متمم کتاب معادلات دیفرانسیل ارشد و دکتری

«ریاضی عمومی (۱)»

خلاصه مباحث مهم روش‌های انتگرال‌گیری

این فایل مناسب داوطلبانی است که در بحث انتگرال‌گیری نیاز به یادآوری مباحث دارند (برای حل سؤالات معادلات دیفرانسیل).

توجه: کسانی که کتاب ریاضی عمومی (۱) را دارند، نیاز نیست این فایل را تهیه نمایند.

درسنامه: فرمول‌های انتگرال‌گیری و استفاده از تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

در فصل مشتق، داستان از این قرار بود که تابعی به ما داده می‌شد و از ما می‌خواستند مشتق آن را حساب کنیم. در فصل انتگرال، برعکس این کار را از ما می‌خواهند، یعنی عبارتی به ما داده می‌شود و از ما می‌خواهند که معلوم کنیم؛ عبارت داده شده، مشتق چه تابعی است؟ مثلاً اگر تابع $f(x)=2x$ را به شما بدهند و سؤال کنند؛ « $2x$ » مشتق چه تابعی است؟ جواب شما چیه؟ واضح است؛ اولین جوابی که به ذهن شما می‌رسد، $F(x)=x^2$ است. به x^2 اصطلاحاً تابع اولیه $2x$ هم گفته می‌شود. این فعل و انفعالات را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم و می‌گوییم انتگرال $2x$، برابر با x^2+c است:

$$\int(2x)dx=x^2+c$$

اما c از کجا اومد؟ خب همان‌طور که گفتیم؛ وقتی از $2x$ انتگرال می‌گیریم، در واقع به زبان دیگر داریم می‌پرسیم؛ مشتق چه تابعی، برابر با $2x$ است؟ یکی از جواب‌ها x^2 است، ولی توجه کنید؛ مشتق x^2+10، یا $x^2-\sqrt{2}$ و یا مثلاً $x^2+\pi$ و به عبارت دیگه؛ مشتق هر عبارتی به‌صورت x^2+c، $2x$ میشه، برای همین باید عدد ثابت c نوشته شود. بدیهی است؛ اگر از سمت راست تساوی فوق، مشتق بگیریم، باید به تابع زیر انتگرال برسیم:

$$\int(2x)dx=x^2+c\ \Rightarrow (x^2+c)'=2x+0=2x$$

برای این که بحث کمی جدی‌تر بشه! به تعریف زیر توجه کنید:

اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد و $F(x)$، تابع اولیه $f(x)$ باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

فرمول‌های مهم انتگرال

خُب، حالا باید فرمول‌هایی را یاد بگیریم که ارتباط صددرصدی با فرمول‌های مشتق دارند. در فرمول‌های زیر u تابعی از x می‌باشد:

۱) $\int u^n\,du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c\qquad (n\neq -1)$

۲) $\int \dfrac{du}{u}=\mathrm{Ln}|u|+c$

۳) $\int a^u\,du=\dfrac{a^u}{\mathrm{Ln}a}+c\qquad (a>0,a\neq 1)$

۴) $\int e^u\,du=e^u+c$

۵) $\int \sin u\,du=-\cos u+c$

۶) $\int \cos u\,du=\sin u+c$

۷) $\int(1+\mathrm{tg}^2u)du=\int\dfrac{du}{\cos^2u}=\mathrm{tg}u+c$

۸) $\int(1+\mathrm{cotg}^2u)du=\int\dfrac{du}{\sin^2u}=-\mathrm{cotg}u+c$

۹) $\int \mathrm{tg}u\,du=-\mathrm{Ln}|\cos u|+c$

۱۰) $\int \mathrm{cotg}u\,du=\mathrm{Ln}|\sin u|+c$

۱۱) $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctg}\dfrac{u}{a}+c=-\dfrac{1}{a}\mathrm{Arccotg}(\dfrac{u}{a})+c\ ,\ a\neq 0$

۱۲) $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\mathrm{Arcsin}(\dfrac{u}{a})+c=-\mathrm{Arccos}(\dfrac{u}{a})+c\ ,\ a\neq 0$

۱۳) $\int\dfrac{du}{\cos u}=\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4})|+c=\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}u+\sec u|+c$

۱۴) $\int\dfrac{du}{\sin u}=\mathrm{Ln}|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}|+c=\mathrm{Ln}|\csc u-\mathrm{cotg}u|+c$

۱۵) $\int\cosh u\,du=\sinh u+c$

۱۶) $\int\sinh u\,du=\cosh u+c$

۱۷) $\int\mathrm{cotgh}u\,du=\mathrm{Ln}|\sinh u|+c$

۱۸) $\int\mathrm{tgh}u\,du=\mathrm{Ln}(\cosh u)+c$

۱۹) $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\mathrm{Ln}(u+\sqrt{u^2-a^2})+c=\cosh^{-1}(\dfrac{u}{a})+c$

۲۰) $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\mathrm{Ln}|u+\sqrt{u^2+a^2}|+c=\sinh^{-1}(\dfrac{u}{a})+c\ ,\ a>0$

۲۱) $\int\dfrac{du}{u^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+c=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\mathrm{tgh}^{-1}(\dfrac{u}{a}) & ;\ |u|<|a|\\ -\dfrac{1}{a}\mathrm{cotgh}^{-1}(\dfrac{u}{a}) & ;\ |u|>|a|\end{cases}$

۲۲) $\int\dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\dfrac{1}{a}\sec^{-1}|\dfrac{u}{a}|+c\ ,\ a>0$

۲۳) $\int\sqrt{u^2\pm a^2}\,du=\dfrac{1}{2}[u\sqrt{u^2\pm a^2}\pm a^2\mathrm{Ln}|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|]+c$

۲۴) $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\dfrac{1}{2}[u\sqrt{a^2-u^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{u}{|a|}]+c$

اکثر روابط فوق با توجه به فرمول‌های مشتق قابل درک هستند و برخی دیگر نیز با توجه به قواعد انتگرال‌گیری که بعداً آموزش داده خواهد شد، قابل محاسبه هستند، ولی بهتر است این فرمول‌ها حفظ شوند. البته فرمول‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۴ از اهمیت کمتری برخوردار هستند و سه فرمول ۱۳، ۱۴، ۱۹، ۲۰ و ۲۱ بهتر است حفظ شوند، چون در درس معادلات زیاد از این فرمول‌ها استفاده می‌شود. اما اگر حاصل آن‌ها یادتان نباشد با استفاده از تکنیک‌هایی که در آینده خواهیم گفت، قابل محاسبه هستند.

خواص انتگرال نامعین

از خواص مهم انتگرال نامعین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) $\int [f(u)+g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$

۲) اگر k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\int kf(u)du = k\int f(u)du$

۳) هیچ وقت **نمی‌توان نوشت:** $\int \frac{f(u)}{g(u)}du = \frac{\int f(u)du}{\int g(u)du}$, $\int f(u)g(u)du = \int f(u)du \times \int g(u)du$

۴) انتگرال یک تابع فرد، همواره تابعی زوج است. ولی انتگرال یک تابع زوج، تابعی نه زوج و نه فرد است. البته صرف‌نظر از ثابت c می‌توان گفت، انتگرال یک تابع زوج، یک تابع فرد می‌شود:

$$\int \underbrace{\cos x}_{\text{تابع زوج}} dx = \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}} + c \qquad , \qquad \int \underbrace{\sin x}_{\text{تابع فرد}} dx = \underbrace{-\cos x}_{\text{تابع زوج}} + c$$

قبل از ورود به بحث اصلی انتگرال، در این قسمت سعی کرده‌ام کمی تمرین ابتدایی را با هم انجام دهیم:

$$۱)\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{۱}{۲}}dx = \frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c = ۲x^{\frac{۱}{۲}} + c = ۲\sqrt{x} + c \quad , \quad ۲)\int \frac{dx}{x+۲} = Ln|x+۲| + c$$

$$۳)\int ۳^x dx = \frac{۳^x}{Ln۳} + c \quad , \quad ۴)\int ۵e^x dx = ۵\int e^x dx = ۵e^x + c$$

$$۵)\int \sin ۳x\, dx = \int (\frac{۳}{۳})\sin ۳x dx = \frac{۱}{۳}\int (\sin ۳x)۳dx = -\frac{۱}{۳}\cos ۳x + c$$

$$۶)\int \cos ۷x\, dx = \int \frac{۷}{۷}\cos ۷x\, dx = \frac{۱}{۷}\int (\cos ۷x)۷dx = \frac{۱}{۷}\sin ۷x + c$$

$$۷)\int (۲+tg^۲x)dx = \int [۱+(۱+tg^۲x)]dx = \int dx + \int (۱+tg^۲x)dx = x + tgx + c$$

$$۸)\int \pi(۱+cotg^۲x)dx = -\pi\, cotgx + c \quad , \quad ۹)\int tg\pi x\, dx = \frac{۱}{\pi}\int \pi tg\pi x\, dx = -\frac{۱}{\pi}\int \frac{-\pi\sin \pi x}{\cos \pi x}dx = -\frac{۱}{\pi}Ln|\cos \pi x| + c$$

$$۱۰)\int (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x})dx = \int \frac{\sin x}{\sin x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = x + Ln|\sin x| + c$$

در این سؤال در انتگرال دوم با فرض $u = \sin x$، آن‌گاه $du = \cos x dx$ و لذا با انتگرال $\int \frac{du}{u}$ روبه‌رو هستیم.

$$۱۱)\int \frac{dx}{۹+x^۲} = \frac{۱}{۳}Arctg(\frac{x}{۳}) + c \quad , \quad ۱۲)\int \frac{dx}{\sqrt{۳-x^۲}} = Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{۳}}) + c$$

$$۱۳)\int \frac{dx}{x^۲-۴} = \frac{۱}{۴}Ln|\frac{x-۲}{x+۲}| + c \quad , \quad ۱۴)\int \frac{dx}{\sqrt{(x-۲)^۲+۹}} = Ln\left|(x-۲)+\sqrt{(x-۲)^۲+۹}\right| + c$$

$$۱۵)\int \frac{۳dx}{\sin ۳x} = Ln\left|tg\frac{۳x}{۲}\right| + c = Ln|\csc ۳x - cotg۳x| + c \quad , \quad ۱۶)\int \frac{۲dx}{\cos ۲x} = Ln\left|tg(x+\frac{\pi}{۴})\right| + c = Ln|tg۲x + \sec ۲x| + c$$

$$۱۷)\int \cosh ۸x\, dx = \frac{۱}{۸}\sinh ۸x + c \quad , \quad ۱۸)\int \frac{۱}{۹}\sinh ۹x\, dx = \frac{۱}{۸۱}\cosh ۹x + c$$

تذکر۱: همان‌طور که در فرمول‌های مهم انتگرال ملاحظه می‌کنید؛ وقتی عبارتی بر حسب u داریم، du نیز کنار آن وجود دارد. در بعضی از مثال‌های فوق، مانند مثال شماره ۵، عبارت $\sin ۳x$ داخل انتگرال موجود است، ولی $۳dx$ کنار آن وجود ندارد. لذا با تغییری که مشاهده کردید، $۳dx$ را ایجاد کردید تا بتوانیم از فرمول‌های ذکر شده استفاده کنیم، چون اگر $u = ۳x$، آن‌گاه $du = ۳dx$ می‌شود. این تغییر در مثال‌های ۶، ۹، ۱۷و ۱۸ نیز انجام شده است، تغییرات انجام شده ساده‌ترین نوع **تغییر متغیر** می‌باشد که با توجه به مثال‌های زیر می‌توان درک بهتری از مفهوم «تغییر متغیر» داشت:

مثال۱: حاصل انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر بیابید.

$$۱)\ I = \int (۳x+۵)^{۱۷}dx \Rightarrow u = ۳x+۵ \to du = ۳dx \to \boxed{dx = \frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I = \int u^{۱۷}(\frac{du}{۳}) = \frac{۱}{۳}\int u^{۱۷}du = \frac{۱}{۳}(\frac{u^{۱۸}}{۱۸}) + c = \frac{(۳x+۵)^{۱۸}}{۵۴} + c$$

$$۲)\ I = \int \cos(۱+\pi x)dx \Rightarrow u = \pi x+۱ \to du = \pi dx \to \boxed{dx = \frac{du}{\pi}}$$

$$\Rightarrow I = \int (\cos u)\frac{du}{\pi} = \frac{۱}{\pi}\int \cos u\, du = \frac{۱}{\pi}\sin u + c = \frac{۱}{\pi}\sin(۱+\pi x) + c$$

$$۳) I=\int \frac{dx}{(\operatorname{Arccos} x)^{۵}\sqrt{۱-x^{۲}}} \Rightarrow u=\operatorname{Arccos} x \Rightarrow \boxed{du=-\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{-du}{u^{۵}}=-\int u^{-۵}du=\frac{۱}{۴}u^{-۴}+c=\frac{۱}{۴(\operatorname{Arccos} x)^{۴}}+c$$

$$۴) I=\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=\int (\sin\sqrt{t})\frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{t}=u \rightarrow \frac{dt}{۲\sqrt{t}}=du \rightarrow \boxed{\frac{dt}{\sqrt{t}}=۲du}$$

$$\Rightarrow I=\int ۲\sin u\,du=-۲\cos u+c=-۲\cos\sqrt{t}+c$$

$$۵) I=\int \frac{۲x+۳}{۲x+۱}dx \xrightarrow{\text{صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم}} \int (۱+\frac{۲}{۲x+۱})dx=\int dx+\underbrace{\int \frac{۲dx}{۲x+۱}}_{I_۱}$$

یادتان باشد در انتگرال‌هایی که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند و درجه صورت و مخرج یکی است، اولین کاری که می‌کنیم، تقسیم صورت بر مخرج است. خب به ادامه‌ی حل بپردازیم، حاصل انتگرال اول برابر با x می‌باشد، برای حل انتگرال دوم داریم:

$$۲x+۱=u \rightarrow ۲dx=du \rightarrow I_۱=\int \frac{۲dx}{۲x+۱}=\int \frac{du}{u}=\operatorname{Ln}|u|+c=\operatorname{Ln}|۲x+۱|+c \Rightarrow I=x+\operatorname{Ln}|۲x+۱|+c$$

$$۶) I=\int \frac{\operatorname{Arcsin} x+x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx=\underbrace{\int \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}_{I_۱}+\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx}_{I_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_۱:\operatorname{Arcsin} x=u \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=du} \quad \Rightarrow I_۱=\int u\,du=\frac{u^{۲}}{۲}+c_۱=\frac{(\operatorname{Arcsin} x)^{۲}}{۲}+c_۱ \\ I_۲:۱-x^{۲}=t \Rightarrow -۲x\,dx=dt \Rightarrow \boxed{x\,dx=-\frac{dt}{۲}} \Rightarrow I_۲=-\frac{۱}{۲}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{۱}{۲}\int t^{-\frac{۱}{۲}}dt=-t^{\frac{۱}{۲}}+c_۲=-\sqrt{۱-x^{۲}}+c_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=I_۱+I_۲=\frac{(\operatorname{Arcsin} x)^{۲}}{۲}-\sqrt{۱-x^{۲}}+c_۱+c_۲$$

البته می‌توانیم به جای $c_۱+c_۲$، c را قرار دهیم.

$$۷) I=\int \frac{\operatorname{Ln}\sqrt{z}}{z}dz=\int \frac{\operatorname{Ln} z^{\frac{۱}{۲}}}{z}dz=\frac{۱}{۲}\int \frac{\operatorname{Ln}z}{z}dz \Rightarrow \operatorname{Ln}z=u \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{z}=du}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}\int u\,du=\frac{۱}{۲}(\frac{u^{۲}}{۲})+c=\frac{۱}{۴}(\operatorname{Ln}z)^{۲}+c$$

$$۸) I=\int \frac{dx}{۱+\cos^{۲}x}=\int \frac{dx}{۱+\frac{۱}{۱+tg^{۲}x}}=\int \frac{(۱+tg^{۲}x)}{۲+tg^{۲}x}dx \rightarrow tgx=u \rightarrow \boxed{(۱+tg^{۲}x)dx=du}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{du}{۲+u^{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{Arctg}(\frac{u}{\sqrt{۲}})+c=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{Arctg}(\frac{tgx}{\sqrt{۲}})+c$$

$$۹) I=\int x^{۲}\cos(x^{۳}+۳)dx \Rightarrow x^{۳}+۳=u \Rightarrow ۳x^{۲}dx=du \rightarrow \boxed{x^{۲}dx=\frac{du}{۳}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۳}\int \cos u\,du=\frac{\sin u}{۳}+c=\frac{\sin(x^{۳}+۳)}{۳}+c$$

$$۱۰) I=\int x(۲x+۵)^{۱۰}dx \Rightarrow ۲x+۵=u \rightarrow \left|\begin{array}{l} ۲x=u-۵ \rightarrow \boxed{dx=\frac{du}{۲}} \\ x=\frac{u-۵}{۲} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int (\frac{u-۵}{۲})(u)^{۱۰}(\frac{du}{۲})=\frac{۱}{۴}\int (u-۵)u^{۱۰}du=\frac{۱}{۴}\int (u^{۱۱}-۵u^{۱۰})du=\frac{۱}{۴}[\frac{u^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵}{۱۱}u^{۱۱}]+c=\frac{۱}{۴}[\frac{(۲x+۵)^{۱۲}}{۱۲}-\frac{۵(۲x+۵)^{۱۱}}{۱۱}]+c$$

$$۱۱) I=\int \frac{e^{x}}{e^{x}-۱}dx \Rightarrow e^{x}-۱=u \rightarrow e^{x}dx=du \rightarrow I=\int \frac{du}{u}=\operatorname{Ln}|u|+c=\operatorname{Ln}|e^{x}-۱|+c$$

$$۱۲)\mathbf{I}=\int\frac{\mathbf{a^x dx}}{\mathbf{۱+a^{۲x}}}=\int\frac{۱}{۱+(a^x)^۲}(a^x dx)\ \ ,\ \ a^x=u\ \Rightarrow a^x \mathrm{Lna}\,dx=du\ \Rightarrow a^x dx=\frac{du}{\mathrm{Lna}}$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{a^x dx}{۱+(a^x)^۲}=\frac{۱}{\mathrm{Lna}}\int\frac{du}{۱+u^۲}=\frac{۱}{\mathrm{Lna}}[\mathrm{Arc\,tgu}]+c=\frac{\mathrm{Arctg}(a^x)}{\mathrm{Lna}}+c$$

مثال ۲: حاصل $\mathbf{I=\int\frac{dx}{\cos^۲x\sqrt{۱+tgx}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos x}+\mathrm{tgx}+c$ ۲) $\frac{۱}{\cos x}+\cot gx+c$ ۳) $۲\sqrt{۱+\mathrm{tgx}}+c$ ۴) $۲(۱+\mathrm{tgx})+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$۱+\mathrm{tgx}=u\ \Rightarrow (۱+\mathrm{tg}^۲x)dx=du\ \Rightarrow \frac{dx}{\cos^۲x}=du\ \Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=۲u^{\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{۱+\mathrm{tgx}}+c$$

مثال ۳: حاصل $\mathbf{I=\int\frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{\mathrm{Lnx}}}+c$ ۲) $\frac{\sqrt{\mathrm{Lnx}}}{x}+c$ ۳) $۲\sqrt{\mathrm{Lnx}}+c$ ۴) $\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\sqrt{x})$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» عبارت داخل رادیکال را مساوی u فرض می‌کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{\mathrm{Lnx}}}=\int(\underbrace{\mathrm{Lnx}}_{u})^{-\frac{۱}{۲}}(\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du})=۲\sqrt{u}+c=۲\sqrt{\mathrm{Lnx}}+c$$

مثال ۴: حاصل $\mathbf{I=\int\frac{e^{Arctgx}}{۱+x^۲}dx}$ کدام است؟

۱) $e^{\mathrm{Arctgx}}+c$ ۲) $۲e^{\mathrm{Arctgx}}+c$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^{\mathrm{Arctgx}}+c$ ۴) $\mathrm{Arctg}(e^x+۱)+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» عبارت قرار گرفته در توان e را برابر با u فرض می‌کنیم:

$$\mathrm{Arctgx}=u\Rightarrow\frac{dx}{۱+x^۲}=du\Rightarrow I=\int e^u du=e^u+c=e^{\mathrm{Arctgx}}+c$$

مثال ۵: حاصل $\mathbf{I=\int\frac{dx}{\sinh^۲x+\cosh^۲x}}$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Arctg}(\cot ghx)+c$ ۲) $\mathrm{Arctg}(\mathrm{tghx})+c$ ۳) $\mathrm{Arctg}(\cosh x)+c$ ۴) $\mathrm{Arctg}(\sinh x)+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یک سؤال نسبتاً ساده که کافی است از فرمول‌هایی که بلدیم، استفاده کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{\cosh^۲x(۱+\mathrm{tgh}^۲x)}\quad,\quad \mathrm{tghx}=u\ \rightarrow\frac{۱}{\cosh^۲x}dx=du$$

$$I=\int\frac{\cosh^۲x}{\cosh^۲x(۱+u^۲)}du=\mathrm{Arctgu}+c=\mathrm{Arctg}(\mathrm{tghx})+c$$

مثال ۶: حاصل $\mathbf{I=\int\frac{dx}{\sinh^۲x\cosh^۲x}}$، کدام است؟

۱) $-۲\cot gh۲x+c$ ۲) $۲\cot gh۲x+c$ ۳) $۲\mathrm{tghx}+c$ ۴) $-۲\mathrm{tghx}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا انتگرال را توسط روابط مربوط به توابع هیپربولیک ساده می‌کنیم.

$$\sinh^۲x\cosh^۲x=(\sinh x\cosh x)^۲=(\frac{۱}{۲}\sinh ۲x)^۲\ \Rightarrow I=\int\frac{۴}{\sinh^۲۲x}dx$$

$$\frac{۱}{\sinh^۲۲x}=\cot gh^۲۲x-۱\ \Rightarrow I=۴\int(\cot gh^۲۲x-۱)dx=۴\times\frac{-۱}{۲}\int ۲(۱-\cot gh^۲۲x)dx=-۲\mathrm{cotgh}\,۲x+c$$

مثال ۷: اگر $\mathbf{f'(\sin^۲x)=\cos^۲x}$ و $\mathbf{f(۰)=۰}$، آن‌گاه $\mathbf{f(۱)}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا می‌نویسیم: $\cos^۲x=۱-\sin^۲x$ و سپس با فرض $\sin^۲x=u$ از طرفین نسبت به u انتگرال می‌گیریم:

$$f'(\sin^۲x)=۱-\sin^۲x\ \xrightarrow{\sin^۲x=u}\ \int f'(u)du=\int(۱-u)du\ \Rightarrow f(u)=u-\frac{u^۲}{۲}+c\ \xrightarrow{f(۰)=۰} f(u)=u-\frac{u^۲}{۲}\ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۸: اگر $F(x)=\int f(x)dx$، آن‌گاه $I=\int f(ax+b)dx$ کدام است؟

۱) $aF(ax+b)$ ۲) $\frac{1}{a}F(x)$ ۳) $aF(x)$ ۴) $\frac{1}{a}F(ax+b)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$ax+b=u\Rightarrow adx=du \Rightarrow dx=\frac{du}{a}\Rightarrow I=\frac{1}{a}\int f(u)du \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} I=\frac{F(u)}{a}=\frac{1}{a}F(ax+b)$$

مثال ۹: حاصل $I=\int \frac{x}{x^4+x^2+1}dx$ کدام است؟

۱) $Arctg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ ۲) $Arctg(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}})$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}Arctg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}Arctg(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه I، ابتدا $x^2=u$ در نظر می‌گیریم، بنابراین $2xdx=du$. پس از جایگذاری، متغیر جدید مخرج را مربع کامل می‌کنیم و بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{\frac{du}{2}}{u^2+u+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+u+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{Arctg(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}})}$$

توضیح: در برخی انتگرال‌ها می‌توان مخرج را مربع کامل کرد و سپس از فرمول‌های انتگرال‌گیری استفاده کرد. در این سؤال بعد از تغییر متغیر اولیه به یک عبارت رسیدیم که قابل تبدیل به مربع دو جمله بود.

مثال ۱۰: حاصل $I=\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)tg^{-1}(\frac{x^2+1}{x})}$، کدام است؟

۱) $Ln|tg^{-1}(x-\frac{1}{x})|+c$ ۲) $Ln|tg^{-1}(x+\frac{1}{x})|+c$ ۳) $x+Ln|tg^{-1}(x+\frac{1}{x})|+c$ ۴) $x-Ln|tg^{-1}(x+\frac{1}{x})|+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا در صورت و مخرج از x^2 فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{x^2-1}{(x^4+3x^2+1)tg^{-1}(\frac{x^2+1}{x})}=\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+3+\frac{1}{x^2})tg^{-1}(x+\frac{1}{x})}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{[(x+\frac{1}{x})^2+1]tg^{-1}(x+\frac{1}{x})}$$

حالا اگر از تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$ استفاده کنیم، بنابراین $(1-\frac{1}{x^2})dx=dt$ و لذا انتگرال به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+1)tg^{-1}t}=\int\frac{1}{\underbrace{tg^{-1}(t)}_{u}}(\underbrace{\frac{dt}{1+t^2}}_{du})=\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c=Ln|tg^{-1}(t)|+c=\mathbf{Ln|tg^{-1}(x+\frac{1}{x})|+c}$$

از کجا بفهمیم از چه تغییر متغیری باید استفاده کنیم؟

تغییر متغیر، مهم‌ترین روش در انتگرال‌گیری است. اما متأسفانه قاعده‌ی مشخصی برای آن وجود ندارد. مثلاً توصیه‌هایی غیررسمی می‌توانند این باشد: «عبارت درون رادیکال، توان اعداد، کل رادیکال، کل عبارت نوشته شده در مخرج کسر، عبارت داخل کمان مثلثاتی و نظایر آن بهتر است u انتخاب شوند» اما این توصیه‌ها همیشه درست نیستند؛ ممکن است در برخی سؤالات سخت آزمون‌ها، از آن‌ها استفاده نشود. نتیجه این که نمی‌توان به طور «صددرصد» قوانین و دستورهایی را برای تشخیص «نوع تغییر متغیر» در انتگرال‌ها وضع کرد. اما خیلی نگران نباشید، اکثر انتگرال‌هایی که در آزمون‌ها و امتحانات دانشگاهی با آن‌ها برخورد می‌کنیم، با دستورالعمل و دسته‌بندی‌هایی که در این بخش انجام خواهیم داد، قابل محاسبه هستند.

تغییر متغیر در انتگرال‌های شامل رادیکال

در بیشتر انتگرال‌هایی که ما در حل آن‌ها از «تغییر متغیر» استفاده می‌کنیم، معمولاً آقای رادیکال حضور دارد! برای همین توصیه می‌کنم به این قسمت توجه و عنایت ویژه داشته باشید:

حالت اول: در انتگرال، رادیکالی وجود دارد که مشتق عبارت داخل رادیکال، پشت آن وجود دارد.

ساده‌ترین حالت ممکن از انتگرال‌هایی که شامل رادیکال هستند، حالتی است که مشتق عبارت زیر رادیکال، پشت رادیکال وجود دارد. در این حالت عبارت درون رادیکال را برابر با u در نظر گرفته و چون u' پشت آن وجود دارد، به راحتی به محاسبه‌ی انتگرال می‌پردازیم. البته باید دقت کنید منظور از این که مشتق رادیکال، پشت آن وجود دارد، این است که اگر عبارت رادیکال‌دار را جدا کردیم، از آنچه می‌ماند، بشود مشتق عبارت درون رادیکال را استخراج کرد، برای مثال در انتگرال $\int\frac{2xdx}{\sqrt{1+x^2}}$، وقتی عبارت $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ را جدا کنیم، $2xdx$ باقی می‌ماند، که دقیقاً مشتق عبارت زیر رادیکال است. اما اگر انتگرال به‌صورت $\int\frac{dx}{2x\sqrt{1+x^2}}$ بود، نمی‌شد گفت مشتق عبارت زیر رادیکال پشت آن وجود دارد، چون وقتی $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ را جدا کنیم، $\frac{dx}{2x}$ می‌ماند که به هیچ وجه مشتق عبارت زیر رادیکال نیست!

مثال ۱۱: حاصل $I=\int \frac{\sqrt[3]{1+Lnx}}{x}dx$، را بیابید.

پاسخ: عبارت زیر رادیکال را u می‌نامیم و مشتق آن، $\frac{1}{x}$ در کنارش وجود دارد:

$$u=1+Lnx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$I=\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3}{4}(1+Lnx)^{\frac{4}{3}}+c$$

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $I=\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx$ به ازای $x=0$ و $c=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{5}$　　۲) $\frac{4}{5}$　　۳) 0　　۴) $-\frac{6}{5}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$I=\int x\sqrt{(1-x^2)^3}dx=\int x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \Rightarrow u=1-x^2 \Rightarrow du=-2x\,dx \Rightarrow x\,dx=-\frac{du}{2}$$

$$I=\int (u^{\frac{3}{2}})(-\frac{du}{2})=-\frac{1}{2}(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}})+c=-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+c \xrightarrow[x=0]{c=1} I=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

مثال ۱۳: حاصل $I=\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$ ، به‌صورت $A\sqrt[3]{(\frac{2+x}{2-x})^2}+c$ می‌باشد، مقدار A چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$　　۲) $\frac{4}{3}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» در حال حاضر مشتق عبارت زیر رادیکال را در کنارش نداریم؛ اما اگر کمی خلاقیت به خرج دهیم مشکل حل می‌شود. به‌صورت سؤال توجه کنید، در عبارت زیر رادیکال، مخرج کسر $2+x$ است اما در عبارت خارج از رادیکال مخرج کسر $(2-x)^2$ است، از این‌جا حدس می‌زنیم که عبارت بیرون رادیکال مشتقِ $\frac{2-x}{2+x}$ نیست، اما می‌تواند مشتقِ $u=\frac{2+x}{2-x}$ باشد، به همین خاطر این کسر را وارونه می‌کنیم.

$$I=\int \frac{2}{(2-x)^2}(\frac{2+x}{2-x})^{-\frac{1}{3}}dx$$

حالا فرض می‌کنیم $u=\frac{2+x}{2-x}$ باشد:

$$u=\frac{2+x}{2-x} \Rightarrow du=\frac{(2-x)+(2+x)}{(2-x)^2}dx=\frac{4}{(2-x)^2}dx$$

بنابراین با ضرب و تقسیم در ۲ می‌توانیم du را ایجاد کنیم:

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{4}{(2-x)^2}(\frac{2+x}{2-x})^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}\times\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{4}(\frac{2+x}{2-x})^{\frac{2}{3}}+c$$

بنابراین $A=\frac{3}{4}$ است.

حالت دوم: در انتگرال، تابع رادیکالی وجود دارد و مشتق عبارت رادیکالی کنار آن وجود ندارد.

در این حالت معمولاً کل عبارت شامل رادیکال را برابر با u در نظر می‌گیریم و حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم. البته حالت‌های خاصی هم ممکن است وجود داشته باشد که پس از انجام عملیات‌هایی به خواسته‌ی خود می‌رسیم.

مثال ۱۴: حاصل $I=\int \frac{x(1+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟

پاسخ: در این مثال با انتخاب $u=\sqrt{x^2+1}$ می‌بینیم که $du=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$، پس du را در انتگرال داریم:

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(1+\sqrt{x^2+1})^2dx=\int (1+u)^2du$$

با تغییر متغیر $t=1+u$، داریم: $du=dt$، پس:

$$I=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{(1+u)^3}{3}+c=\frac{(1+\sqrt{x^2+1})^3}{3}+c$$

مثال ۱۵: حاصل انتگرال $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ را حساب کنید.

پاسخ: با استفاده از تغییر متغیر $1+x^2=t$، خواهیم داشت $xdx=\frac{1}{2}dt$، لذا داریم:

$$I=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t+t\sqrt{t}}}=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1+\sqrt{t}}}$$

حالا با تغییر متغیر $1+\sqrt{t}=u$ داریم: $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=du$ و بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{1+\sqrt{t}}+c=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c$$

حالت سوم: در انتگرال، تابع رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax^2+bx+c}$ وجود دارد.

این حالت خود دارای دسته‌بندی‌های مختلفی به‌صورت زیر است:

الف) ساده‌ترین حالت این است که مشتق زیر رادیکال کنار آن وجود داشته باشد، که مانند حالت اول است و باید از تغییر متغیر $u=ax^2+bx+c$ استفاده کنیم.

ب) اگر مشتق زیر رادیکال در انتگرال موجود نباشد، با ایجاد مربع کامل، عبارت رادیکالی را به یکی از سه شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{u^2+a^2}\ ,\ \sqrt{u^2-a^2}\ ,\ \sqrt{a^2-u^2}$$

که برای هر یک از آن‌ها تغییر متغیر مثلثاتی به شکل زیر وجود دارد:

۱) برای حالتی که زیر انتگرال، رادیکالی به شکل $\sqrt{a^2-u^2}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ استفاده می‌کنیم.

در این حالت، محدودیت $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ را ایجاد می‌کنیم، زیرا در این بازه $\cos\theta>0$ است. بعد از این تغییر متغیر، از دست رادیکال به شکل زیر خلاص می‌شویم:

$$\sqrt{a^2-u^2}=\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a|\cos\theta|$$

مثال ۱۶: حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$ ۲) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c$ ۳) $x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$ ۴) $x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\sin\theta$، $dx=\cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)^3}}=\int\frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\text{tg}\,\theta+c=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}}+\mathbf{c}$$

در این نوع انتگرال‌ها در قسمت نهایی پاسخ، باید عبارت به‌دست آمده بر حسب θ را به عبارتی بر حسب x تبدیل کنیم. برای این منظور چون $x=\sin\theta$، آن‌گاه $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ و لذا $\text{tg}\theta$ را می‌توان به‌صورت $\text{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ نوشت. البته در این سؤال استفاده از فرمول‌های مثلثاتی راحت بود. اما یک روش جالب، رسم یک مثلث قائم‌الزاویه است که در مثال‌های بعدی آن روش را نیز خواهیم دید.

۲) برای حالتی که زیر انتگرال رادیکالی به شکل $\sqrt{u^2-a^2}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u=a\sec\theta$ و یا $u=a\cosh\theta$ استفاده می‌کنیم.

دقت کنید؛ در این حالت وقتی از تغییر متغیر $u=a\sec\theta$، استفاده می‌کنیم، محدودیت $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ (برای $u\ge a$) و یا $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ (برای $u\le -a$) را در نظر می‌گیریم. زیرا در این بازه، $\text{tg}\theta$ مثبت است. بعد از این تغییر متغیر، از دست رادیکال به شکل زیر خلاص می‌شویم:

$$\sqrt{u^2-a^2}=\sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{a^2\text{tg}^2\theta}=a|\text{tg}\theta|=a\,\text{tg}\theta$$

چون مطابق محدودیت ذکر شده، $\text{tg}\theta>0$ بود، توانستیم قدرمطلق را در قسمت آخر محاسبات برداریم.

مثال ۱۷: حاصل $I=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{4x^2+4x}}$، کدام است؟

۱) $\text{arcsec}(2x+1)+C$ ۲) $\text{arcsec}(4x+1)+C$ ۳) $\text{arcsec}(x+\frac{1}{2})+C$ ۴) $\text{arcsec}(4x+\frac{1}{2})+C$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت زیر رادیکال را به صورت «$4(x+\frac{1}{2})^2-1$» می‌نویسیم و لذا داریم:

$$I=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})\sqrt{4(x+\frac{1}{2})^2-1}}$$

حالا از تغییر متغیر $2(x+\frac{1}{2})=\sec\theta$، استفاده می‌کنیم و لذا $dx=\frac{1}{2}\sec\theta\text{tg}\theta d\theta$ است، بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{(\frac{1}{2}\sec\theta\text{tg}\theta)d\theta}{\frac{1}{2}\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}}=\int\frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\theta}d\theta=\int d\theta=\theta+C=\text{arcsec}(2x+1)+C$$

۳) برای حالتی که زیر انتگرال، رادیکالی به شکل $\sqrt{u^2+a^2}$ وجود داشته باشد، از تغییر متغیر $u = a\,tg\theta$ و یا $u = a\sinh\theta$ استفاده می‌کنیم.

دقت کنید؛ در این حالت وقتی از تغییر متغیر $u = a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم، محدودیت $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ را در نظر می‌گیریم. زیرا در این بازه، $\cos\theta > 0$ است و بعد از این تغییر متغیر از دست رادیکال به شکل مقابل خلاص می‌شویم: $\sqrt{u^2+a^2} = \sqrt{(a\,tg\theta)^2+a^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2\theta)} = a\,|\sec\theta| = a\,|\frac{1}{\cos\theta}| = a(\frac{1}{\cos\theta})$

و چون در این بازه، $\cos\theta > 0$ بود، در قسمت آخر محاسبات توانستیم قدرمطلق را برداریم.

تذکر ۲: برای انتخاب نوع تغییر متغیر در انتگرال‌های نوع (۲) و (۳) بهتر است به دیگر عبارات موجود در انتگرال و همچنین نوع جواب درگزینه‌ها دقت کرده و یکی از این دو تغییر متغیر را استفاده کنیم. البته معمولاً تغییر متغیر مثلثاتی در اکثر سؤالات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

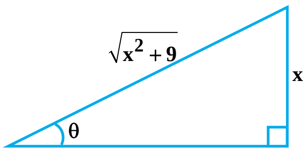
مثال ۱۸: حاصل $I = \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{(9+x)^{\frac{3}{2}}}{9x^3}+C$ ۲) $-\frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{27x^3}+C$ ۳) $\frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{9x^3}+C$ ۴) $\frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{27x^3}+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به وجود عبارت رادیکالی استفاده از روش تغییر متغیر و با فرض $x = 3tg\theta$ داریم؛ $dx = (3\sec^2\theta)d\theta$. با توجه به رابطه $1+tg^2\theta = \sec^2\theta$ داریم:

$$I = \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta}}{81tg^4\theta}(3\sec^2\theta)d\theta = \int \frac{3\sqrt{\sec^2 x}(3\sec^2\theta)}{81tg^4\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int\frac{\sec^3\theta}{tg^4\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \underbrace{\boxed{\sin^{-4}\theta}}_{u}\underbrace{\boxed{\cos\theta d\theta}}_{du}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{9}(\frac{\sin^{-3}\theta}{-3}) = -\frac{1}{27}(\frac{1}{\sin^3\theta}) = (-\frac{1}{27})\frac{1}{(\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = (-\frac{1}{27})\frac{1}{(\frac{x^2}{x^2+9})^{\frac{3}{2}}}+C = (-\frac{1}{27})\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C$$



«$tg\theta = \frac{x}{3}$»

توضیح: وقتی حاصل انتگرال بر حسب θ محاسبه شد، باید عبارت را برحسب x بنویسیم. برای این منظور یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل مقابل ترسیم می‌کنیم و ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی θ را x نامیده و ضلع مجاور آن را ۳ در نظر می‌گیریم، تا رابطه‌ی $tg\theta = \frac{x}{3}$ که از ابتدا فرض کرده بودیم، برقرار شود. طبیعی است در چنین مثلثی، وتر «$\sqrt{x^2+9}$» به‌دست می‌آید و حالا به راحتی می‌توانیم $\sin\theta$ را بر حسب x حساب کنیم. به راحتی داریم:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع روبه‌روی زاویه}\ \theta}{\text{وتر مثلث}} = \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{x^2}{x^2+9}$$

توجه: البته ترسیم شکل برای درک بهتر داوطلبان است وگرنه به راحتی با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توانیم از رابطه‌ی $tg\theta = \frac{x}{3}$، مقدار $\sin^2\theta$ را حساب کنیم.

(از رابطه‌ی $\frac{1}{\cos^2\theta} = (1+tg^2\theta)$، می‌توانید $\cos^2\theta$ را حساب کرده و از روی رابطه‌ی $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$، به راحتی به $\sin^2\theta$ رسید!)

مثال ۱۹: حاصل $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})^3+C$ ۲) $\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})^3+C$ ۳) $-\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})^3+C$ ۴) $-\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})^3+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه‌ی این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم، فرض کنید؛ $x = \sin\theta$، پس $dx = \cos\theta d\theta$ و با توجه به رابطه $1+\cot g^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$، داریم:

$$I = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^4\theta}\cos\theta d\theta = \int\frac{|\cos\theta|}{\sin^4\theta}\cos\theta d\theta \xlongequal{\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \int\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}d\theta = \int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(\frac{1}{\sin^2\theta})d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int \cot g^2\theta(1+\cot g^2\theta)d\theta \xrightarrow{\text{از تغییر متغیر}\ u=\cot g\theta\ \text{داریم}} I = -\frac{u^3}{3}+c = -\frac{\cot g^3\theta}{3}+c = -\frac{1}{3}[\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}]+c$$

خُب، انتگرال بر حسب θ محاسبه شد، اما گزینه‌ها بر حسب x هستند، بنابراین باید حاصل انتگرال را بر حسب x بنویسیم، برای این منظور باید $\cos\theta$ را نیز بر حسب x حساب کنیم:

$$x = \sin\theta \Rightarrow x^2 = \sin^2\theta \Rightarrow 1-x^2 = 1-\sin^2\theta \Rightarrow 1-x^2 = \cos^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

بنابراین داریم:

$$I = -\frac{1}{3}[\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}]+c = -\frac{1}{3}[\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{x^3}]+c$$

مثال۲۰: حاصل انتگرال $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$ ۲) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+c$ ۳) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+c$ ۴) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به این‌که مشتق عبارت داخل رادیکال، بیرون رادیکال موجود نیست و عبارت زیر رادیکال به فرم $\sqrt{u^2+a^2}$ می‌باشد. پس از متغیر $u=a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم: $x=2tg\theta \Rightarrow dx=2(1+tg^2\theta)d\theta=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=2\sec^2\theta\, d\theta$

$$I=\int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4+4tg^2\theta}}=\int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4(1+tg^2\theta)}}=\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4tg^2\theta)(2\sec\theta)}=\frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{tg^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int (\underbrace{\sin\theta}_{u})^{-2}\underbrace{\cos\theta d\theta}_{du}=-\frac{1}{4}\sin^{(-2+1)}\theta+c=-\frac{1}{4\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$$

توجه شود در قسمت نهایی که عبارت را برحسب x نوشتیم چون $x=2tg\theta$ و $\cot g\theta=\frac{2}{x}$ و از آنجایی که $\sin^2\theta=\frac{1}{1+\cot g^2\theta}$ می‌توان نتیجه گرفت $\sin^2\theta=\frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2}=\frac{x^2}{x^2+4}$. لذا $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ به‌دست آمد.

سؤال دانشجو: گاهی نوع تغییر متغیر این نوع انتگرال‌ها از یادمان می‌رود، برای رفع این مشکل چه کار کنیم؟

پاسخ: این مشکل را بارها شنیده‌ام، اما رفع آن بسیار ساده است! دانشجو باید توجه کند؛ در این نوع انتگرال‌های شامل رادیکال، ماجرا از این قرار است که **ما می‌خواهیم از دست رادیکال خلاص شویم و آن را از بازی محاسبه‌ی انتگرال بیرون کنیم!!** توجه به همین جمله باعث می‌شود شما هیچ‌وقت تغییر متغیرها را یادتان نرود! من از شما سؤال می‌کنم! چرا در انتگرال $\sqrt{a^2-u^2}$ از تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ استفاده می‌کنیم؟ خُب خودم جواب می‌دهم! چون هدف ما خلاصی از دست رادیکال است، پس $a^2(1-\sin^2\theta)$ و به عبارت دیگر $a^2\cos^2\theta$ ایجاد می‌کنیم. مثلاً فرض کنید؛ بخواهیم در این انتگرال از تغییر متغیر $u=atg\theta$ و یا $u=a\sec\theta$، استفاده کنیم! آیا می‌توان عبارتی که مربع کامل است در رادیکال ایجاد کرد؟! جواب خیر است. به همین ترتیب برای رادیکال‌های دیگر نیز ماجرا به همین شکل است؛ برای مثال در انتگرال $\sqrt{u^2+a^2}$، واقعاً چه کار کنیم که از دست رادیکال خلاص شویم؟ مثلاً $u=a\sin\theta$، خوب است!؟ معلومه که نه! حالا اگه $u=a\sinh\theta$ بود، می‌شد قبول کرد! چون $\sinh^2\theta+1=\cosh^2\theta$ و یا حتی $u=atg\theta$ هم به ما کمک می‌کند، چون $a^2(1+tg^2\theta)$ ایجاد می‌کند که می‌دانیم برابر $\frac{a^2}{\cos^2\theta}$ می‌باشد و به راحتی از رادیکال بیرون می‌آید.

درسنامه۲: محاسبه‌ی انتگرال‌های شامل توابع مثلثاتی و هیپربولیک که با توان‌های مختلف فرد و یا زوج هستند.

در درسنامه‌ی قبل، فرمول‌های انتگرال‌های توابع مثلثاتی و هیپربولیک را دیدیم. در این قسمت می‌خواهیم انتگرال‌هایی را بررسی کنیم که شامل توان‌های مختلف این‌گونه توابع و یا حاصل‌ضرب این توابع هستند؛ و به طور کلی انتگرال‌هایی را بررسی کنیم که توابعی از عبارت‌های مثلثاتی و یا هیپربولیک هستند.

محاسبه‌ی انتگرال‌های sin و cos با توان فرد

در حل این‌گونه انتگرال‌ها، یک توان را جدا کرده و بقیه عبارت را با استفاده از رابطه‌ی $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ برحسب نسبت مثلثاتی دیگر (اگر سینوس بود، برحسب کسینوس و اگر کسینوس بود بر حسب سینوس) نوشته و با استفاده از تغییر متغیر مناسب حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم. برای این منظور اگر عاملی که ابتدا جدا کرده‌ایم، سینوس باشد، از تغییر متغیر $u=\cos x$ و اگر عاملی که ابتدا جدا کرده‌ایم، کسینوس باشد، از تغییر متغیر $u=\sin x$ استفاده می‌کنیم.

مثال۱: حاصل $I=\int \sin^۳ x dx$ را بیابید.

پاسخ:

$$I=\int \sin^۳ x dx=\int \sin x.\sin^۲ x dx=\int \sin x(۱-\cos^۲ x)dx \xrightarrow{\text{از ابتدا سینوس جدا کرده بودیم}} \cos x=u \Rightarrow -\sin x.dx=du$$

$$\Rightarrow I=-\int(۱-u^۲)du=\frac{u^۳}{۳}-u+c=\frac{\cos^۳ x}{۳}-\cos x+c$$

مثال۲: حاصل $I=\int \cos^۳ ۲x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}\sin^۳ ۲x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x+c$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\frac{۱}{۶}\sin^۳ ۲x+c$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sin^۳ ۲x-\frac{۱}{۶}\sin ۲x=c$ ۴) $\frac{۱}{۶}\sin ۲x-\frac{۱}{۲}\sin^۳ ۲x+c$

پاسخ: گزینه «۲» باید $\cos ۲x$ را جدا کرده و سپس بر اساس رابطه‌ی $\cos^۲ ۲x=۱-\sin^۲ ۲x$، انتگرال را آماده‌ی استفاده از تغییر متغیر کنیم:

$$I=\int \cos^۳ ۲x\,dx=\int \cos ۲x(۱-\sin^۲ ۲x)\,dx=\int \cos ۲x\,dx-\int \cos ۲x \sin^۲ ۲x\,dx$$

$$=\int \cos ۲x\,dx-\frac{۱}{۲}\int(\underbrace{\sin ۲x}_{u})^۲\underbrace{۲\cos ۲x\,dx}_{du}=\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\frac{۱}{۲}[\frac{(\sin ۲x)^۳}{۳}]+c=\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\frac{۱}{۶}\sin^۳ ۲x+c$$

محاسبه‌ی انتگرال‌های sin و cos با توان زوج

در این نوع انتگرال‌ها با استفاده از فرمول‌های توان شکن (فرمول طلایی)، توان آن‌ها را کاهش می‌دهیم و سپس حاصل انتگرال را به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}} \quad , \quad \boxed{\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}}$$

به مثال زیر توجه کنید:

$$I=\int \cos^۴ x dx=\int(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۲dx=\frac{۱}{۴}\int(۱+\cos ۲x)^۲dx=\frac{۱}{۴}\int[۱+۲\cos ۲x+\cos^۲ ۲x].dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\int[۱+۲\cos ۲x+\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۴x)].dx=\frac{۱}{۴}(x+\sin ۲x)+\frac{۱}{۸}(x+\frac{\sin ۴x}{۴})+c=\frac{۳x}{۸}+\frac{\sin ۲x}{۴}+\frac{\sin ۴x}{۳۲}+c$$

مثال۳: حاصل انتگرال $I=\int \sin^۴ x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x}{۸}+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$ ۲) $\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

۳) $\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۸}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$ ۴) $\frac{۳x}{۸}+\frac{۱}{۸}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$

پاسخ: گزینه «۲»

$$I=\int \sin^۴ x\,dx=\int(\frac{۱-\cos ۲x}{۲})^۲dx=\frac{۱}{۴}\int(۱-۲\cos ۲x+\cos^۲ ۲x)dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{۱}{۴}\int[۱-۲\cos ۲x+(\frac{۱+\cos ۴x}{۲})]dx=\frac{۱}{۴}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c=\frac{۳x}{۸}-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}\sin ۴x+c$$

محاسبه‌ی انتگرال‌های حاصل‌ضرب دو جمله سینوسی و کسینوسی

برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها باید از فرمول‌های تبدیل حاصل‌ضرب به مجموع، استفاده نمود.

۱) $\sin a.\cos b=\frac{۱}{۲}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ ۲) $\cos a.\cos b=\frac{۱}{۲}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$ ۳) $\sin a.\sin b=\frac{۱}{۲}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

مثال ۴: حاصل هریک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ I=\int \sin 3x\cos 5x\,dx=\int \frac{1}{2}[\sin(3x-5x)+\sin(3x+5x)]dx=-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx=\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+c$$

$$2)\ I=\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx=\int \frac{1}{2}[\cos(\frac{x}{2}-\frac{x}{3})+\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{3})]dx=\frac{1}{2}\int \cos(\frac{x}{6})dx+\frac{1}{2}\int \cos(\frac{5x}{6})dx=3\sin(\frac{x}{6})+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+c$$

$$3)\ I=\int \sin 3x\sin 2x\,dx=\int \frac{1}{2}[\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)]dx=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx-\frac{1}{2}\int \cos 5x\,dx=\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{10}+c$$

مثال ۵: حاصل انتگرال $I=\int \sin 9x\sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$ ۲) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin 10x+c$ ۳) $\frac{1}{20}\sin 10x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$ ۴) $\frac{1}{20}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin x+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» به راحتی با توجه به فرمول داریم:

$$I=\int \frac{1}{2}[\cos 8x-\cos 10x]dx=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$$

مثال ۶: در حاصل انتگرال $\int \cos x\cos(2x)\cos(3x)dx$ ، ضریب جمله‌ی $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{24}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با استفاده از فرمول تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع، ابتدا $\cos x\cos 2x$ را به جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(x-2x)+\cos(x+2x)]=\frac{1}{2}[\cos(-x)+\cos(3x)]=\frac{1}{2}[\cos x+\cos 3x]$$

بنابراین عبارت زیرِ انتگرال به‌صورت مقابل است:

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos x+\cos 3x]\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos x\cos 3x+\cos^2 3x]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\cos(x-3x)+\cos(x+3x))+\frac{1}{2}(1+\cos 6x)]=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 6x$$

$$I=\frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int \cos 4x\,dx+\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int \cos 6x\,dx=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}\sin 6x+c$$

محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به‌صورت $\int f(\sin x,\cos x)dx$ (f یک تابع گویا می‌باشد)

روش عمومی تعیین حاصل این‌گونه انتگرال‌ها، استفاده از تغییر متغیر $z=tg(\frac{x}{2})$ می‌باشد. که از آن‌جا $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$ ، $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ خواهند بود و انتگرال فوق به انتگرال توابع گویا با متغیر جدید z تبدیل می‌شود.

مثال ۷: حاصل $I=\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $cotg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+\frac{2}{3}]+c$ ۲) $tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+\frac{2}{3}]+c$ ۳) $cotg^{-1}[tg\frac{x}{2}+1]+c$ ۴) $tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+1]+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=z$ ، داریم:

$$I=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+2(\frac{2z}{1+z^2})+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{2}{2z^2+4z+4}dz=\int \frac{1}{z^2+2z+2}dz=\int \frac{dz}{(z+1)^2+1}=tg^{-1}(z+1)+c=tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+1]+c$$

تذکر ۱: در حل انتگرال‌هایی به فرم کلی $I=\int f(\sin x,\cos x)dx$ حالت‌های خاصی وجود دارند که اگر با آن‌ها مواجه شدیم، تغییر متغیرهای زیر، حل آن‌ها را راحت‌تر می‌کند:

۱) اگر $f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$ باشد، یعنی f بر حسب $\sin x$ یک تابع فرد باشد، بهتر است از تغییر متغیر $z=\cos x$ استفاده کنیم. مثلاً برای انتگرال $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ ، از تغییر متغیر $z=\cos x$ استفاده می‌کنیم.

۲) اگر $f(\sin x,-\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$ باشد، یعنی f بر حسب $\cos x$ یک تابع فرد باشد، بهتر است از تغییر متغیر $z=\sin x$ استفاده کنیم.

۳) اگر $f(-\sin x,-\cos x)=f(\sin x,\cos x)$ باشد، یعنی f بر حسب $\sin x$ و $\cos x$، تابعی زوج باشد، بهتر است از تغییر متغیر $z=\operatorname{tg}x$ و $z=\cot gx$ استفاده کنیم. مثلاً برای انتگرال $I=\int\frac{\cos^{۲}x}{\sin^{۶}x}dx$، استفاده از تغییر متغیر $z=\cot gx$ حل سؤال را راحت‌تر می‌کند.

تذکر۲: همان‌طور که گفته شد، تغییر متغیر $z=\operatorname{tg}\frac{x}{۲}$ یک تغییر متغیر عمومی برای حل این انتگرال‌هاست و عملاً سه مورد اخیر، محاسبات را راحت‌تر می‌کند. توجه داشته باشید که اگر در حفظ حالت‌های فوق مشکل دارید، همان حالت کلی را در خاطر داشته باشید.

نکته۱: اگر در عبارت کسری از $\sin x$ و $\cos x$، توان‌های زوجی از $\sin x$ و $\cos x$ مثلاً $\sin^{۲}x$ و $\cos^{۲}x$ و یا $\sin^{۴}x$ و $\cos^{۴}x$ وجود داشت بهتر است عبارت را بر $\cos^{۲}x$ (در صورت وجود $\sin^{۲}x$ و $\cos^{۲}x$) و یا $\cos^{۴}x$ (در صورت وجود $\sin^{۴}x$ و $\cos^{۴}x$) تقسیم کنیم، تا به یک عبارت برحسب $\operatorname{tg}x$ تبدیل شود و در نهایت با استفاده از تغییر متغیر مناسب، $u=\operatorname{tg}x$ یا $u=\operatorname{tg}^{۲}x$، حاصل انتگرال را تعیین می‌کنیم.

مثال۸: حاصل $I=\int\frac{\sin ۲\theta}{\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta}d\theta$ را حساب کنید.

پاسخ: برای حل انتگرال داده شده صورت و مخرج را بر $\cos^{۴}\theta$ تقسیم می‌کنیم. لذا داریم:

$$I=\int\frac{\sin ۲\theta}{\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta}d\theta=\int\frac{۲\sin\theta.\cos\theta}{\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta}d\theta=\int\frac{\frac{۲\sin\theta.\cos\theta}{\cos^{۴}\theta}}{\frac{\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta}{\cos^{۴}\theta}}d\theta=\int\frac{\frac{۲\sin\theta}{\cos\theta}.\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}}{\frac{\sin^{۴}\theta}{\cos^{۴}\theta}+\frac{\cos^{۴}\theta}{\cos^{۴}\theta}}d\theta\Rightarrow I=\int\frac{۲\operatorname{tg}\theta.(۱+\operatorname{tg}^{۲}\theta)}{\operatorname{tg}^{۴}\theta+۱}d\theta$$

حالا مشاهده می‌شود که صورت کسر در واقع مشتق $\operatorname{tg}^{۲}\theta$ می‌باشد. لذا با تغییر متغیر $u=\operatorname{tg}^{۲}\theta$ داریم:

$$du=۲\operatorname{tg}\theta(۱+\operatorname{tg}^{۲}\theta)d\theta\ \Rightarrow I=\int\frac{du}{u^{۲}+۱}=\operatorname{tg}^{-۱}(u)+c=\operatorname{tg}^{-۱}(\operatorname{tg}^{۲}\theta)+c$$

محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int f(\sinh x,\cosh x)$

برای حل این نوع انتگرال‌ها معمولاً ابتدا باید از دو فرمول $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}$ و $\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$ استفاده کنیم و بعد از ساده‌سازی و ضرب e^{x} در صورت و مخرج، از تغییر متغیر $e^{x}=u$ می‌توانیم حاصل انتگرال را تعیین کنیم.

مثال۹: حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\sinh x}$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا $\sinh x$ را برحسب توابع نمایی می‌نویسیم:

$$I=\int\frac{dx}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲}}=\int\frac{۲dx}{e^{x}-e^{-x}}\xrightarrow{\text{ضرب } e^{x} \text{ در صورت و مخرج}}I=۲\int\frac{e^{x}dx}{e^{۲x}-۱}$$

حالا اگر از تغییر متغیر $e^{x}=u$ استفاده کنیم، داریم:

$$e^{x}=u\ \Rightarrow e^{x}dx=du\ ,\ \ e^{۲x}=u^{۲}$$

بنابراین داریم:

$$I=\int\frac{۲du}{u^{۲}-۱}=\operatorname{Ln}(\frac{u-۱}{u+۱})=\operatorname{Ln}|\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱}|+c$$

درسنامه۳: روش انتگرال‌گیری جزء به جزء

برای هر قاعده‌ی مشتق‌گیری، یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری متناظر وجود دارد. قاعده‌ای که متناظر با قاعده‌ی «حاصل‌ضرب مشتق» است، قاعده‌ی «انتگرال‌گیری جزء به جزء» نامیده می‌شود. اگر u و v توابعی از متغیر x باشند، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

در واقع وقتی محاسبه‌ی $\int udv$ سخت است، عبارت سمت راست آن را جایگزین می‌کنیم، البته با شرط این که محاسبه‌ی $\int vdu$ راحت‌تر باشد. نکته‌ی مهم در روش جزء به جزء این است که تابعی که مشتق آن ساده است را u در نظر بگیریم و dv، باید طوری در نظر گرفته شود که پس از انتگرال‌گیری بتوان به راحتی v را حساب کرد.

مثال۱: حاصل $I = \int x\sin xdx$ را بیابید.

پاسخ: اگر فرض کنیم: $u = x$ و $\sin xdx = dv$، آن‌گاه داریم:

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad , \quad \sin xdx = dv \Rightarrow \int \sin xdx = v \Rightarrow -\cos x = v$$

پس طبق فرمول داریم:

$$\int x\sin xdx = (x)(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x\cos x - (-\sin x) + c = -x\cos x + \sin x + c$$

همان‌طور که گفتیم؛ هدف از به کار بردن روش جزء به جزء، به‌دست آوردن انتگرالی ساده‌تر از انتگرال اولیه است. مثلاً اگر در این مثال فرض می‌کردیم: $u = \sin x$ و $dv = xdx$، آن‌گاه داشتیم:

$$\int x\sin xdx = (\sin x)(\frac{x^۲}{۲}) - \frac{۱}{۲}\int x^۲ \cos xdx$$

ملاحظه می‌کنید که انتگرال جدیدِ به وجود آمده، سخت‌تر از انتگرال اولیه به نظر می‌رسد. بنابراین باید در تشخیص u و dv تبحر کافی پیدا کنیم. برای همین، تمام آن‌چه در این مورد نیاز است را در جدول زیر به طور خلاصه ارائه کرده‌ایم:

دسته شماره (۳)	دسته شماره (۲)	دسته شماره (۱)
توابع نمایی توابع سینوس و کسینوس توابع سینوس و کسینوس هیپربولیک	توابع چندجمله‌ای	توابع لگاریتمی توابع معکوس مثلثاتی توابع معکوس هیپربولیک

در واقع روش جزء به جزء در موارد زیر به کار می‌رود:

الف) اگر فقط توابع دسته (۱) در انتگرال وجود داشته باشد.

ب) اگر در انتگرال، حاصل‌ضرب توابع دسته (۲) در توابع دسته (۱) وجود داشته باشد.

ج) اگر در انتگرال، حاصل‌ضرب توابع دسته (۲) در توابع دسته (۳) وجود داشته باشد.

د) اگر در انتگرال، حاصل‌ضرب توابع دسته (۳) در یکدیگر وجود داشته باشد.

دقت کنید؛ در موارد گفته شده، همیشه u عضو دسته‌ی پایین‌تر انتخاب می‌شود (یعنی u از دسته‌ای انتخاب می‌شود که شماره دسته‌ی آن کمتر است). مثلاً در محاسبه $I = \int \frac{Lnx}{x^۲}dx$، باید $Lnx = u$ فرض شود، چون Lnx متعلق به‌دسته (۱) است و یا در محاسبه‌ی $I = \int x\cos xdx$، چون x متعلق به‌دسته‌ی (۲) و $\sin x$ متعلق به‌دسته (۳) است، لذا باید $u = x$ در نظر گرفته شود. البته یک توصیه‌ی کلی برای اغلب سؤالات می‌تواند این باشد؛ آن قسمتی که مشتق‌گیری از آن آسان است را u و آن قسمتی که انتگرال‌گیری از آن آسان است را به همراه dx برابر با dv در نظر بگیرید. البته در مواقعی که مشتق‌گیری هر دو تابع یکسان باشد، توجه کنید انتگرال « vdu » کدام‌یک آسان‌تر است.

نکته۱: در بعضی سؤالات، لازم است چند بار از قاعده‌ی جزء به جزء استفاده کنیم. معمولاً در حالت «د» این موضوع دو بار اتفاق می‌افتد و در حالت «ج» به تعداد درجه‌ی چندجمله‌ای از قاعده‌ی جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

نکته۲: برای توان‌های فرد و مثبت $\sec x$ و $\operatorname{cosec} x$ نیز باید از قاعده‌ی جزء به جزء استفاده کنیم.

که برای توان‌های فرد $\sec x$، باید $\sec^۲ xdx$ را برابر با dv و بقیه را برابر با u در نظر بگیریم و برای توان‌های فرد $\operatorname{cosec} x$، باید $\operatorname{cosec}^۲(x)dx$ را برابر با dv و بقیه را برابر با u در نظر بگیریم.

مثال۲: حاصل $I = \int xe^{۲x}dx$، کدام است؟

۱) $\frac{xe^{۲x}}{۴} - \frac{e^{۲x}}{۲} + c$
۲) $-\frac{xe^{۲x}}{۲} - \frac{e^{۲x}}{۴} + c$
۳) $\frac{xe^{۲x}}{۲} + \frac{e^{۲x}}{۴} + c$
۴) $\frac{xe^{۲x}}{۲} - \frac{e^{۲x}}{۴} + c$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = u \to dx = du \\ e^{۲x}dx = dv \to \frac{۱}{۲}e^{۲x} = v \end{cases} \Rightarrow I = x(\frac{e^{۲x}}{۲}) - \frac{۱}{۲}\int e^{۲x}dx = x(\frac{e^{۲x}}{۲}) - \frac{e^{۲x}}{۴} + c$$

مثال ۳: حاصل $I=\int \frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{1+x^2}\,arctgx - Ln\sqrt{x^2+1}+c$
۲) $\sqrt{1+x^2}\,arctgx - Ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$
۳) $\sqrt{1+x^2}\,arctgx + arctgx + c$
۴) $\sqrt{1+x^2}\,arctgx - arctgx + c$

پاسخ: گزینه «۲» $arctgx$، یک تابع معکوس مثلثاتی است (تابعی متعلق به‌دسته (۱))، بنابراین این عبارت را u فرض کرده و بقیه عبارت درون انتگرال را dv در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} arctgx = u \to \dfrac{dx}{1+x^2}=du \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = dv \to \sqrt{1+x^2}=v \end{cases} \Rightarrow I=\sqrt{1+x^2}\,arctgx - \int \sqrt{1+x^2}.\frac{dx}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\,arctgx - Ln(x+\sqrt{x^2+1})+c$$

توضیح: واضح است انتگرال‌گیری از $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، راحت‌تر از $arctgx$ است، بنابراین u و dv را به شکل گفته شده انتخاب کردیم.

مثال ۴: حاصل $I=\int Arcsinxdx$ برابر است با:

۱) $xArcsin\,x+\sqrt{1-x^2}+C$
۲) $Arcsin\,x+\sqrt{1-x^2}+C$
۳) $\sqrt{1-x^2}-Arcsin\,x+C$
۴) $xArcsin\,x-\sqrt{1-x^2}+C$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به مطالب گفته شده، وقتی توابع معکوس مثلثاتی داریم (توابع دسته (۱))، باید این توابع را مساوی u بگیریم:

$$\begin{cases} Arc\sin x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=du \\ dv=dx \quad \Rightarrow x=v \end{cases} \Rightarrow \int Arc\sin x\,dx = x\,Arc\sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = xArc\sin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

مثال ۵: حاصل $I=\int Lnxdx$ کدام است؟

۱) $xLnx+x+c$
۲) $xLnx-x+c$
۳) $\frac{1}{x}Lnx+x+c$
۴) $\frac{1}{x}Lnx-x+c$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مطالب گفته شده اگر فقط توابع لگاریتمی در انتگرال داشتیم، باید این توابع را مساوی u بگیریم:

$$\begin{cases} Lnx=u \to \dfrac{dx}{x}=du \\ dx=dv \to x=v \end{cases} \Rightarrow I = xLnx - \int x(\frac{dx}{x}) = xLnx - x + c$$

بهتر است حاصل انتگرال فوق به خاطر سپرده شود، چون در برخی از سؤالات از آن استفاده می‌شود.

مثال ۶: حاصل $I=\int \frac{Lnx}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $xLnx-x^2+c$
۲) $-\frac{Lnx}{x}+\frac{1}{x}+c$
۳) $-\frac{Lnx}{x}-\frac{1}{x}+c$
۴) $xLnx+x^2+c$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به وجود Lnx (تابعی متعلق به‌دسته (۱))، باید Lnx را مساوی u فرض کرده و بقیه عبارت باقیمانده در انتگرال را dv فرض کنیم:

$$\begin{cases} u=Lnx \to du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2} \to v=-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow I=-\frac{Lnx}{x}-\int(-\frac{1}{x})(\frac{dx}{x}) = -\frac{Lnx}{x}+\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{Lnx}{x}-\frac{1}{x}+c$$

واضح است که انتگرال‌گیری از $\frac{1}{x^2}$، آسان‌تر از انتگرال‌گیری از Lnx است، بنابراین u و dv را به شکل فوق انتخاب کردیم.

مثال ۷: جواب انتگرال $\int \frac{Ln(Lnx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $LnxLn(Lnx)-Lnx+c$
۲) $Lnx-Ln(Lnx)+c$
۳) $Ln(Lnx)-Lnx+c$
۴) $LnxLn(Lnx)+c$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $u=Lnx$، استفاده می‌کنیم، در این صورت $du=\frac{dx}{x}$ داریم:

$$I=\int\frac{Ln(Lnx)}{x}dx=\int Lnudu \xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} I=uLnu-u+c=LnxLn(Lnx)-Lnx+c$$

مثال ۸: اگر $I_2=\int xLnxdx=\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{1}{4}x^2+c$ ، آن‌گاه حاصل $I=\int xLn(1+\frac{1}{x})dx$ ، کدام است؟

۱) $(x^2-1)Ln(x+1)-\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x}{2}+c$

۲) $(x^2-1)Ln(x+1)-\frac{x^2}{2}Lnx+\frac{x}{2}+c$

۳) $(\frac{x^2-1}{2})Ln(x+1)+\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x}{2}+c$

۴) $(\frac{x^2-1}{2})Ln(x+1)-\frac{x^2}{2}Lnx+\frac{x}{2}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا با استفاده از رابطه‌ی $Ln(\frac{A}{B})=LnA-LnB$ ، عبارت $Ln(1+\frac{1}{x})$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$Ln(1+\frac{1}{x})=Ln(\frac{x+1}{x})=Ln(x+1)-Lnx\ \Rightarrow I=\int x[Ln(x+1)-Lnx]dx=\underbrace{\int xLn(x+1)dx}_{I_1}-\underbrace{\int xLnxdx}_{I_2}$$

خُب، مقدار انتگرال دوم که در صورت سؤال داده شده است، اما برای انتگرال اول با استفاده از تغییر متغیر $x+1=u$ ، آن‌گاه $x=u-1$ و انتگرال I_1 به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I_1=\int(u-1)Lnudu=\int uLnudu-\int Lnudu$$

حاصل انتگرال اول با قرار دادن u در طرفین تساوی داده شده در صورت سؤال به شکل زیر می‌شود:

$$\int uLnudu=\frac{u^2}{2}Lnu-\frac{1}{4}u^2+c\xrightarrow{u=x+1}\int uLnudu=\frac{(x+1)^2}{2}Ln(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2+c$$

از طرفی می‌دانیم حاصل انتگرال $\int Lnudu$ برابر با « $uLnu-u$ » و به عبارت دیگر برابر « $(x+1)Ln(x+1)-(x+1)$ » می‌باشد، پس داریم:

$$I=I_1-I_2=\frac{(x+1)^2}{2}Ln(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-(x+1)Ln(x+1)+x+1-\frac{x^2}{2}Lnx+\frac{1}{4}x^2+c$$

$$\Rightarrow I=[\frac{x^2+2x+1}{2}-(x+1)]Ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+x+1-\frac{x^2}{2}Lnx+\frac{1}{4}x^2+c=\mathbf{\frac{1}{2}(x^2-1)Ln(x+1)-\frac{x^2}{2}Lnx+\frac{x}{2}+c}$$

مثال ۹: حاصل $A=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:**

$$A=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx\xrightarrow{\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}A=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int tg\frac{x}{2}dx$$

برای محاسبه $\int x\sec^2\frac{x}{2}dx$ از روش «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$x=u\ \Rightarrow dx=du\ ,\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dv\ \Rightarrow tg\frac{x}{2}=v$$

$$\frac{1}{2}\int x\sec^2(\frac{x}{2})dx=xtg(\frac{x}{2})-\int tg(\frac{x}{2})dx\ \Rightarrow A=xtg(\frac{x}{2})-\int tg(\frac{x}{2})dx+\int tg(\frac{x}{2})dx=\mathbf{xtg(\frac{x}{2})+c}$$

مثال ۱۰: حاصل $I=\int x\sin^2x\cos xdx$ را بیابید. (از سؤالات ریاضی (۱) دانشگاه Harvard)

☑ **پاسخ:** واضح است که با یک انتگرال‌گیری «جزء به جزء» روبه‌رو هستیم، با کمی دقت می‌توانیم u و dv مناسب را به شکل زیر انتخاب کنیم:

$$u=x\ \Rightarrow du=dx\ ,\ \sin^2x(\cos x)dx=dv\ \Rightarrow\int\sin^2x(\cos xdx)=v\ \Rightarrow\frac{1}{3}(\sin^3x)=v$$

بنابراین حاصل انتگرال به‌صورت مقابل حساب می‌شود:

$$I=x(\frac{1}{3}\sin^3x)-\frac{1}{3}\underbrace{\int\sin^3xdx}_{I_2}$$

$$I_2=\int\sin^3xdx=\int\sin^2x(\sin x)dx=\int(1-\cos^2x)\sin xdx=\int\sin xdx-\int\cos^2x\sin xdx=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x+c_1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{I=\frac{x}{3}\sin^3x+\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{9}\cos^3x+c}$$

مثال ۱۱ (سخت): حاصل $I=\int\frac{x^2dx}{(\cos x+x\sin x)^2}$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** یک سؤال نسبتاً سخت که به کمی ابتکار نیازمند است. اگر دقت کنید؛ مشتق عبارت داخل پرانتز برابر با $x\cos x$ است، بنابراین با ایجاد $x\cos x$ در صورت کسر، انتگرال به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I=\int\frac{x^2dx}{(\cos x+x\sin x)^2}=\int\frac{x}{\cos x}[\frac{x\cos x}{(\cos x+x\sin x)^2}]dx$$

حالا با در نظر گرفتن $u=\frac{x}{\cos x}$ و $dv=\frac{x\cos x}{(\cos x+x\sin x)^2}dx$ ، خواهیم داشت:

$$du=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2x}\ ,\ v=-\frac{1}{\cos x+x\sin x}$$

بنابراین به روش «جزء به جزء» داریم:

$$I=(\frac{x}{\cos x})(-\frac{۱}{\cos x+x\sin x})+\int\frac{dx}{\cos^{۲}x}=-\frac{x}{\cos x(\cos x+x\sin x)}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-x+\sin x\cos x+x\sin^{۲}x}{\cos x(\cos x+x\sin x)}$$

$$\Rightarrow I=\frac{-x\overbrace{(۱-\sin^{۲}x)}^{\cos^{۲}x}+\sin x\cos x}{\cos x(\cos x+x\sin x)}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر }\cos^{۲}x}I=\frac{-x+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{x\sin x}{\cos x}}=\mathbf{\frac{-x+tgx}{۱+xtgx}+c}$$

توجه: در واقع گاهی در انتگرال‌هایی به فرم $\int\frac{f(x)}{[g(x)]^n}dx$ می‌توان نوشت $\int\frac{f(x)}{g'(x)}.\frac{g'(x)}{[g(x)]^n}dx$ و به ترتیبی که گفته شد از جزء به جزء استفاده کرد.

نکته ۳: در بعضی انتگرال‌ها برای محاسبه‌ی حاصل انتگرال مجبور می‌شویم چند بار از قاعده‌ی «جزء به جزء» استفاده کنیم.

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $I=\int e^x\cos xdx$ را حساب کنید.

پاسخ: در این سؤال یک تابع نمایی (e^x) و یک تابع مثلثاتی (کسینوس) داریم، بنابراین باید $u=e^x$ و $\cos xdx=dv$ فرض شود:

$$I=\int e^x\cos xdx\to\begin{cases}e^x=u\to e^xdx=du\\ \cos xdx=dv\to\sin x=v\end{cases}\to I=e^x\sin x-\underbrace{\int e^x\sin xdx}_{I_۱}\Rightarrow I=e^x\sin x-I_۱\quad,\quad(۱)$$

توجه شود که انتگرال $I_۱$ تقریباً شبیه انتگرال اصلی می‌باشد، لذا با استفاده مجدد از قاعده جزء به جزء داریم:

$$I_۱:\begin{cases}e^x=u\to e^xdx=du\\ \sin xdx=dv\to-\cos x=v\end{cases}\Rightarrow I_۱=(-\cos x)e^x+\underbrace{\int e^x\cos xdx}_{I}\Rightarrow I_۱=-e^x\cos x+I\quad,\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)}e^x\sin x-I=-e^x\cos x+I\Rightarrow ۲I=e^x(\sin x+\cos x)\Rightarrow \mathbf{I=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{۲}+c}$$

نکته ۴: $۱)\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^{۲}+b^{۲}}(a\cos bx+b\sin bx)+c$ ، $۲)\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^{۲}+b^{۲}}(a\sin bx-b\cos bx)+c$

حاصل این دو انتگرال را حتماً حفظ کنید. برای راحتی در حفظ کردن، به این ایده توجه کنید که در هر دو انتگرال $\frac{e^{ax}}{a^{۲}+b^{۲}}$ در پرانتزی ضرب می‌شود که شامل سینوس و کسینوس است؛ جمله‌ی اول همان تابع مثلثاتی زیر انتگرال است که در a ضرب شده و جمله‌ی دوم قرینه‌ی مشتق تابع مثلثاتی زیر انتگرال است.

مثال ۱۳: حاصل انتگرال $I=\int e^{۵x}\cos ۴xdx$ را حساب کنید.

پاسخ: با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$I=\frac{e^{۵x}}{۴۱}(۵\cos ۴x+۴\sin ۴x)+c=\frac{۵}{۴۱}e^{۵x}\cos ۴x+\frac{۴}{۴۱}e^{۵x}\sin ۴x+c$$

مثال ۱۴: ضریب $\cos(Lnx)$ در حاصل انتگرال $I=\int\sin(Lnx)dx$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{x}{۲}$ ۳) $-\frac{x}{۲}$ ۴) x

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $u=Lnx$، آن‌گاه $du=\frac{۱}{x}dx$ و چون $x=e^u$، لذا $dx=e^udu$ و بنابراین داریم:

$$I=\int e^u\sin udu=\frac{e^u}{۲}(\sin u-\cos u)+c=\frac{x}{۲}[\sin(Lnx)-\cos(Lnx)]+c\Rightarrow$$ بنابراین ضریب $\cos(Lnx)$ برابر با $-\frac{x}{۲}$ است.

توضیح: در محاسبه‌ی انتگرال $\int e^u\sin udu$ از رابطه‌ی گفته شده استفاده کردیم، بنابراین به خاطر سپردن حاصل دو انتگرال گفته شده در خیلی از سؤالات به ما صرفه‌جویی از وقت را هدیه می‌دهد!

انتگرال‌گیری جزء به جزء به کمک تشکیل جدول

در این روش، مطابق جدول مقابل، تابع $f(x)$ و مشتق‌هایش را در سمت چپ و تابع $g(x)$ و انتگرال‌هایش را در سمت راست قرار می‌دهیم و تا وقتی که مشتق تابع $f(x)$ صفر شود (البته بعداً خواهیم گفت همیشه لازم نیست مشتق f صفر شود.) از تابع $g(x)$ انتگرال گرفته و در نهایت، مانند پیکان‌های مشخص شده، توابعی که با پیکان به هم مربوط شده‌اند را در هم ضرب، و این حاصل‌ضرب‌ها را با علامت کنار آنها با هم جمع یا تفریق می‌نمائیم (این علامت‌ها از بالا به پایین یک در میان مثبت یا منفی هستند و اولین سطر دارای علامت مثبت است).

علامت	مشتق	انتگرال
$\oplus$	$f(x)$	$g(x)$
$\ominus$	$f'(x)$	$G_۱(x)=\int g(x)dx$
$\oplus$	$f''(x)$	$G_۲(x)=\int G_۱(x)dx$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

مثال ۱۵: حاصل $I=\int xe^{۲x}dx$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** در این سؤال $f(x)=x$ و $g(x)=e^{۲x}$، بنابراین جدول مقابل را داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$e^{۲x}$	x	$+$
$\frac{e^{۲x}}{۲}$	۱	$-$
$\frac{e^{۲x}}{۴}$	۰	$+$

$$\Rightarrow I=x(\frac{e^{۲x}}{۲})-(۱\times\frac{e^{۲x}}{۴})+\int(۰\times\frac{e^{۲x}}{۴})dx+c$$

مثال ۱۶: حاصل انتگرال $I=\int x\cos ۳x\,dx$ کدام است ؟

۱) $\frac{x\sin ۳x}{۳}+\frac{\cos ۳x}{۹}+c$
۲) $\frac{x\cos ۳x}{۳}+\frac{\sin ۳x}{۹}+c$
۳) $\frac{x\sin ۳x}{۳}-\frac{\cos ۳x}{۹}+c$
۴) $\frac{x\cos ۳x}{۳}-\frac{\sin ۳x}{۹}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با استفاده از روش جدول با فرض $f(x)=x$ و $g(x)=\cos ۳x$ به راحتی داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$\cos ۳x$	x	$+$
$\frac{۱}{۳}\sin ۳x$	۱	$-$
$-\frac{۱}{۹}\cos ۳x$	۰	$+$

$$\Rightarrow I=\frac{x\sin ۳x}{۳}+\frac{\cos ۳x}{۹}+c$$

همان‌طور که در جدول مقابل ملاحظه می‌کنید؛ انتگرال ضرب سطر آخر نیز در واقع وجود دارد، اما زمان‌هایی که صفر می‌شود، دیگر لازم نیست آن را بنویسیم.

مثال ۱۷: حاصل انتگرال $I=\int(x^{۳}+۱)\cos x\,dx$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** در این سؤال $f(x)=x^{۳}+۱$ و $g(x)=\cos x$ و لذا داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$\cos x$	$x^{۳}+۱$	$+$
$\sin x$	$۳x^{۲}$	$-$
$-\cos x$	$۶x$	$+$
$-\sin x$	۶	$-$
$\cos x$	۰	$+$

$$\Rightarrow I=(x^{۳}+۱)\sin x+۳x^{۲}\cos x-۶x\sin x-۶\cos x+c$$

نکته ۵: یادتون باشه، قرار نیست همیشه مشتق تابع در ستون سمت چپ صفر شود، شما هر وقت که دوست داشتید؛ می‌توانید عملیات مشتق‌گیری (و البته انتگرال‌گیری که همزمان انجام می‌شود) را متوقف کنید و با ضرب‌های گفته شده، حاصل انتگرال را حساب کنید. فقط در این حالت سطر آخر را نیز باید در هم ضرب کنید و از کل آن انتگرال بگیرید. اما متوقف کردن به‌صورت دلخواه، ممکن است باعث شود حاصل انتگرال ایجاد شده سخت باشد، برای این که خیالتان راحت باشد، قطعاً می‌توانید حاصل انتگرال اولیه را حساب کنید، به دو دستور زیر توجه کنید:

۱) در سطری که انتگرال حاصلضرب دو ستون در یکدیگر به راحتی قابل محاسبه باشد، باید متوقف شویم.

۲) در سطری که حاصلضرب دو ستون در یکدیگر، ضریبی از حاصلضرب دو ستون در سطر اول باشد، باید متوقف شویم.

مثال‌های زیر مطلب فوق را بهتر مشخص می‌کند:

مثال ۱۸: حاصل انتگرال $I=\int e^{۵x}\cos ۴x\,dx$ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

انتگرال	مشتق	علامت
$\cos ۴x$	$e^{۵x}$	$+$
$\frac{۱}{۴}\sin ۴x$	$۵e^{۵x}$	$-$
$-\frac{۱}{۱۶}\cos ۴x$	$۲۵e^{۵x}$	$+$

$$\Rightarrow I=\frac{e^{۵x}}{۴}\sin ۴x+\frac{۵}{۱۶}e^{۵x}\cos ۴x-\frac{۲۵}{۱۶}\underbrace{\int e^{۵x}\cos ۴x}_{I}\Rightarrow I+\frac{۲۵}{۱۶}I=\frac{۱}{۴}e^{۵x}\sin ۴x+\frac{۵}{۱۶}e^{۵x}\cos ۴x$$

$$\Rightarrow\frac{۴۱}{۱۶}I=\frac{۱}{۴}e^{۵x}\sin ۴x+\frac{۵}{۱۶}e^{۵x}\cos ۴x\Rightarrow\ \mathbf{I=\frac{۴}{۴۱}e^{۵x}\sin ۴x+\frac{۵}{۴۱}e^{۵x}\cos ۴x}$$

مثال ۱۹: حاصل $I=\int xe^{x}\cos x dx$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** در این سؤال سه جمله داریم. که یک جمله را برابر با u (x را برابر با u در نظر می‌گیریم) و دو جمله‌ی دیگر را برابر با dv در نظر می‌گیریم ($e^{x}\cos x dx$ را برابر با dv در نظر می‌گیریم).

دقت کنید از حل انتگرال فوق و نکته گفته شده، ابتدا انتگرال $e^{x}\cos x$ و بعد از آن حاصل انتگرال‌های $\frac{1}{2}e^{x}\sin x$ و $\frac{1}{2}e^{x}\cos x$ را حساب کرده‌ایم.

پس حاصل نهایی انتگرال به‌صورت زیر است:

علامت	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x	$e^{x}\cos x$
$\ominus$	۱	$\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)$
$\oplus$	0	$\frac{1}{2}[\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)]$

$$I=\frac{x}{2}e^{x}\sin x+\frac{x}{2}e^{x}\cos x-\frac{e^{x}}{4}\sin x+\frac{e^{x}}{4}\cos x-\frac{e^{x}}{4}\sin x-\frac{e^{x}}{4}\cos x+c=\frac{xe^{x}}{2}\sin x+\frac{xe^{x}}{2}\cos x-\frac{e^{x}}{2}\sin x+c$$

مثال ۲۰: حاصل $I=\int\frac{\sin(Lnx)}{x^{2}}dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{x}[\sin(Lnx)+\cos(Lnx)]$ ۲) $-\frac{1}{2x}[\sin(Lnx)+\cos(Lnx)]$ ۳) $\frac{1}{x}[\sin(Lnx)+\cos(Lnx)]$ ۴) $\frac{1}{2x}[\sin(Lnx)+\cos(Lnx)]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بعضی وقت‌ها مانند این انتگرال، لازم است که ابتدا یک تغییر متغیر انجام دهیم تا کار محاسبه‌ی انتگرال ساده شود. مثلاً برای محاسبه‌ی انتگرال $\int Ln^{3}xdx$، نیز بهتر است از تغییر متغیر $u=Lnx$ استفاده کنیم. خُب سراغ سؤال می‌رویم، برای محاسبه این انتگرال، فرض می‌کنیم؛ $u=Lnx$، پس $x=e^{u}$، و در نتیجه $du=\frac{dx}{x}$ است. بنابراین انتگرال به‌صورت $\int\frac{\sin u}{e^{u}}du$ تبدیل می‌شود. سپس با به کارگیری قاعده‌ی «جزء به جزء» داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$\sin u$	e^{-u}	$\oplus$
$-\cos u$	$-e^{-u}$	$\ominus$
$-\sin u$	$+e^{-u}$	$\oplus$

$$I=\int\frac{\sin u}{e^{u}}du=\int e^{-u}\sin u du$$

$$I=-e^{-u}\cos u-e^{-u}\sin u-\int e^{-u}\sin u du\Rightarrow I=-e^{-u}(\cos u+\sin u)-I$$

$$\Rightarrow 2I=-e^{-u}(\cos u+\sin u)\Rightarrow I=-\frac{e^{-u}}{2}[\cos u+\sin u]=-\frac{1}{2}e^{-Lnx}[\cos(Lnx)+\sin(Lnx)]$$

$$=-\frac{1}{2}e^{Ln\frac{1}{x}}[\cos(Lnx)+\sin(Lnx)]=-\frac{1}{2x}[\cos(Lnx)+\sin(Lnx)]$$

همان‌طور که گفتیم؛ هرگاه در قاعده‌ی جزء به جزء (روش جدول)، سطری مضرب سطر دیگر شود، باید متوقف شویم و از حاصل‌ضرب عناصر ردیف آخر انتگرال بگیریم.

درسنامه۴: روش انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها

در این قسمت نوع دیگری از انتگرال‌گیری را آموزش می‌دهیم. این نوع انتگرال‌ها نیز در درس معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها (تجزیه کسرهای جزئی)

این روش برای محاسبه‌ی انتگرال برخی توابع گویا (یعنی توابعی کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند) به کار می‌رود. برای استفاده از این روش در صورتی که درجه‌ی صورت بیشتر از درجه‌ی مخرج باشد، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا درجه‌ی صورت از مخرج کمتر شود. سپس مخرج کسر را تا جای ممکن تجزیه می‌کنیم؛ به طوری که در مخرج کسر، فقط عبارت درجه اول یا عبارت درجه دوم فاقد ریشه وجود داشته باشد (یعنی عبارت درجه دوم قابل تجزیه نباشد و به عبارت دیگر $\Delta < 0$ باشد). حالا با توجه به مخرج کسرها، طبق روش زیر عمل می‌کنیم:

حالت (۱): اگر در مخرج کسر عبارت $(x-a)^n$ وجود داشت، به خاطر وجود آن، عبارات مقابل را می‌نویسیم: $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$

توجه کنید که اگر مثلاً عامل $(x-a)$ در مخرج داشته باشیم، در آن صورت $n=1$ است و به جای آن فقط $\frac{A_1}{x-a}$ نوشته می‌شود. و یا اگر مثلاً $(x-a)^2$ در مخرج داشته باشیم، به جای آن دو کسر به شکل $\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}$ قرار می‌گیرد.

حالت (۲): اگر در مخرج عبارت $(x^2+ax+b)^n$ وجود داشت (که عبارت x^2+ax+b دیگر قابل تجزیه نباشد، یعنی $\Delta < 0$)، در این صورت عبارات زیر را قرار می‌دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$$

در این حالت نیز اگر مثلاً $n=1$ باشد، در تجزیه کسر فقط عامل اول یعنی $\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}$ را می‌نویسیم و اگر $n=2$ باشد، آن‌گاه دو جمله‌ی اول به جای کسر قرار می‌گیرد.

مثال۱: هر یک از کسرهای زیر را به کسرهای جزئی تجزیه کنید.

۱) $\frac{x^4+1}{x^3-1}$ ۲) $\frac{x^2-x+1}{x^3-x}$ ۳) $\frac{1}{x^7-x^3}$

☑ **پاسخ:**

بررسی (۱): چون درجه صورت بیشتر از مخرج است، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و از اطلاعات دبیرستانی خود استفاده می‌کنیم!

مقسوم ← $\boxed{x^4+1}$ | $\boxed{x^3-1}$ ← **مقسوم‌علیه**

$-(x^4-x)$ | $\boxed{x}$ ← **خارج‌قسمت**

باقی‌مانده ← $\boxed{x+1}$

$$\Rightarrow \frac{\text{مقسوم}}{\text{مقسوم‌علیه}} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقی‌مانده}}{\text{مقسوم‌علیه}} \Rightarrow \frac{x^4+1}{x^3-1}=x+\frac{x+1}{x^3-1}$$

حالا برای تجزیه کسر $\frac{x+1}{x^3-1}$، مخرج را به‌صورت $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ تجزیه می‌کنیم. با توجه به وجود عامل درجه اول $(x-1)$ به جای آن در کسرهای جزئی $\frac{A}{x-1}$ و با توجه به وجود عامل درجه دوم (x^2+x+1) به جای آن در کسرهای جزئی $\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ قرار می‌دهیم، یعنی تجزیه کسر $\frac{x+1}{x^3-1}$ به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $\frac{x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

بررسی (۲): تجزیه کسر به‌صورت $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ است که همه‌ی عوامل تجزیه شده، عبارات درجه‌ی اول هستند، بنابراین کسر داده شده را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $\frac{x^2-x+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

بررسی (۳): ابتدا مخرج کسر را تا جای ممکن تجزیه می‌کنیم: $x^7-x^3=x^3(x^4-1)=x^3(x^2-1)(x^2+1)=x^3(x-1)(x+1)(x^2+1)$

در تجزیه به‌دست آمده فقط عبارت (x^2+1) درجه دوم است و بقیه عبارات درجه اول هستند، توجه کنید که x^3 را می‌توان به‌صورت $(x-0)^3$ نوشت و لذا برای آن باید **سه** کسر قرار دهیم. بنابراین تجزیه کسر مورد نظر به‌صورت مقابل است: $\frac{1}{x^7-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+1}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$

محاسبه‌ی ضرایب در کسرهای جزئی

برای به‌دست آوردن ضرایب مجهول در روش تجزیه کسرها دو روش کلی داریم:

حالت اول: در این روش دو طرف تساوی را در مخرج کسری که قرار است تجزیه شود، ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از دو طرف حذف شوند. سپس ضرایب را در دو طرف متحد قرار می‌دهیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } x(x+1)}2x-1=A(x+1)+Bx\ \Rightarrow 2x-1=(A+B)x+A$$

ضریب x در سمت چپ ۲ و ضریب x در سمت راست $A+B$ است، بنابراین می‌نویسیم: $A+B=2$، از طرفی عدد ثابت در سمت چپ -1 و عدد ثابت در سمت راست برابر با A است، پس $A=-1$ و چون $A+B=2$ بود، بنابراین $-1+B=2$ و لذا $B=3$، یعنی تجزیه کسر به شکل مقابل نوشته می‌شود: $\frac{2x-1}{x(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{3}{x+1}$

حالت دوم (روش هویساید): به غیر از روش گفته شده، یک روش دیگر در تعیین ضرایب (**البته برای عامل درجه‌ی یک $(x-a)$ که به توان $n\ge 1$ رسیده باشد**) وجود دارد. فرض کنید عبارت کسری $f(x)$ باشد، در این صورت برای به‌دست آوردن ضرایب A_i، می‌توان از فرمول‌های زیر نیز استفاده کرد:

$$A_n=\lim_{x\to a}[(x-a)^n f(x)]\ ,\ A_{n-1}=\frac{d}{dx}[(x-a)^n f(x)]\Big|_{x=a}\ ,\ \dots,A_1=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x-a)^n f(x)]\Big|_{x=a}$$

در واقع در این روش، ابتدا عامل $(x-a)^n$ را در تابع $f(x)$ ضرب می‌کنیم. سپس برای محاسبه‌ی ضرایب به صورت زیر عمل می‌کنیم:
برای محاسبه‌ی A_n کافی است به جای x ها، a را قرار دهیم. برای محاسبه‌ی A_{n-1} یک‌بار مشتق گرفته و سپس $x=a$ قرار می‌دهیم (البته بر !۱ هم تقسیم می‌کنیم که ما در فرمول آن را ننوشتیم). برای محاسبه‌ی A_{n-2} یک‌بار دیگر مشتق گرفته و سپس به جای x ها، a قرار می‌دهیم و بر !۲ تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب برای محاسبه‌ی A_1، به تعداد $n-1$ بار مشتق می‌گیریم و پس از این که به جای x ها، a قرار دادیم بر فاکتور مرتبه مشتق تقسیم می‌کنیم. دقت کنید همان‌طور که گفتیم این روش برای یک عامل درجه‌ی یک است که ممکن است به توان n رسیده باشد، مثلاً $(x-1)^n$. اما برای عوامل درجه‌ی ۲ مثل (x^2+4) قابل استفاده نیست.

نکته۱: در هر دو حالت اول و دوم، برای یافتن رابطه‌ای بین ضرایب کسرهایی که «اختلاف درجه‌ی صورت و مخرج» در آن‌ها برابر **یک** است، می‌توان دو طرف تساوی را در x ضرب کرده و x را به سمت بی‌نهایت میل داد.

نکته۲: در هر دو حالت اول و دوم، با قرار دادن عدد مناسب به جای x در طرفین تساوی، می‌توان رابطه‌ای بین ضرایب به‌دست آورد.

مثال۲: **کسر $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$ را به روش گفته شده تجزیه کنید.**

☑ **پاسخ:** چون درجه صورت از درجه مخرج کمتر است، بنابراین لازم نیست تقسیم صورت بر مخرج را انجام دهیم، ابتدا مخرج را به شکل زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2x^3+3x^2-2x=x(2x^2+3x-2)=x(2x-1)(x+2)$$

چون مخرج سه عامل متمایز با توان یک دارد، پس باید سه کسر مختلف داشته باشیم:

$$\frac{x^2-2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

حالا اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم، باید طرفین را در مخرج عبارت سمت چپ ضرب کنیم که به تساوی زیر می‌رسیم:

$$x^2-2x-1=A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

حالا باید سمت راست را برحسب توان‌های x مرتب کرده و با سمت چپ متحد قرار دهیم؛ اما می‌توانیم به جای این کار از نکته گفته شده کمک بگیریم، چون این تساوی به ازای تمام x ها برقرار است، پس می‌توانیم هر x که دوست داریم، قرار دهیم. دنبال x هایی باشید که فقط یک متغیر مجهول در سمت راست باقی بگذارد، اگر $x=0$، آن‌گاه $-1=A(2\times 0-1)(0+2)$ و لذا $A=\frac{1}{2}$، اگر $x=\frac{1}{2}$ قرار دهیم، آن‌گاه $\frac{5B}{4}=\frac{1}{4}$ و لذا $B=\frac{1}{5}$ و اگر $x=-2$ قرار دهیم، آن‌گاه $10C=-1$ و لذا $C=-\frac{1}{10}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{1}{10}}{x+2}$$

همان‌طور که دیدید استفاده از نکته و روش عددگذاری خیلی سریع ضرایب را تعیین کرد. روش متحد قرار دادن کمی زمان بیشتری می‌برد که می‌توانید آن را به عنوان تمرین انجام دهید.

مثال۳: **حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{x^3+x}$ را بیابید.**

مخرج کسر به‌صورت $x^3+x=x(x^2+1)$ قابل تجزیه است، بنابراین داریم: $f(x)=\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

برای محاسبه ضرایب مجهول A، B و C به دو روش عمل می‌کنیم:

روش اول: طرفین تساوی را در $x^3+x=x(x^2+1)$ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند، در این صورت داریم:

$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x\ \Rightarrow (A+B)x^2+Cx+A=1$$

حالا ضرایب عبارات را در دو طرف با هم مساوی قرار می‌دهیم. در سمت چپ تساوی، مقدار ثابت A و در سمت راست مقدار ثابت ۱ می‌باشد، بنابراین $A=1$. در سمت چپ ضریب x برابر C و در سمت راست x وجود ندارد (یعنی ضریب x برابر صفر است). بنابراین $C=0$ است و بالاخره در سمت چپ، ضریب x^2 برابر $(A+B)$ و در سمت راست، ضریب x^2 برابر صفر است، بنابراین $A+B=0$ و چون $A=1$ را قبلاً به دست آورده بودیم، لذا $B=-1$ است.

روش دوم: ضریب A را از روش هویساید تعیین می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0} xf(x)=\lim_{x\to 0} x\times\frac{1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}=1$$

برای محاسبه B، طبق نکته گفته شده چون اختلاف درجه مخرج و صورت کسر یک است، طرفین را در x ضرب و حد طرفین را در بی‌نهایت به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{x^3+x}=\frac{Ax}{x}+\frac{Bx^2+Cx}{x^2+1}\xrightarrow{x\to\infty} 0=A+B \Rightarrow B=-1$$

و بالاخره برای محاسبه C، به جای x عددی دلخواه در طرفین تساوی قرار می‌دهیم. به طور مثال به ازای $x=1$، داریم:

$$\frac{1}{2}=\frac{A}{1}+\frac{B+C}{1+1}\xrightarrow{A=1,B=-1} C=0$$

حالا به محاسبه انتگرال مورد نظر می‌پردازیم:

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\text{Ln}x-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1)+C=\text{Ln}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C$$

مثال ۴: حاصل $I=\int\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ کدام است؟

۱) $\text{Arctg}x-\frac{1}{x+1}+C$
۲) $\text{Ln}(x+1)+\frac{1}{x+1}-\text{Arctg}x+C$
۳) $\text{Arctg}x+\frac{1}{x+1}+C$
۴) $\text{Arctg}x-\text{Ln}(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مخرج کسر به طور کامل تجزیه شده است، بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

ضرایب A و B را به روش هویساید تعیین می‌کنیم:

$$B=\lim_{x\to -1}(x+1)^2 f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x}{x^2+1}=-1$$

$$A=\frac{d}{dx}[(x+1)^2 f(x)]\Big|_{x=-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\Big|_{x=-1}=\left(\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}\right)\Big|_{x=-1}=0$$

برای تعیین D، در طرفین $x=0$ قرار می‌دهیم:

$$0=A+B+D\xrightarrow{A=0\,,\,B=-1} D=1$$

و بالاخره برای به‌دست آوردن C، در طرفین تساوی $x=1$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{8}=\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{C+D}{2}\xrightarrow{A=0\,,\,B=-1\,,\,D=1} C=0$$

بنابراین انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$I=\int\left(\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{-dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x+1}+\text{Arctg}x+C$$

توضیح بیشتر: در کسر $\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$، اختلاف دو عامل مخرج یعنی $(x+1)^2$ و (x^2+1) در صورت وجود دارد، بنابراین تجزیه این کسر به‌صورت $\frac{1}{(x^2+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}$ می‌باشد، به طور کلی اگر کسر داده شده به‌صورت $\frac{f(x)-g(x)}{f(x).g(x)}$ باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x)-g(x)}{f(x).g(x)}=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}$$

نکته ۳: هرگاه کسر داده شده در سؤال به‌صورت $\frac{1}{[f(x)+a][f(x)+b]}$ باشد (یعنی مخرج را بتوان به‌صورت ضرب دو چندجمله‌ای نوشت که تفاضل آن‌ها عددی ثابت است)، در این صورت کسر مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$\boxed{\frac{1}{(f(x)+a)(f(x)+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{f(x)+a}-\frac{1}{f(x)+b}\right)}$$

مثال: $\frac{1}{(x^2+x+a)(x^2+x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x^2+x+a}-\frac{1}{x^2+x+b}\right)$

مثال: $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$

مثال ۵: حاصل $I=\int\frac{dx}{x^4+5x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\text{Arctg}x+C$
۲) $\frac{1}{3}\text{Arctg}x-\frac{2}{3}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C$
۳) $\frac{2}{3}\text{Arctg}x-\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C$
۴) $\frac{1}{3}\text{Arctg}x-\frac{1}{6}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مخرج کسر را به‌صورت $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$ تجزیه می‌کنیم، در این صورت طبق نکته‌ی گفته شده داریم:

$$\frac{1}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{4-1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\left(\text{Arctg}x-\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}\right)+C=\frac{1}{3}\text{Arctg}x-\frac{1}{6}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C$$

مثال ۶: حاصل $I=\int \frac{dx}{x(1+x^6)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}Ln(\frac{x^6-1}{x^6+1})+c$
۲) $\frac{1}{6}Ln(\frac{x^6-1}{x^6+1})+c$
۳) $\frac{1}{6}Ln(\frac{x^6}{x^6+1})+c$
۴) $\frac{1}{3}Ln(\frac{x^6}{x^6+1})+c$

پاسخ: گزینه «۳» اگر از تغییر متغیر $u=x^6$ استفاده کنیم، آن‌گاه $du=6x^5dx$، بنابراین $\frac{dx}{x(1+x^6)}=\frac{\frac{du}{6x^5}}{x(1+u)}=\frac{1}{6}\frac{du}{u(1+u)}$. اکنون باید کسر را تجزیه کنیم:

$$\frac{1}{u(1+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{1+u}$$

حالا با استفاده از مطالب گفته شده داریم:

$$(A+B)u+A=1 \Rightarrow A=1\ ,\ A+B=0 \xrightarrow{A=1} B=-1$$

بنابراین انتگرال به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u(1+u)}=\frac{1}{6}[\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{1+u}]=\frac{1}{6}[Lnu-Ln(1+u)]=\frac{1}{6}Ln\frac{u}{1+u}=\frac{1}{6}Ln\frac{x^6}{1+x^6}+c$$

مثال ۷: انتگرال نامعین $\int\frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $Ln|x|-\frac{1}{2}Ln|x^2+4|+c$
۲) $\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+Lnx+c$
۳) $\frac{1}{2}Ln|x^2+4|+\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+c$
۴) $\frac{1}{2}Ln|\frac{x^2}{x^2+4}|+\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+c$

پاسخ: گزینه «۴» از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

از ضرب کردن طرفین رابطه در $x(x^2+4)$ به‌دست می‌آید:

$$A(x^2+4)+x(Bx+C)=x+4 \Rightarrow A=1\ ,B=-1\ ,\ C=1$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x+1}{x^2+4}dx=Lnx-\frac{1}{2}Ln(x^2+4)+\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+C=\frac{1}{2}Lnx^2-\frac{1}{2}Ln(x^2+4)+\frac{1}{2}Arctg\frac{x}{2}+C$$

مثال ۸: حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{x}+Ln\frac{x}{x-1}+c$
۲) $x+Lnx+Ln(x-1)+c$
۳) $x+Ln^2x+Ln(x^2-1)+c$
۴) $\frac{1}{x}+Ln(x-1)-Lnx+c$

پاسخ: گزینه «۴» از روش تجزیه کسرها برای محاسبه انتگرال مورد نظر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} \Rightarrow (A+C)x^2+(-A+B)x-B=1 \Rightarrow B=-1\ ,\ A=-1,C=1$$

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-Lnx+\frac{1}{x}+Ln(x-1)+c$$

مثال ۹: اگر f چندجمله‌ای درجه دوم باشد که $f(0)=1$ و حاصل $\int\frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}dx$ تابعی گویا باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» فرض می‌کنیم ضابطه‌ی $f(x)$ به صورت ax^2+bx+c تعریف شود. اولاً چون $f(0)=1$، پس $c=1$ است و لذا $f(x)=ax^2+bx+1$ می‌باشد، همین‌جا به این موضوع توجه کنید که $f'(0)=b$ است، پس کافی است مقدار b تعیین شود. تنها چیز دیگری که از صورت سؤال می‌دانیم، این است که حاصل انتگرال تابعی گویاست؛ پس احتمالاً باید حاصل انتگرال را حساب کنیم. برای محاسبه‌ی انتگرال باید از روش تفکیک کسرها کمک بگیریم:

$$\frac{ax^2+bx+1}{x^2(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}$$

اما قسمت مهم حل این سؤال اینجاست؛ در صورت سؤال گفته شده حاصل انتگرال فقط تابعی گویا می‌تواند باشد، تا اینجا معلوم می‌شود A و C باید صفر باشند، چون اگر عدد باشند، آن‌گاه در جواب انتگرال سروکله تابع Lnx و $Ln(x+1)$ پیدا می‌شود که می‌دانیم گویا نیستند. حالا با متحد قرار دادن می‌توان گفت تساوی زیر را داریم:

$$ax^2+bx+1=B(x+1)^3+Dx^2(x+1)+Ex^2$$

اگر در طرفین تساوی $x=0$ قرار دهیم، آن‌گاه $B=1$ به دست می‌آید. از طرفی در سمت راست ضریب x برابر با 3B است که اگر آن را متحد با سمت چپ قرار دهیم، $b=3B$ و چون $B=1$، پس $b=3$ و لذا $f'(0)=3$ می‌باشد.

تذکر۱: همیشه قرار نیست انتگرال‌هایی که روش حل آن‌ها به وسیله‌ی روش تجزیه کسرها می‌باشد، فرم ظاهری چندجمله‌ای داشته باشند. انتگرال‌هایی وجود دارند که پس از یک تغییر متغیر به فرم کسرهای گویا در می‌آیند و سپس می‌توانیم از روش تجزیه کسرها حاصل آن‌ها را تعیین کنیم. برای نمونه چند مثال که می‌توان آن‌ها را پس از تغییر متغیر به فرم انتگرال‌هایی با کسر گویا نوشت، به شکل زیر است:

۱) $I=\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}dx \xrightarrow{\sin x=u} I=\int \frac{du}{(1+u)(2+u)}$

۲) $I=\int \frac{dx}{\sin x(1+2\cos x)} \xrightarrow{\cos x=u} I=\int \frac{du}{(1+u)(u-1)(1+2u)}$

۳) $\int \sqrt{tgx}\,dx \xrightarrow{\sqrt{tgx}=u} I=\int \frac{2u^2}{1+u^4}du=\int \frac{u^2+1}{1+u^4}du+\int \frac{u^2-1}{1+u^4}du$

مثال۱۰: حاصل $I=\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x}dx$ را بیابید.

پاسخ: با استفاده از تغییر متغیر $u=\sin x$، داریم:

$$I=\int \frac{du}{u^2+u}=\int \frac{du}{u(u+1)}=\int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\int \frac{du}{u}-\int \frac{du}{u+1}=Ln|u|-Ln|u+1|+c=Ln|\sin x|-Ln|\sin x+1|+c$$

$$=Ln\left|\frac{\sin x}{\sin x+1}\right|+c$$