پرداختن به روش‌های حل انتگرال روی سطح، بهتر است تصویر چند رویه را بر روی صفحات مختصات با هم مرور کنیم:

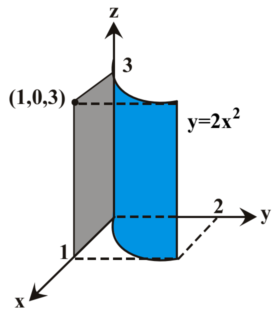
یک نیم‌کره به مرکز (۰،۰،۳) که بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن یک دایره است.



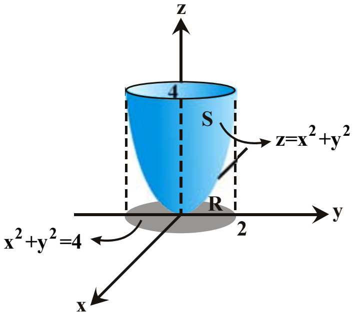

قسمتی از یک مخروط که بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن ناحیه‌ی بین دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ است.




قسمتی از استوانه‌ی $y=۲x^۲$ که بر روی صفحه‌ی zox تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن یک مستطیل با طول ۳ و عرض ۱ است.




قسمتی از یک سهمی‌گون که بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن ناحیه‌ی درون یک دایره به شعاع ۲ است.




## روش حل سؤالات انتگرال روی سطح برای توابع عددی

برای حل انتگرال سطح $\iint_S fd\sigma$ ، یعنی انتگرال تابع اسکالر f بر روی سطح S باید مراحل زیر را انجام دهیم:

**گام اول:** ابتدا سطح را بر یکی از صفحات مختصات تصویر می‌کنیم و ناحیه به‌دست آمده را D می‌نامیم.

**گام دوم:** با توجه به معادله‌ی g تلاش می‌کنیم $d\sigma$ را حساب کنیم. دو روش برای این کار وجود دارد که ما این‌جا روش اول را بیان می‌کنیم:

در این روش با دقت به صورت سؤال، متوجه می‌شویم که سطح S دارای چه معادله‌ای است. این معادله را به‌صورت $g(x,y,z)=C$ می‌نویسیم و سپس از رابطه‌ی زیر $d\sigma$ را به‌دست می‌آوریم:

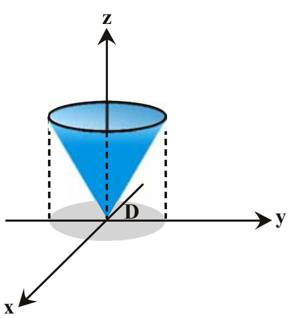
$$\boxed{d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

**گام سوم و نهایی:** در این مرحله $d\sigma$ به‌دست آمده را در انتگرال جایگذاری کرده و بر ناحیه D انتگرال دوگانه عادی را حساب می‌کنیم. دقت کنید در این حالت اگر مثلاً صفحه‌ی تصویر، صفحه‌ی xoy باشد، در انتگرال دوگانه، فقط متغیرهای x و y را داریم و لازم است در ضابطه‌ی $f(x,y,z)$ به جای تمام zها، مقدار آن را برحسب x و y قرار دهیم.

**مثال ۱:** حاصل $I=\iint_S zd\sigma$ در صورتی که S پوسته‌ی مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ بین صفحات $z=۰$ و $z=۱$ باشد، چند برابر π است؟

۱) ۲    ۲) $\frac{۲}{۳}$    ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$    ۴) $\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا ناحیه‌ی S را بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌کنیم و آن را D می‌نامیم. همانطور که از معادله‌ی رویه مشخص است، سایه رویه داده شده، دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ در صفحه‌ی xoy است. البته بدون نیاز به رسم شکل هم می‌شد با تلاقی $z=۱$ و $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ به این نتیجه رسید. همچنین توجه کنید که بردار $\vec{p}$ برای صفحه‌ی xoy برابر با $\vec{k}$ است.




حالا باید $d\sigma$ را حساب کنیم. رویه‌ی S، پوسته‌ی مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است. باید این معادله را به‌صورت $g(x,y,z)=c$ بنویسیم. می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم و سپس همه‌ی متغیرها را به یک سمت تساوی بیاوریم:

$$g:x^۲+y^۲-z^۲=۰\Rightarrow\vec{\nabla}g=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}-۲z\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{(۲x)^۲+(۲y)^۲+(-۲z)^۲}$$

$$|\vec{\nabla}g|=\sqrt{۴(x^۲+y^۲)+۴z^۲}=\sqrt{۴z^۲+۴z^۲}=\sqrt{۸z^۲}=۲\sqrt{۲}z$$

از طرفی $\vec{\nabla}g.\vec{k}=-۲z$ و بنابراین $|\vec{\nabla}g.\vec{k}|=۲z$، پس خواهیم داشت: $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{۲\sqrt{۲}z}{۲z}dA=\sqrt{۲}dA$

حالا با جایگذاری $d\sigma$ و همچنین $\sqrt{x^۲+y^۲}$ به جای z در زیر انتگرال به راحتی حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$I=\iint_D z(\sqrt{۲}dA)=\sqrt{۲}\iint_D zdA=\sqrt{۲}\iint_D\sqrt{x^۲+y^۲}dA$$

با توجه به وجود « $x^۲+y^۲$ » زیر انتگرال و همچنین ناحیه انتگرال‌گیری داده شده، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم، که می‌دانیم در این ناحیه $dA=rdrd\theta$ ، $۰\le r\le ۱$ و $۰\le\theta\le ۲\pi$. پس I به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$I=\sqrt{۲}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ r(rdrd\theta)=\sqrt{۲}(\int_۰^{۲\pi}d\theta)\times(\int_۰^۱ r^۲dr)=\sqrt{۲}[\theta]_۰^{۲\pi}\times[\frac{r^۳}{۳}]_۰^۱=۲\pi\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۳}=(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})\pi$$

**مثال ۲:** اگر S قسمتی از رویه‌ی به معادله‌ی $z = ۲xy$، واقع در داخل استوانه به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_S \frac{۲ds}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $۲\pi$ ۲) $۴\pi$ ۳) $۶\pi$ ۴) $۸\pi$

**پاسخ:** گزینه «۴» صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم، در این صورت ناحیه تصویر درون دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ می‌باشد. اگر معادله رویه داده شده را به صورت $g(x,y,z) = ۲xy - z = ۰$ بنویسیم، در این صورت داریم: $\vec{\nabla} g = (۲y)\vec{i} + (۲x)\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{\nabla} g| = \sqrt{۴y + ۴x^۲ + ۱}$

اکنون با توجه به اینکه $\vec{p} = \vec{k}$ می‌باشد (چون صفحه تصویر صفحه xoy است) ds را به دست می‌آوریم و داریم:

$$ds = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|} dA = \frac{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}{۱} dA = \sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}\, dA$$

بنابراین داریم:

$$\iint_S \frac{۲ds}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}} = \iint_D \frac{۲\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}}{\sqrt{۴x^۲ + ۴y^۲ + ۱}} dA = ۲\iint_D dA = ۲ \times \text{مساحت دایره} = ۸\pi$$

**مثال ۳:** حاصل $\iint_S y ds$ که در آن S رویه‌ی $z = x + y^۲$ و $۰ \le x \le ۱$ و $۰ \le y \le ۲$ می‌باشد، کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱۶ + ۸\sqrt{۲}}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}\sqrt{۶} + \frac{۴}{۱۵}\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۶} - \frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳\sqrt{۲}}{۳}$

**پاسخ:** گزینه «۴» رویه‌ی S داده شده را بر سطح xy تصویر می‌کنیم، لذا ds برابر است با:

$$g(x,y,z): z - x - y^۲ = ۰ \Rightarrow \vec{\nabla} g = -\vec{i} - ۲y\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\vec{\nabla} g| = \sqrt{۱ + ۴y^۲ + ۱}$$

با توجه به این که صفحه‌ی تصویر صفحه‌ی xy است $\vec{p} = \vec{k}$ و $\vec{\nabla} g.\vec{k} = ۱$ می‌باشد و داریم:

$$ds = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|} dA \Rightarrow ds = \frac{\sqrt{۱ + ۴y^۲ + ۱}}{۱} dA = \sqrt{۲ + ۴y^۲}\, dA$$

بنابراین انتگرال رویه‌ی داده شده برابر است با:

$$\iint_S y ds = \iint_D y\sqrt{۴y^۲ + ۲}\, dA = \int_۰^۱ \int_۰^۲ y\sqrt{۴y^۲ + ۲}\, dy dx = (\int_۰^۱ dx)(\int_۰^۲ y\sqrt{۴y^۲ + ۲}\, dy) = \int_۰^۲ y\sqrt{۴y^۲ + ۲}\, dy$$

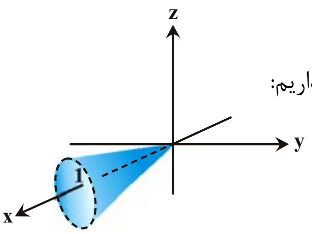
برای حل انتگرال فوق با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$۴y^۲ + ۲ = u \Rightarrow ۸ydy = du \;,\; \begin{cases} y = ۲ \Rightarrow u = ۱۸ \\ y = ۰ \Rightarrow u = ۲ \end{cases}$$

$$\iint_S y ds = \int_۲^{۱۸} u^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{du}{۸} = \frac{۱}{۸} \int_۲^{۱۸} \sqrt{u} du = \frac{۱}{۸} \times \frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۱۲} u\sqrt{u} \Big|_۲^{۱۸} \Rightarrow \iint_S y ds = \frac{۱}{۱۲}(۱۸\sqrt{۱۸} - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱}{۱۲}(۵۴\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۵۲\sqrt{۲}}{۱۲} = \frac{۱۳\sqrt{۲}}{۳}$$

**مثال ۴:** اگر S قسمتی از مخروط $x^۲ = y^۲ + z^۲$ باشد که بین صفحات $x = ۰$ و $x = ۱$ واقع است آن‌گاه $\iint_S x^۲ ds$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵ و ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pi\sqrt{۲}$ ۳) $\pi$ ۴) $۲\pi$




**پاسخ:** گزینه «۱» مخروط $x^۲ = y^۲ + z^۲$ در محدوده $۰ \le x \le ۱$ به صورت روبرو است:

پس این مخروط بالای صفحه‌ی yoz قرار دارد؛ در نتیجه $\vec{P} = \vec{i}$ همچنین $g(x,y,z) = x^۲ - y^۲ - z^۲ = ۰$، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} g = ۲x\vec{i} - ۲y\vec{j} - ۲z\vec{k} \Rightarrow |\vec{\nabla} g| = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \;,\; |\vec{\nabla} g.\vec{P}| = ۲x$$

$$\Rightarrow I = \iint_S x^۲ ds = \iint_D \frac{۲x^۲\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}{۲x} dA = \iint_D x\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}\, dA$$

امّا داریم $x^۲ = y^۲ + z^۲ \,,\, ۰ \le x \le ۱$ پس $۰ \le y^۲ + z^۲ \le ۱$ یعنی ناحیه R که تصویر مخروط S در صفحه yoz است، درون دایره $y^۲ + z^۲ = ۱$ می‌باشد.

با جایگذاری $x^۲$ در انتگرال فوق به دست می‌آوریم: $I = \iint_{y^۲ + z^۲ \le ۱} \sqrt{y^۲ + z^۲}\sqrt{۲(y^۲ + z^۲)}\, dydz$

با تغییر مختصات قطبی انتگرال فوق به صورت مقابل در می‌آید. $\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ \sqrt{۲} r^۲ r dr d\theta = \int_۰^{۲\pi} \frac{\sqrt{۲}}{۴} r^۴ \Big|_۰^۱ d\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi$

## روشی دیگر برای محاسبه‌ی $d\sigma$

این روش که شاید حفظ کردن و به خاطر سپردن اون راحت‌تر از روش قبل باشه، بر مبنای معادلـه‌ی رویـه‌ی g فرمـول‌بنـدی میشـه کـه معمـولاً در اکثـر سؤالات یکی از سه حالت زیر را داریم:

**الف)** اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که z به طور صریح برحسب x و y داده شده باشه (یعنی یک طرف تساوی فقط z و طرف دیگه، فقـط عبـارتی بـر حسب x و y داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو xoy انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$$

**ب)** اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که x به طور صریح برحسب z و y داده شده باشه، (یعنی یک طرف تساوی فقط x و طرف دیگـه، فقـط عبـارتی بـر حسب z و y داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو yoz انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}dydz$$

**ج)** اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که y به طور صریح برحسب x و z داده شده باشه (یعنی یک طرف تساوی فقط y و طرف دیگـه، فقـط عبـارتی بـر حسب x و z داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو xoz انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}dxdz$$

**سؤال دانشجو: استفاده از کدام روش برای محاسبه‌ی $d\sigma$ بهتر است و اصولاً روش دوم چه موقع به کار ما می‌آید؟**

خُب، طبیعتاً با توجه به اینکه در روش اول باید گرادیان رویه را حساب کرد و همچنین ضرب برداری انجام داد، شاید این روش کمی با خطا توأم باشد، البته واقعاً نمی‌توان گفت حجم محاسبات روش اول خیلی بیشتر است؛ بنابراین هر کسی باید ببیند در استفاده و حفظ کردن کـدام رابطـه راحـت‌تـر اسـت!؟ امـا یادتان باشد که این طور نیست که اصلاً لازم نباشد روش اول به خاطر سپرده شود! چون در مواقعی که مثلاً نتوان یک متغیر را به طـور صـریح برحسـب دو متغیر دیگر معین کرد، بهتر است از روش اول در محاسبه‌ی $d\sigma$ کمک بگیریم. البته شاید تاکنون در آزمون‌ها (و حتی در اکثر کتاب‌های مرجع دانشـگاهی) سؤالی با این شرایط مطرح نشده باشد، اما به هر حال سؤالاتی با این شرایط قابل طرح کردن می‌باشند. مثلاً اگر معادله رویه به‌صـورت $x^2+y^2+z^2=4z$ داده شده باشد، آن‌گاه محاسبه‌ی صریح z بر حسب x و y کمی پیچیده است و بنابراین بهتر است از روش اول استفاده کنیم. اما برای انتگرال سـطح توابـع برداری چون با بردار سر و کار داریم هم‌چنین به دلیل برخی ملاحظات دیگر، بهتر است از روش اول (محاسبه گرادیان) استفاده کنیم.

حالا برای تمرین در یک سؤال، $d\sigma$ را از دو روش حساب می‌کنیم:

**برای مثال حاصل $I=\iint_S(x^2+y^2)d\sigma$ در صورتی که S بخشی از سطح مخروطی $z^2=x^2+y^2$ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ باشد را به‌دست می‌آوریم.**

**گام اول:** ابتدا توجه کنید که ناحیه مورد نظر بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌شود و تصویر آن دایره واحد به مرکز مبدأ می‌باشد.

**گام دوم:** همان‌طور که گفتیم برای تمرین و درک بهتر $d\sigma$ را از هر دو روش به‌دست می‌آوریم.

با توجه به صورت سؤال و معادله‌ی مخروط داریم $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (دقت کنید که در صورت سؤال گفته شده؛ سطح مخـروط بـین صـفحات $z=0$ و $z=1$ قرار دارد، و این یعنی ضابطه‌ی $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ قابل قبول نیست.) بنابراین می‌توانیم از روش دوم استفاده کنیم:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

حالا از روش اول هم $d\sigma$ را حساب می‌کنیم:

$$g(x,y,z)=0\Rightarrow z^2-x^2-y^2=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(-2x)\vec{i}+(-2y)\vec{j}+(2z)\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

از طرفی چون بردار یکه عمود بر سطح $\vec{p}=\vec{k}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\vec{\nabla}g.\vec{k}=2z\Rightarrow|\vec{\nabla}g.\vec{k}|=2z$$

پس داریم:

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dxdy=\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}dxdy=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dxdy\xrightarrow{z^2=x^2+y^2}d\sigma=\frac{\sqrt{z^2+z^2}}{z}dxdy=\frac{\sqrt{2}z}{z}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

**گام سوم:** حالا باید انتگرال مقابل را حساب کنیم:
$$I=\iint_D (x^2+y^2)(\sqrt{2}dxdy)=\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

از طرفی همان‌طور که در گام اول گفتیم، میدان D، دایره $x^2+y^2=1$ است و با توجه به این که زیر انتگرال، عبارت $x^2+y^2$ وجود دارد، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم. در این دستگاه $dxdy=rdrd\theta$ و با توجه به اینکه ناحیه دایره واحد است، پس $0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le 2\pi$، لذا داریم:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2.rdrd\theta=\sqrt{2}(\int_0^{2\theta}d\theta)\times(\int_0^1 r^3dr)=\sqrt{2}[\theta]_0^{2\pi}\times\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\sqrt{2}\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**مثال۵:** فرض کنید $\Sigma$ قسمتی از مخروط به معادله‌ی $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که $1\le x^2+y^2\le 4$، مقدار $\iint_\Sigma z^2d\sigma$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم، در این صورت ناحیه تصویر دایره‌ی $1\le x^2+y^2\le 4$ می‌باشد و برای مخروط داده شده $d\sigma$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2}\,dydx=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dydx=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dydx=\sqrt{1+1}\,dydx=\sqrt{2}dydx$$

پس داریم:
$$\iint_\Sigma z^2d\sigma=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{2}dydx\xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2(r^2)rdrd\theta=\sqrt{2}(\frac{r^4}{4})_1^2(2\pi)=\sqrt{2}(4-\frac{1}{4})(2\pi)=\frac{15\sqrt{2}\pi}{2}$$

**مثال۶:** انتگرال سطح $I=\iint_S Lnzds$، در صورتی که S بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ باشد که بین صفحات $z=1$ و $z=2$ قرار دارد، چند برابر $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ است؟

۱) $8Ln3+2$ ۲) $8Ln2+3$ ۳) $8Ln3-2$ ۴) $8Ln2-3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، داریم $ds=\sqrt{2}dA$، از برخورد مخروط با صفحات $z=1$ و $z=2$ به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ می‌رسیم. چون $z=\sqrt{x^2+y^2}$، لذا تابع تحت انتگرال به صورت $Lnz=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$ در می‌آید. همچنین ناحیه انتگرال‌گیری بین دو دایره‌ی $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد، پس از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. در ناحیه‌ی بین این دو دایره داریم: $0\le\theta\le 2\pi$ و $1\le r\le 2$.

$$I=\iint_S Lnzds=\iint_S\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)(\sqrt{2})dxdy$$

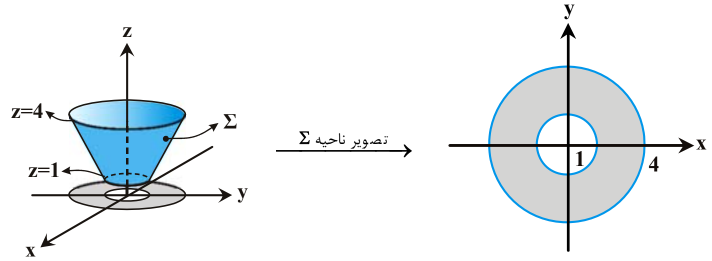
$$\xrightarrow{\text{قطبی}} I=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2(Lnr^2).rdrd\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2(2Lnr)rdrd\theta=\sqrt{2}(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_1^2 rLnrdr)$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}\times 2\pi\times(\frac{r^2}{2}Lnr-\frac{r^2}{4})\Big|_1^2=2\pi\sqrt{2}(2Ln2-\frac{3}{4})=2\pi\sqrt{2}(2Ln2-\frac{3}{4})\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(8Ln2-3)$$

**مثال۷:** فرض کنید $\Sigma$ قسمتی از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ باشد که بین صفحات $z=1$ و $z=4$ قرار دارد. حاصل $I=\iint_\Sigma x^2zd\sigma$، چند برابر $\frac{\pi}{5}$ است؟

۱) $1024\sqrt{2}$ ۲) $1023\sqrt{2}$ ۳) $1000\sqrt{2}$ ۴) $1018\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» همان‌طور که در شکل مشخص است، تصویر ناحیه بر روی صفحه‌ی xoy به‌صورت ناحیه‌ی بین دو دایره است:




برای رسیدن به ناحیه سمت راست با تلاقی دادن هر یک از صفحات با مخروط داریم:

$$\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z=1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1\quad,\quad\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z=4\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=16$$

با توجه به اینکه مخروط بالای صفحه xoy است (در صورت سؤال گفته شده بین $z=1$ و $z=4$ قرار دارد) پس $z=\sqrt{x^2+y^2}$، داریم:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dA=\sqrt{1+(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2}\,dA=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dA=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\,dA=\sqrt{2}dA$$

## درسنامه۲: انتگرال سطح برای توابع برداری و قضیه دیورژانس

در درسنامه قبل با انتگرال‌گیری روی سطح برای توابع عددی آشنا شدیم. در این درسنامه به بررسی انتگرال‌هایی می‌پردازیم که تابع زیر انتگرال، یک تابع برداری است.

فرض کنید رویه‌ای مانند S به معادله‌ی $g(x,y,z)=C$ را داریم که $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S باشد، می‌خواهیم انتگرال تابعی برداری مانند $\vec{F}$ را روی S یعنی $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ حساب کنیم. در این صورت اگر فرض کنیم D تصویر ناحیه S باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D \vec{F}.\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

### روش حل انتگرال روی سطح برای توابع برداری

برای حل انتگرال $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$، یعنی انتگرال تابع برداری $\vec{F}$ بر روی سطح S باید مراحل زیر را انجام دهیم:

**گام اول:** ابتدا سطح را بر یکی از صفحات مختصات تصویر می‌کنیم و ناحیه موردنظر را D می‌نامیم.

**گام دوم:** با استفاده از معادله‌ی g، تلاش می‌کنیم $d\sigma$ را حساب کنیم که این کار به دو روش، مانند آنچه در مورد روش حل انتگرال روی سطح برای توابع عددی گفتیم، صورت می‌گیرد و البته چون در این قسمت بحث‌های برداری مطرح می‌شود، برای دوری از اشتباه، بهتر است صرفاً از فرمول زیر $d\sigma$ را حساب کنیم:

$$\boxed{d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

**گام سوم:** بردار $\vec{n}$ را از رابطه‌ی $\vec{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}$ به‌دست می‌آوریم.

**گام چهارم:** عبارت $\vec{F}.\vec{n}$ را حساب کرده و به همراه $d\sigma$ که حساب کرده بودیم، در انتگرال جایگذاری کرده و بر ناحیه D انتگرال دوگانه عادی را حساب می‌کنیم.

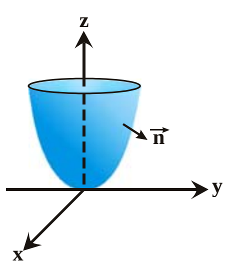
**توضیح مهم:** البته در گام‌های دوم تا چهارم می‌توان چنین استدلال کرد که چون $\vec{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}$ و $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}$، لذا می‌توان $\vec{n}d\sigma$ را که برابر با $\vec{n}d\sigma=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}$ می‌باشد، مستقیم تشکیل داده و بعد آن را در $\vec{F}$ ضرب داخلی کرد؛ بدیهی است نتیجه آن یکسان با همین حالتی است که در گام‌های دوم و چهارم گفتیم! معمولاً در حالتی که ناحیه تصویر فقط بر روی یکی از صفحات مختصات قرار می‌گیرد و $\vec{P}$ برابر $\vec{i}$، $\vec{j}$ یا $\vec{k}$ می‌باشد، محاسبه یکباره $\vec{n}d\sigma$ ساده‌تر می‌باشد. (بیشتر سؤالات مطرح شده هم از این دسته هستند).

$$\boxed{\vec{n}d\sigma=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

**توضیح مهم در مورد علامت بردار $\vec{n}$:** انتخاب علامت مثبت یا منفی برای بردار $\vec{n}$، به جهت بردار $\vec{n}$ بستگی دارد. اگر $\vec{n}$ رو به بالا باشد، آن وقت باید مؤلفه‌ی سومش مثبت باشد و اگر $\vec{n}$ رو به پایین باشد، آن وقت باید مؤلفه‌ی سومش منفی باشد.

**برای مثال اول فرض کنید رویه $z=x^2+y^2$ را داریم و قرار است بردار عمود بر سطح آن، یعنی $\vec{n}$ برون‌سو باشد، داریم:**

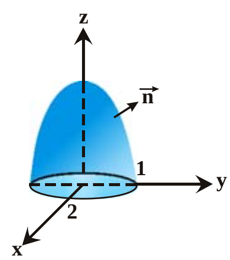
$$g:x^2+y^2-z=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(2x)\vec{i}+(2y)\vec{i}-\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$




بنابراین بردار $\vec{n}$ به‌صورت $\vec{n}=\pm\frac{(2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$ می‌باشد.

خُب چون می‌خواهیم بردار $\vec{n}$ برون‌سو (رو به خارج) باشد و همان‌طور که در شکل می‌بینید بردار برون‌سوی این سهموی به سمت پایین است $(-\vec{k})$، پس مؤلفه‌ی سوم $\vec{n}$ باید منفی باشد، و چون مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ خودش منفی است، پس باید علامت مثبت را انتخاب کنیم.

و یا برای مثال دوم، بخشی از سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ که بالای صفحه‌ی $z=0$ است را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم $\vec{n}$ برون‌سو باشد، ابتدا $\vec{\nabla}g$ را حساب می‌کنیم:




$$g:x^2+y^2+z-1=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(2x)\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

بنابراین بردار $\vec{n}$ به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $\vec{n}=\pm\frac{(2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

خُب، چون می‌خواهیم بردار $\vec{n}$ برون‌سو و به سمت خارج باشد، و مطابق شکل بردار برون‌سوی این سهموی به سمت بالا است $(\vec{k})$ پس مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ باید مثبت باشد و چون مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ خودش مثبت است، پس باز هم باید علامت مثبت را انتخاب کنیم.

**مثال ۵۰:** اگر S بخشی از سطح $z = x^2 - y^2$ باشد که داخل استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ قرار دارد و $\vec{n}$ بردار یکه رو به خارج سطح S باشد. آن‌گاه با فرض $\vec{F} = x\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$، حاصل $I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}a^4$ ۲) $-\frac{\pi}{2}a^4$ ۳) $\frac{\pi}{4}a^2(2 - a^2)$ ۴) $\frac{\pi}{2}a^2(2 - a^2)$

**پاسخ:** گزینه «۴» در این سؤال معادله‌ی رویه‌ی g به‌صورت $g: z - x^2 + y^2 = 0$ تعریف شده است که برای آن داریم: $\vec{\nabla}g = (-2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + 1$

از طرفی با توجه به اینکه تصویر رویه بر روی صفحه‌ی xoy قرار دارد، پس $\vec{p} = \vec{k}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}g.\vec{p} = [(-2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + \vec{k}].(\vec{k}) = 1$$

حالا $\vec{n}d\sigma$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{n}d\sigma = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|} = \frac{-2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{1} = -2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

حالا دیگه همه چی آماده‌ی انتگرال‌گیری شده! ابتدا تابع انتگرال را با جایگذاری $\vec{F}$ و $\vec{n}d\sigma$ بازنویسی کرده و آن را به سه انتگرال تفکیک می‌کنیم.

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = \iint_D (x\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k})(-2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k})dA = \iint_D (-2x^2 + 2xy + 1)dxdy = -2\iint_D x^2.dxdy + 2\iint_D (xy)dxdy + \iint_D dxdy$$

$$I = -2\iint_D x^2 dxdy + 2\iint_D xy\,dxdy + (\text{مساحت ناحیه } D)$$

دقت کنید در انتگرال دوم چون ناحیه متقارن است، پس حاصل انتگرال صفر است و چون ناحیه D دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است، پس مساحت ناحیه D برابر با $\pi a^2$ است، لذا داریم:

$$I = -2\iint_D x^2 dxdy + \pi a^2 = I_1 + \pi a^2$$

حالا کافیست $I_1$ را حساب کنیم؛ توجه کنید که چون ناحیه D به‌صورت $x^2 + y^2 = a^2$ است، پس کران‌های انتگرال در مختصات قطبی به‌صورت $0 \le r \le a$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ نوشته می‌شود:

همچنین در مختصات قطبی $dxdy = rdrd\theta$ و $x = r\cos\theta$، پس داریم:

$$I_1 = -2\int_0^{2\pi}\int_0^a (r^2\cos^2\theta)rdrd\theta = -2(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)\times[\frac{r^4}{4}]_0^a = -2[\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta]\times[\frac{a^4}{4}] = [-\int_0^{2\pi}(1)\,d\theta - \int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta]\times\frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow I_1 = [-2\pi - [\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}](\frac{a^4}{4}) = -\frac{\pi a^4}{2} \Rightarrow I = I_1 + \pi a^2 = \frac{\pi}{2}\mathbf{a^2(2 - a^2)}$$

**مثال ۵۱:** فرض کنید S آن قسمتی از استوانه $y = e^x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yoz، مستطیل $0 \le z \le 1$ و $D: 1 \le y \le 2$ باشد. همچنین فرض کنید $\vec{n}$ بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه yoz است. شار میدان $\vec{F}(x,y,z) = -2\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ گذرنده از S در جهت بردار $\vec{n}$ چقدر است؟

۱) $-1$ ۲) $-2$ ۳) $-3$ ۴) $-4$

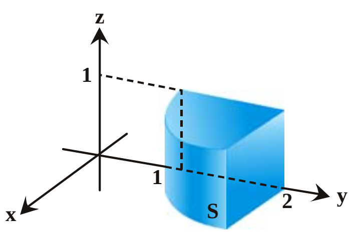
**پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که طبق گفته‌ی صورت سؤال تصویر رویه S، مستطیل $0 \le z \le 1$ و $D: 1 \le y \le 2$، روی صفحه‌ی yoz است.

حالا با فرض $g: e^x - y = 0$ داریم:

$$\vec{\nabla}g = e^x\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}g.\vec{i} = e^x \Rightarrow \vec{\nabla}g.\vec{i} = e^x$$

و بنابراین داریم:

$$\vec{n}d\sigma = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA = (\frac{e^x\vec{i} - \vec{j}}{e^x})dA = (\vec{i} - \frac{1}{e^x}\vec{j})dA$$




حالا $\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را تشکیل داده و به جای y های $\vec{F}$، $e^x$ قرار می‌دهیم:

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma = (-2\vec{i} + 2e^x\vec{j} + z\vec{k})(\vec{i} - \frac{1}{e^x}\vec{j})dA = -2 - 2 = -4$$

پس داریم:

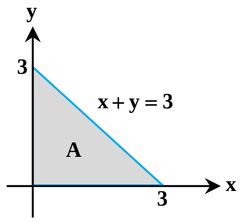
$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = \iint_D -4dA = -4\int_1^2\int_0^1 dzdy = -4$$

البته بعد از رسیدن به $I = -4\iint_D dA$، دیگر نیاز به محاسبه انتگرال دوگانه نبود و می‌توانستیم بگوییم حاصل انتگرال برابر با مساحت مستطیلی به ابعاد $1\times1$ است و لذا $I = -4(1\times1) = -4$.

**مثال ۵۲:** اگر $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}-x^{۲}\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ و S بخشی از صفحه $x+y+\frac{۱}{۲}z=۳$ در $\frac{۱}{۸}$ اول فضا و $\vec{n}$ قائم یکه رو به بالای سطح S باشد، مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) ۹

**پاسخ:** گزینه «۴» معادله‌ی سطح S به صورت $g(x,y,z)=x+y+\frac{۱}{۲}z=۳$ داده شده است که یک سطح غیربسته است. با توجه به این که صفحه تصویر صفحه xoy است بردار $\vec{p}$ برابر $\vec{k}$ می‌باشد، $\vec{n}ds$ را به دست می‌آوریم و داریم.




$$\vec{n}ds=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}=\frac{(۱,۱,\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow \vec{n}ds=(۲,۲,۱)$$

با ضرب داخلی این بردار در $\vec{F}$ داریم:

$$\vec{F}.\vec{n}ds=۲x-۲x^{۲}+x+z$$

البته z را برحسب x و y جایگزین می‌کنیم:

$$x+y+\frac{۱}{۲}z=۳\Rightarrow z=۶-۲x-۲y\Rightarrow \vec{F}.\vec{n}ds=۲x-۲x^{۲}+x+۶-۲x-۲y=۶+x-۲y-۲x^{۲}$$

ناحیه‌ی A یعنی تصویر S بر صفحه‌ی xoy را مشخص می‌کنیم. از برخورد صفحه‌ی $x+y+\frac{۱}{۲}z=۳$ و صفحه‌ی $z=۰$ به خط $x+y=۳$ می‌رسیم.

در $\frac{۱}{۸}$ اول داریم $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$، بنابراین ناحیه‌ی A به محورهای مختصات و خط $x+y=۳$ محدود می‌شود.

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\int_۰^۳\int_۰^{۳-x}(۶+x-۲y-۲x^{۲})dydx=\int_۰^۳[۶y+xy-۲x^{۲}y-y^{۲}]_۰^{۳-x}dx=\int_۰^۳[۶(۳-x)+x(۳-x)-۲x^{۲}(۳-x)-(۳-x)^{۲}]dx$$

$$=\int_۰^۳(۹+۳x-۸x^{۲}+۲x^{۳})dx=[۹x+\frac{۳x^{۲}}{۲}-\frac{۸x^{۳}}{۳}+\frac{۲x^{۴}}{۴}]_۰^۳=۹$$

**مثال ۵۳:** هرگاه $\vec{F}=z\vec{i}+x\vec{j}+۳y^{۲}z\vec{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ واقع در $\frac{۱}{۸}$ اول و محصور مابین صفحات $z=۰$ و $z=۵$ و $\vec{n}$ قائم یکّه‌ی رو به خارج آن باشد، مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ علوم دریایی و اقیانوسی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۹۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۰

**پاسخ:** گزینه «۱» سطح S قسمتی از پوسته‌ی یک استوانه است که در $\frac{۱}{۸}$ اول قرار گرفته است. این سطح بسته نیست و معادله‌ی آن به صورت $g=x^{۲}+y^{۲}-۱۶=۰$ است، این رویه را نمی‌توان به صورت $z=g(x,y)$ نوشت پس تصویر آن بر صفحه‌ی xoy نمی‌افتد. ما صفحه‌ی yoz را به عنوان صفحه‌ی تصویر انتخاب می‌کنیم که در این صورت $P=\vec{i}$ می‌باشد و داریم:

$$\vec{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{i}|}dA=\pm\frac{(۲x,۲y,۰)}{|۲x|}dA=\pm\frac{۱}{x}(x,y,۰)dA$$

با توجه به آن‌که شار رو به خارج S است، علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم:

$$\vec{n}ds=\frac{۱}{x}(x,y,۰)$$

با محاسبه‌ی ضرب داخلی داریم:

$$\vec{F}.\vec{n}ds=\frac{۱}{x}(xz+xy)dA=(z+y)dA$$

پس داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iint_D(z+y)dA=\iint_D(z+y)dydz$$

حدود z در صورت سؤال داده شده است: $۰\leq z\leq ۵$.

برای تعیین حدود y به معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱۶$ و شرط $x\geq ۰$، $y\geq ۰$ توجه می‌کنیم. در ربع اول داریم $۰\leq y\leq ۴$.

$$I=\int_۰^۵\int_۰^۴(z+y)dydz=\int_۰^۵(zy+\frac{y^{۲}}{۲})\Big|_۰^۴dz=\int_۰^۵(۴z+۸)dz=(۲z^{۲}+۸z)\Big|_۰^۵=۹۰$$

**تذکر۱:** به مقدار انتگرال $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$، شار عبوری میدان $\vec{F}$ از سطح S در جهت $\vec{n}$ گفته می‌شود.

**مثال ۵۴:** شار میدان $\vec{F}=4x\vec{i}+4x\vec{j}+2\vec{k}$ بر روی سطحی که اشتراک رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ است و جهت آن به سمت محور zها باشد، کدام است؟ (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $2\pi$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

**پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنیم S بخشی از صفحه‌ی $g(x,y,z)=z=1$ باشد که درون رویه $z=x^2+y^2$ قرار دارد و یک سطح غیربسته است. برخورد این صفحه با رویه، دایره $x^2+y^2=1$ است، پس تصویر S بر صفحه xy دایره‌ای به شعاع یک است که آن را R می‌نامیم پس در این حالت بردار قائم یکه برون‌سو بر سطح S یعنی $\vec{n}$ را که برابر است با $\vec{n}=\frac{\vec{\nabla g}}{|\vec{\nabla g}|}=\frac{\vec{k}}{1}=\vec{k}$، به‌دست می‌آوریم و در $\vec{F}$ ضرب می‌کنیم.

$$\text{شار}=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iint_S (4x\vec{i}+4y\vec{j}+2\vec{k}).(\vec{k})ds=\iint_S 2ds=2\times(S\ \text{مساحت})=2\times(R\ \text{مساحت})=2\pi$$

**نکته۶:** اگر معادله‌ی پارامتری رویه‌ای به‌صورت $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ داده شده باشد، آن‌گاه بردار یکه عمود بر رویه از رابطه‌ی $\vec{n}=\pm\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|}$ حساب می‌شود و چون گفتیم برای این رویه‌ی پارامتری، $d\sigma$ از رابطه‌ی زیر $d\sigma=|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|dudv$ حساب می‌شود، پس می‌توان گفت $\vec{n}d\sigma$ برای این رویه به شکل زیر است:

$$\vec{n}d\sigma=\pm(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v})dudv$$

**مثال ۵۵:** شار آب گذرنده از سطحی با معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+u^2\vec{j}+v\vec{k}$ در فاصله‌ی $0\le u\le 2$ و $0\le v\le 3$ با بردار سرعت $\vec{F}=y\vec{i}+2\vec{j}+xz\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

**پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{i}+2u\vec{j}\ ,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{k}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2u&0\\0&0&1\end{vmatrix}=2u\vec{i}-\vec{j}$$

بنابراین $\vec{n}d\sigma=(2u\vec{i}-\vec{j})dudv$ می‌باشد، از طرفی در این سؤال $y=u^2$، $x=u$ و $z=v$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{شار}=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\int_0^3\int_0^2(u^2\vec{i}+2\vec{j}+uv\vec{k})(2u\vec{i}-\vec{j})dudv=\int_0^3\int_0^2(2u^3-2)dudv=[v]_0^3\times[\frac{2u^4}{4}-2u]_0^2=\mathbf{12}$$

**مثال ۵۶:** اگر S رویه پارامتری با قائم رو به بالا و معادله‌ی پارامتری $S:\vec{r}(u,v)=(u^2+v^2)\vec{i}-u^2\vec{j}+(u^2+v^2)\vec{k}\ ,\ (u,v)\in D$ باشد، و $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

**پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=2u(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=2v(\vec{i}+\vec{k})\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2u&-2u&2u\\2v&0&2v\end{vmatrix}=-4uv\vec{i}+4uv\vec{k}=4uv(-\vec{i}+\vec{k})$$

پس $\vec{n}d\sigma=\pm4uv(-\vec{i}+\vec{k})dudv$ (که علامت مثبت را در نظر می‌گیریم) حالا $\vec{F}(u,v)$ را تشکیل می‌دهیم. برای این‌کار ابتدا با توجه به معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(u,v)$ متوجه می‌شویم که $x=u^2+v^2$ و $y=-u^2$ و $z=u^2+v^2$ است، حالا با جایگذاری این نتایج در $\vec{F}(x,y,z)$ می‌توانیم آن را برحسب u و v بنویسیم:

$$\vec{F}(u,v)=(u^2+v^2-u^2)\vec{i}+(-u^2+u^2+v^2)\vec{j}+(u^2+v^2-u^2)\vec{k}=v^2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

بنابراین $\vec{F}.\vec{n}$ برابر است با: $[v^2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})].4uv(-\vec{i}+\vec{k})=-4uv^3+4uv^3=0$، پس حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ نیز برابر با صفر است.

**مثال ۹۵:** فرض کنید $\vec{n}=(\cos\alpha)\vec{i}+(\cos\beta)\vec{j}+(\cos\gamma)\vec{k}$ بردار قائم یکه برون‌سوی رویه‌ی بسته‌ای مانند S باشد که جسم همگنی مانند V را که در شرایط قضیه دیورژانس صدق می‌کند را در خود محدود کرده است. اگر مرکز جرم این جسم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ و حجم آن $|V|$ و گشتاور لختی آن حول محور x ها، برابر با $I_x$ و گشتاور لختی آن حول محور z ها، $I_z$ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

۱) $\iint_S(xz\cos\alpha+۲yz\cos\beta+۳z^۲\cos\gamma)d\sigma=۹|V|\bar{z}$

۲) $\iint_S(y^۲\cos\alpha+۲xy\cos\beta-xz\cos\gamma)d\sigma=|V|\bar{x}$

۳) $\iint_S(x^۲+y^۲)(x\vec{i}+y\vec{j}).\vec{n}d\sigma=۴I_z$

۴) $\iint_S(x^۲-y^۲)(x\vec{i}+y\vec{j}).\vec{n}d\sigma=۴I_x$

**پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها مجبوریم هر چهار گزینه را بررسی کنیم؛ اما قبل از آن اولاً توجه کنید که چون سطح بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس کمک بگیریم و ثانیاً به یادآوری زیر که در فصل انتگرال‌های چندگانه اشاره کردیم، توجه کنید:

**یادآوری:** با توجه به فصل انتگرال‌های چندگانه، تساوی‌های زیر را داریم:

$$\iiint_V xdv=\bar{x}\iiint_V dv=\bar{x}|V|\ ,\ \iiint_V ydv=\bar{y}\iiint_V dv=\bar{y}|V|\ ,\ \iiint_V \bar{z}dv=\bar{z}\iiint_V dv=\bar{z}|V|$$

$$\text{گشتاور ماند نسبت به محور x ها}=I_x=\iiint_V(y^۲+z^۲)dv\ ,\ \text{گشتاور ماند نسبت به محور z ها}=I_z=\iiint_V(x^۲+y^۲)dv$$

$$\text{گزینه (۱)}:\ I=\iint_S(xz\cos\alpha+۲yz\cos\beta+۳z^۲\cos\gamma)d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(z+۲z+۶z)dv=\iiint_V(۹z)dv=۹|V|\bar{z}$$

$$\text{گزینه (۲)}:\ I=\iint_S(y^۲\cos\alpha+۲xy\cos\beta-xz\cos\gamma)d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(۰+۲x-x)dv=\iiint_V xdv=\bar{x}|V|$$

$$\text{گزینه (۳)}:\ I=\iint_S[(x^۳+xy^۲)\vec{i}+(x^۲y+y^۳)\vec{j}].\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(۳x^۲+y^۲+x^۲+۳y^۲)dv=\iiint_V ۴(x^۲+y^۲)dv=۴I_z$$

$$\text{گزینه (۴)}:\ I=\iint_S[(x^۳-xy^۲)\vec{i}+(x^۲y-y^۳)\vec{j}]\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(۳x^۲-y^۲+x^۲-۳y^۲)dv=۴\iiint_V(x^۲-y^۲)dv\neq ۴I_x$$

---

**مثال ۹۶:** اگر $\varphi:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ تابعی همواره ناصفر و دارای مشتق پیوسته باشد که $\|\nabla\varphi\|^۲=۴\varphi$ و $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi)=۱۰\varphi$، آنگاه مقدار انتگرال $\iint_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$ که در آن S کره یکه به مرکز مبدأ و $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ مشتق جهتی $\varphi$ در جهت بردار قائم یکه رو به خارج S می‌باشد، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۹۶)

۱) $۴\pi$ ۲) $۶\pi$ ۳) $۸\pi$ ۴) $۱۲\pi$

**پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial\phi}{\partial n}$، مشتق جهتی $\phi$ در راستای بردار $\vec{n}$ یعنی $\vec{\nabla}\phi.\vec{n}$ می‌باشد. با توجه به این که S یک کره کامل می‌باشد پس یک سطح بسته است و بنابراین برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_S\frac{d\phi}{\partial n}d\sigma=\iint_S\vec{\nabla}\phi.\vec{n}d\sigma=\iiint_V\operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi)dv=\iiint_V\nabla^۲\phi dv$$

از طرفی توجه کنید که داریم:

$$\operatorname{div}(\phi\vec{\nabla}\phi)=\vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\phi+\phi\operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi)=|\vec{\nabla}\phi|^۲+\phi\nabla^۲\phi=۴\phi+\phi\nabla^۲\phi$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$۴\phi+\phi\nabla^۲\phi=۱۰\phi\Rightarrow\phi\nabla^۲\phi=۶\phi\Rightarrow\nabla^۲\phi=۶$$

در نتیجه داریم:

$$I=\iiint_V ۶dv=۶\times\text{حجم کره واحد}=۶\times\frac{۴\pi}{۳}=۸\pi$$

---

**نکته ۷:** فرض می‌کنیم C یک منحنی بسته و S رویه‌ای هموار با مرز C باشد. در این صورت برای میدان برداری مشتق‌پذیر $\vec{F}$، اگر $\operatorname{div}\vec{F}=۰$ باشد، حاصل انتگرال $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ مستقل از انتخاب S است. عکس این مطلب نیز برقرار است؛ یعنی اگر حاصل انتگرال، مستقل از انتخاب S باشد، آن‌گاه $\operatorname{div}\vec{F}=۰$ خواهد بود.

**مثال ۹۷:** فرض کنید $C_۱$ خط مستقیم بین $(-۱,۰,۰)$ تا $(۱,۰,۰)$، و $C_۲$ نیم‌دایره $y\geq۰$، $z=۰$ و $x^۲+y^۲=۱$ باشد، همچنین S یک سطح هموار با لبه‌ی $C_۱\cup C_۲$ با قائم رو به خارج باشد و $\vec{F}$ به‌صورت مقابل تعریف شود: $\vec{F}=(\alpha x^۲-z)\vec{i}+(xy+y^۳+z)\vec{j}+\beta y^۲(z+۱)\vec{k}$

حاصل انتگرال $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$، در صورتی که حاصل I مستقل از انتخاب S باشد، کدام است؟

۱) $-۲\pi$ ۲) $-\frac{۳}{۲}\pi$ ۳) $-\frac{۳}{۴}\pi$ ۴) $-\frac{۳}{۸}\pi$

**پاسخ:** گزینه «۴» برای آن‌که انتگرال I مستقل از انتخاب S باشد، باید دیورژانس $\vec{F}$ صفر باشد: $\operatorname{div}\vec{F}=۲\alpha x+x+۳y^۲+\beta y^۲=۰$

در این صورت $\alpha=\frac{-۱}{۲}$ و $\beta=-۳$ به‌دست می‌آید. حال برای محاسبه انتگرال موردنظر، سطح S را به‌صورت $x^۲+y^۲\leq۱$، $z=۰$ و $y\geq۰$ با بردار قائم رو به خارج $\vec{k}$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

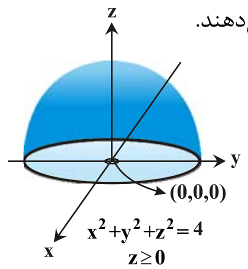
$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_S\vec{F}.\vec{k}d\sigma=\iint_S-۳y^۲dxdy=-۳\int_۰^\pi\int_۰^۱r^۲\sin^۲\theta.rdrd\theta=\frac{-۳\pi}{۸}$$

**نکته ۸:** گاهی اوقات سؤالاتی داریم که سطحِ S **بسته نیست** و ما نمی‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. در این‌گونه سؤالات ما نباید نگران باشیم! چون می‌توانیم یک سطح ساده مانند $S'$ را به سطح S اضافه کنیم و آن را به یک منحنی بسته تبدیل کرده و سپس از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. واضح است در نهایت باید مقدار انتگرالی را که روی سطح $S'$ حساب کرده‌ایم، از مقدار انتگرالی که با استفاده از قضیه دیورژانس به‌دست آورده‌ایم، کم کنیم.

## تشخیص باز یا بسته بودن سطح S

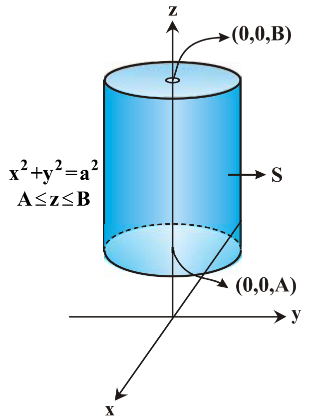
یک موضوع مهم در حل سؤالات انتگرال روی سطح S، آن است که بتوانیم با توجه به توضیحات صورت سؤال، **باز** یا **بسته بودن** سطح S را تشخیص دهیم. گاهی اوقات بسته بودن S در مسأله به صراحت عنوان شده است، اما اغلب اوقات چنین نیست و ما باید این مطلب را تشخیص دهیم.
سعی می‌کنیم با چند مثال مهم این موضوع را آموزش بدهیم:

**الف)** یک کره‌ی کامل مثل $x^2+y^2+z^2=a^2$ یا یک بیضی‌گون کامل مثل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ سطح بسته تشکیل می‌دهند.



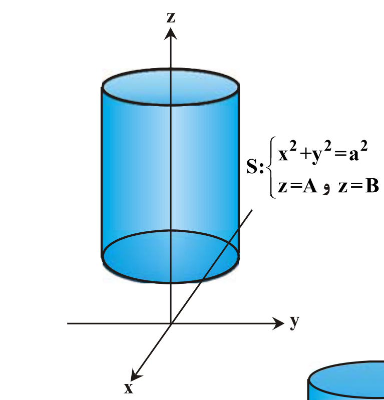

اما نیم‌کره‌ی بالایی یا نیمه‌ی بالایی یک بیضی‌گون یک سطح بسته نیست. بنابراین اگر گفته شود S نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ است، آن را سطح باز درنظر می‌گیریم (مطابق شکل). همین عبارت را طراح سؤال ممکن است به شکلی دیگر بیان کند: سطح S $x^2+y^2+z^2=4$ با شرط $z\geq 0$ است؛ در این صورت هم S سطح باز است. (تفاوتی هم ندارد که $z>0$ بنویسند یا $z\geq 0$. چون هر دوی آنها در آزمون‌ها دیده شده است.)
برای درک بهتر مثلاً توجه کنید که نقطه‌ی $(0,0,0)$ در معادله‌ی کره صدق نمی‌کند، پس جزو سطح S نیست.

**ب)** معادله‌ی یک استوانه اگر به صورت تساوی $x^2+y^2=a^2$ نوشته شود، فقط شامل بدنه‌ی استوانه است. در چنین شرایطی طراح سؤال برای آن که به ما بگوید چه قسمتی از سطح استوانه مورد نظرش است، محدودیتی به صورت $A\leq z\leq B$ یا $A<z<B$ هم می‌دهد که در هر صورت، S یک سطح باز خواهد بود.

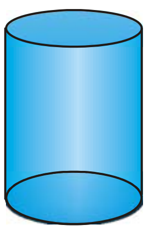



در واقع شرط $x^2+y^2=a^2$ به ما اجازه نمی‌دهد از نقاط روی سطح استوانه خارج شده و نقاط داخلی آن را هم جزو S درنظر بگیریم. مثلاً نقطه‌ی $(0,0,A)$ و نقطه $(0,0,B)$ جزء سطح S نیستند؛ زیرا در شرط $x^2+y^2=a^2$ صدق نمی‌کنند، پس سقف و کف این شکل جزو سطح S نیستند و S یک سطح باز خواهد بود.
یک حالت دیگر آن است که طراح سؤال به جای شرط $A\leq z\leq B$ به صورت فارسی بگوید:
«بخشی از استوانه که **بین** صفحات $z=A$ و $z=B$ قرار دارد» در این صورت هم S سطح باز خواهد بود.

**ج)** حالا اگر طراح سؤال بخواهد یک سطح بسته به ما بدهد، می‌تواند صفحاتی مانند $z=A$ و $z=B$ را که سقف یا کف شکل را تشکیل می‌دهند به سطح رویه اضافه کند. مثلاً وقتی می‌خواهد S را معرفی کند، می‌گوید:
S سطح نیم‌کره‌ی بالایی **و** صفحه‌ی $z=0$ است. حرف ربط **«و»** نشان می‌دهد که S از ترکیب دو رویه با هم ایجاد می‌شود؛ یعنی مثلاً در مورد نیم‌کره، سطح نیم‌کره و صفحه‌ی $z=0$ روی هم، S را تشکیل می‌دهند. پس S یک سطح بسته است. همچنین اگر طراح سؤال بخواهد از استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ یک سطح بسته بسازد، مثلاً ممکن است بگوید:




S بخشی از استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ $(0\leq z\leq 3)$ **به همراه** صفحات $z=0$ و $z=3$ است که در این صورت سقف و کف شکل هم جزو S هستند و S بسته خواهد بود. یک نوع ادبیات دیگر هم برای معرفی یک سطح بسته داریم. می‌دانیم که معادله‌ی $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ نشان‌دهنده‌ی نقاط روی نیم‌کره‌ی بالایی است. حالا اگر طراح سؤال بخواهد یک ناحیه‌ی توپر داشته باشد، به جای تساوی از نامعادله استفاده می‌کند. مثلاً می‌نویسد $0\leq z\leq\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. در این صورت شکل حاصل ناحیه‌ی داخل نیم‌کره را هم شامل می‌شود. (مانند آن است که یک سیب کروی را دقیقاً نصف کرده باشید.) در این حالت، تمام سطح دورتادور این جسم، یک سطح بسته است. در واقع در این روش، طراح سؤال یک ناحیه‌ی **توپر** را که به دو یا چند رویه محدود است، بیان می‌کند و می‌گوید که S **سطح خارجی** یا **مرز** این ناحیه است. توجه داشته باشید که در فضای ۳ بعدی، مرز یک ناحیه همان پوسته یا سطح خارجی آن است. نشانه‌ی این نوع از سؤالات آن است که طراح معادله‌ی خود رویه را به صورت نامساوی می‌نویسد، مثلاً به جای $x^2+y^2=a^2$ می‌نویسد $x^2+y^2\leq a^2$ یا به جای $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ می‌نویسد $0\leq z\leq\sqrt{1-x^2-y^2}$


سطح خارجی ناحیه
$0\leq z\leq 5,\ x^2+y^2\leq 9$


مرز (یا سطح) ناحیه محدود به
$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ ,z=0$

حالا به عنوان تمرین، چند نمونه زیر را مرور می‌کنیم:

**۱) S سطح ناحیه‌ی محدود به نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ و صفحه‌ی $z=0$ است.** (طبق قسمت (ج)، حرف ربط «و» نشان می‌دهد S بسته است).

**۲) S مرز ناحیه‌ی D محدود به $|x|\le 1$ ،$|y|\le 1$ و $|z|\le 1$ است.** (همه عبارات به صورت نامساوی هستند، پس طبق قسمت (ج) یک ناحیه توپر داده شده، پس S بسته است)

**۳) S سطح رویه‌ی $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ در بالای صفحه‌ی xoy است.** (طبق قسمت (ب) رویه S باز است)

**۴) S سطح ناحیه‌ی D با مشخصات $x^2+y^2\le 9$ و $0\le z\le 5$ است.** (همه عبارت به صورت نامساوی هستند، پس طبق قسمت (ج) یک ناحیه توپر داده شده، پس S بسته است)

**۵) S سطح استوانه $x^2+y^2=4$ باشرط $-1\le z\le 2$ است.** (طبق قسمت (ب) رویه S باز است)

**۶) سطح S شامل نیم‌کره‌ی $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه‌ی $z=0$ است.** (طبق قسمت (ج) حرف ربط «و» می‌گوید S بسته است)

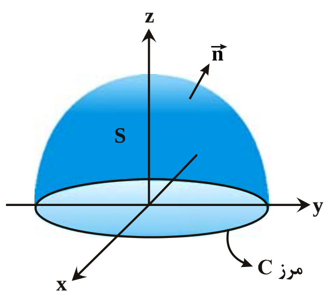
**۷) سطح S بخشی از استوانه‌ی $x^2+y^2=9$ $(0\le z\le 1)$ به‌همراه صفحات $z=0$ و $z=1$ است.** (طبق قسمت (ج) واژه‌ی «به‌همراه» می‌گوید S بسته است)

**۸) S مرز ناحیه‌ی $x^2+y^2\ge 1$ ،$x^2+y^2+z^2\le 4$ است.** (نامساوی‌ها نشان می‌دهند S مرز یک ناحیه توپر است، پس بسته است. توجه کنید که ناحیه موردنظر، داخل کره‌ای به شعاع ۲ و خارج از استوانه به شعاع یک قرار دارد.)

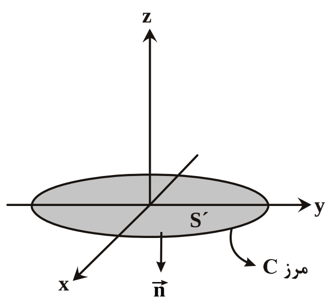
**مثال ۹۸:** اگر S سطح نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ برای $z>0$ باشد و $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج رویه S باشد و $\vec{F}=(2xz)\vec{i}+(yz)\vec{j}+(1+z^2)\vec{k}$، در این صورت حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{4}a^4-\pi a^2$
۲) $\frac{5a^4\pi}{2}$
۳) $\frac{5\pi a^4}{4}$
۴) $\frac{5\pi a^4}{4}+\pi a^2$

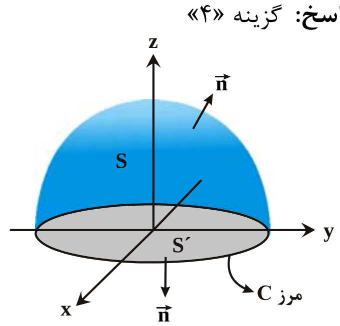
**پاسخ:** گزینه «۴»



(شکل ۱)



(شکل ۲)



(شکل ۳)

خُب همان‌طور که می‌بینید سطح S بسته نیست و نمی‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد! ولی به راحتی با اضافه کردن $S'$ یعنی بخشی از صفحه‌ی $z=0$ که درون دایره $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد، می‌توان یک ناحیه بسته تولید کرده و از قضیه دیورژانس استفاده کرد؛ پس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma \Rightarrow I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\underbrace{\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv}_{I_1}-\underbrace{\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_2}$$

ابتدا انتگرال $I_1$ را حساب می‌کنیم، برای این منظور توجه کنید که داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z+z+2z=5z$$

$$I_1=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(5z)dzdydx=5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a(\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=5(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi)(\int_0^a\rho^3d\rho)$$

$$\Rightarrow I_1=5(2\pi)[\frac{\sin^2\varphi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\rho^4}{4}]_0^a=10\pi(\frac{1}{2})(\frac{a^4}{4})=\frac{5a^4\pi}{4}$$

خُب حالا باید سراغ محاسبه‌ی $I_2$ برویم:

$$I_2=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}-(z^2+1)dydx=\iint_{S'}-(0+1)dydx=-\iint_{S'}dydx=-S_D=-\pi a^2$$

بنابراین داریم:

$$I=I_1-I_2=\frac{5\pi a^4}{4}-(-\pi a^2)=\frac{5\pi a^4}{4}+\pi a^2$$

**توضیح در مورد جهت بردار قائم $\vec{n}$ در محاسبه‌ی انتگرال $I_2$:** بردار قائم $\vec{n}$ برابر با $\underline{\underline{-k}}$ تعیین شد، چون که جهت این بردار، همیشه باید جوری باشد که رو به خارج سطح بسته‌ی $S\cup S'$ باشد.

**مثال ۹۹: اگر S بخشی از سطح مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، (برای $0<z<h$) بوده و $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ بردار عمود خارجی رو به بالا بر این سطح باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma$ کدام است؟**

۱) $-\dfrac{\pi h^4}{2}$ ۲) $\dfrac{\pi h^4}{2}$ ۳) $\pi h^4$ ۴) $-\pi h^4$

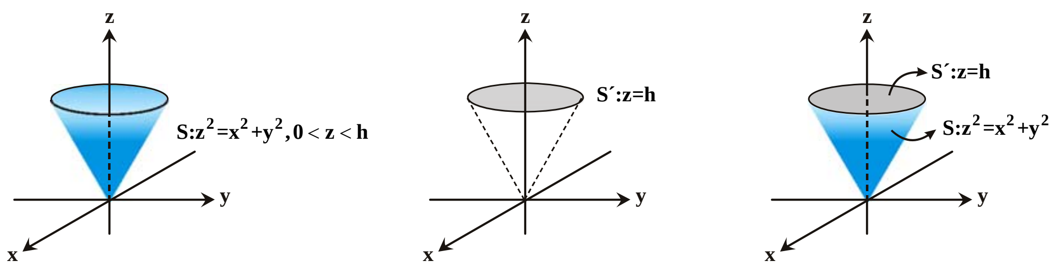
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که انتگرال داده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$I=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma \quad , \quad \vec{F}=(x^2,y^2,z^2)$$

ناحیه‌ی S، فقط شامل بخشی از بدنه‌ی مخروط است، یعنی درپوش ندارد؛ پس **بسته نیست**. می‌خواهیم با اضافه کردن این درپوش به سطح S، آن را به سطحی بسته تبدیل کنیم. فرض کنیم $S'$ قسمتی از صفحه‌ی $z=h$ است که با مخروط $z^2=x^2+y^2$ تلاقی دارد. در این صورت $S\cup S'$ یک سطح بسته است. پس می‌توان با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس نوشت:

$$J=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_V (2x+2y+2z)dv$$

که ناحیه‌ی V درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=h$ قرار دارد. معادله‌ی $z=\sqrt{x^2+y^2}$ به ازای $\pm x$ و $\pm y$ تغییر نمی‌کند، بنابراین با استفاده از فرد بودن تابع زیر انتگرال می‌توان نتیجه گرفت که $\iiint_V (2x+2y)dv=0$ .




S مخروط بدون درپوش است. — می‌خواهیم بخشی از صفحه‌ی $z=h$ را به مخروط اضافه کنیم. — با ترکیب این دو سطح به یک سطح بسته می‌رسیم

خُب حالا باید مقدار $J=\iiint_V 2zdv$ را حساب کنیم، برای ناحیه محدود به مخروط و صفحه، از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. از برخورد مخروط با صفحه‌ی $z=h$ دایره‌ی $x^2+y^2=h^2$ به‌دست می‌آید. پس داریم $0\le\theta\le 2\pi$ ؛ $0\le r\le h$ کران پایین z از معادله‌ی مخروط به‌دست می‌آید $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ و کران بالای آن $z=h$ است. پس داریم:

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_r^h 2z\,r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^h r[\frac{z^2}{2}]_r^h drd\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^h r(\frac{h^2}{2}-\frac{r^2}{2})drd\theta=2\int_0^{2\pi}[\frac{h^2r^2}{4}-\frac{r^4}{8}]_0^h d\theta=\frac{\pi h^4}{2}$$

خُب حالا باید مقدار انتگرال سطح روی $S'$ را حساب کنیم و مقدار آن را از $\dfrac{\pi h^4}{2}$ کم کنیم تا به I برسیم. روی $S':z=h$ داریم: $\vec{n}=(0,0,1)$ بنابراین $\vec{F}.\vec{n}=z^2=h^2$ و می‌توان نوشت:

$$\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}h^2d\sigma=h^2\times(S'\ \text{مساحت})=h^2(\pi h^2)=\pi h^4$$

پس خواهیم داشت:

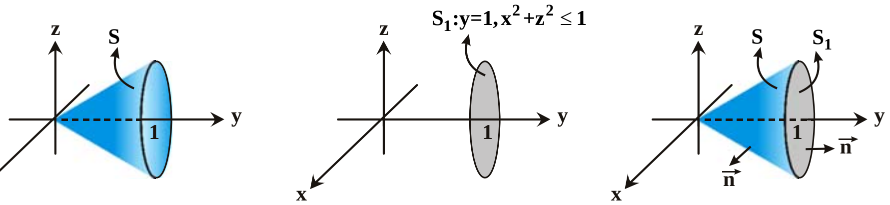
$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}$$

**مثال ۱۰۰:** فرض کنید $\vec{F}=(y^2+z^2)\vec{i}-y^2\vec{j}+2yz\vec{k}$ و S رویه‌ای با معادله‌ی $x^2+z^2=y^2$ $(0\le y<1)$ و $\vec{n}$ قائم یکه رو به خارج رویه S است، مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\pi$ ۳) $-\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\pi$

**پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که رویه S بسته نیست، بنابراین نمی‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد؛ لذا برای حل این سؤال بهتر است سطح $S_1$ را به صورت مشخص شده به سطح S اضافه کنیم تا شرایط استفاده از قضیه دیورژانس مهیا شود:

$$\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma+\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma \Rightarrow \iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$




حالا با توجه به اینکه سطح $S\cup S_1$ بسته است، پس با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\text{div}\vec{F})\,dv$$

ابتدا دیورژانس تابع برداری $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

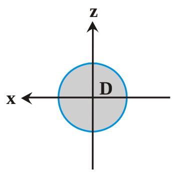
$$\vec{F}=(y^2+z^2\ ,\ -y^2\ ,\ 2yz)\Rightarrow \text{div}\vec{F}=\frac{\partial(y^2+z^2)}{\partial x}+\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(2yz)}{\partial z}=-2y+2y=0\Rightarrow \oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=0$$

از طرفی با توجه به اینکه سطح $S_1$ یعنی صفحه‌ی $y=1$ یک صفحه موازی xoz است، بنابراین $\vec{n}=\vec{j}$ و لذا داریم:

$$\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint_D(y^2+z^2,-y^2,2yz).(0,1,0)dA=\iint_D -y^2dA=-\iint_D(1)dA=-(\text{مساحت } D)=-\pi$$

ناحیه‌ی D تصویر $S_1$ بر صفحه‌ی xoz است که با معادله‌ی $x^2+z^2=1$ مشخص می‌شود.

$$D:x^2+z^2=1\quad ;$$




به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=0-(-\pi)=\pi$$

**مثال ۱۰۱:** چنانچه S سطح رویه $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ در بالای صفحه xoy باشد، $\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds$ چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۹۰)

**$\vec{n}$ برداری که عمود بر سطح بوده و $\vec{F}$ به صورت مقابل می‌باشد:** $\vec{F}(x,y,z)=(-6xy-y)\vec{i}+(3y^2-1)\vec{j}+(3x^2)\vec{k}$

۱) $2\pi$ ۲) $6\pi$ ۳) $12\pi$ ۴) $24\pi$

**پاسخ:** گزینه «۳» رویه‌ی $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ یک سطح باز است که با صفحه‌ی $z=0$ در دایره‌ی $x^2+y^2=4$ برخورد می‌کند. اگر فرض کنیم $S'$ بخشی از صفحه‌ی $z=0$ است که درون دایره‌ی $x^2+y^2=4$ قرار دارد، رویه‌ی $S\cup S'$ بسته می‌شود. روی $S\cup S'$ با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(\text{div}\vec{F})dv=\iiint_V(-6y+6y+0)dv=0$$

کافیست انتگرال روی $S':z=0$ را حساب کنیم. برای این صفحه داریم $\vec{n}=\vec{k}$ و با توجه به معادله‌ی $g:z=0$ داریم:

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{\sqrt{1}}{1}dA=dA$$

بنابراین داریم:

$$\text{جواب}=0+\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{k}ds=\iint_{S'}3x^2dA=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos^2\theta\, rdrd\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)d\theta\times\int_0^2 r^3dr=(3)(\pi)(4)=12\pi$$

(توجه داشته باشید که اگر در صورت سؤال صفحه $z=0$ هم گفته می‌شد، در این صورت رویه داده شده یک رویه بسته می‌شد.)

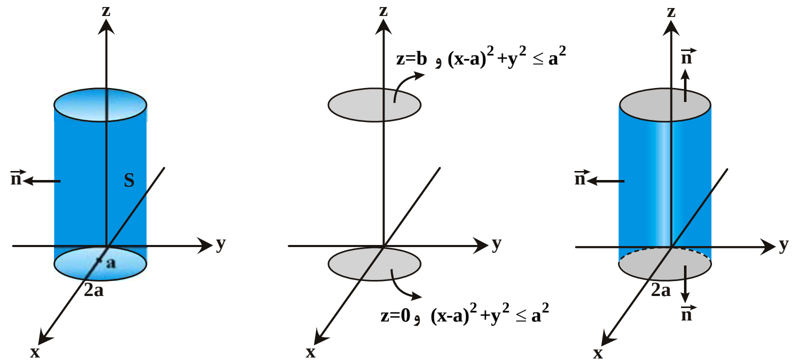
**مثال ۱۰۲:** فرض کنید S قسمتی از استوانه‌ی $x^2+y^2=2ax$ باشد که بین صفحات افقی $z=0$ و $z=b$ $(b>0)$ قرار دارد. شار رو به خارج میدان $\vec{F}=x\vec{i}+(\cos z^2)\vec{j}+e^z\vec{k}$ کدام است؟

۱) $2\pi a^2 b$ ۲) $b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2$ ۳) $\pi a^2 b$ ۴) $b\pi a^2+e^b\pi a^2-2\pi a^2$

**پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی استوانه به صورت مقابل است: $x^2+y^2=2ax \Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$

در واقع قاعده‌ی این استوانه در صفحه‌ی xoy یک دایره به مرکز $(a,0)$ و شعاع $a$ است. از طرفی استوانه در راستای محور zها، بین صفحات $z=0$ و $z=b$ قرار دارد، شکل سمت چپ سطح S را نشان می‌دهد. دقت کنید شار خروجی از پوسته‌ی جانبی استوانه (یعنی همان S) خواسته شده است و درپوش‌های استوانه که از تلاقی استوانه با صفحات $z=0$ و $z=b$ حاصل می‌شود، جزء سطح S **نیستند**. اما می‌توانیم این درپوش‌ها را قرار دهیم و تساوی زیر را بنویسیم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv-\iint_{z=b}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=I_1-I_2-I_3$$




ابتدا انتگرال اول را به دست می‌آوریم و بعد از آن انتگرال‌های دوم و سوم را حساب می‌کنیم و مقدار آن‌ها را از انتگرال اول کم می‌کنیم. فرض کنیم D تصویر ناحیه‌ی V بر صفحه‌ی xoy باشد.

$$I_1=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_V(1+0+e^z)\,dv=\iint_D dxdy\int_0^b(1+e^z)dz=\iint_D dxdy[z+e^z]_0^b=\iint_D(b+e^b-1)\,dxdy$$

$$I_1=(b+e^b-1)\iint_D dxdy=(b+e^b-1)\times(\text{مساحت ناحیه } D)$$

ناحیه‌ی D درون دایره‌ی $(x-a)^2+y^2=a^2$ است و لذا مساحت آن $\pi\times a^2=\pi a^2$ می‌باشد.

بنابراین $I_1=(b+e^b-1)\pi a^2=b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2$، حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال دوم، یعنی محاسبه‌ی شار روی سطح $z=b$ می‌رویم: واضح است بردار $\vec{n}$ برابر با $+\vec{k}$ است (چون باید رو به خارج سطح بسته باشد)

$$\iint_{z=b}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{D_1}(\vec{F}.\vec{k})\,dA=\iint_{D_1}e^b dA=e^b\iint_{D_1}dA=e^b\times(\text{مساحت ناحیه } D_1)=e^b\times\pi a^2$$

و در نهایت سراغ حل انتگرال سوم می‌رویم: (توجه دارید که بردار $\vec{n}$ باید رو به خارج سطح بسته باشد، یعنی $\vec{n}=-\vec{k}$ است)

$$\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{D_2}\vec{F}.(-\vec{k})\,dA=\iint_{D_2}(-e^0)dA=-\iint_{D_2}dA=-(\text{مساحت ناحیه } D_2)=-\pi a^2$$

بنابراین حاصل انتگرال خواسته شده در صورت سؤال به صورت مقابل است: $I=I_1-I_2-I_3=b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2-e^b\pi a^2+\pi a^2=\pi a^2 b$

**مثال ۱۰۳:** فرض کنید $\vec{F}=(x^2+y+z^2+2)\vec{i}+(e^{x^2}+y^2)\vec{j}+(3+x)\vec{k}$ و s بخشی از سطح کروی $x^2+y^2+z^2=3a^2+2az$ باشد به طوری که $a>0$ و ناحیه بالای صفحه xoy باشد. در این صورت شار رو به خارج $\vec{F}$ در سراسر سطح s کدام است؟

۱) $3\pi a^2$ ۲) $9\pi a^2$ ۳) $6\pi a^2$ ۴) $18\pi a^2$

**پاسخ:** گزینه «۲» معادله‌ی کره داده شده را می‌توان به‌صورت $x^2+y^2+(z-a)^2=4a^2$ نوشت. سطح s بخشی از این کره است که بالای صفحه‌ی $z=0$ قرار دارد. از برخورد کره و صفحه‌ی $z=0$ به دایره‌ی $x^2+y^2=3a^2$ می‌رسیم. پس سطح s، به همراه سطح درون دایره‌ی $x^2+y^2=3a^2$ روی صفحه $z=0$ که آن را $s'$ می‌نامیم، یک سطح بسته را تشکیل می‌دهند، طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$I=\iint_s\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{s\cup s'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{s'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\underbrace{\iiint_v \operatorname{div}\vec{F}dv}_{I_1}-\underbrace{\iint_{s'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_2}$$

ناحیه‌ی v ناحیه‌ی درون $s\cup s'$ است. با محاسبه‌ی $\operatorname{div}\vec{F}$ می‌بینیم که $\operatorname{div}\vec{F}=2x+2y$ است. با توجه به فرد بودن $2x$ و $2y$ و با استفاده از این نکته که جایگذاری $\pm x$ و $\pm y$ معادله مرزهای v را تغییر نمی‌دهد، خواهیم داشت: $I_1=\iiint_v(2x+2y)dv=0$

کافیست $I_2$ را حساب کنیم. بردار عمود بر سطح $s'$ و رو به خارج، بردار $(-\vec{k})$ می‌باشد. بنابراین داریم: $\iint_s\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma$ را به‌دست می‌آوریم.

$$I=0-I_2=-\iint_{s'}\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma=\iint_{s'}(3+x)dxdy=\iint_{s'}3dxdy=3\,(\text{مساحت } s')=9\pi a^2$$

و در نتیجه $\iint_s\vec{F}.\vec{n}d\sigma=9\pi a^2$ است.