مدرسان شریف

فصل اول

« تابع »

درسنامه: تعریف انواع تابع و مفاهیم مرتبط با آن

مثال ۱: به ازای کدام مقدار x معادله‌ی $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$ همواره برقرار است؟

۱) $x\ge\frac{2}{3}$ ۲) $x\ge\frac{3}{2}$ ۳) $x\ge\frac{9}{4}$ ۴) $x\ge\frac{4}{9}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به مطالب فوق، تساوی وقتی برقرار است که x^2+4x+9 و $2x-3$ هم‌علامت باشند. از طرفی چون x^2+4x+9 همواره مثبت است، لذا باید $2x-3\ge 0$ باشد، یعنی $x\ge\frac{3}{2}$.

مثال ۲: مجموعه جواب نامعادله‌ی $2x+|x-1|<8$ کدام است؟

۱) $x<3$ ۲) $3<x<7$ ۳) $x<1$ ۴) $1<x<3$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{ll}1)\ x-1\ge 0\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow 2x+x-1<8\to 3x<9\to x<3\to 1\le x<3 & (1)\\ 2)\ x-1<0\Rightarrow x<1\Rightarrow 2x+1-x<8\to x<7\to x<1 & (2)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اجتماع (۱) و (۲)}} x<3$$

مثال ۳: جواب معادله‌ی $\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor=\lfloor x\rfloor+\frac{\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor}{4}$ کدام است؟

۱) $1\le x<2$ ۲) $0\le x<1$ ۳) $2\le x<3$ ۴) $3\le x<4$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به خاصیت (۸) جزء صحیح داریم:

$$\frac{2\lfloor x\rfloor}{4}+\lfloor x\rfloor=2\lfloor x\rfloor\Rightarrow\frac{\lfloor x\rfloor}{2}=\lfloor x\rfloor\Rightarrow\lfloor x\rfloor=2\lfloor x\rfloor\Rightarrow\lfloor x\rfloor=0\Rightarrow 0\le x<1$$

مثال ۴: حاصل $\left|\lfloor 7x\rfloor-|\lfloor 5x\rfloor|\right|$ به ازای $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ : گزینه «۴»

$$\left|\left\lfloor-\frac{7}{2}\right\rfloor-\left|\left\lfloor-\frac{5}{2}\right\rfloor\right|\right|=\left|\lfloor-3/5\rfloor-|\lfloor-2/5\rfloor|\right|=|-4-|-3||=|-7|=7$$

مثال ۵: نمودار تابع $g(x)=\left|\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4\right|$ و منحنی $xy+x^2y^2=xy^2+yx^2$ به ترتیب (از راست به چپ) نسبت به کدام خطوط متقارن هستند؟

۱) $x=2$ و $y=x$ ۲) $x=-1$ و $y=x$ ۳) $x=2$ و $y=-x$ ۴) $x=-1$ و $y=-x$

پاسخ : گزینه «۱» بررسی تقارن منحنی $xy+x^2y^2=xy^2+yx^2$ نسبت به خطوط $y=x$ و $y=-x$ ساده است. ابتدا همه‌ی عبارات را به سمت چپ می‌آوریم:

$$f(x,y)=xy+x^2y^2-xy^2-yx^2=0$$

در این ضابطه به جای x، y قرار می‌دهیم و به جای y، x قرار می‌دهیم:

$$f(y,x)=yx+y^2x^2-yx^2-xy^2=f(x,y)$$

پس این منحنی نسبت به خط $y=x$ متقارن است. اما اگر به جای y، $-x$ و به جای x، $-y$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$f(-y,-x)=(-y)(-x)+(-y)^2(-x)^2-(-y)(-x)^2-(-x)(-y)^2=yx+y^2x^2+yx^2+xy^2\ne f(x,y)$$

پس نسبت به خط $y=-x$ تقارن ندارد.

اکنون تقارن تابع $g(x)=\left|\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4\right|$ را بررسی می‌کنیم. اگر $g(a-x)=g(a+x)$ باشد این تابع نسبت به خط $x=a$ تقارن دارد. اگر به ضابطه‌ی $g(x)$ توجه کنیم، با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$g(x)=\left|\frac{1}{2}(x^3-6x^2+12x-8)\right|=\frac{1}{2}\left|(x-2)^3\right|$$

با بررسی تقارن نسبت به خط $x=2$ خواهیم داشت:

$$g(2-x)=\frac{1}{2}\left|(2-x-2)^3\right|=\frac{1}{2}\left|-x^3\right|=\frac{1}{2}\left|x^3\right|$$

$$g(2+x)=\frac{1}{2}\left|(2+x-2)^3\right|=\frac{1}{2}\left|x^3\right|$$

پس $g(2-x)=g(2+x)$ است و نمودار $g(x)$ نسبت به خط $x=2$ تقارن دارد.

مثال ۶: کدام‌یک از توابع زیر زوج است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=x\cos x$ ۳) $y=x^3$ ۴) $y=\log(3x+\sqrt{9x^2+1})$

پاسخ : گزینه «۱» باتوجه به نکات گفته شده، گزینه (۴) تابعی فرد است.

$1) f(x)=x\to f(-x)=-x=-f(x)\ \Rightarrow$ تابع فرد است.

$2) f(x)=\cos x\to f(-x)=\cos(x)=f(x)\ \Rightarrow$ تابع زوج است.

$3) f(x)=\sin x\to f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)\ \Rightarrow$ تابع فرد است.

تابع $y=x\sin x$ حاصل‌ضرب دو تابع فرد است، پس تابعی زوج است و تابع $y=x\cos x$ تابعی فرد است.

مثال ۷: کدامیک از توابع زیر یک به یک <u>نیستند</u>؟

۱) $y=x^3+x$ ۲) $y=\mathrm{Ln}x$ ۳) $y=x^2+x$ ۴) $y=e^x$

پاسخ : گزینه «۳» طبق نکته گفته شده توجه کنید که در گزینه (۳)، $f(0)=0$ و $f(-1)=0$، پس f یک به یک نیست.

مثال ۸: تابع $y=\sin x+\cos x$ در کدام فاصله نزولی است؟ (n عددی صحیح است)

۱) $\frac{\pi}{6}+2n\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+(2n+1)\pi$ ۲) $\frac{\pi}{4}+2n\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$

۳) $\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ۴) $\frac{\pi}{4}+(2n-1)\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+2n\pi$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا رابطه‌ی مثلثاتی مقابل را می‌نویسیم: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

اگر دایره‌ی مثلثاتی را تجسم کنید، تابع $\cos x$ در زاویه‌ی $\theta=0$ مقدارش $+1$ است و در زاویه‌ی $\theta=\pi$ به مقدار -1 می‌رسد. یعنی $\cos x$ در فاصله‌ی $0\le\theta\le\pi$ نزولی است. به همین ترتیب در دورهای بعدی، مقدار $\cos x$ در $\theta=2n\pi$ برابر با $+1$ است و در $\theta=(2n+1)\pi$ به -1 می‌رسد. پس $\cos x$ در فاصله $2n\pi\le x\le(2n+1)\pi$ نزولی است، بنابراین داریم:

$$2n\pi\le x-\frac{\pi}{4}\le(2n+1)\pi\ \to 2n\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$$

مثال ۹: کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ ۲) $y=\frac{e^x+1}{e^x+2}$ ۳) $y=x^3-x^2$ ۴) $y=|x|+x$

پاسخ: گزینه «۲» شرط وارون‌پذیر بودن $f(x)$ آن است که یک به یک باشد. گزینه‌ی (۱) به وضوح یک به یک نیست. برای مثال اگر دو عدد $x=1$ و $x=-1$ را در آن قرار دهیم، مقدار y یکسان است. البته همین گزینه در ناحیه‌ی $x>0$ یک به یک است اما شرط مثبت بودن x را در صورت سؤال نداریم. گزینه‌ی (۳) نیز یک به یک نیست، برای مثال در هر دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=1$ مقدار $y=0$ به‌دست می‌آید. گزینه‌ی (۴) نیز یک به یک نیست، برای مثال در هر دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=-1$ مقدار $y=0$ به‌دست می‌آید. حالا نشان می‌دهیم گزینه (۲) یک به یک است:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{e^{x_1}+1}{e^{x_1}+2}=\frac{e^{x_2}+1}{e^{x_2}+2}\Rightarrow e^{x_1+x_2}+2e^{x_1}+e^{x_2}+2=e^{x_1+x_2}+2e^{x_2}+e^{x_1}+2\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\ \Rightarrow x_1=x_2$$

مثال ۱۰: اگر $f(x)=\text{Arcsin}\frac{1}{x+1}$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\sin x}{x}$ ۲) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ ۳) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$ ۴) $\frac{1-\sin x}{\sin x}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم. سپس نقش x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\text{Arc}\sin\frac{1}{1+x}\Rightarrow \sin y=\frac{1}{1+x}\Rightarrow \sin y+x\sin y=1\Rightarrow x=\frac{1-\sin y}{\sin y}\xrightarrow{\text{نقش x و y عوض می‌شود}} y=f^{-1}(x)=\frac{1-\sin x}{\sin x}$$

مثال ۱۱: اگر $f(x)=x^3+3x+4$ باشد، نمودار تابع f^{-1} از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) (۱و ۱-) ۲) (۱- و ۱) ۳) (۱- و ۰) ۴) (۰ و ۱-)

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به این‌که $f(-1)=0$، نقطه $(-1,0)$ متعلق به نمودار تابع f است و لذا نقطه $(0,-1)$ متعلق به نمودار f^{-1} می‌باشد.

مثال ۱۲: مقدار تابع معکوس $y=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$ به ازای $x=\text{Ln}(1+\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» فرض کنیم $f^{-1}(\text{Ln}(1+\sqrt{2}))=t$ باشد، در این صورت داریم $f(t)=\text{Ln}(1+\sqrt{2})$، پس خواهیم داشت:

$$\text{Ln}(t+\sqrt{t^2+1})=\text{Ln}(1+\sqrt{2})\Rightarrow t+\sqrt{t^2+1}=1+\sqrt{2}\Rightarrow t=1$$

در آخرین مرحله اگر عبارت سمت چپ تساوی را با عدد $1+\sqrt{2}$ مقایسه کنیم، واضح است که $t=1$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳: معکوس تابع $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ کدام است؟ $(a>0)$

۱) $f^{-1}(x)=a\text{Ln}a\sinh x$ ۲) $f^{-1}(x)=\cosh(x\text{Ln}a)$ ۳) $f^{-1}(x)=a\sinh(x\text{Ln}a)$ ۴) $f^{-1}(x)=\sinh(x\text{Ln}a)$

پاسخ: گزینه «۴» باید ابتدا x را برحسب y به‌دست بیاوریم و در آخر نقش x و y را عوض کنیم. می‌دانیم که $y=\log_b a\to a=b^y$، پس داریم:

$$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow\begin{cases}a^y=x+\sqrt{x^2+1}\\ a^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}\xrightarrow{\text{کم کردن طرفین دو رابطه}} a^y-a^{-y}=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}(a^y-a^{-y})$$

همچنین $\sinh\alpha=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}$ و می‌توانیم بنویسیم $a=e^{\text{Ln}a}$ و لذا داریم:

$$x=\frac{1}{2}(a^y-a^{-y})=\frac{1}{2}(e^{\text{Ln}a^y}-e^{\text{Ln}a^{-y}})=\sinh(\text{Ln}a^y)=\sinh(y\text{Ln}a)$$

در محاسبه تابع معکوس، x را به f^{-1} و y را به x تبدیل می‌کنیم، پس داریم:

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sinh(x\text{Ln}a)$$

سؤال دانشجو: در پاسخ این مثال رابطه‌ی $a^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1}$ چگونه به دست آمده است؟

پاسخ: تابع $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ فرد است، پس $-y=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$ بنابراین: $a^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1}$.

مثال ۱۴: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}} & ; x<1\\ 2x-\frac{3}{4} & ; x\geq 1\end{cases}$ مفروض است، $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(\frac{3}{4})=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow f(f(\frac{3}{4}))=f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})-\frac{3}{4}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

مثال ۱۵: با فرض $f(x)=x^2-2$، مقدار $f(f(f(2\cos x)))$ کدام است؟

۱) $2\sin^8 x$ ۲) $2\cos^8 x$ ۳) $2\sin 8x$ ۴) $2\cos 8x$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(2\cos x)=(2\cos x)^2-2=4\cos^2 x-2=2(2\cos^2 x-1)=2\cos 2x$$

$$f(f(2\cos x))=f(2\cos 2x)=(2\cos 2x)^2-2=4\cos^2 2x-2=2(2\cos^2 2x-1)=2\cos 4x$$

$$f(f(f(2\cos x)))=f(2\cos 4x)=(2\cos 4x)^2-2=4\cos^2 4x-2=2(2\cos^2 4x-1)=2\cos 8x$$

مثال ۱۶: اگر $f_0(x)=x^2$ و $f_{n+1}(x)=f_0(f_n(x))$ ، $(n=0,1,2,3,\cdots)$ ، آن‌گاه ضابطه‌ی $f_{1396}(x)$ کدام است؟

۱) $x^{2^{1397}}$ ۲) $x^{2^{1396}}$ ۳) $x^{2^{1395}}$ ۴) $x^{2\times1396}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی $f_{n+1}(x)=f_0(f_n(x))$ ، ضابطه‌ی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$n=0 \Rightarrow f_1(x)=f_0(f_0(x))=(f_0(x))^2=(x^2)^2=x^4$$

$$n=1 \Rightarrow f_2(x)=f_0(f_1(x))=(f_1(x))^2=(x^4)^2=x^8$$

اکنون به ضابطه‌ی توابع f_0 ، f_1 و f_2 توجه کنیم: $f_2(x)=x^8 \ , \ f_1(x)=x^4 \ , \ f_0(x)=x^2$

متوجه می‌شویم که $f_n(x)=x^{2^{n+1}}$. پس: $f_{1396}(x)=x^{2^{1397}}$.

توضیح: روش به کار رفته در حل این مثال یک اثبات کامل محسوب نمی‌شود، بلکه با توجه به ضابطه‌های $f_0(x)$ ، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ، حدس می‌زنیم که $f_n(x)$ به‌صورت $x^{2^{n+1}}$ است. در واقع اثبات کامل با استقرای ریاضی انجام می‌شود.

مثال ۱۷: اگر $f(x)=x-|x|$ و $g(x)=2^{-x}$ ، کمترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا ضابطه $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم، برای این منظور در ضابطه‌ی $g(x)$ ، به جای تمام x ها، ضابطه‌ی $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x-|x| \\ g(x)=2^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow gof(x)=2^{-(x-|x|)}=2^{|x|-x}$$

کمترین مقدار $gof(x)$ زمانی اتفاق می‌افتد که $|x|-x$ کمترین مقدار خود را داشته باشد، لذا داریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } x\ge 0 \Rightarrow |x|-x=0 \Rightarrow gof(x)=2^{x-x}=1 \\ \text{اگر } x<0 \Rightarrow |x|-x=-2x>0 \Rightarrow gof(x)=2^{-2x}>2^0=1 \end{cases} \Rightarrow Min\{gof(x)\}=1$$

مثال ۱۸: اگر f و g توابع با ضوابط $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=x^2$ باشند، معادله‌ی $(gof)(x)=(fog)(x)$ چند ریشه‌ی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x \\ g(x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} fog(x)=(g(x))^2+2(g(x))=(x^2)^2+2(x^2)=x^4+2x^2=x^2(x^2+2) \\ gof(x)=(f(x))^2=(x^2+2x)^2=(x(x+2))^2=x^2(x+2)^2 \end{cases}$$

حال به حل معادله می‌پردازیم:

$$x^2(x^2+2)=x^2(x+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x^2+2)=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+2=x^2+4+4x \Rightarrow 4x=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ ریشه‌ی متمایز $x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۱۹: اگر $f(\frac{x-2}{x+1})=\frac{x-1}{2x}$ باشد، $f(x)$ عبارت است از :

۱) $\frac{2x+4}{2x+1}$ ۲) $\frac{2x+1}{2x+4}$ ۳) $\frac{2x}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x-1}{x}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\frac{x-2}{x+1}=t \Rightarrow xt+t=x-2 \Rightarrow x=\frac{t+2}{1-t} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{1-t}-1}{\frac{2(t+2)}{1-t}}=\frac{\frac{t+2-1+t}{1-t}}{\frac{2t+4}{1-t}}=\frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(t)=\frac{2t+1}{2t+4} \Rightarrow f(x)=\frac{2x+1}{2x+4}$$

مثال ۲۰: اگر $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، آن‌گاه $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[\text{و } \cos\alpha \text{ در این ناحیه منفی است}]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع دوم است}} \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اما با توجه به نکته گفته شده در این مورد داریم:

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha=-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۲۱: حاصل $(1+\text{tg}12^\circ)(1+\text{tg}33^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به نکته گفته شده، داریم:

$$12^\circ+33^\circ=45^\circ \rightarrow (1+\text{tg}12^\circ)(1+\text{tg}33^\circ)=2$$

مثال ۲۲: حاصل $A=\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}\cos 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\sin 2x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$A=\frac{1}{2}\left[\cos[(x+\frac{\pi}{6})-(x-\frac{\pi}{6})]+\cos[(x+\frac{\pi}{6})+(x-\frac{\pi}{6})]\right]-\frac{1}{4}$$

$$A=\frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi}{6})+\cos 2x]-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\cos 2x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos 2x$$

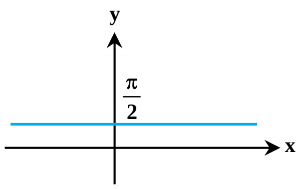
مثال ۲۳: حاصل $A=\frac{1-\text{tg}25^\circ}{1+\text{tg}25^\circ}+\frac{1-\text{tg}20^\circ}{1+\text{tg}20^\circ}$ کدام است؟

۱) $\text{tg}20^\circ+\text{tg}25^\circ$ ۲) $\text{tg}20^\circ-\text{tg}25^\circ$ ۳) $\frac{1-\text{tg}45^\circ}{1+\text{tg}45^\circ}$ ۴) $\frac{1-\text{tg}20^\circ}{1+\text{tg}25^\circ}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به فرمول‌های فرعی گفته شده، ملاحظه می‌شود که در این مثال $\alpha=25$ و $\beta=20$، پس داریم:

$$A=\text{tg}(45-25)+\text{tg}(45-20)=\text{tg}25+\text{tg}20$$

مثال ۲۴: نمودار روبرو مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟



۱) $f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

۲) $f(x)=\text{tg}^{-1}x+\cot g^{-1}x$

۳) $f(x)=\text{tg}^{-1}\frac{1}{x}+\text{tg}^{-1}\frac{1}{x}$

۴) $f(x)=\cot g^{-1}x+\cot g^{-1}\frac{1}{x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» دامنه تابع در گزینه (۱)، $-1\le x\le 1$ می‌باشد و برای گزینه‌های (۳) و (۴) واضح است که $x=0$ جزء دامنه نمی‌باشد.

مثال ۲۵: مساحت محدود به تابع $y=\text{Arcsin}(\sin x)$ در فاصله‌ی $[0,\pi]$ با محور x ها کدام است؟

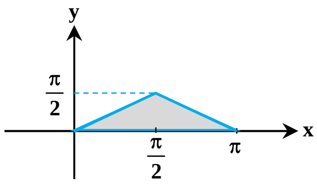
۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) π^2

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\text{اگر}: 0\le x\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Arcsin}(\sin x)=x$$

$$\text{اگر}: \frac{\pi}{2}<x<\pi \Rightarrow 0<\pi-x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Arcsin}(\sin x)=\text{Arcsin}(\sin(\pi-x))=\pi-x$$

بنابراین نمودار تابع به‌صورت زیر می‌باشد و در نتیجه مساحت آن برابر است با:



$$\Rightarrow S=\frac{\pi\times\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

مثال ۲۶: مقدار $\cosh(\text{Ln}2)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم $e^{\text{Ln}a}=a$ و در نتیجه $e^{-\text{Ln}a}=\frac{1}{a}$. پس با توجه به تعریف $\cosh x$ داریم:

$$\cosh(\text{Ln}2)=\frac{e^{\text{Ln}2}+e^{-\text{Ln}2}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

مثال ۲۷: تابع $y = \coth x$ با کدام‌یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) $\frac{e^x+1}{e^x-1}$	۲) $\frac{1-e^x}{1+e^x}$	۳) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	۴) $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$y = \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

مثال ۲۸: e^x با کدام‌یک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\sinh x \cosh x$	۲) $\cosh x + \sinh x$	۳) $\sinh^2 x + \cosh^2 x$	۴) $\frac{1}{\sinh x}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2} = e^x$$

مثال ۲۹: در صورتی که $\sinh k = \frac{3}{4}$، مقدار عدد حقیقی x از رابطه‌ی $\mathrm{Ln}(e^x - \sqrt{e^{2x}-1}) = k$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\mathrm{Ln}(\frac{5}{4})$	۲) $\mathrm{Ln}3 + 2\mathrm{Ln}2$	۳) $\mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2$	۴) هیچ x حقیقی یافت نمی‌شود.

پاسخ: گزینه «۴»

$$\sinh k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{e^k-e^{-k}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow e^k - e^{-k} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } e^k} e^{2k} - 1 = \frac{3}{2}e^k \Rightarrow e^{2k} - \frac{3}{2}e^k - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲}} e^k = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} e^k = 2 \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ e^k = -\frac{1}{2}\ ;\ e^k > 0 \text{ غیرقابل قبول چون} \end{cases} \Rightarrow e^k = 2 \Rightarrow k = \mathrm{Ln}2$$

$$\mathrm{Ln}(e^x - \sqrt{e^{2x}-1}) = \mathrm{Ln}2 \Rightarrow e^x - \sqrt{e^{2x}-1} = 2 \Rightarrow e^x - 2 = \sqrt{e^{2x}-1}$$

از طرفی می‌دانیم چون سمت راست معادله، رادیکال است و بزرگتر مساوی از صفر می‌باشد، بنابراین سمت چپ هم باید بزرگتر مساوی از صفر باشد. در نتیجه $e^x \ge 2$.

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} e^{2x} - 4e^x + 4 = e^{2x} - 1 \Rightarrow 4e^x = 5 \Rightarrow e^x = \frac{5}{4}$$

ولی در روند حل سؤال به این نتیجه رسیدیم که $e^x > 2$، بنابراین $e^x = \frac{5}{4}$ غیرقابل قبول است و هیچ مقدار x حقیقی یافت نشد.

مثال ۳۰: اگر $f(x) = \cosh x$، مقدار $f^{-1}(\frac{5}{4})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$	۲) ۲	۳) $\mathrm{Ln}2$	۴) $\frac{\mathrm{Ln}2}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا از تساوی استفاده می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x = \mathrm{Ln}(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$f^{-1}(\frac{5}{4}) = \mathrm{Ln}(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}-1}) = \mathrm{Ln}(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}) = \mathrm{Ln}2$$

مثال ۳۱: اگر $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\sinh x = \mathrm{tg}\theta$، $\cosh x$ برابر کدام است؟	(مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\cos\theta$	۲) $\csc\theta$	۳) $\sec\theta$	۴) $\sin\theta$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ و $1 + \mathrm{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. پس داریم:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cosh x = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

مثال ۳۲: $\cosh^{-1}x$ برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $Ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$ ۲) $Ln(1\pm\sqrt{x^2-1})$ ۳) $Ln(x\pm\sqrt{1-x^2})$ ۴) $Ln(1\pm\sqrt{1-x^2})$

پاسخ: گزینه «۱» با در نظر گرفتن $f(x)=\cosh x$ تابع $f^{-1}(x)=\cosh^{-1}x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow y=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}}2e^xy=e^{2x}+1\Rightarrow e^{2x}-2e^xy+1=0$$

برای این‌که معادله‌ی به‌دست آمده را برحسب x به‌دست بیاوریم، با تغییر متغیر $e^x=t$، ملاحظه می‌شود که معادله‌ی فوق به یک معادله‌ی درجه دوم برحسب t تبدیل خواهد شد و داریم:

$$e^x=t\Rightarrow t^2-2ty+1=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta=4y^2-4\\ t=\frac{+2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^2-1}\xrightarrow{t=e^x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}Lne^x=Ln(y\pm\sqrt{y^2-1})\Rightarrow x=Ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$$

حال نقش x و y را عوض می‌کنیم و تابع $f^{-1}(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f^{-1}(x)=Ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$$

مثال ۳۳: حاصل $Arcsin(1)-Arcsin(-1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$Arcsin(1)-Arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-(\frac{-\pi}{2})=\pi$$

مثال ۳۴: اگر $3f(x+2)-f(x)=4$ و مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(8)$ چیست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{150}{81}$ ۲) $\frac{160}{81}$ ۳) $\frac{170}{81}$ ۴) $\frac{180}{81}$

پاسخ: گزینه «۲» چون مبدأ مختصات نقطه‌ای از $f(x)$ است، لذا $f(0)=0$ خواهد بود.

$$3f(x+2)-f(x)=4\xrightarrow{x=0}3f(2)-f(0)=4\Rightarrow f(2)=\frac{4}{3}\quad,\quad x=2\Rightarrow 3f(4)-f(2)=4\Rightarrow 3f(4)=4+\frac{4}{3}\Rightarrow f(4)=\frac{16}{9}$$

$$x=4\Rightarrow 3f(6)-f(4)=4\Rightarrow 3f(6)=4+\frac{16}{9}\Rightarrow f(6)=\frac{52}{27}\quad,\quad x=6\Rightarrow 3f(8)-f(6)=4\Rightarrow 3f(8)=4+\frac{52}{27}\Rightarrow f(8)=\frac{160}{81}$$

مثال ۳۵: اگر $f(x)=Ln(\frac{2x+1}{x})$ باشد، $f^{-1}(Ln3)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e^2-1 ۴) $Ln\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم دامنه‌ی تابع f^{-1} برد تابع f می‌باشد، پس می‌توانیم به جای $f(x)$، $Ln3$ قرار دهیم و x را که همان $f^{-1}(Ln3)$ می‌باشد، به‌دست آوریم:

$$Ln3=Ln\frac{2x+1}{x}\Rightarrow 3=\frac{2x+1}{x}\Rightarrow 3x=2x+1\Rightarrow x=1$$

مثال ۳۶: چنانچه $F(x)$ یک تابع زوج و $G(x)$ یک تابع فرد باشد، آن‌گاه: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ فرد است.
۲) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ زوج است.
۳) $F(G(x))$ فرد است و $G(F(x))$ فرد است.
۴) $F(G(x))$ زوج است و $G(F(x))$ زوج است.

پاسخ: گزینه «۴» با یک نگاه به گزینه‌ها متوجه می‌شویم که تنها کاری که لازم است انجام شود، بررسی زوج یا فرد بودن ترکیب دو تابع زوج و فرد است. می‌دانیم که اگر f تابعی زوج باشد، داریم: $f(-x)=f(x)$ و اگر f فرد باشد، داریم: $f(-x)=-f(x)$، لذا داریم:

$$F(G(-x))\overset{\text{فرد }G}{=\!=}F(-G(x))\overset{\text{زوج }F}{=\!=}F(G(x))\Rightarrow \text{.است زوج } F(G(x))$$

$$G(F(-x))\overset{\text{زوج }F}{=\!=}G(F(x))\Rightarrow \text{.است زوج } G(F(x))$$

مثال ۳۷: توابع $f=\{(۲,۲),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۵,۶),(۳,۴)\}$ مفروض‌اند، $f+g$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\{(۲,۳),(۴,۶)\}$ ۲) $\{(۲,۵),(۳,۸)\}$ ۳) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۵,۶),(۸,۱۰),(۶,۸)\}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم دامنه‌ی تابع $f+g$، از اشتراک دامنه‌های f و g حاصل می‌گردد. پس داریم:

$$\begin{cases} D_f=\{۲,۳,۴\} \\ D_g=\{۳,۵,۲\}\end{cases} \Rightarrow D_{f+g}=\{۲,۳\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)+g(۲)=۲+۳=۵ \Rightarrow (۲,۵)\in f+g \\ f(۳)+g(۳)=۴+۴=۸ \Rightarrow (۳,۸)\in f+g \end{array}\right. \Rightarrow f+g=\{(۲,۵),(۳,۸)\}$$

مثال ۳۸: اگر تابع $f(x)=ax\sin x+(b-۱)x$ زوج و تابع $g(x)=(a+۲)\cos x+bx$ فرد باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $(۲,-۱)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(۱,-۲)$ ۴) $(-۱,۲)$

پاسخ: گزینه «۲» برای این‌که تابع $f(x)$ زوج باشد، باید $f(x)=f(-x)$ باشد، پس باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$ax\sin x+(b-۱)x=a(-x)\sin(-x)+(b-۱)(-x) \xrightarrow{\sin(-x)=-\sin x} ax\sin x+(b-۱)x=ax\sin x-(b-۱)x$$
$$\Rightarrow (b-۱)x=-(b-۱)x \Rightarrow b-۱=۰ \Rightarrow b=۱$$

با توجه به گزینه‌ها، تا این قسمت حل می‌توان به گزینه‌ی صحیح پی برد. ولی جهت کامل کردن حل، فرد بودن تابع g را هم بررسی می‌کنیم، برای این‌که تابع g، فرد باشد، باید داشته باشیم $g(-x)=-g(x)$. پس تساوی زیر باید برقرار باشد:

$$(a+۲)\cos(-x)+b(-x)=-(a+۲)\cos x-bx \xrightarrow{\cos(-x)=\cos x} (a+۲)\cos x-bx=-(a+۲)\cos x-bx$$
$$\Rightarrow (a+۲)\cos x=-(a+۲)\cos x \Rightarrow a+۲=۰ \Rightarrow a=-۲$$

مثال ۳۹: اگر داشته باشیم $f(\text{Arc}\cos(x-۱))=\frac{x-۱}{x}$، مقدار $f(x)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\cos x}{۱-\cos x}$ ۲) $\frac{۱+\cos x}{\cos x}$ ۳) $\frac{۱-\cos x}{\cos x}$ ۴) $\frac{\cos x}{۱+\cos x}$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

برای حل این سؤال کافی است از تغییر متغیر $t=\text{Arc}\cos(x-۱)$ استفاده کنیم، با کسینوس گرفتن از طرفین تساوی داریم:

$$t=\text{Arc}\cos(x-۱) \Rightarrow \cos t=x-۱ \Rightarrow x=\cos t+۱$$

$$f(\text{Arc}\cos(x-۱))=\frac{x-۱}{x} \Rightarrow f(t)=\frac{\cos t+۱-۱}{\cos t+۱}=\frac{\cos t}{\cos t+۱}$$

مثال ۴۰: توابع $f=\{(۲,۲),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۵,۶),(۲,۳)\}$ مفروضند، gof کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $gof=\{(۲,۳),(۴,۶)\}$ ۲) $gof=\{(۳,۵),(۲,۴)\}$ ۳) $gof=\{(۲,۵),(۳,۸)\}$ ۴) $gof=\{(۵,۶),(۸,۱۰),(۶,۸)\}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم تعریف دامنه‌ی تابع $gof(x)$ به‌صورت روبرو است: $D_{gof}=\{x\,|\,x\in D_f, f(x)\in D_g\}$

حال برای x های عضو دامنه‌ی f $(x\in D_f)$، رابطه‌ی فوق را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۲\in D_f \Rightarrow f(۲)=۲\in D_g\ (\text{چون } g(۲)=۳) \Rightarrow x=۲\in D_{gof} \\ x=۳\in D_f \Rightarrow f(۳)=۴\notin D_g \Rightarrow x=۳\notin D_{gof} \\ x=۴\in D_f \Rightarrow f(۴)=۵\in D_g\ (\text{چون } g(۵)=۶) \Rightarrow x=۴\in D_{gof}\end{array}\right\} \Rightarrow D_{gof}=\{۲,۴\} \Rightarrow gof=\{(۲,۳),(۴,۶)\}$$

مثال ۴۱: اگر $f(x)=\begin{cases}-۱ & ; x\le -۲ \\ x+۱ & ; -۲<x<۱ \\ ۲ & ; x\ge ۱\end{cases}$ حاصل $fof(-۱)+(f(-۱))^۲$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به ضابطه‌های داده شده $f(-۱)$ از ضابطه‌ی $f(x)=x+۱$ به‌دست می‌آید، پس $f(-۱)=۰$ می‌باشد. حال $f(f(-۱))=f(۰)$ نیز از ضابطه‌ی $f(x)=x+۱$ به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=۰ \\ f(f(-۱))=f(۰)=۰+۱=۱\end{array}\right\} \Rightarrow fof(-۱)+(f(-۱))^۲=۱+۰^۲=۱$$

مثال ۴۲: اگر $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ عبارت $\overbrace{fof\cdots f(x)}^{\text{۱۰۰ بار تکرار f}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) x ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{1-x}{1+x}$ ۴) $(\frac{1-x}{1+x})^{100}$

پاسخ: گزینه «۱»

روش اول: در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $ad-bc\neq 0$ و $c\neq 0$ می‌باشد، هرگاه $a+d=0$ شود، داریم $fof(x)=x$. در تابع داده شده شرط ارائه شده برقرار بوده و داریم:

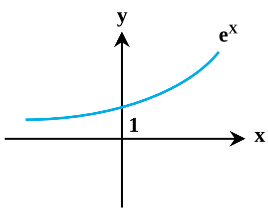
$$fof(x)=x \Rightarrow fofof(x)=f(x) \Rightarrow fofofof(x)=fof(x)=x \Rightarrow \underbrace{fof...of}_{\text{مرتبه}n}(x)=\begin{cases} x & ; \ n\text{زوج باشد} \\ f(x) & ; \ n\text{فرد باشد}\end{cases}$$

روش دوم: کافی است چند مرحله $f(x)$ را با خودش ترکیب کنیم تا به نتیجه فوق برسیم.

مثال ۴۳: تابع $f(x)=e^x$ یک تابع: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) فرد است. ۲) نه فرد و نه زوج است. ۳) زوج است. ۴) هم فرد و هم زوج است.

پاسخ: گزینه «۲» همانگونه که در متن درس هم آمده، نمودار تابع e^x به‌صورت روبرو است. ملاحظه می‌شود که هر چند دامنه‌ی تابع $f(x)=e^x$، $\mathbb{R}$ بوده و شرط متقارن بودن دامنه برقرار می‌باشد، اما تابع نه فرد است و نه زوج (نه محور y ها محور تقارن تابع می‌باشد و نه مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع e^x می‌باشد).



توجه: $(e^{-x}\neq -e^x \ , \ e^x\neq e^{-x})$

مثال ۴۴: در صورتی که $f(x)=2\lfloor x\rfloor+2\lfloor -x\rfloor$ باشد، مجموعه‌ی $fofof(x)$ چیست؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{2\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{0,4\}$ ۴) $\{0,-2\}$

پاسخ: گزینه «۲» **یادآوری:** $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & ; \ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; \ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، بنابراین داریم:

$$f(x)=2\lfloor x\rfloor+2\lfloor -x\rfloor=2(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)=\begin{cases}0 & ; \ x\in\mathbb{Z}\\ -2 & ; \ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$fof(x)=f(f(x))\ \xrightarrow[f(x)\in\mathbb{Z}]{f(x)=0\ \text{یا}\ -2}\ 0 \Rightarrow fofof(x)=f(f(f(x)))=f(0)=0$$

نکته: برای تابع فوق می‌توان گفت: $\underbrace{fof....of}_{\text{مرتبه}n}(x)=0$، $n>1$.

مثال ۴۵: فرض کنید که $f(x)=\frac{(a^x+a^{-x})}{2}$ ، $a>0$، در این صورت $f(x+y)+f(x-y)$ برحسب $f(x)$ و $f(y)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $4f(x).f(y)$ ۲) $2f(x).f(y)$ ۳) $\frac{1}{2}f(x).f(y)$ ۴) $f(x).f(y)$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

کافی است $f(x+y)$ و $f(x-y)$ را به‌دست بیاوریم و با هم جمع کرده و سپس به‌صورت زیر ساده‌سازی کنیم:

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^{x+y}+a^{-x-y}}{2}+\frac{a^{x-y}+a^{y-x}}{2}=\frac{a^x(a^y+a^{-y})+a^{-x}(a^{-y}+a^y)}{2}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})}{2}=2f(x)f(y)$$

مثال ۴۶: تابع $f(x)=2$، $g(x)=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ و $h(x)=x^2-2x+3$ مفروض‌اند. تابع $(f+g)oh$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $\{(0,2)\}$ ۲) $\{(1,5)\}$ ۳) $\{(0,2),(1,5)\}$ ۴) $\{(0,2),(1,4),(2,5)\}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم. دامنه‌ی f شامل همه‌ی اعداد حقیقی است، اما دامنه‌ی g فقط شامل سه عدد $\{0,1,2\}$ می‌شود. پس دامنه‌ی $f+g$، اشتراک این دو مجموعه است، یعنی $D_{f+g}=D_f\bigcap D_g=\{0,1,2\}$. در هر کدام از این نقاط داریم:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2+g(x)$ بنابراین خواهیم داشت: $f+g=\{(0,1+2),(1,2+2),(2,3+2)\}=\{(0,3),(1,4),(2,5)\}$

حال می‌خواهیم $(f+g)oh$ را حساب کنیم. دامنه‌ی $h(x)$ شامل همه‌ی اعداد حقیقی است و دامنه‌ی $f+g$ برابر با $D_{f+g}=\{0,1,2\}$ است. دامنه‌ی ترکیب

آن‌ها، شامل همه‌ی اعداد حقیقی است که به ازای آن‌ها $h(x)\in D_{f+g}$ باشد. یعنی ما اعدادی را می‌خواهیم که در آن‌ها $h(x)=۰$ یا ۱ یا ۲ باشد. با کمک گرفتن از گزینه‌ها نقاط $x=۰,۱,۲$ را امتحان می‌کنیم. $h(۰)=۳\notin D_{f+g}$ پس $x=۰$ در دامنه‌ی ترکیب نیست. $h(۱)=۲\in D_{f+g}$ پس $x=۱$ عضو دامنه‌ی ترکیب است و داریم $(f+g)oh(۱)=(f+g)(۲)=۵ \Rightarrow (۱,۵)\in (f+g)oh$. در $x=۲$ داریم $h(۲)=۳\notin D_{f+g}$. پس $x=۲$ هم عضو دامنه‌ی ترکیب نیست. نتیجه آن‌که: $(f+g)oh=\{(۱,۵)\}$

مثال ۴۷: حاصل $tgh^{-1}(tg\frac{\pi}{۶})$ برابر با LnA است. A کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $tg(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و لذا باید مقدار $tgh^{-1}(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ حساب شود. از فرمول $tgh^{-1}x=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+x}{۱-x})$ استفاده می‌کنیم:

$$tg^{-1}(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}})=\frac{۱}{۲}Ln\frac{(۳+\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})}{(۳-\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})}=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۹+۶\sqrt{۳}+۳}{۶})$$

$$=\frac{۱}{۲}Ln(۲+\sqrt{۳})=Ln\sqrt{(۲+\sqrt{۳})}=LnA \Rightarrow A=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

مثال ۴۸: معادله‌ی منحنی $y=۲x^۲-۸x+۳$ را در نظر بگیرید. اگر فقط محور xها را بر خط $y=-۵$ انتقال دهیم. معادله‌ی این منحنی در دستگاه جدید کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۵)

۱) $y=۲x^۲$ ۲) $y=۲x^۲+۵$ ۳) $y=۲(x+۴)^۲$ ۴) $y=۲(x-۲)^۲$

پاسخ: گزینه «۴» اگر مبدأ مختصات را به نقطه‌ی $o'(\alpha,\beta)$ انتقال دهیم و X و Y مختصات قدیمی و x و y مختصات جدید باشند، آنگاه داریم:

$x=X-\alpha$ و $y=Y-\beta$

که در این حالت اگر $Y=f(X)$ ضابطه‌ی یک تابع در دستگاه مختصات قدیم باشد، ضابطه‌ی تابع در دستگاه مختصات جدید به صورت $y=f(x+\alpha)-\beta$ خواهد بود. در این سؤال مبدأ به نقطه‌ی $(۰,-۵)$ انتقال یافته است، پس $\alpha=۰$ و $\beta=-۵$ می‌باشد، لذا داریم:

$$y=۲(x-۰)^۲-۸(x-۰)+۳-(-۵)=۲x^۲-۸X+۸=۲(x^۲-۴X+۴)=۲(x-۲)^۲$$

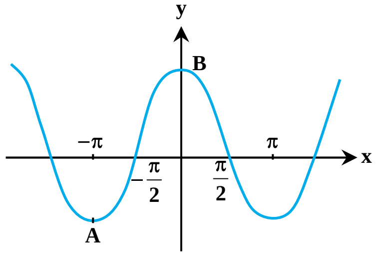
بیان ساده‌تر: وقتی مبدأ را به $(۰,-۵)$ منتقل می‌کنیم، محور xها ۵ واحد به پایین می‌رود، مثل آن است که محور سر جای خودش باشد و منحنی ۵ واحد به بالا برود، پس داریم: $y_{جدید}=(۲x^۲-۸x+۳)+۵=۲(x-۲)^۲$

مثال ۴۹: معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos x$ روی کدام بازه، یک تابع است؟ (عمران ـ آزاد ۸۵)

۱) $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(-\pi,۰)$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(۰,۲\pi)$

پاسخ: گزینه «۲» بازه‌ای مورد قبول است که $\cos x$ روی آن بازه اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد، با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۲) مورد قبول است.

در شکل مقابل می‌بینید که تابع $y=\cos x$ در فاصله‌ی $(-\pi,۰)$ یعنی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B، اکیداً صعودی است.



مثال ۵۰: کدام‌یک از توابع زیر برابر با $\sinh^{-1}x$ (تابع معکوس سینوس هذلولی) می‌باشد؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $-Ln(x-\sqrt{x^۲-۱})$ ۲) $-Ln(\sqrt{x^۲+۱}-x)$ ۳) $Ln(x-\sqrt{x^۲-۱})$ ۴) $Ln(\sqrt{x^۲+۱}-x)$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\sinh^{-1}x=Ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$، حال توجه کنید که داریم:

$$-Ln(\sqrt{x^۲+۱}-x)=Ln(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}-x})=Ln(\sqrt{x^۲+۱}+x)$$

مثال ۵۱: دو منحنی به معادلات $27y^2 = 4(x-2)^3$ و $y^2 = 4x$ در نقطه‌ای با کدام طول از یکدیگر می‌گذرند؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۱» کافی است دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 = \frac{4}{27}(x-2)^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{27}(x-2)^3 = 4x \Rightarrow x = 8 \;,\; x = -1$$

توجه کنید که جواب $x = -1$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله‌ی منحنی $y^2 = 4x$، مقدار x نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۵۲: اگر $f(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x}$، آن‌گاه $f^{-1}(3)$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{\pi}{3}$ ۲) $-\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\frac{1+\sin x}{\sin x} = 3 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

مثال ۵۳: اگر $e_1(t)$ و $e_2(t)$ دو تابع تناوبی با دوره‌های تناوب به ترتیب T_1 و T_2 باشند، به طوری که $\frac{T_1}{T_2} = p$ و $f(t) = e_1(mt)e_2(nt)$ که در آن $m,n,p \in \mathbb{N}$ کدام گزینه همواره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) T_2 یک دوره تناوب f است. ۲) T_1 یک دوره تناوب f است. ۳) T_2 کوچکترین دوره تناوب f است. ۴) T_1 کوچکترین دوره تناوب f است.

پاسخ: گزینه «۲» چون T_1 و T_2 به ترتیب دوره‌های تناوب توابع e_1 و e_2 می‌باشند، پس داریم:

$$e_1(t+T_1) = e_1(t) \quad , \quad e_2(t+T_2) = e_2(t)$$

حال ثابت می‌کنیم T_1 یک دوره تناوب تابع f می‌باشد.

$$f(t+T_1) = e_1(m(t+T_1))\, e_2(n(t+T_1)) = e_1(mt+mT_1)\, e_2(nt+npT_2) = e_1(mt)\, e_2(nt)$$

مثال ۵۴: کدام گزاره در مورد چندجمله‌ای‌های $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ که در شرط $P(x+h) = P(x) + P(h)$ برای هر x و h در $(-\infty,\infty)$ صادق باشند، نادرست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $P(0) = 0$ ۲) بی‌نهایت چندجمله‌ای P با این خاصیت وجود دارد.

۳) چنین P ای با این خاصیت وجود ندارد. ۴) فقط یک P وجود دارد که $P(1) = 1$

پاسخ: گزینه «۳» بی‌نهایت چندجمله‌ای با خاصیت مورد نظر وجود دارد که به‌صورت $P(x) = mx$ می‌باشند (تمام خطوط گذرنده از مبدأ مختصات و بنابراین واضح است که $P(0) = 0$ می‌باشد و همچنین اگر $P(1) = 1$ باشد، فقط یک P با این خاصیت وجود دارد که عبارتست از $P(x) = x$.

مثال ۵۵: اگر $f^{-1}(x) = x^3 + x$ و $h(x) = \frac{1}{2-f(x)}$، آن‌گاه مقدار $h^{-1}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ چقدر است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۸)

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $3+\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» مقدار خواسته شده را t می‌نامیم چون $h^{-1}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = t$ لذا $h(t) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$، به جای متغیر t می‌توانیم متغیر x را جایگزین کنیم و لذا $h(x) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. از طرفی طبق تساوی داده شده داریم:

$$\frac{1}{2-f(x)} = h(x) \Rightarrow \frac{1}{2-f(x)} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2-f(x) = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow 2-f(x) = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow x = f^{-1}(\sqrt{2}) \xrightarrow{f^{-1}(x)=x^3+x} x = (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

چون متغیر x جایگزین متغیر t شده بود، پس $t = 3\sqrt{2}$.

مثال ۵۶: اگر $x \le 0$; $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$، نمودار $f^{-1}(x)$ از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $(\frac{5}{4}, Ln\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{3}{4}, Ln\frac{1}{2})$ ۳) $(\frac{5}{4}, Ln2)$ ۴) $(\frac{3}{4}, Ln2)$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$f(Ln\frac{1}{2}) = f(-Ln2) = \frac{1}{2}(e^{-Ln2} + e^{Ln2}) = \frac{5}{4}$$

بنابراین $f^{-1}(\frac{5}{4}) = Ln\frac{1}{2}$، پس گزینه (۱) صحیح است. توجه کنید که $f(-Ln2)$ هم با $\frac{5}{4}$ برابر است اما چون شرط $x \le 0$ داریم قابل قبول نیست.

یادآوری: اگر $(x,y) \in f$، آن‌گاه $(y,x) \in f^{-1}$.

مثال ۵۷: اگر $f(x)=x-1$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & ; x\neq -1\\ k & ; x=-1\end{cases}$ باشد، مقدار k چقدر باشد تا دو تابع با هم مساوی باشند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲» برای این‌که دو تابع f و g برابر باشند، لازم است مقدار دو تابع در نقطه‌ی $x=-1$ یکی باشد.

$$\begin{cases} f(-1)=-1-1=-2\\ g(-1)=k\end{cases} \Rightarrow k=-2$$

مثال ۵۸: اگر $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$، آن‌گاه تابع fof چگونه است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) فرد ۲) زوج ۳) نه فرد و نه زوج ۴) در یک بازه فرد و در بازه دیگر زوج

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } e^x \text{ ضرب می‌کنیم}}\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

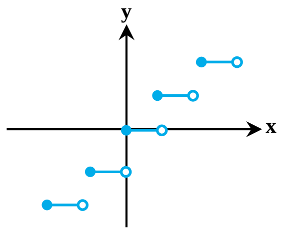
پس تابع f فرد است و ترکیب دو تابع فرد، فرد است.

$$(fof)(-x)=f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$$

مثال ۵۹: تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (جزء صحیح x): (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) فرد است. ۲) زوج است. ۳) نه زوج است و نه فرد. ۴) هم زوج است و هم فرد.

پاسخ: گزینه «۳» یک راه خوب برای تشخیص نوع تابع داده شده از لحاظ زوج یا فرد بودن، توجه به نمودار تابع $f(x)$ می‌باشد. لذا با توجه به نمودار تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$، f نه زوج است و نه فرد.



درسنامه۲: به‌دست آوردن دامنه و برد توابع

مثال۱: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$، کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $(2,\infty)$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \\ \dfrac{x}{2-x}\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x<2 \end{cases} \Rightarrow D_f=[0,2)$$

مثال۲: دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_2(\log_3(\log_2 x)))$ کدام است؟

۱) $D_f=(8,+\infty)$ ۲) $D_f=[5,+\infty)$ ۳) $D_f=(9,+\infty)$ ۴) $D_f=[9,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\log_2(\log_3(\log_2 x))>0 \Rightarrow \log_3(\log_2 x)>1 \Rightarrow \log_2 x>3 \Rightarrow x>2^3 \Rightarrow x>8 \Rightarrow D_f=(8,+\infty)$$

مثال۳: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\log_x(x-2)$ کدام است؟

۱) $D_y=\{x\mid x\in\mathbb{R}, x>2\}$ ۲) $D_y=\mathbb{R}-\{2\}$ ۳) $D_y=\mathbb{R}-\{-2\}$ ۴) $D_y=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

پاسخ: گزینه «۱» مشخص است که اعداد منفی جزء جواب نیستند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

مثال۴: برد یا حوزه‌ی مقادیر (Range) تابع $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) [-۱ و ۱) ۴) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه‌ی برد، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+y=x^2-1 \Rightarrow x^2-yx^2=y+1 \Rightarrow x^2(1-y)=y+1 \Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y} \xrightarrow{x^2\geq 0} \frac{y+1}{1-y}\geq 0$$

حال باید عبارت $\dfrac{y+1}{1-y}$ را تعیین علامت کنیم، ریشه‌های صورت و مخرج کسر به ترتیب ۱− و ۱+ می‌باشند. برای $y>1$ مقدار کسر منفی است. برای $y<-1$ باز هم مقدار کسر منفی است، اما در فاصله‌ی بین دو ریشه یعنی $-1\leq y<1$ مقدار کسر مثبت است. دقت کنید که $y=1$ قابل قبول نیست، چون ریشه‌ی مخرج است.

با توجه به توضیحات فوق، برد تابع بازه‌ی $[-1,1)$ می‌باشد.

مثال۵ : برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,1]$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به فرمول‌های گفته شده، گزینه (۳) صحیح است.

مثال۶: حداکثر مقدار تابع $y=2\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به فرمول در این سؤال $a=2$ و $b=1$ است، لذا داریم:

$$-\sqrt{5}\leq y\leq\sqrt{5} \Rightarrow Max(y)=\sqrt{5}$$

مثال۷: برد تابع $y=Arctg(x^2+6x+10)$ برابر است با:

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2})$

پاسخ : گزینه «۳» برای چندجمله‌ای $x^2+6x+10$ داریم: $a=1$ و $\Delta=-4$، پس $1\leq x^2+6x+10<\infty$. اگر این چندجمله‌ای را α بنامیم $1\leq\alpha\leq\infty$ و می‌دانیم که $Arctg(1)=\frac{\pi}{4}$ و $Arctg(\infty)=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{4}\leq y<\frac{\pi}{2}$.

مثال۸: برد تابع $y=۲^{\lfloor |x| \rfloor}$ برابر است با:

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $\{۱,۲,۴,۸,...\}$ ۴) $\{۲,۴,۸,...\}$

پاسخ : گزینه «۳» عبارت $\lfloor |x| \rfloor$ مقداری صحیح و غیرمنفی می‌باشد، یعنی: $\lfloor |x| \rfloor=\{۰,۱,۲,۳,...\} \Rightarrow ۲^{\lfloor |x| \rfloor}=\{۲^۰,۲^۱,۲^۲,۲^۳,.....\}$

مثال۹: برد تابع $y=e^{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}^-$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $[۱,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۳» چون تابع داده شده یک تابع نمایی است، پس برد تابع زیرمجموعه‌ی اعداد مثبت می‌باشد و از طرفی $x-|x|\le ۰$، بنابراین $y=e^{x-|x|}\le e^۰=۱$.

مثال۱۰: برد تابع $y=e^{۲x}-۴e^x$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $(-۴,+\infty)$ ۳) $[-۴,+\infty)$ ۴) $[-۲,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول: از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$(e^x)^۲-۴e^x-y=۰ \Rightarrow e^x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۴y}}{۲} \Rightarrow x=\mathrm{Ln}(۲\pm\sqrt{۴+y})$$

باید $y+۴\ge ۰$ و یا $y\ge -۴$ باشد.

روش دوم:

$$y=e^{۲x}-۴e^x=\underbrace{(e^x-۲)^۲}_{\ge ۰}-۴ \Rightarrow y\ge -۴$$

مثال۱۱: اگر f تابعی حقیقی به معادله‌ی $y=۲-e^{-x+۱}$ باشد، آن‌گاه برد این تابع برابر است با:

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^-$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $(-\infty,۲)$

پاسخ : گزینه «۴» از روش تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$y=۲-e^{-x+۱} \Rightarrow e^{-x+۱}=۲-y \Rightarrow -x+۱=\mathrm{Ln}(۲-y) \Rightarrow x=۱-\mathrm{Ln}(۲-y) \Rightarrow ۲-y>۰ \Rightarrow y<۲$$

مثال۱۲: برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{e^x-۱}{e^x+۱}$، کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

پاسخ : گزینه «۱» وارون تابع را بدست می‌آوریم و سپس دامنه وارون را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{e^x-۱}{e^x+۱} \Rightarrow ye^x+y=e^x-۱ \Rightarrow e^x-ye^x=y+۱ \Rightarrow e^x(۱-y)=y+۱$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{y+۱}{۱-y} \Rightarrow x=\mathrm{Ln}\frac{y+۱}{۱-y} \Rightarrow \frac{y+۱}{۱-y}>۰$$

y		-۱		۱	
$y+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$۱-y$	$+$		$+$	۰	$-$
$\frac{y+۱}{۱-y}$	$-$	۰	$+$		$-$

با توجه به جدول تعیین علامت، برد f فاصله $(-۱,۱)$ می‌باشد.

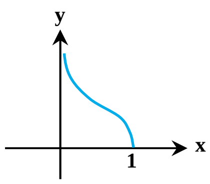
مثال۱۳: دامنه‌ی وارون تابع با ضابطه‌ی $y=\operatorname{sech}x$ کدام بازه است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $(۰,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۰,\infty)$ ۴) $(-۱,۱]$

پاسخ : گزینه «۱»

روش اول: می‌دانیم دامنه‌ی تابع $\operatorname{sech}^{-۱}x$ برابر $(۰,۱]$ می‌باشد.

توجه: بهتر است شکل تابع $\operatorname{sech}^{-۱}x$ را به‌خاطر داشته باشیم.



روش دوم: می‌دانیم $\operatorname{sech}^{-۱}x=\mathrm{Ln}(\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{x})$، پس برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تابع $\operatorname{sech}^{-۱}x$ بهتر است دامنه‌ی تابع Ln را به‌دست آوریم و خواهیم داشت: $\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{x}>۰$، چون صورت کسر همیشه مثبت است، لذا برای برقراری نامساوی کافی است $x>۰$ باشد و چون زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱ \\ \text{داشتیم}: \ x>۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰<x\le ۱$$

مثال ۱۴: برد (Range) تابع $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $\mathbb{R}^+$ ۴) $(0,\frac{1}{2})$

پاسخ : گزینه «۲» هر چند تابع داده شده همان $y=\text{tgh}x$ است و ما برد این تابع معروف را می‌شناسیم، با این حال یک راه‌حل تشریحی هم برای آن ارائه می‌دهیم: ابتدا تابع داده شده را به‌صورتی که در روبرو نوشته شده، ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

حال سعی می‌کنیم که مخرج را در صورت بسازیم و سپس کسر را به‌صورت روبرو ساده کنیم:

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$$

حال به راحتی برد را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

می‌دانیم : $e^{2x}>0 \Rightarrow 1+e^{2x}>1 \Rightarrow 0<\frac{1}{1+e^{2x}}<1 \Rightarrow -2<\frac{-2}{1+e^{2x}}<0 \Rightarrow -2+1<1-\frac{2}{1+e^{2x}}<1 \Rightarrow -1<f(x)<1$

مثال ۱۵: دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{-\sin^2\pi x}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}^-$

پاسخ : گزینه «۳» چون تابع f، یک تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج است، لذا برای یافتن دامنه کافی است زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -\sin^2\pi x\ge 0\\ \text{می‌دانیم}: \sin^2\pi x\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \sin^2\pi x=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

مثال ۱۶: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\mathbb{R}^+$ ۲) $\mathbb{R}^-$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ : گزینه «۳» برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x)$ با توجه به این‌که صورت یک چندجمله‌ای است و دارای دامنه‌ی $\mathbb{R}$ می‌باشد و چون مخرج یک تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج می‌باشد، لذا برای تعیین دامنه‌ی f کافی است زیر رادیکال را بزرگتر از صفر قرار دهیم (توجه: مخرج نباید صفر شود):

$$D_f=\{x\,|\,x-|x|>0\}=\{x\,|\,x>|x|\}$$

می‌دانیم که $x\le|x|$، پس هیچ‌گاه $x>|x|$ نمی‌باشد، لذا $D_f=\varnothing$ می‌شود.

مثال ۱۷: توابع $f(x)=\frac{1}{\lfloor|x|+1\rfloor|x|}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ در کدام مورد صدق می‌کند؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) مجموعه مقادیر g شامل دامنه g است.

۲) دامنه‌های f و g برابرند.

۳) دامنه f زیرمجموعه مقادیر g است.

۴) مجموعه مقادیر f شامل دامنه f است.

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا دامنه‌ی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{1}{\lfloor|x|+1\rfloor|x|}\Rightarrow\lfloor|x|+1\rfloor|x|=0\Rightarrow\begin{cases}|x|=0\Rightarrow x=0\\ \lfloor|x|+1\rfloor=0\Rightarrow \text{هیچ‌گاه این عبارت برابر صفر نمی‌شود.}\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{|x|}\Rightarrow|x|=0\Rightarrow x=0\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

توجه: برای هر دو تابع f و g، برد مقادیر مثبت را دارد. لذا دامنه که مقادیر منفی را دارد، نمی‌تواند زیرمجموعه‌ای از برد تابع باشد.

مثال۱۸: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$ کدام بازه است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,\frac{3}{2})$ ۳) $[\frac{1}{2},1]$ ۴) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

پاسخ: گزینه «۱» برای تعیین برد ابتدا دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\sqrt{x-1}\ge 0 \Rightarrow 0\le x-1\le 1 \Rightarrow 1\le x\le 2 \\ x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\le x\le 2$$

حال که دامنه را به‌دست آوردیم، واضح است که اگر $x=1$ باشد، $f(x)=1$ و اگر $x=2$ باشد، $f(x)=0$ می‌شود. $\Rightarrow\ 0\le f(x)\le 1$

(**توجه:** با توجه به ضابطه‌ی تابع واضح است که $f(x)\ge 0$ و چون عبارت $1-\sqrt{x-1}\le 1$ می‌باشد، لذا $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}\le 1$. پس $0\le f(x)\le 1$ می‌باشد.)

مثال۱۹: برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{1}{e^x+1}$ کدام مجموعه است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\{x: 0<x<\frac{1}{2}\}$ ۲) $\{x: 0\le x\le\frac{1}{2}\}$ ۳) $\{x: 0\le x\le 1\}$ ۴) $\{x: 0<x<1\}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: می‌دانیم $e^x>0$ پس $e^x+1>1$ و در نتیجه $0<\frac{1}{e^x+1}<1$، لذا گزینه (۴) صحیح است.

روش دوم: ابتدا تابع معکوس y را به‌دست می‌آوریم. دامنه‌ی تابع معکوس y همان برد تابع y خواهد بود.

$$y=\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow e^x+1=\frac{1}{y}\Rightarrow e^x=\frac{1}{y}-1 \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Lne^x=Ln(\frac{1}{y}-1)$$

$$\Rightarrow x=Ln(\frac{1}{y}-1)\Rightarrow \frac{1}{y}-1>0\Rightarrow \frac{1}{y}>1\Rightarrow 0<y<1$$

مثال۲۰: برد تابع $f(x)=e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$ کدام بازه است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۴)

۱) $(0,\sqrt{e}]$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $(1,\sqrt{e})$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۱» سؤال ساده‌ای است. ابتدا عبارت را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت نمایی می‌نویسیم:

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}x^2}=\sqrt{e}\times e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

خُب در واقع باید بدانیم حداکثر و حداقل $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ چقدر است؟ طبیعی است x^2 همواره مثبت است و کمترین مقدار آن صفر است که به ازای آن حداکثر $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ حاصل می‌شود که برابر با $e^0=1$ است. اما حداکثر x^2 که به ازای آن حداقل $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ پدید می‌آید، چقدر است؟ طبیعی است محدودیتی برای افزایش x نداریم و این یعنی x^2 می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ شود که به ازای xهای بسیار بزرگ $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ نزدیک صفر می‌شود، پس تغییرات $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ به صورت $(0,1]$ است و چون یک ضریب $\sqrt{e}$ هم داشتیم، بازه‌ی تغییرات $f(x)$ به صورت $(0,\sqrt{e}]$ می‌شود.

مثال۲۱: برد تابع $f(x)=\log_2(1-\cos x)$ در کدام بازه است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(-\infty,0]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $-1\le\cos x\le 1$، بنابراین $0\le 1-\cos x\le 2$. از طرفی چون عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس نامساوی به صورت $0<1-\cos x\le 2$ تغییر می‌کند. چون $\log_2$ تابعی صعودی است، پس اگر از طرفین نامساوی، $\log$ بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند، پس داریم:

$$\log_2 0^+<\log_2(1-\cos x)\le\log_2 2\Rightarrow -\infty<f(x)\le 1$$

مثال۲۲: برد تابع $f(x)=\sqrt{\log(2x-x^2)}$، کدام بازه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $[0,0]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[1,1]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\log(2x-x^2)\ge 0\Rightarrow 2x-x^2\ge 1\Rightarrow -(x-1)^2\ge 0\Rightarrow x=1$$

بنابراین دامنه‌ی تابع فقط شامل نقطه‌ی $x=1$ می‌باشد، که با قرار دادن این مقدار در تابع $y=f(1)=0$ به‌دست می‌آید.

مثال ۲۳: اگر $f(x)=2^x+2^{-x}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$، دامنه‌ی تابع gof کدام بازه است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) $[0,0]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,2]$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=g(2^x+2^{-x})=\sqrt{2-2^x-2^{-x}}=\sqrt{2-2^x-\frac{1}{2^x}}=\sqrt{\frac{2\times 2^x-2^{2x}-1}{2^x}}=\sqrt{\frac{-(2^x-1)^2}{2^x}}$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\frac{-(2^x-1)^2}{2^x}\ge 0\Rightarrow -(2^x-1)^2\ge 0\Rightarrow (2^x-1)^2\le 0\Rightarrow 2^x-1=0\Rightarrow x=0$$

مثال ۲۴: ماکزیمم ارتفاع منحنی $y=6\cos x-8\sin x$ در بالای محور xها برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** به طور کلی داریم:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}\ \Rightarrow -10\le y\le 10$$

مثال ۲۵: برد تابع $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) $[-\frac{9}{4},\frac{9}{4}]$ ۲) $[-\frac{9}{2},\frac{9}{2}]$ ۳) $[-3,3]$ ۴) $[-\frac{27}{4},\frac{27}{4}]$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** با توجه به وجود $9-x^2$ در زیر رادیکال، بهتر است از تغییر متغیر $x=3\sin\theta$ استفاده کنیم:

$$3\sin\theta\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}=3\sin\theta\sqrt{9\cos^2\theta}=9\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{2}(\sin 2\theta)$$

و چون $-1\le\sin 2\theta\le 1$ لذا $-\frac{9}{2}\le\frac{9}{2}\sin 2\theta\le\frac{9}{2}$، پس برد f به صورت $[-\frac{9}{2},\frac{9}{2}]$ خواهد بود.

مثال ۲۶: فرض کنید $\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح x باشد. برد تابع $g(x)=\lfloor x\rfloor-x$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) $(-1,0]$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $\mathbb{R}$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** می‌دانیم $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$، بنابراین $-1<\lfloor x\rfloor-x\le 0$.

مثال ۲۷: اگر $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\sin(\pi x)$، آن‌گاه برد gof کدام است؟ (هواشناسی ـ سراسری ۸۷)

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,\frac{1}{2}]$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $[0,1]$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof=\sin\pi(x-\lfloor x\rfloor)$$

می‌دانیم $0\le x-\lfloor x\rfloor<1$، اما در کمان سینوسی π هم در $x-\lfloor x\rfloor$ ضرب شده، پس طرفین نامساوی را در π ضرب می‌کنیم، لذا $0\le\pi(x-\lfloor x\rfloor)<\pi$ و این یعنی کمان sin در ربع اول یا دوم است، بنابراین حدود تغییرات $\sin\pi(x-\lfloor x\rfloor)$ به صورت $[0,1]$ است.

مثال ۲۸: اگر $f(x)=\log_3 x$ و $g(x)=\sqrt{1-2\sin x}$ باشند، برد تابع fog کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\frac{1}{2},0)$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»**

$$fog=f(g(x))=\log_3\sqrt{1-2\sin x}$$

می‌دانیم $0\le\sqrt{1-2\sin x}\le\sqrt{3}$. بنابراین داریم:

$$-\infty<\log_3\sqrt{1-2\sin x}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\quad \text{برد}=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

مثال ۲۹: دامنه‌ی تابع $f(x)=\text{Arcsin}\frac{1}{x-1}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}-(0,2)$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** به راحتی داریم:

$$-1\le\frac{1}{x-1}\le 1\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 1\\ \text{یا}\\ x-1\le -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ \text{یا}\\ x\le 0\end{cases}$$

مثال ۳۰: برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(x^۲+۱)^۲}{x^۴+۱}$ کدام بازه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ۳) $[۱,\frac{۳}{۲}]$ ۴) $[۱,۲]$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ضابطه‌ی داده شده را به‌صورت روبرو می‌نویسیم: $y=\frac{(x^۲+۱)^۲}{x^۴+۱}=\frac{x^۴+۱+۲x^۲}{x^۴+۱}=۱+\frac{۲x^۲}{x^۴+۱}$

حال با توجه به این‌که $۱\le\frac{۲x^۲}{x^۴+۱}\le۰$ می‌باشد، پس $۱\le y\le۲$ به‌دست می‌آید.

توضیح: در بالا از نامساوی $۱\le\frac{۲x}{x^۲+۱}\le -۱$ استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳۱: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}$ کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $[۰,\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[-۱,۱]$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با توجه به این‌که $x=۱$ و $x=۰$ در دامنه‌ی تابع f صدق می‌کنند، لذا گزینه‌های ۲ و ۳ که به ترتیب شامل $x=۱$ و $x=۰$ نیستند، نادرست می‌باشند. اما به ازای $x=-۱$ خواهیم داشت: $f(-۱)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-(-۱)}}=\sqrt{۱-\sqrt{۲}}\simeq\sqrt{۱-۱/۴}=\sqrt{-۰/۴}$

لذا $x=-۱\notin D_f$، بنابراین گزینه ۴ هم نادرست می‌باشد.

مثال ۳۲: اگر $f(x)=-x+\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=۲^x$، برد تابع gof کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(\frac{۱}{۲},۱]$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $(۱,۲]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱)$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا ضابطه تابع gof را تشکیل می‌دهیم. $gof(x)=g(f(x))=۲^{-x+\lfloor x\rfloor}$

$$۰\le x-\lfloor x\rfloor<۱\Rightarrow -۱<-x+\lfloor x\rfloor\le۰\Rightarrow ۲^{-۱}<۲^{-x+\lfloor x\rfloor}\le۲^۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}<gof(x)\le۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<R_{gof}\le۱$$

درسنامه۳: مفهوم فاکتوریل و بسط دوجمله‌ای

مثال۱: حاصل عبارت $A = \dfrac{\binom{5}{3}\times n!}{\binom{6}{3}\times (n-2)!}$ کدام است؟

۱) $2(n-2)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\dfrac{n(n-2)}{2}$ ۴) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\times 3!} = \frac{4!\times 5}{2!\times 3!} = \frac{3!\times 4\times 5}{3!\times 1\times 2} = 10$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\times 3!} = \frac{5!\times 6}{3!\times 3!} = \frac{3!\times 4\times 5\times 6}{3!\times 1\times 2\times 3} = 20$$

$$\Rightarrow A = \frac{10\times (n-2)!\times (n-1)\times n}{20\times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

مثال۲: اگر مجموعه‌ی A دارای ۵ عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» چون ترتیب انتخاب مهم نیست، لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!(2!)} = \frac{3!\times 4\times 5}{3!\times 1\times 2} = 10$$

مثال۳: مجموع جبری ضرایب بسط عبارت $3 + (2x^3 + x^2 - x - 1)^6 + (2x^2 + x - 2)^{99}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»

$$[2\times (1)^2 + 1 - 2]^{99} + [2(1)^3 + (1)^2 - 1 - 1]^6 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$$

مثال۴: در بسط $\left(a\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} + \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\right)^{10}$ جمله‌ی مستقل از a جمله‌ی چندم است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۹

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$T_{k+1} = \binom{10}{k}(a^{\frac{2}{3}})^{10-k}(a^{-\frac{2}{7}})^k = \binom{10}{k}a^{\frac{2}{3}(10-k)-\frac{2}{7}k}$$

باید توان a صفر شود تا جمله مستقل از a باشد، لذا داریم:

$$\frac{2}{3}(10-k) - \frac{2}{7}k = 0 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow k+1 = 8 \Rightarrow \text{(جمله هشتم)}$$

مثال۵: در بسط $(a^3 + 2b - 1)^6$ ضریب جمله‌ی شامل a^6b^3 کدام است؟

۱) -80 ۲) 160 ۳) -480 ۴) -160

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» اگر بخواهیم جمله a^6b^3 را داشته باشیم، باید جمله عمومی را به شکل زیر بنویسیم:

$$T = \frac{6!}{2!3!1!}\times (a^3)^2.(2b)^3 \times (-1)^1 = \frac{3!\times 4\times 5\times 6}{2!\times 3!}(a^6)(8b^3)(-1) = -\frac{120}{2!}a^6\times b^3\times 8 = \frac{-120\times 8}{2!}a^6b^3 = -480a^6b^3$$

مثال۶: ضریب $x^3y^4z^5$ در بسط $(xy + yz + zx)^6$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای تشکیل $x^3y^4z^5$ می‌توانیم جمله‌ی عمومی را به شکل مقابل تشکیل دهیم:

$$T = \frac{6!}{1!3!2!}(xy)^1(yz)^3(zx)^2 = \frac{6!}{2\times 3!}x^3y^4z^5$$

بنابراین ضریب $x^3y^4z^5$ برابر است با:

$$\frac{3!\times 4\times 5\times 6}{3!\times 2} = \frac{4\times 5\times 6}{2} = 2\times 5\times 6 = 60$$

درسنامه ۴: مقاطع مخروطی (منحنی‌های درجه دو)

مثال ۱: معادله‌ی $x^2+y-2x=0$ نشان‌دهنده‌ی کدام است؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به بند (۴) مطالب فوق، ضریب y^2 صفر است. لذا معادله ذکر شده مربوط به سهمی می‌باشد.

مثال ۲: معادلات پارامتری $\begin{cases} x=x_0+a\cosh t \\ y=y_0+b\sinh t \end{cases}$ نمایش‌دهنده‌ی کدام منحنی است؟ $(a>0)$

۱) سهمی قائم ۲) سهمی افقی ۳) بیضی ۴) شاخه راست هذلولی

پاسخ: گزینه «۴» از معادلات داده شده نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \cosh t=\dfrac{x-x_0}{a} \\ \sinh t=\dfrac{y-y_0}{b} \end{cases} \xrightarrow{\cosh^2 t-\sinh^2 t=1} \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$$

بنابراین معادلات داده شده یک هذلولی افقی را نمایش می‌دهند ولی با توجه به این‌که $\cosh t>1$ می‌باشد، پس $\frac{x-x_0}{a}>1$ و بنابراین $x>x_0+a$، یعنی فقط قسمت سمت راست هذلولی افقی جواب صحیح می‌باشد.

مثال ۳: معادله‌ی دایره‌ای که نقاط $(-3,2)$ و $(5,6)$ دو انتهای یک قطر آن باشند، کدام است؟ (مهندسی پزشکی ـ آزاد ۸۸)

۱) $(x-1)^2+(y-4)^2=20$ ۲) $(x-5)^2+(y+3)^2=10$ ۳) $(x-6)^2+(y-2)^2=10$ ۴) $(x-4)^2+(y-1)^2=20$

پاسخ: گزینه «۱» چون دو نقطه‌ی داده شده دو سر قطر می‌باشند، بنابراین مختصات وسط این دو نقطه، یعنی $(1,4)$ مرکز دایره و شعاع آن نصف طول قطر است. نیازی نیست طول قطر را حساب کنیم، چون مختصات مرکز فقط در گزینه (۱) صدق می‌کند.

مدرسان شریف

فصل دوم

« حد و پیوستگی »

درسنامه: مفهوم حد و قضایای مربوط به آن

مثال۱: اگر $|f(x)+7|<\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ آن‌گاه، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۷ ۳) ۰ ۴) ۷-

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $|f(x)+7|$ بزرگتر یا مساوی صفر است، بنابراین داریم:

$$0\le|f(x)+7|<\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(0)\le\lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|\le\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|\le\frac{3^{0}}{\infty}=0\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|\le 0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)+7|=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=-7$$

مثال۲: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\lfloor\cos x\rfloor$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به وجود جزء صحیح باید حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pi^+}\lfloor\cos x\rfloor=\lfloor\cos\pi^+\rfloor=-1\\ \lim\limits_{x\to\pi^-}\lfloor\cos x\rfloor=\lfloor\cos\pi^-\rfloor=-1\end{cases}\Rightarrow$$ حد تابع برابر با ۱- است.

دقت کنید؛ می‌دانیم $\cos\pi=-1$ است، اما در مورد علامت کسینوس باید به جایگاه نقطه توجه کنیم. وقتی $x\to\pi^-$ یعنی در ربع دوم قرار داریم و علامت کسینوس در این ربع منفی است و وقتی $x\to\pi^+$ یعنی در ربع سوم قرار داریم و علامت کسینوس در این ربع هم منفی است.

توضیح: دقت کنید؛ در این تست $x=\pi$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع x بود، برای همین تابع در این نقطه حد داشت، اما این تابع مثلاً، وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$ حد ندارد.

مثال۳: مقدار $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{Lnx}{x})$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{x\to0^+}\frac{Lnx}{x}=\lim_{x\to0^+}(Lnx)\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\Rightarrow A=(-\infty)(+\infty)=(-\infty)$$

مثال ۴: در اثبات $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^5-6x^4+6x^3+2}{x^2+1}=2$ با استفاده از استلزام منطقی (تعریف حد) رابطه‌ی بین $\delta>0$ و $\varepsilon>0$ کدام است؟

۱) $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$ ۲) $\delta\le\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ ۳) $\delta\le\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{2}$ ۴) $\delta\le\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تعریف حد ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ، در این مثال $a=1$ و $L=2$ است. ابتدا $|f(x)-L|$ را تشکیل می‌دهیم و سعی می‌کنیم از آن عامل $|x-a|$ را خارج کنیم:

$$|f(x)-2|=\left|\frac{2x^5-6x^4+6x^3+2}{x^2+1}-2\right|=\left|\frac{2x^5-6x^4+6x^3+2-2x^2-2}{x^2+1}\right|=\left|\frac{2x^5-6x^4+6x^3-2x^2}{x^2+1}\right|$$

$$=\left|\frac{2x^2(x^3-3x^2+3x-1)}{x^2+1}\right|=\left|\frac{2x^2(x-1)^3}{x^2+1}\right|=|x-1|^3\left|\frac{2x^2}{x^2+1}\right|$$

عامل $|x-1|^3$ ایجاد شده است. عبارت دوم را با بیشترین مقدار ممکن آن جایگزین می‌کنیم. واضح است که $\frac{x^2}{x^2+1}\le 1$ پس $\frac{2x^2}{x^2+1}\le 2$ بنابراین داریم:

$$|f(x)-2|=|x-1|^3\left|\frac{2x^2}{x^2+1}\right|\le 2|x-1|^3$$

ما می‌خواهیم $|f(x)-2|<\varepsilon$ باشد، کافی است کاری کنیم که $2|x-1|^3<\varepsilon$ شود. یعنی $|x-1|^3<\frac{\varepsilon}{2}$. به عبارتی کافی است داشته باشیم: $|x-1|<\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

پس انتخاب $\delta=\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$ مناسب است. طبق درسنامه، وقتی مقدار مناسب δ را پیدا کردیم، هر مقدار کوچکتر از آن هم مناسب است. بنابراین داریم: $\delta\le\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$

مثال ۵: کدام گزینه در مورد $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{\pi}{n})$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) حد موجود و برابر یک است. ۲) حد موجود و برابر صفر است. ۳) حد موجود و برابر ۱- است. ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: **گزینه «۱»** کافی است بدانیم $\frac{\pi}{\infty}=0$ می‌شود، بنابراین خواهیم داشت: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\frac{\pi}{n})=\cos(\frac{\pi}{\infty})=\cos(0)=1$

مثال ۶: اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$ ، $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) ∞ ۲) $\log 3$ ۳) $-\sin 1$ ۴) $-\infty$

پاسخ: **گزینه «۳»** برای محاسبه حد مورد نظر ابتدا لازم است ضابطه تابع f را به ازای $x>1$ مشخص کنیم. بنابراین با فرض این‌که $x>1$ باشد، ضابطه f به‌صورت مقابل ساده می‌شود.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}(0-\frac{x^{2n}\sin x}{x^{2n}})=-\sin x$$

بنابراین: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-\sin x)=-\sin 1$.

مثال ۷: اگر $a_n=\text{Arccotg}\frac{1}{n}$ ، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\text{Arccotg}(\frac{1}{n})=\text{Arccotg}(\frac{1}{\infty})=\text{Arccotg}(0)=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۸: اگر $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) $\frac{1}{e}$

پاسخ: **گزینه «۲»** در ضابطه داده شده، a_n دارای n جمله می‌باشد که تک‌تک جملات از جمله‌ی اول کوچکتر و از جمله‌ی آخر بزرگتر می‌باشند، یعنی تک‌تک جملات مابین $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ قرار دارند. لذا چون a_n دارای n جمله است، نامساوی مقابل را داریم: $n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<a_n<n\times\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

حال توجه کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی (ساندویچ) داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

مثال۹: با فرض $f(x)=\lfloor 1-x^2 \rfloor$ که در آن $\lfloor x \rfloor$ جزء صحیح x است $\lim\limits_{x\to 1^-}(fof)(x)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** ابتدا تابع $fof(x)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس حد می‌گیریم:

$$f(x)=\lfloor 1-x^2 \rfloor \Rightarrow fof(x)=f(f(x))=\lfloor 1-(f(x))^2 \rfloor=\lfloor 1-(\lfloor 1-x^2 \rfloor)^2 \rfloor \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} fof(x)=\lim_{x\to 1^-}(\lfloor 1-(\lfloor 1-x^2 \rfloor)^2 \rfloor)$$

چون $x\to 1^- \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow 0<x^2<1 \Rightarrow \lfloor 1-x^2 \rfloor=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} fof(x)=\lim_{x\to 1^-}(\lfloor 1-(0)^2 \rfloor)=\lim_{x\to 1^-}(\lfloor 1 \rfloor)=1$$

مثال۱۰: حد چپ تابع $f(x)=\begin{cases}\lfloor x \rfloor+|x| \ ; \ x<-1\\ \lfloor x \rfloor-|x| \ ; \ x\ge -1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟ ($\lfloor \ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** برای تعیین حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=-1$ کافی است از سمت چپ به (۱-) نزدیک شویم، یعنی از $x<-1$ پس داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(\lfloor x \rfloor+|x|)=\lim_{x\to(-1)^-}(\lfloor -1^- \rfloor+|x|)=\lim_{x\to(-1)^-}(-2+|x|)=-2+|-1|=-1$$

مثال۱۱: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{Arcsec}\,x)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ∞

☑ **پاسخ : گزینه «۳»**

$$\lim_{x\to+\infty}\text{Arcsec}\,x=\lim_{x\to+\infty}\text{Arccos}\frac{1}{x}=\text{Arccos}(\frac{1}{\infty})=\text{Arccos}(0)=\frac{\pi}{2}$$

مثال۱۲: حد عبارت $\dfrac{x-1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ وقتی $x\to 1$، برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) ۲

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** برای حد خواسته شده، حد چپ و راست را جدا محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{0^-}{1+2^{\frac{1}{0^-}}}=\frac{0}{1+2^{-\infty}}=\frac{0}{1+0}=0$$

با توجه به گزینه‌ها ملاحظه می‌شود که گزینه (۱) صحیح است، اما جهت اطلاع حد راست را هم مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{0^+}{1+2^{\frac{1}{0^+}}}=\frac{0}{1+2^{+\infty}}=\frac{0}{\infty}=0$$

مثال۱۳: تابع F با ضابطه‌ی $F(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} \ ; \ x<1\\ \frac{2}{3} \ ; \ 1\le x\le 2\\ 1 \ ; \ x>2\end{cases}$ مفروض است. $\lim\limits_{n\to\infty}[F(1-\frac{1}{n})-F(2+\frac{1}{n})]$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱- ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) ۰

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** چون $n>0$ می‌باشد، لذا $1-\frac{1}{n}<1$است؛ پس $F(1-\frac{1}{n})=\dfrac{1-\frac{1}{n}-1}{2}=\dfrac{-1}{2n}$ و نیز $2+\frac{1}{n}>2$ می‌باشد، پس $F(2+\frac{1}{n})=1$. حال به محاسبه حد می‌پردازیم:

$$\lim_{n\to\infty}(F(1-\frac{1}{n})-F(2+\frac{1}{n}))=\lim_{n\to\infty}(\frac{-1}{2n}-1)=\frac{-1}{\infty}-1=0-1=-1$$

مثال ۱۴: برای اثبات حد تابع $f(x)=۴x^۲+۴x$ در همسایگی $x_۰=-\frac{۱}{۲}$ با انتخاب $\varepsilon=\frac{۱}{۶۴}$، حداکثر δ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲۸}$

پاسخ: گزینه «۲» با یک محاسبه‌ی ساده معلوم می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}}(۴x^۲+۴x)=۱-۲=-۱$ است، پس در این مثال $f(x)=۴x^۲+۴x$، $a=x_۰=-\frac{۱}{۲}$ و $L=-۱$ است. مقدار δ را طوری پیدا می‌کنیم که از نامساوی $|x+\frac{۱}{۲}|<\delta$ بتوان نتیجه گرفت $|f(x)+۱|<\varepsilon$ است. ابتدا سعی می‌کنیم از عبارت $|f(x)+۱|$ عامل $|x+\frac{۱}{۲}|$ را استخراج کنیم.

$$|f(x)+۱|=|۴x^۲+۴x+۱|=|(۲x+۱)^۲|=|۲^۲(x+\frac{۱}{۲})^۲|=۴|x+\frac{۱}{۲}|^۲$$

برای آن که $|f(x)+۱|<\varepsilon$ باشد کافی است $۴|x+\frac{۱}{۲}|^۲<\varepsilon$ باشد. به عبارتی $|x+\frac{۱}{۲}|^۲<\frac{\varepsilon}{۴}$ و در نتیجه $|x+\frac{۱}{۲}|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{۲}$.

به این ترتیب متوجه می‌شویم که انتخاب $\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{۲}$ مناسب است. البته می‌دانیم که هر مقدار کوچکتر از آن نیز مناسب خواهد بود، پس $\delta\le\frac{\sqrt{\varepsilon}}{۲}$ است. در صورت سؤال $\varepsilon=\frac{۱}{۶۴}$ داده شده است، بنابراین $\delta\le\frac{\sqrt{\frac{۱}{۶۴}}}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$ به دست می‌آید. حداکثر مقدار δ برابر است با $\frac{۱}{۱۶}$.

مثال ۱۵: در اثبات $\lim\limits_{x\to۱}\frac{۲x}{x^۲+۱}=۱$ به طریق استلزام منطقی چه شرایطی باید داشته باشیم؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\delta\le\varepsilon$ ۲) $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$ ۳) $\delta\le\varepsilon^۲$ ۴) $\delta\le\varepsilon^{\frac{۳}{۲}}$

پاسخ : گزینه «۲» در این مثال $f(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱}$، $a=۱$ و $L=۱$ است. باید مقدار δ را طوری پیدا کنیم که از نامساوی $|x-۱|<\delta$ بتوان نتیجه گرفت: $|f(x)-۱|<\varepsilon$. برای تشخیص δ ابتدا سعی می‌کنیم $|f(x)-۱|$ را نوشته و عامل $|x-۱|$ را از آن خارج کنیم:

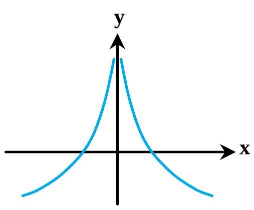
$$|f(x)-۱|=|\frac{۲x}{x^۲+۱}-۱|=|\frac{۲x-x^۲-۱}{x^۲+۱}|=|\frac{-(x^۲-۲x+۱)}{x^۲+۱}|=\frac{|x-۱|^۲}{x^۲+۱}$$

حالا که عامل $|x-۱|$ را ایجاد کردیم، عوامل دیگر را باید با کران بالای آن‌ها جایگزین کنیم. می‌دانیم که $x^۲+۱>۱$ است، بنابراین $\frac{۱}{x^۲+۱}<۱$ در نتیجه داریم:

$$|f(x)-۱|=\frac{|x-۱|^۲}{x^۲+۱}<|x-۱|^۲$$

حالا می‌توانیم مقدار δ را برحسب ε پیدا کنیم. برای آن که $|f(x)-۱|<\varepsilon$ باشد، کافی است $|x-۱|^۲<\varepsilon$ باشد، یعنی $|x-۱|<\sqrt{\varepsilon}$ شود، پس انتخاب $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ مناسب است. حالا به این موضوع توجه کنید که وقتی $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ مناسب باشد، هر مقدار کوچکتر از آن نیز می‌تواند حد را ثابت کند، پس $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$ است.

مثال ۱۶: شکل مقابل نمودار تابع $\log(f(x))$ است، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)



۱) $|x|$ ۲) $\frac{۱}{x}$ ۳) $\frac{۱}{|x|}$ ۴) $x^۲$

پاسخ : گزینه «۳» نمودار تابع $y(x)=\log(f(x))$ در نقطه‌ی $x=۰$ از چپ و راست به سمت $+\infty$ میل کرده است. از تساوی $y(x)=\log(f(x))$ داریم $f(x)=۱۰^{y(x)}$، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to۰}f(x)=\lim_{x\to۰}۱۰^{y(x)}=۱۰^{+\infty}=+\infty$$

در بین گزینه‌ها، فقط $\frac{۱}{|x|}$ هست که در صفر از هر دو طرف به $+\infty$ میل می‌کند.

تذکر: نمودار رسم شده نسبت به محور yها تقارن دارد. این نشان می‌دهد که تابع $y=\log(f(x))$ زوج است؛ پس $\log(f(x))=\log(f(-x))$ یعنی $f(x)=f(-x)$، به عبارتی $f(x)$ باید تابعی زوج باشد. البته در این مثال، ۳ تا از گزینه‌ها زوج هستند اما در مثال‌های دیگر به این موضوع هم توجه داشته باشید.

درسنامه۲: صورت‌های مبهم

مثال۱: حد عبارت $A=\dfrac{x^2-\sqrt[3]{x}}{\mathrm{Ln}(2-x)}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{5}{3}$ ۲) $-\dfrac{4}{3}$ ۳) $\dfrac{3}{4}$ ۴) $\dfrac{5}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» حالت $\dfrac{0}{0}$ است، از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\dfrac{1}{2-x}}=\frac{2-\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{1}{2-1}}=-\frac{5}{3}$$

مثال۲: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\mathrm{Arccos}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ چقدر است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\dfrac{-1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» حد داده شده به‌صورت مبهم $\dfrac{0}{0}$ است، برای محاسبه حد از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. (کلمه « HOP » به معنای استفاده از قاعده هوپیتال در این کتاب به کار رفته است.)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\mathrm{Arc}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1$$

مثال۳: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cot gx}{\cot g3x}\right)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{3}$ ۲) ۱- ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot gx}{\cot g3x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(1+\cot g^2x)}{-3(1+\cot g^2 3x)}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

مثال۴: طول نقطه حدی تقاطع دو خط به معادلات $(c+1)x+(2c+1)y=c^2-3$ و $3x+5y=1$ وقتی $c\to 2$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲- ۴) ۱۸-

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا طول نقطه‌ی برخورد دو خط را به‌دست می‌آوریم، سپس باید ببینیم وقتی c به سمت ۲ میل می‌کند، طول به‌دست آمده به چه مقداری میل خواهد کرد. در این‌گونه سؤالات یک نکته‌ی مهم را باید به خاطر داشته باشید. این‌که شما نمی‌توانید ترتیب کارها را عوض کنید. به عبارتی نمی‌توانید از همان ابتدا $c=2$ قرار داده و سپس محل برخورد منحنی‌ها را پیدا کنید. اگر دانشجویی بخواهد مسأله را با این روش دور بزند به در بسته خواهد خورد! زیرا یا نقطه‌ی برخوردی به‌دست نمی‌آید یا به جواب نادرست می‌رسد. بنابراین ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی می‌دهیم:

$$5y=1-3x\Rightarrow y=\frac{1-3x}{5}\Rightarrow (c+1)x+(2c+1)\left(\frac{1-3x}{5}\right)=c^2-3$$

$$\Rightarrow 5cx+5x+2c-6cx+1-3x=5c^2-15\Rightarrow x=\frac{5c^2-2c-16}{2-c}\Rightarrow \lim_{c\to 2}\frac{5c^2-2c-16}{2-c}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{c\to 2}\frac{10c-2}{-1}=-18$$

مثال۵: به ازای کدام مقدار n و m دو تابع $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=mx^n$ وقتی $x\to 0$ هم‌ارزند؟

۱) $m=1$ و $n=\dfrac{1}{2}$ ۲) $m=1$ و $n=2$ ۳) $m=2$ و $n=1$ ۴) $m=\dfrac{1}{2}$ و $n=1$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به تعریف دو تابع هم‌ارز، باید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{mx^n}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{mx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{mx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{mx^{n-1}}=1\Rightarrow m=2\ ,\ n=1$$

مثال ۶: حاصل کدام حد با بقیه متفاوت است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right]$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\arcsin x}{x}\right]$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$ ۴) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor \sin x\rfloor$

پاسخ: گزینه «۲» تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. در گزینه‌ی (۱) داریم:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\frac{x^3}{3}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^2}{3}\right]=\left[1^-\right]=0$$

در گزینه (۳) نیز به‌صورت مشابه مقدار حد برابر با صفر است:

$$L_3=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^2}{6}\right]=\left[1^-\right]=0$$

در گزینه‌ی (۴) از این نکته استفاده می‌کنیم که در همه‌ی نقاط نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ چه از چپ و چه از راست داریم $\sin x<1$:

$$L_4=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor\sin x\rfloor=\left[1^-\right]=0$$

اما در گزینه‌ی (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها مقدار حد برابر با یک است:

$$L_2=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\frac{x^3}{6}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^2}{6}\right]=\left[1^+\right]=1$$

توضیح: در محاسبات حدود فوق چون جزء صحیح داریم برای احتیاط بیشتر باید حدود چپ و راست را جداگانه حساب کنیم. اما چـون در محاسـبات نهـایی x^2 داریم، فرقی نمی‌کند $x\to 0^+$ یا $x\to 0^-$، چون به هر حال x^2 به سمت 0^+ میل می‌کند.

مثال ۷: قسمت اصلی بی‌نهایت کوچک تابع $f(x)=\cos x-\sqrt{\cos x}$، وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (به عبارتی این تابع با کدام گزینه هم‌ارز می‌شود.)

۱) $\dfrac{x^2}{2}$ ۲) $\dfrac{x^2}{4}$ ۳) $\dfrac{-x^2}{4}$ ۴) $\dfrac{-x^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» وقتی $x\to 0$، $\cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$، بنابراین با توجه به هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\dfrac{u}{n}$ نتیجه می‌شود:

$$f(x)\sim 1-\frac{x^2}{2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\sim 1-\frac{x^2}{2}-(1-\frac{x^2}{4})=\frac{-x^2}{4}$$

مثال ۸: اگر $a(x)$ بی‌نهایت کوچک باشد، هم‌ارز عبارت $[1+a(x)]^n-1$ کدام است؟

۱) $a(x)$ ۲) $\dfrac{a(x)}{n}$ ۳) $na(x)-1$ ۴) $na(x)$

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که گفتیم، وقتی $u\to 0$ داریم: $(1+u)^n\sim 1+n\times u$. در این تست گفته شده که $a(x)$ بی‌نهایت کوچک می‌باشد $(a(x)\to 0)$، لذا داریم:

$$[1+a(x)]^n\sim 1+na(x)\to[1+a(x)]^n-1\sim na(x)$$

مثال ۹: حاصل $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-tg2x-tgx}{\sin^3 x}$ برابر است با:

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۶-

پاسخ: گزینه «۳» به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم، لذا داریم:

روش اول: (استفاده از هم‌ارزی)

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3x+9x^3-2x-\frac{8}{3}x^3-x-\frac{1}{3}x^3}{x^3}\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{18}{3}x^3}{x^3}=6$$

روش دوم: (استفاده از اطلاعات مثلثاتی)

اگر $\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$

$$3x-2x-x=0\Rightarrow tg3x+tg(-2x)+tg(-x)=tg3x\cdot tg(-2x)\cdot tg(-x)\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)(-2x)(-x)}{x^3}=6$$

مثال ۱۰: حاصل $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\operatorname{Arcsin}x)}{\sin^2 x}$ برابر است با:

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱»

$$A=\frac{1-\cos(\operatorname{Arcsin}(0))}{\sin^2(0)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{x\to 0}\begin{cases}\operatorname{Arcsin}x\sim x\\ \sin^2 x\sim x^2\end{cases}\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۱: حد تابع $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin\frac{x}{6}}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) $+1$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u}\underset{u\to 0}{\sim}1+\frac{u}{n}$ داریم:

$$y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+\frac{x}{3})-(1+\frac{x}{2})}{\frac{x}{6}}\right)=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=-1$$

مثال ۱۲: حاصل حد $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) صفر ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}\sim\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{5}\,|x|}{x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{5}x}{x+1}=-\sqrt{5}$$

مثال ۱۳: حاصل $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2^x}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) 0 ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق قانون رشد چون رشد 2^x در بی‌نهایت از x^3 بیشتر است، لذا حاصل حد برابر بی‌نهایت است.

مثال ۱۴: حاصل $\lim_{x\to 0^+}x^2e^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» فرض می‌کنیم $t=\frac{1}{x}$، بنابراین وقتی $x\to 0^+$، آن‌گاه $t\to +\infty$ در نتیجه حد $\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t^2}$ را داریم و چون رشد صورت بیشتر از رشد مخرج است، لذا حاصل حد ∞ می‌شود.

مثال ۱۵: حاصل $\lim_{x\to 0^-}x\lfloor x\rfloor\cot gx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to 0^-}x\lfloor x\rfloor\cot gx=\lim_{x\to 0^-}x\lfloor 0-\varepsilon\rfloor\cot gx=\lim_{x\to 0^-}(-x)\cot gx=0\times(-\infty)\Rightarrow A=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{tgx}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}A=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

مثال ۱۶: مقدار $\lim_{x\to\infty}x^2(\cosh\frac{a}{x}-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{2}$ ۲) $\frac{a^2}{2}$ ۳) 0 ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» حالت $0\times\infty$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}x^2(\cosh\frac{a}{x}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh\frac{a}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\frac{a}{x^2})\sinh\frac{a}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\frac{a}{x^2})(\frac{a}{x})}{-\frac{2}{x^3}}=\frac{a^2}{2}$$

مثال ۱۷: حاصل $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» حالت مبهم $\infty-\infty$ است:

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\sim\lim_{x\to +\infty}(|x+\frac{1}{2}|-x)=\lim_{x\to +\infty}(x+\frac{1}{2}-x)=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۸: حاصل $A=\lim\limits_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱۲}{x^۳-۸}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲+۲x+۴)-۱۲}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۴)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow A=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۴}{x^۲+۲x+۴}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۹: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{e^x-۱}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱- ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to ۰}\frac{(e^x-۱-x)}{x(e^x-۱)}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-۱}{e^x+xe^x-۱}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{e^۰}{۲e^۰+۰}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲۰: حاصل حد تابع $(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})$ وقتی که $x\to +\infty$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})=\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})\times\left(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+۱-x}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{\infty+\infty}=\frac{۱}{\infty}=۰$$

مثال ۲۱: مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^+}(\sin x)^{\frac{۱}{Lnx}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که $Ln\,۰^+=-\infty$ می‌باشد، لذا $\frac{۱}{Lnx}$ به سمت صفر میل می‌کند:

$$C=\lim_{x\to ۰^+}(\sin x)^{\frac{۱}{Lnx}}=۰^۰\Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{Lnx}(Ln\sin x)}\ ,\ L=\lim_{x\to ۰^+}\frac{Ln\sin x}{Lnx}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۰^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۱}{x}}=۱\Rightarrow C=e^۱=e$$

مثال ۲۲: اگر $A=\lim\limits_{x\to ۱}(۱-x^۲)^{\frac{۱}{Ln(۱-x)}}$ و $B=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\sinh^{-۱}x}{\cosh^{-۱}x}}$ آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harvard)

۱) $A=B$ ۲) $A=-B$ ۳) $A=۲B$ ۴) $B=۲A$

پاسخ: گزینه «۱» در مورد A، فرم مبهم $۰^۰$ رخ می‌دهد، پس با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$LnA=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{Ln(۱-x)}Ln(۱-x^۲)=\lim_{x\to ۱}\frac{Ln(۱-x^۲)}{Ln(۱-x)}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{-۲x}{(۱-x^۲)}}{\frac{-۱}{(۱-x)}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x}{۱+x}=۱$$

$LnA=۱$، بنابراین $A=e^۱$ است. برای محاسبه‌ی B، کافی است $LnB=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-۱}x}{\cosh^{-۱}x}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از تعریف توابع معکوسِ هیپربولیک داریم:

$$LnB=\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-۱}x}{\cosh^{-۱}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x+\sqrt{x^۲+۱})}{Ln(x+\sqrt{x^۲-۱})}$$

با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت، داریم: $\sqrt{x^۲+۱}\simeq|x|$ و $\sqrt{x^۲-۱}\simeq|x|$ و چون $x\to\infty$، لذا داریم: $|x|=x$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$LnB=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x+x)}{Ln(x+x)}=۱$$

پس $B=e^۱$ است. به این ترتیب دیدیم که $A=B=e$

مثال ۲۳: مقدار $C=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\sin x}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) 1 ۳) 0 ۴) e^{-1}

پاسخ: گزینه «۲»

$$C=\lim_{x\to 0}(\cot gx)^{\sin x}=(\infty)^0 \Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\,\text{Ln}\cot gx}$$

برای محاسبه‌ی حد L از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-(1+\cot g^2 x)}{\cot gx}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)(\frac{1}{\sin^2 x})}{\cos x\cot gx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0\Rightarrow C=e^0=1$$

مثال ۲۴: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\text{Ln}(x+a)-\text{Ln}x]$ کدام است؟

۱) a ۲) -1 ۳) $-a$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۱»

$$A=\lim_{x\to+\infty}x[\text{Ln}(x+a)-\text{Ln}x]=\lim_{x\to+\infty}x\text{Ln}(\frac{x+a}{x})=\lim_{x\to+\infty}\text{Ln}(\frac{x+a}{x})^x$$

$$=\text{Ln}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+a}{x})^x}_{L}\ ,\ L=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+a}{x})^x=(1)^\infty\Rightarrow L=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a}{x})x}=e^a\Rightarrow A=\text{Ln}e^a=a$$

همان‌طور که می‌بینید، پس از نوشتن حد به‌صورت گفته شده در توان e، باید حدودی را با قاعده‌های گفته شده قبلی محاسبه کنیم.

مثال ۲۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

۱) e^{-12} ۲) $e^{-\frac{1}{6}}$ ۳) $e^{\frac{1}{6}}$ ۴) $e^{\frac{1}{12}}$

پاسخ: گزینه «۴» در اولین نگاه متوجه می‌شویم با حدی به فرم $(\frac{0}{0})^\infty$ روبرو هستیم. برای تشخیص بهتر نوع این ابهام، بهتر است کمی به کسر داده شده توجه کنیم. با توجه به هم‌ارزی $\cosh x\simeq 1+\frac{x^2}{2}$ متوجه می‌شویم که کسر $\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}$ به سمت یک میل می‌کند، بنابراین ما در واقع با حالت مبهم 1^∞ روبه‌رو هستیم:

$$\lim_{x\to 0}[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}]^{\frac{1}{x^2}}\simeq\lim_{x\to 0}[\frac{2(1+\frac{x^2}{2}-1)}{x^2}]^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$$

اما برای آن‌که بتوانیم حاصل حد را به‌دست آوریم، لازم است هم‌ارزی $\cosh x$ را با تعداد جملات بیشتری به‌کار بگیریم. در ضمن از این قاعده‌ی حدی که مخصوص حالت مبهم 1^∞ است استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}-1]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}[\frac{2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-1)}{x^2}-1]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}[\frac{x^2+\frac{1}{12}x^4}{x^2}-1]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}[1+\frac{1}{12}x^2-1]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x^2}{12x^2}}=e^{\frac{1}{12}}$$

مثال ۲۶: اگر $A=\lim\limits_{x\to\infty}(\text{tgh}\,x)^{\cosh x}$ و $B=\lim\limits_{x\to\infty}x[\text{Ln}(1+\frac{x}{2})-\text{Ln}(\frac{x}{2})]$، آن‌گاه مقدار $A-B$ کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $e^{-1}-2$ ۳) 1 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به محاسبه‌ی A می‌پردازیم. هرگاه $x\to\infty$، آن‌گاه داریم: $\text{tgh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\sim\frac{e^x}{e^x}=1$ و $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sim\frac{e^x}{2}=\infty$

پس فرم 1^∞ را داریم و برای محاسبه‌ی آن به این صورت عمل می‌کنیم: $A=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\cosh x(\text{tgh}\,x-1)}$

به محاسبه‌ی توانِ e می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to\infty}\cosh x(\text{tgh}\,x-1)=\lim_{x\to\infty}\cosh x(\frac{\sinh x}{\cosh x}-1)=\lim_{x\to\infty}(\sinh x-\cosh x)=\lim_{x\to\infty}(-e^{-x})=0$$

بنابراین $A=e^{0}=1$. برای محاسبه B دقت کنید که حالت مبهم $\infty-\infty$ است. ابتدا از خاصیت لگاریتم یعنی $\operatorname{Ln}A-\operatorname{Ln}B=\operatorname{Ln}\frac{A}{B}$ استفاده می‌کنیم:

$$B=\lim_{x\to\infty}x(\operatorname{Ln}(1+\frac{x}{2})-\operatorname{Ln}(\frac{x}{2}))=\lim_{x\to\infty}x\operatorname{Ln}\frac{1+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}x\operatorname{Ln}(\frac{2+x}{x})=\lim_{x\to\infty}x\operatorname{Ln}(1+\frac{2}{x})=\lim_{x\to\infty}x(\frac{2}{x})=2$$

در قسمت آخر از هم‌ارزی $\operatorname{Ln}(1+u)\sim u$ وقتی $u\to 0$ استفاده کردیم (وقتی $x\to\infty$ آن‌گاه $\frac{2}{x}\to 0$). در پایان داریم: $A-B=1-2=-1$.

مثال ۲۷ (سخت): حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{n^2+1})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e^{\frac{4}{\pi}}$ ۳) $e^{\frac{2}{\pi}}$ ۴) $e^{\frac{1}{\pi}}$

پاسخ: گزینه «۳» سؤال جالبی است، احتمال خطا و انتخاب گزینه غلط در حل این سؤال بسیار زیاد است:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{(-1)^n}{n})^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{n^2+1})}=1^{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty}e^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{n^2+1})\times(1+\frac{(-1)^n}{n}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(-1)^n\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{n^2+1})}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(-1)^n}{n\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(-1)^n}{(-1)^n\frac{\pi}{2}}}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

توضیح: برای محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})=\lim_{n\to\infty}n\sin(n\pi(1+\frac{1}{2n^2}))=\lim_{n\to\infty}n\sin(n\pi+\frac{\pi}{2n})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}n[\sin(n\pi)\cos(\frac{\pi}{2n})+\cos(n\pi)\sin(\frac{\pi}{2n})]=\lim_{n\to+\infty}n[0+(-1)^n\sin(\frac{\pi}{2n})]\sim\lim_{n\to\infty}n\times(-1)^n\frac{\pi}{2n}=(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

مثال ۲۸: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) e

پاسخ : گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: از هم‌ارزی $\cosh x\sim\frac{e^x}{2}$ $(x\to+\infty)$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=\frac{e}{2^0}=\frac{e}{1}=e$$

روش دوم: چون حد از نوع ∞^0 مبهم است، لذا با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\cosh x)^{\frac{1}{x}}=\infty^0=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}(\cosh x)}{x}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Ln}(\cosh x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tgh}x=1\Rightarrow \text{حاصل حد}=e^1=e$$

مثال ۲۹: حد تابع $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$ چه مقدار است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $-2/99$ ۲) -3 ۳) $+2/99$ ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۲» چون حد چپ خواسته شده است، می‌توانیم قدرمطلق‌ها را برداریم. توجه شود که چون درون قدرمطلق‌ها منفی خواهد شد، در هنگام برداشتن قدرمطلق عبارت درون قدر مطلق در یک منفی ضرب می‌شود، پس داریم:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+(x-1)-1}{-(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x-2}{-(x-1)}\Rightarrow\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

مثال۳۰: مطلوبست تعیین حد تابع داده شده: $y=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot gx)$ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $y=\frac{\pi}{2}$
۲) $y=\infty$
۳) $y=1$
۴) $y=0$

پاسخ : گزینه «۴» به جای $\cot g\,x$، $\frac{1}{tg\,x}$ قرار می‌دهیم و سپس مخرج مشترک گرفته و در نهایت از هم‌ارزی‌های $\underset{x\to 0}{tg\,x\sim x}$, $\underset{x\to 0}{tg\,x-x\sim\frac{x^3}{3}}$ استفاده می‌کنیم پس داریم:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot gx)=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{tg\,x})=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{xtg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}x=0$$

مثال۳۱: در مورد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) حد موجود و برابر صفر است.
۲) حد موجود و برابر یک است.
۳) حد موجود و برابر $\frac{1}{2}$ است.
۴) حد موجود نیست.

پاسخ : گزینه «۱» اگر در حد داده شده از هم‌ارزی $\underset{x\to 0}{\sin x\sim x}$ استفاده کنیم و کسر را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

چون $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ و تابع $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ (کراندار است) می‌باشد، با استفاده از قضیه‌ای که در متن درس آمده داریم: $\lim\limits_{x\to 0}x\times\sin\frac{1}{x}=0\times$ تابع کراندار $=0$

مثال۳۲: حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{5}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) ۱
۴) فاقد حد

پاسخ : گزینه «۴» به این علت که در گزینه‌ی (۴)، امکان وجود نداشتن حد مطرح شده است، بهتر است حد چپ و حد راست را به‌دست آوریم تا بتوانیم به سؤال با اطمینان پاسخ دهیم، پس داریم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{0^-}}}{3+2^{\frac{1}{0^-}}}=\frac{1+2^{-\infty}}{3+2^{-\infty}}=\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+3^{\frac{1}{x}}}=\frac{\infty}{\infty}\xlongequal{\text{بزرگترین جمله صورت و مخرج را می نویسیم}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1$$

هر دو حد چپ و راست موجود می‌باشند، اما چون با هم برابر نیستند، لذا تابع مورد نظر در نقطه $x=0$ حد ندارد.

مثال۳۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸ و مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}e$
۲) $e^{\frac{1}{2}}$
۳) $e^{-\frac{1}{2}}$
۴) $-\frac{1}{2}e$

پاسخ : گزینه «۳» چون ابهام حد مورد نظر از نوع $1^{+\infty}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x}-1)\times\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\frac{0}{0}\xlongequal{1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x}=\frac{-1}{2}\Rightarrow \text{حاصل حد}=e^{-\frac{1}{2}}$$

دقت کنید در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ می‌توان از قضیه‌ی هوپیتال هم به‌صورت زیر به جواب رسید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{-1}{2}$$

تذکر مهم: در حد داده شده در صورت مسأله اگر $x\to 0$ میل می‌کرد، حد وجود نداشت؛ چرا که تابع $\cos\sqrt{x}$ در $x<0$ تعریف نشده و همسایگی چپ برای $x=0$، نخواهیم داشت، اما در صورت مسأله طراح سؤال با در نظر گرفتن $x\to 0^+$، مشکل فوق را مرتفع نموده است.

مثال ۳۴: کدام گزینه در مورد $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) وجود ندارد ۲) حد برابر صفر است ۳) حد برابر یک است ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۳» حد مورد نظر دارای ابهام از نوع $0\times\infty$ می‌باشد، لذا از هم‌ارزی $\lfloor x\rfloor\underset{x\to\infty}{\sim}x$ یا $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=\lim_{x\to 0}x\times\frac{1}{x}=1$$

مثال ۳۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(\cos 2x)}{Ln(\cos 3x)}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\dfrac{4}{9}$ ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\dfrac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» چون حد از نوع ابهام $\dfrac{0}{0}$ می‌باشد، لذا با استفاده از قضیه هوپیتال به محاسبه‌ی حد می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln\cos 2x}{Ln\cos 3x}\overset{Ln1=0}{=\!=}\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2tg2x}{-3tg3x}\overset{\underset{x\to 0}{tgmx\sim mx}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\times 2x}{-3\times 3x}=\frac{4}{9}$$

مثال ۳۶: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) $\dfrac{2}{e}$ ۳) $\dfrac{4}{e}$ ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از هم‌ارزی $n!\sim(\dfrac{n}{e})^n$ وقتی $n\to+\infty$ داریم:

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}}_{1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(\frac{2n}{e})^{2n}}{(\frac{n}{e})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{n}{e})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{4n^2\times e}{ne^2}=\frac{4}{e}$$

مثال ۳۷: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $e^{-\infty}=0$، پس حد به‌صورت $\dfrac{0}{0}$ بوده و برای رفع ابهام می‌توان ابتدا از تغییر متغیر $t=\dfrac{1}{x}$ و سپس از قضیه‌ی هوپیتال استفاده نمود، پس داریم:

$$t=\frac{1}{x}\Rightarrow(\text{اگر } x\to 0^+\Rightarrow t\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}te^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=\frac{1}{+\infty}=0$$

مثال ۳۸: اگر a_n به‌صورت $a_n=\begin{cases} e^{-n} & ;\ \text{زوج } n \\ \frac{\sin n}{n} & ;\ \text{فرد } n \end{cases}$ تعریف شده باشد، حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به این‌که n به سمت ∞ میل می‌کند و می‌دانیم ∞ یک نماد ریاضی است و عدد نیست، لذا نمی‌توان گفت برای محاسبه‌ی حد باید از کدام ضابطه استفاده نمود. به همین جهت برای این‌که دنباله‌ی a_n دارای حد باشد باید حد در هر دو ضابطه موجود و با هم برابر باشد، پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\times\sin n=0\times\text{تابع کراندار}=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$$

مثال ۳۹: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}(1+x^2)}}$ را به‌دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰ ۲) $+\infty$ ۳) e ۴) $-\infty$

پاسخ : گزینه «۲» چون حد مورد نظر از نوع 1^{∞} مبهم است، لذا داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{Ln}(1+x^2)}}=1^{\frac{1}{\operatorname{Ln}1}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+\cos x-1)(\frac{1}{\operatorname{Ln}(1+x^2)})}$$

برای محاسبه‌ی حد عبارت قرار گرفته در توان e به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\quad,\quad \sin x\sim x\quad,\quad \operatorname{Ln}(1+x^2)\sim x^2\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\frac{x^2}{2})(\frac{1}{x^2})}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2})}=e^{+\infty}=+\infty$$

مثال ۴۰: اگر $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) ۵- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) $-\frac{3}{5}$

پاسخ : گزینه «۱» حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است، لذا داریم:

$$\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}\times\frac{1+\sqrt{5x+16}}{1+\sqrt{5x+16}}=\lim_{x\to -3}\frac{(ax+3a)(1+\sqrt{5x+16})}{1-(5x+16)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{1-5x-16}=\lim_{x\to -3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{-5(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{a}{-5}(1+\sqrt{5x+16})$$

$$=\frac{a}{-5}\times(1+\sqrt{1})=\frac{2a}{-5}\ \underset{\text{مقدار حد برابر ۲ است}}{\overset{\text{از صورت مسأله می‌دانیم}}{=\!=\!=\!=}}\ 2\Rightarrow a=-5$$

توضیح: حد فوق را می‌توانیم با استفاده از قاعده هوپیتال نیز محاسبه کنیم.

مثال ۴۱: حاصل حد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\sin x)}{x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۰)

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) ۰ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۱» برای محاسبه‌ی حد مورد نظر از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin x)}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{x}=\pi$$

مثال ۴۲: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(Lnx+1)}{1}=1(Ln1+1)=1$$

توجه: برای مشتق گرفتن از x^x به‌صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$y=x^x \Rightarrow Lny=xLnx \Rightarrow \frac{y'}{y}=Lnx+1 \Rightarrow y'=y(Lnx+1)=x^x(Lnx+1)$$

مثال ۴۳: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{Ln(\sin x)}{Ln(\sin 2x)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) حد وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم شرط لازم برای وجود داشتن حد یک تابع در یک نقطه این است که تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد. چون دامنه‌ی توابع $Ln(\sin x)$ و $Ln(\sin 2x)$ به‌صورت روبرو هستند:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x>0 \Rightarrow 0<x<\pi\\ \sin 2x>0 \Rightarrow 0<2x<\pi \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

ملاحظه می‌شود که تابع $f(x)=\frac{Ln(\sin x)}{Ln(\sin 2x)}$ در همسایگی چپ نقطهٔ $x=\pi$ تعریف نشده است، لذا حد وجود ندارد.

مثال ۴۴: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Arc\sin 3x}{xe^{2x}-x^2}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی $\underset{x\to 0}{Arc\sin mx\sim mx}$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Arc\sin 3x}{xe^{2x}-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(e^{2x}-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{e^{2x}-x}=\frac{3}{e^0-0}=\frac{3}{1}=3$$

مثال ۴۵: حد عبارت $\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot gx)$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۳» چون حد از نوع $\infty-\infty$ مبهم است، لذا برای رفع ابهام ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و سپس با استفاده از هم‌ارزی‌ها و یا قضیه‌ی هوپیتال به حل حد می‌پردازیم. برای راحتی کار به جای $\cot gx$، $\frac{1}{tgx}$ قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\frac{1}{tgx})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{tgx-x}{xtgx})=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x^2tgx}\xrightarrow[\underset{x\to 0}{tgx\sim x}]{\underset{x\to 0}{tgx-x\sim\frac{1}{3}x^3}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$$

مثال ۴۶: حد روبرو را به‌دست آورید: $\lim\limits_{x\to 0}tg2x\csc 4x$ (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم $\csc 4x=\frac{1}{\sin 4x}$ و هم‌ارزی‌های $\left\{\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{\sin mx\sim mx}\\ \underset{x\to 0}{\tan mx\sim mx}\end{array}\right.$ را نیز داریم. پس برای حد مورد نظر داریم:

$$\lim_{x\to 0}tg2x\csc 4x=\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال ۴۷: به ازای هر عدد حقیقی و ثابت a حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) e^a ۴) e^{2a}

پاسخ : گزینه «۴» چون حد مورد نظر از نوع 1^∞ مبهم می‌باشد لذا با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a-x+a}{x-a}\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

مثال ۴۸: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۱» کافی است ابتدا از هم‌ارزی $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0\times \text{تابع کراندار} = 0$$

یادآوری: هرگاه تابع $g(x)$ یک تابع کراندار باشد $(|g(x)|<M)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$، آن‌گاه داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=0$.

مثال ۴۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1+Lnx}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱ و علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. چون حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ مبهم است، می‌توان از قضیه‌ی هوپیتال استفاده کرده پس داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1+Lnx} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(Lnx+1)}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1(Ln1+1)}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$y=x^x \Rightarrow Lny = xLnx \Rightarrow (Lny)' = (xLnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = Lnx+1 \Rightarrow y' = x^x(Lnx+1)$$

مثال ۵۰: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۲» حد داده شده از نوع $\infty-\infty$ مبهم است، برای رفع ابهام باید عبارت در مزدوج عبارت $(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})$ ضرب و تقسیم کنیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{n[(n^2+2)-(n^2+1)]}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}$$

مثال ۵۱: حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}}$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: چون حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد، می‌توانیم از قضیه‌ی هوپیتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

روش دوم: می‌دانیم هنگامی که x به سمت ∞ میل می‌کند، رشد تابع $\sqrt{x}$ از رشد تابع Lnx بیشتر است، پس تابع $\sqrt{x}$ زودتر از تابع Lnx به ∞ می‌رسد و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Lnx}{\sqrt{x}} = 0$$

مثال ۵۲: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\operatorname{Ln}\cosh x)$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\cosh 1$ ۲) $\operatorname{Ln}2$ ۳) e ۴) $-\infty$

پاسخ : گزینه «۲» حد از نوع مبهم $\infty-\infty$ است، زیرا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}\cosh x=\lim_{x\to\infty}\operatorname{Ln}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\operatorname{Ln}\left(\frac{\infty+0}{2}\right)=\infty$$

حال با استفاده از هم‌ارزی $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sim\frac{e^x}{2}$ داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\operatorname{Ln}\cosh x)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\operatorname{Ln}\frac{e^x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-(\operatorname{Ln}e^x-\operatorname{Ln}2)\right)=\lim_{x\to\infty}(x-x+\operatorname{Ln}2)=\operatorname{Ln}2$$

مثال ۵۳: $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $2e$ ۴) e^2

پاسخ : گزینه «۱» چون حد از نوع 1^∞ مبهم می‌باشد، با استفاده از مطالب کتاب و هم‌ارزی $\begin{cases}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\\ x\to 0\end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases}1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2x^2}\\ x\to\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x}-1)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{1}{2x^2})x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{2x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۵۴: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{Ln}x}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ : گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: چون حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد، می‌توان از قضیه هوپیتال استفاده کرد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{Ln}x}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{HOP}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{1+0}{+\infty}=0$$

روش دوم: چون x به سمت ∞ میل می‌کند، رشد x از رشد $\operatorname{Ln}x$ بیشتر است، لذا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{Ln}x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

مثال ۵۵: اگر $f(x)=\frac{1+10^{\frac{-1}{x}}}{2-10^{\frac{-1}{x}}}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ چه مقدار خواهد شد؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1+10^{-\frac{1}{x}}}{2-10^{-\frac{1}{x}}}\right)=\frac{1+10^{-\frac{1}{0^-}}}{2-10^{-\frac{1}{0^-}}}=\frac{1+10^{+\infty}}{2-10^{+\infty}}\underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\frac{10^{+\infty}}{-10^{+\infty}}=-1$$

مثال ۵۶: فرض کنید $a_n=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$، در این صورت کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰ و آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ۲) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ ۳) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$

پاسخ : گزینه «۴» از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{(\frac{n}{e})^n}\right)^{\frac{1}{n}}=e$$

مثال ۵۷: مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰ و ۸۳)

۱) e ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{-e}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ می‌باشد، پس حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\mathrm{Ln}(1+x)}-e}{x}\ \underset{\text{هم‌ارزی}}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2})}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}}-e}{x}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}}{1}=-\frac{e}{2}$$

مثال ۵۸: c را به قسمی بیابید که $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=9$. (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $c=\mathrm{Ln}3$ ۲) $c=\mathrm{Ln}4$ ۳) $c=\mathrm{Ln}9$ ۴) $c=3$

پاسخ : گزینه «۱» حد داده شده از نوع 1^∞ مبهم است، پس با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c}-1)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c-(x-c)}{x-c})x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$$

با توجه به‌صورت مسأله، مقدار حد برابر ۹ می‌باشد، لذا باید داشته باشیم:

$$e^{2c}=9\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\mathrm{Ln}e^{2c}=\mathrm{Ln}9\Rightarrow 2c=\mathrm{Ln}9\Rightarrow c=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}9=\mathrm{Ln}9^{\frac{1}{2}}=\mathrm{Ln}\sqrt{9}=\mathrm{Ln}3$$

مثال ۵۹: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}$ برابر کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: حد از نوع 1^∞ مبهم است لذا با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}\sim 1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)tg^2x}=e^{-\frac{1}{2}}$$

روش بدست آوردن حد عبارت توان e به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)tg^2x=0\times\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)\sin^2x}{(1-\sin^2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)\sin^2x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2x}{1+\sin x}=\frac{-1}{2}$$

روش دوم: از تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{2}-x$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}=\lim_{t\to 0}(\cos t)^{\cot^2t}=\lim_{t\to 0}e^{\cot g^2t(\cos t-1)}\ \underset{\cot t\sim\frac{1}{t},\ \cos t-1\sim\frac{-t^2}{2}}{=}\ \lim_{t\to 0}e^{\frac{1}{t^2}(\frac{-t^2}{2})}=e^{-\frac{1}{2}}$$

مثال ۶۰: حد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1-\sin x)+\sin x}{1-\cos x}$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این‌که حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم است، هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1-\sin x)+\sin x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x+(1-\sin x)\cos x}{1-\sin x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cos x}{(1-\sin x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1-\sin x}=\frac{-1}{1}=-1$$

مثال ۶۱: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} Lnn$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۲» چون حد از نوع $0\times\infty$ مبهم است، باید به‌صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ در بیاید و سپس از هوپیتال و یا با در نظر گرفتن رشد توابع حل شود:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}Lnn = 0\times\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{2^n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2^n Ln2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n2^n Ln2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

برای حل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Lnn}{2^n}$ می‌توانیم این‌طور هم بیان کنیم که $\underset{n\to\infty}{2^n} > Lnn$ ، پس رشد مخرج بیشتر از رشد صورت است، لذا مقدار حد برابر صفر خواهد شد.

مثال ۶۲: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^2 tgx}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۴» حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم می‌باشد، هم می‌توان از قضیه هوپیتال و هم از هم ارزی‌های مقابل استفاده نمود: $\underset{x\to 0}{tgx} \sim x$, $\underset{x\to 0}{tgx - x} \sim \frac{1}{3}x^3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^2 tgx} = \frac{0}{0} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2\times x} = \frac{1}{3}$$

مثال ۶۳: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $e^{\frac{1}{3}}$ ۲) $e^{\frac{1}{2}}$ ۳) e^3 ۴) e^2

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$ ، پس حد مورد نظر از نوع 1^∞ مبهم است. با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{tgx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{tgx}{x}-1)\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{tgx-x}{x})\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

مثال ۶۴: اگر $g(x) = \frac{1}{1-\cos x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - x)^{g(x)}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) 1 ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $\frac{1}{e}$

پاسخ : گزینه «۲» حد داده شده از نوع 1^∞ مبهم است، پس با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x-1)\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{1-\cos x} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{1} = 1 \Rightarrow \text{حاصل حد} = e^1 = e$$

مثال ۶۵: مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0}(x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) 1 ۲) $8e$ ۳) e^3 ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۳» حد داده شده از نوع 1^∞ مبهم است، پس با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to 0}(x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x}-1)\frac{1}{x}}$$

حد توان e به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x + e^{2x} - 1)}{x} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{1} = \frac{1+2e^0}{1} = 1+2 = 3 \Rightarrow \text{حاصل حد} = e^3$$

مثال ۶۶: اگر $|x|<1$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{m}{n}x^n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) x ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» **یادآوری:** هرگاه بخواهیم n عنصر را از m عنصر انتخاب کنیم. به‌طوری‌که ترتیب انتخاب مهم نباشد، ترکیب n از m تعریف می‌شود و به‌صورت $\binom{m}{n}$ نشان می‌دهیم ($\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$). حال اگر $n>m$ باشد واضح است که $\binom{m}{n}=0$ می‌باشد مثلاً از بین ۳ نفر به چند طریق می‌توان ۵ نفر انتخاب کرد؟! واضح است که به صفر طریق، یعنی $\binom{3}{5}=0$ است.

در مسأله پیش رو هم چون n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، داریم $\binom{m}{n}=0$ و نیز چون $|x|<1$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}x^n=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\binom{m}{n}x^n=0\times 0=0$$

مثال ۶۷: حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۱» حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم است لذا با استفاده از قضیه هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{0}{0}\ \overset{HOP}{=\!=}\ \lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\sqrt{4}=2$$

مثال ۶۸: حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^4-1)}{x^2-1}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۳» حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم می‌باشد، لذا می‌توان از دو روش به حل آن پرداخت:

روش اول: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^4-1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \overset{HOP}{=\!=}\ \lim_{x\to1}\frac{4x^3\cos(x^4-1)}{2x}=\lim_{x\to1}2x^2\cos(x^4-1)=2\times\cos(0)=2\times1=2$$

روش دوم: با استفاده از هم‌ارزی $\sin u\underset{u\to0}{\sim}u$ (در حد داده شده چون کمان sin به سمت صفر می‌رود، می‌توانیم از این هم‌ارزی استفاده کنیم):

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^4-1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}\ \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\ \lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}(x^2+1)=1+1=2$$

مثال ۶۹: حاصل $\lim\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ ۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ۳) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$ ۴) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

پاسخ : گزینه «۴» حد داده شده از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است، اما چون x به سمت ∞ میل می‌کند و صورت و مخرج کسر دو عبارت چندجمله‌ای هستند کافی است عبارت شامل بزرگترین توان صورت و مخرج را بیابیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^{20}\times(3x)^{30}}{(2x)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{20}\times x^{20}\times3^{30}\times x^{30}}{2^{50}\times x^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{20}\times3^{30}\times x^{50}}{2^{50}\times x^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{2^{50}}=\frac{3^{30}}{2^{30}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

مثال ۷۰: حد تابع $f(x)=\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴ و ژئوفیزیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

پاسخ : گزینه «۳» حد از نوع $\infty-\infty$ مبهم است. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم و بعد ملاحظه می‌شود که حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم شده که در این صورت می‌توان از قضیه هوپیتال کمک گرفت:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}\right)=\frac{0}{0}\ \underline{\underline{HOP}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+Lnx}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1+xLnx}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+xLnx}=\frac{0}{0}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+Lnx+\frac{x}{x}}=\frac{1}{1+0+1}=\frac{1}{2}$$

مثال ۷۱: مقدار c را چنان تعیین کنید که $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$ بشود. (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $Ln4$ ۴) $Ln2$

پاسخ : گزینه «۴» حد از نوع 1^∞ است، لذا با استفاده از مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=1^\infty\sim e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}-1\right)x}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c-x+c}{x-c}\right)x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$$

$$\Rightarrow e^{2c}=4\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}Lne^{2c}=Ln4\Rightarrow 2c=Ln2^2\Rightarrow 2c=2Ln2\Rightarrow c=Ln2$$

مثال ۷۲: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{4}{e}$

پاسخ : گزینه «۴» از هم‌ارزی $\sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\sqrt[n]{(2n+1)}}_{\text{یک}}.\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\frac{n}{e}}=\frac{4}{e}$$

مثال ۷۳: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}Ln(e^n+2)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}Ln(e^n+2)\sim\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}Lne^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

مثال ۷۴: به ازای $x=\frac{2}{3}$ مقدار $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n})$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۳» قرار می‌دهیم $I_n=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$، در این صورت داریم:

$$(1-x)I_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=(1-x^2)(1+x^2)...(1+x^{2^n})=\cdots=1-x^{2^{n+1}}$$

بنابراین $I_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ و به ازای $x=\frac{2}{3}$ خواهیم داشت:

$$I_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{2}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n+1}}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=3$$

مثال ۷۵: اگر $\lim_{x\to 0} f(x)=3$، آن‌گاه $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xf(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{1}{3}\times\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\frac{1}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=\frac{1}{3}\times 2e^{0}=\frac{2}{3}$$

مثال ۷۶: حاصل $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) e ۲) $2e$ ۳) e^2 ۴) $\frac{1}{2}e$

پاسخ: گزینه «۳» حد از نوع 1^∞ مبهم است و لذا با توجه به مطالب ارائه شده در کتاب داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

مثال ۷۷: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3x)^{tg3x}$ برابر است با: (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) e^{-1} ۲) e ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3x)^{tg3x}=1^\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}e^{tg3x(\sin 3x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}e^{\frac{\sin 3x-1}{\cot g3x}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}e^{\frac{3\cos 3x}{-3(1+\cot g^2 3x)}}=e^{\frac{-3}{-\infty}}=e^{0}=1$$

مثال ۷۸: حاصل $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+Ln3}{n})^{2n-1}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۴» صورت مبهم 1^∞ می‌باشد، بنابراین با توجه به مطالب ارائه شده در کتاب داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+Ln3}{n})^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{(2n-1)(\frac{n+Ln3}{n}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{(2n-1)Ln3}{n}}=e^{2Ln3}=e^{Ln9}=9$$

مثال ۷۹: حاصل $\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{|x^2+x-6|}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{|x^2+x-6|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+\sqrt{x^2+12}}{6-x-x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2^-}\frac{-2+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}{-1-2x}=\frac{3}{10}$$

مثال ۸۰: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln\frac{n!}{n^n}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱- ۲) e^{-1} ۳) ۱ ۴) e

پاسخ: گزینه «۱» چون $n\to\infty$، پس از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln(\frac{1}{e})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}Ln\frac{1}{e}=Ln\frac{1}{e}=-1$$

مثال ۸۱: حد $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر ۲) $Ln3+Ln2-1$ ۳) $Ln3-Ln2$ ۴) $Ln3+Ln4-3$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{3^xLn3-2^xLn2}{1}=Ln3-Ln2$$

مثال ۸۲: حد $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را حساب کنید. (عمران ـ آزاد ۸۰ و معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) -۱ ۲) e ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{e}$

پاسخ: گزینه «۴» چون $n\to\infty$، پس از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(\frac{n}{e})^n}}{n}=\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{۱}{e}$$

مثال ۸۳: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{g(x)}$، اگر $g(x)=\frac{۱۲}{x^۲}$ باشد، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱ ۲) $e^{-۱}$ ۳) $e^{-۲}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» برای رفع ابهام حالت مبهم ۱^∞ اغلب از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=۱^\infty=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-۱)g(x)}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱۲}{x^۲}}=۱^\infty=\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۱۲}{x^۲}(\frac{\sin x}{x}-۱)}=\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۱۲(\sin x-x)}{x^۳}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۱۲(-\frac{x^۳}{۶})}{x^۳}}=e^{-۲}$$

مثال ۸۴: به ازای چه مقادیری از a، $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^۲}{۱+\cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{۲}{\pi^۲}$ است؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۲) ±۱ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) ±۳

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^۲}{۱+\cos(\frac{\pi x}{a})}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{۲(x-a)}{\frac{-\pi}{a}\sin(\frac{\pi x}{a})}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{۲}{\frac{-\pi^۲}{a^۲}\cos(\frac{\pi x}{a})}=\frac{۲a^۲}{\pi^۲}$$

بنابراین $a^۲=۱$ یعنی $a=\pm۱$.

مثال ۸۵: $\lim\limits_{x\to ۱^-}x^{\frac{x}{۱-x}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) e ۴) $\frac{۱}{e}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x\to ۱^-}x^{\frac{x}{۱-x}}=۱^\infty\sim\lim_{x\to ۱^-}e^{\frac{x}{۱-x}(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}e^{-x}=\frac{۱}{e}$$

مثال ۸۶: حد عبارت $\sin۲x(\cot gx+\cot g۲x)$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۰}\sin۲x(\frac{۱}{tgx}+\frac{۱}{tg۲x})\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to ۰}۲x(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x})=۳$$

مثال ۸۷: حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{۱}{e}$ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲» حد داده شده به‌صورت مبهم $\infty^۰$ است. طبق قانون رشد وقتی $x\to\infty$، عبارت (e^x-x) هم‌ارز e^x است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x)^{\frac{۱}{x}}=\infty^۰\sim\lim_{x\to\infty}(e^x)^{\frac{۱}{x}}=e$$

مثال ۸۸: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) e^2 ۳) 1 ۴) e

پاسخ: گزینه «۲» از هم‌ارزی $\sin 2x \sim 2x$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} \sim \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}(1+2x-1)} = e^2$$

مثال ۸۹: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sin x^2}{x+xe^{\frac{1}{x}}}$ برابر کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\sin x^2}{x+xe^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی } \sin x\sim x} \lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \sim \lim_{x\to 0}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

مثال ۹۰: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-\mathrm{Ln}2}{x}\right)^x$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) -2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» حد داده شده به‌صورت مبهم 1^∞ است:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\mathrm{Ln}2}{x}\right)^x = 1^\infty \sim \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{x-\mathrm{Ln}2}{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{x\left(\frac{-\mathrm{Ln}2}{x}\right)} = e^{-\mathrm{Ln}2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۹۱: حد عبارت $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{|x^2-x|}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) حد ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که $x\to 0$، پس $x^2-x\sim -x$ و $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$، پس داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{|x^2-x|} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{|-x|} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}{|x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۹۲: اگر تابع f در نقطه x مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) $2f'(x)$

۳) $f'(x)$ ۴) در حالت کلی نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{1} = f'(x)-f'(x) = 0$$

مثال ۹۳: اگر $f(x)=\cot g^2 x$ حد عبارت $(\cos x)^{f(x)}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot g^2 x} = 1^\infty \sim \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}} \sim \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}(\cos x-1)} \underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\left(\frac{-x^2}{2}\right)} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

مثال ۹۴: مرتبه صفر تابع $f(x)=\sinh x - x\cosh x + \frac{1}{3}x^3$ در $x=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به آن که سؤال در مورد نقطه‌ی $x=0$ است، بهتر است از بسط‌های مک‌لورن استفاده کنیم تا مرتبه‌ی ریشه‌ی $f(x)$ در $x=0$ معلوم شود:

$$f(x)=\sinh x - x\cosh x + \frac{1}{3}x^3 = (x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots)-x(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots)+\frac{x^3}{3}$$

$$=(x-x)+(\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3})+(\frac{x^5}{5!}-\frac{x^5}{4!})+(\frac{x^7}{7!}-\frac{x^7}{6!})+\cdots=(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})x^5+(\frac{1}{7!}-\frac{1}{6!})x^7+\cdots$$

کوچکترین توان x که در بسط باقی مانده است، x^5 می‌باشد. در واقع می‌توان از x^5 فاکتور گرفت و نوشت: $f(x)=x^5[(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})+(\frac{1}{7!}-\frac{1}{6!})x^2+\cdots]$

پس $x=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۵ برای $f(x)$ است.

مثال ۹۵: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x})^{1-x}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) e^5 ۲) e ۳) e^{-1} ۴) e^{-4}

پاسخ : گزینه «۱» حد مورد نظر به‌صورت مبهم 1^∞ است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x})^{1-x}\sim\lim_{x\to\infty}e^{(1-x)(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{(1-x)(\frac{x^2-2x+1-x^2-3x}{x^2+3x})}=\lim_{x\to\infty}e^{(1-x)(\frac{1-5x}{x^2+3x})}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{5x^2-6x+1}{x^2+3x}}$$

$$\xlongequal{\text{قانون رشد}}\lim_{x\to\infty}e^{\frac{5x^2}{x^2}}=e^5$$

مثال ۹۶: مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{3x^2+2}\sin\frac{1}{x}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» چون کمان سینوس یعنی $\frac{1}{x}$، وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند به صفر میل می‌کند، پس می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{3x^2+2}\sin\frac{1}{x}\xlongequal{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{3x^2+2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{3x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}$$

توجه کنید برای محاسبه حدود در بی‌نهایت، بیشترین توان صورت و بیشترین توان مخرج را در نظر می‌گیریم.

مثال ۹۷: مقدار $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) e^2 ۴) e

پاسخ : گزینه «۴» حد مورد نظر به‌صورت مبهم 1^∞ است، برای رفع ابهام از رابطه $u^v\sim e^{v(u-1)}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}(x-1)}=e$$

مثال۹۸: مقدار حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{\pi}{2}-tg^{-1}(x^2)}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به کمک هم‌ارزی $e^u-1\sim u$ حد را ساده می‌کنیم و سپس از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{\pi}{2}-\text{Arctg}x^2}\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\pi}{2}-\text{Arctg}x^2}=\frac{0}{0}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2x}{1+x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{x^4}=1$$

مثال۹۹: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2})^{2x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) e ۲) $\sqrt{e}$ ۳) e^2 ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» حالت مبهم 1^∞ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2})^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2}-1)(2x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^2})2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=e^0=1$$

مثال۱۰۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» حاصل حد به ازای $x\to 0$ به‌صورت مبهم $\infty-\infty$ است. با مخرج مشترک‌گیری آن را به‌صورت $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to 0}(\frac{x-\sin x}{x^2\sin x})\to\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^2.x}=\frac{1}{6}$$

مثال۱۰۱: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $e\sqrt{e}$ ۴) e^2

پاسخ: گزینه «۳» حد به‌صورت مبهم 1^∞ است، بنابراین داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to 0}(e^x-x+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\sim\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}(e^x-x+x^2-1)}$$

برای محاسبه حد فوق از هم‌ارزی $e^x\sim 1+x+\frac{x^2}{2}$ استفاده می‌کنیم. در این‌صورت داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}(1+x+\frac{x^2}{2}-x+x^2-1)}=e^{\frac{3}{2}}$$

مثال۱۰۲: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\text{Ln}\sqrt[n]{2})^{n+3}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{e}$

پاسخ: گزینه «۲» حد به‌صورت مبهم 1^∞ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}(1+(\text{Ln}2)^{\frac{1}{n}})^{n+3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1+(\text{Ln}2)^{\frac{1}{n}}-1)(n+3)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}(\text{Ln}2)-1)(n+3)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n}\text{Ln}2}=e^{\text{Ln}2}=2$$

مثال۱۰۳: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{4}{1-x^4}-\frac{1}{1-x})$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» حالت مبهم $\infty-\infty$ است، لذا مخرج مشترک می‌گیریم تا عامل ابهام را حذف کنیم، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1}(\frac{4}{1-x^4}-\frac{1}{1-x})=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}(\frac{4}{1-x^4}-\frac{(1+x)(1+x^2)}{1-x^4})=\lim_{x\to 1}\frac{4-(1+x+x^2+x^3)}{1-x^4}=\frac{0}{0}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1-2x-3x^2}{-4x^3}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

مثال ۱۰۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}))^{\frac{2}{x}}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) $e^{\sqrt{2}}$ ۲) $e^{-\sqrt{2}}$ ۳) e^{2} ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** حالت مبهم 1^∞ می‌باشد و روش حل این نوع حالت مبهم به فرم کلی مقابل است:
$$\lim_{x\to m}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to m}(f(x)-1)g(x)}$$

لذا برای این حد داریم:
$$\lim_{x\to 0^-}(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}))^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^-}(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-1)\frac{2}{x}}=e^{\frac{0}{0}}\ \underline{\underline{HOP}}\ e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1}}=e^2$$

مثال ۱۰۵: در مورد $\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x}+1}{\sqrt{x^2+2x}-1}$ چه می‌توان گفت؟ (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) برابر با صفر است. ۲) برابر با یک است. ۳) برابر با $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ است ۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** ابتدا از ضریب x^2 در داخل هر یک از رادیکال‌های صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم، لذا داریم:
$$C=\lim_{\frac{1}{x}\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x}+1}{\sqrt{x^2+2x}-1}=\lim_{\frac{1}{x}\to 1}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}-1}=\lim_{\frac{1}{x}\to 1}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

حالا با تغییر متغیر $y=\frac{1}{x}$ خواهیم داشت $y\to 1$، بنابراین داریم:
$$C=\lim_{y\to 1}\frac{|\frac{1}{y}|\sqrt{1+2y}+1}{|\frac{1}{y}|\sqrt{1+2y}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

مثال ۱۰۶: اگر $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x})^x=4$ باشد، a کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) $2e$ ۲) $Ln\sqrt{2}$ ۳) $2Ln2$ ۴) $Ln2$

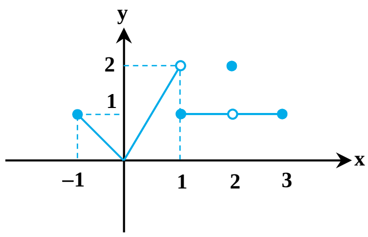
☑ **پاسخ : گزینه «۳»**
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x+a}{x})^x=1^\infty \text{ مبهم}$$

حالت مبهم 1^∞ ایجاد شده است که به طریق زیر رفع ابهام کرده و جواب حد را محاسبه می‌کنیم:
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x})^x\sim e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x}-1)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{ax}{x})}=e^a \qquad (1)$$

طبق فرض صورت سؤال داریم:
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x})^x=4 \qquad (2)$$
$$\xrightarrow{(2),(1)}e^a=4\ \Rightarrow a=Ln4\ \Rightarrow a=2Ln2$$

درسنامه۳: پیوستگی

مثال۱: با توجه به شکل مقابل که نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

۳) مقدار تابع در $x=2$ برابر با مجموع حد چپ و راست نیست.

۴) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حد راست و چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ با توجه به نمودار برابر با ۱ می‌باشد و **مقدار تابع** در این نقطه برابر ۲ است، پس عبارت داده شده در گزینه‌ی (۳) صحیح نیست.

بررسی گزینه (۱): حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=-1$ و همچنین مقدار تابع در این نقطه برابر ۱ می‌باشد.

بررسی گزینه (۲): حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$ برابر ۲ می‌باشد.

بررسی گزینه (۴): حد راست تابع در نقطه $x=1$ برابر ۱ می‌باشد.

مثال۲: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi x}{4x^2-1} & ; x\neq\pm\dfrac{1}{2}\\ a & ; x=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}$ **بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟**

۱) صفر ۲) $-\dfrac{\pi}{4}$ ۳) $\dfrac{\pi}{4}$ ۴) هیچ مقدار a

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» فقط نقاط مرزی $x=\pm\dfrac{1}{2}$ (یعنی ریشه‌های مخرج کسر) می‌توانند جزو نقاط ناپیوستگی باشند، ابتدا پیوستگی در نقطه $x=\dfrac{1}{2}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\pi x}{4x^2-1}\right)\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-\pi\sin\pi x}{8x}=-\frac{\pi}{4}$$

عدد به‌دست آمده باید با مقدار تابع یعنی a برابر باشد، پس $a=-\dfrac{\pi}{4}$ است. دقت کنید حد چپ و حد راست در نقطه $x=\dfrac{1}{2}$ با توجه به ضابطه تابع هیچ فرقی با هم ندارند. حال پیوستگی در نقطه $x=-\dfrac{1}{2}$ را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})} f(x)=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})}\frac{\cos\pi x}{4x^2-1}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to(-\frac{1}{2})}\frac{-\pi\sin\pi x}{8x}=-\frac{\pi}{4}$$

پس در این حالت نیز اگر $a=-\dfrac{\pi}{4}$ باشد، تابع پیوسته می‌شود.

مثال۳: تابع f به معادله $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\cos 2x}} & ; x\neq 0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & ; x=0\end{cases}$ **در $x=0$ از نظر پیوستگی به چه صورتی است؟**

۱) پیوسته است. ۲) فقط پیوستگی راست دارد.

۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) نه از راست پیوسته است و نه از چپ

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» باید حد چپ و حد راست را با مقدار تابع مقایسه کنیم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\cos 2x}}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{|x|\sqrt{2}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

با توجه به حدهای به‌دست آمده چون فقط حد راست با مقدار تابع برابر است، پس تابع فقط پیوستگی راست در $x=0$ دارد.

مثال۴: اگر g یک تابع پیوسته بر $[-1,1]$ باشد، در مورد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 g(x)}{\sin x}$ **کدام گزینه صحیح است؟**

۱) موجود نیست. ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)}{\sin x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0} xg(x)=0\times\text{کراندار}=0$$

مثال ۵: کدام‌یک از توابع زیر در نقطه $x_\circ = \circ$ دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی می‌باشد؟

۱) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ۲) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ ۴) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$

پاسخ : گزینه «۲»

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow$ رفع نشدنی

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow$ رفع شدنی

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\Rightarrow$ رفع نشدنی

۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\Rightarrow$ رفع نشدنی

به عنوان مثال‌هایی که ناپیوستگی رفع نشدنی دارد، می‌توان به تابع دیریکله یعنی $f(x)=\begin{cases}1\ ;\ x\in\mathbb{Q}\\ 0\ ;\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ اشاره کرد، چون فاقد حد و در نتیجه ناپیوسته است.

مثال ۶: تابع $y=\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{4}\right]$ در نقاطی به طول‌های $x=2k+1$ که در آن $k\in\mathbb{N}$ چه وضعی دارد ؟

۱) پیوسته است. ۲) معین و ناپیوسته است. ۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) فقط پیوستگی راست دارد.

پاسخ : گزینه «۱» در نقاطی به طول $x=2k+1$ داخل براکت‌ها عددی غیرصحیح می‌شود، لذا تابع در این نقاط پیوسته است.

مثال ۷: تابع $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$ بر بازه $[2,10]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ : گزینه «۲» چون $\frac{1}{2}>0$ لذا تابع در نقاط ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ که به ازای آنها $\frac{x}{2}$ عددی صحیح می‌شود فقط پیوستگی راست دارد (تابع ناپیوسته می‌باشد)، اما چون در نقطه $x=2$ که نقطه‌ی ابتدایی بازه می باشد، تابع پیوستگی راست دارد، طبق مطالب گفته شده، این نقطه جزء نقاط پیوستگی محسوب می‌شود.

مثال ۸: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\operatorname{sgn}\lfloor |x| \rfloor$ کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{1\}$ ۴) $\{-1,1\}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا بهتر است تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x)=\operatorname{sgn}\lfloor |x| \rfloor=\begin{cases}1 & ;\ |x|\geq 1\\ 0 & ;\ |x|<1\end{cases}$$

واضح است، کاندیداهای نقاط ناپیوستگی $x=1$ و $x=-1$ هستند.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1 & \text{از ضابطه اول تابع استفاده کردیم:}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0 & \text{از ضابطه دوم تابع استفاده کردیم:}\end{cases}\Rightarrow$ تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-1)^+}f(x)=0 & \text{از ضابطه دوم تابع استفاده کردیم:}\\ \lim\limits_{x\to (-1)^-}f(x)=1 & \text{از ضابطه اول تابع استفاده کردیم:}\end{cases}\Rightarrow$ تابع در $x=-1$ ناپیوسته است.

مثال ۹: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2\ ;\ x \text{ گنگ}\\ 2x\ ;\ x \text{ گویا}\end{cases}$ در کدام نقطه پیوسته است؟

۱) ۰ و ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱»
$x^2=2x\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=2$

مثال ۱۰: اگر تابع $f(x)$ در تساوی $f(\frac{x+y}{۱+xy})=f(x)+f(y)$ صدق کند و $f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}$ آن‌گاه مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $Ln\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}Ln۷$ ۳) $Ln\frac{۷}{۳}$ ۴) $Ln۳$

پاسخ: گزینه «۱» طبق مطالب گفته شده، تابعی که در معادله‌ی تابعی داده شده صدق می‌کند، ضابطه‌ای به این صورت دارد: $f(x)=cLn\frac{۱+x}{۱-x}$

که $c\in\mathbb{R}$ عددی حقیقی است. طبق صورت سؤال $f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}$ بنابراین داریم:

$$f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}\Rightarrow cLn(\frac{۱+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۴}})=Ln\sqrt{۷}\Rightarrow cLn(\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۱}{۴}})=\frac{۱}{۲}Ln۷\Rightarrow cLn۷=\frac{۱}{۲}Ln۷\Rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+x}{۱-x}$ است. حالا $f(\frac{۱}{۲})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۲}Ln(۳)=Ln\sqrt{۳}$$

مثال ۱۱: معادله $x۲^x=۱$ در بازه $[\frac{۱}{۴},۱]$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد. ۲) حداقل یک ریشه دارد. ۳) حداقل دو ریشه دارد. ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$$f(x)=x.۲^x-۱\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{۱}{۴})\simeq-۲/۸۱\\ f(۱)=۱\end{cases}\Rightarrow f(\frac{۱}{۴})f(۱)<۰$$

مثال ۱۲: تابع $y=x-\cos x$ در کدام بازه ریشه دارد؟

۱) $[۰,\frac{\pi}{۶}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴}]$ ۳) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳}]$ ۴) $[\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۲}]$

پاسخ: گزینه «۲» چون $f(\frac{\pi}{۴})\simeq۰/۰۸$ و $f(\frac{\pi}{۶})\simeq-۰/۳$، پس تابع f در بازه $[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۴}]$ حداقل یک ریشه دارد.

مثال ۱۳: تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=e^x+x-۲$ در بازه‌ی $[۱,۳]$ کدام است؟

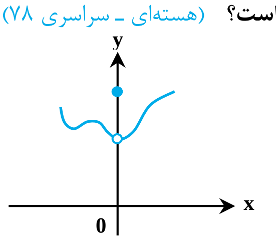
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم که هر چه مقدار x بیشتر باشد، مقدار e^x و $x-۲$ هم بیشتر است. در واقع توابع $x-۲$ و e^x هر دو صعودی هستند؛ به همین خاطر $f(x)$ که جمع دو تابع صعودی است، نیز تابعی صعودی است. پیوسته بودن $f(x)$ هم واضح است. به مقدار $f(x)$ در دو سر بازه دقت کنیم:

$$f(۱)=e+۱-۲=e-۱>۰\ ,\ f(۳)=e^۳+۳-۲=e^۳+۱>۰$$

پس $f(۱)$ و $f(۳)$ هم علامت هستند، در نتیجه $f(x)$ در این بازه هیچ ریشه‌ای ندارد.

مثال ۱۴: نمودار تابع f در نزدیکی صفر به‌صورت شکل مقابل است. کدام گزینه در مورد حد این تابع در صفر صحیح است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)



۱) $\lim_{x\to۰^+}f(x)$ و $\lim_{x\to۰^-}f(x)$ موجود نیستند.

۲) $\lim_{x\to۰^+}f(x)\neq\lim_{x\to۰^-}f(x)\neq f(۰)$

۳) حد تابع در صفر موجود نیست.

۴) حد تابع در صفر موجود است.

پاسخ: **گزینه «۴»** با توجه به شکل ملاحظه می‌کنید که تابع f هرچند در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته نیست اما بازه‌ی $(۰,+\varepsilon)$ جزء دامنه‌ی تابع بوده و مقدار تابع در این بازه وجود دارد؛ لذا در $x=۰$ دارای حد راست می‌باشد، همچنین بازه‌ی $(-\varepsilon,۰)$ نیز جزء دامنه‌ی تابع بوده و تابع در این بازه هم وجود دارد لذا تابع در $x=۰$ دارای حد چپ نیز می‌باشد. اما با توجه به شکل به راحتی ملاحظه می‌شود که در بازه‌ی $(۰,+\varepsilon)$ و $(-\varepsilon,۰)$ تابع به مقدار نقطه می‌گراید، یعنی حد چپ و راست با هم برابرند پس تابع در $x=۰$ دارای حد می‌باشد.

مثال ۱۵: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x & ; x\in\mathbb{Q}\\ x-2 & ; x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ مفروض است. این تابع در .... است. (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲- پیوسته ۲) ۲ پیوسته ۳) $-\frac{1}{2}$ پیوسته ۴) همه نقاط ناپیوسته

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم توابع به‌صورت $y=\begin{cases}f(x) ; & \text{گویا } x\\ g(x) ; & \text{گنگ } x\end{cases}$ فقط در نقاطی می‌توانند پیوسته باشند که $f(x)=g(x)$ باشد، بنابراین در این سؤال برای پیوستگی لازم است $2x=x-2$ باشد که از آن $x=-2$ نتیجه می‌شود.

مثال ۱۶: به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» برای این‌که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد کافی است در نقطه‌ی مذکور دارای حد بوده و مقدار حد با مقدار تابع برابر باشد، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x\times\cos\frac{1}{x}=0\times \text{تابع کراندار}=0\\ f(0)=a\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow 0=a$$

مثال ۱۷: اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $f(x)-x=0$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.
۲) $f(x)-x=0$ ریشه‌ای در $[a,b]$ ندارد.
۳) $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.
۴) $f(x)=0$ ریشه‌ای در $[a,b]$ ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» طبق فرض داریم:

$$f(a)\in[a,b]\Rightarrow a\le f(a)\le b\Rightarrow f(a)-a\ge 0$$
$$f(b)\in[a,b]\Rightarrow a\le f(b)\le b\Rightarrow f(b)-b\le 0$$

حال تابع $g(x)=f(x)-x$ را در نظر بگیرید، چون $g(a)g(b)\le 0$ است، بنابراین طبق نتیجه قضیه مقدار میانی تابع g حداقل یک ریشه در $[a,b]$ دارد.

مثال ۱۸: تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x)=\left[\frac{x}{3}\right]-x^2+2x$ درفاصله $[0,5]$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو طریق جواب می‌دهیم:

روش اول: تابع $f(x)$ را به‌صورت روبرو می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & ; 0\le x<3\\ 1-x^2+2x & ; 3\le x\le 5\end{cases}$$

چون عبارت $-x^2+2x$ یک چندجمله‌ای بوده، پس در تمامی نقاط $0\le x<3$ پیوسته است و به همین دلیل هم عبارت $1-x^2+3x$ در تمامی نقاط پیوسته است پس برای تعیین پیوستگی تابع f کافی است فقط نقطهٔ $x=3$ را مورد بررسی قرار دهیم چرا که مرز بین دو بازه می‌باشد و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-x^2+2x)=-9+6=-3\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(1-x^2+2x)=1-9+6=-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

تابع f در نقطهٔ $x=3$ حد ندارد، لذا پیوسته نمی‌باشد.

روش دوم: چون تابع f از جمع دو تابع جزء صحیح و چند جمله‌ای تشکیل شده و می‌دانیم توابع چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و توابع جزء صحیح در نقاط صحیح پیوسته نمی‌باشد؛ لذا کافی است نقاطی که به ازای آن $\frac{x}{3}\in\mathbb{Z}$ است را مورد بررسی قرار دهیم.

$$\Rightarrow 0\le x\le 5\ ,\ \frac{x}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=0\ ,\ x=3$$

که با بررسی ملاحظه می‌شود تابع در $x=0$ پیوستگی از راست دارد و در $x=3$ ناپیوسته است.

مثال ۱۹: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\cos x & ; x\neq 0\\ \alpha & ; x=0\end{cases}$ مفروض است، کدام‌یک از گزینه‌ها صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) به ازای هر مقدار α، f در صفر ناپیوسته است.
۲) به ازای $\alpha=0$، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.
۳) به ازای $\alpha=1$، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.
۴) به ازای $\alpha=-1$، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۱» پیوستگی تابع f را در $x=0$ بررسی می‌کنیم؛ ولی در ابتدا $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x}\cos x & ; \quad x>0\\ \dfrac{-x}{x}\cos x & ; \quad x<0\\ \alpha & ; \quad x=0\end{cases}=\begin{cases}\cos x & ; x>0\\ -\cos x & ; x<0\\ \alpha & ; x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\cos x)=-1\end{cases}\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد

چون تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد، لذا برای پیوستگی مقدار $f(0)=\alpha$ در اینجا هر چه باشد باز در پیوسته بودن f تأثیری ندارد و f همواره ناپیوسته است.

مثال ۲۰: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}1 & ; x<0\\ \sqrt{1-x^2} & ; 0\le x\le 1\\ 2x-2 & ; x>1\end{cases}$ از نظر پیوستگی کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) در هر نقطه به جز در $x=1$ پیوسته است.
۲) پیوسته است.
۳) در هر نقطه به جز در $x=0$ پیوسته است.
۴) در هر نقطه به جز $x=0$ و $x=1$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۲» پیوستگی تابع f را در نقاط روی مرز بررسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1-x^2}=1\\ f(0)=\sqrt{1-0}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-2)=0\\ f(1)=\sqrt{1-1}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow$$ تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

پس ملاحظه می‌شود که تابع $f(x)$ در R پیوسته است.

مثال ۲۱: معادله $2^x=3x$ در کدام بازه جواب دارد؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(0,1)$

پاسخ: گزینه «۴» قرار می‌دهیم $f(x)=2^x-3x$. بنابر قضیه مقدار میانی، معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ای که $f(a)f(b)<0$، حداقل یک جواب دارد و چون $f(0)f(1)<0$ می‌شود، بنابراین f در بازه $(0,1)$ حداقل یک جواب دارد.

مثال ۲۲: تعداد نقاط گسستگی تابع $f(x)=\lfloor 3x\rfloor+x^2-1$ در فاصله $[-1$ و $1]$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» تابع $\lfloor x\rfloor$ در نقاط صحیح فقط پیوستگی از راست دارد ولی در کل، در نقاط صحیح ناپیوسته است.

برای حل لازم است نقاطی را به‌دست آوریم که تابع درون جزء صحیح، عدد صحیح باشد، پس داریم:
$$\begin{cases}3x\in Z\\ -1\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow x=-1,\frac{-2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$$

اما چون $-1\le x\le 1$ است و تابع $\lfloor 3x\rfloor$ در $x=-1$ پیوستگی از راست دارد و برای این نقطه به علت بازه‌ی داده شده پیوستگی چپ بررسی نمی‌شود لذا نقاط ناپیوستگی به‌صورت مقابل خواهند بود: $x=-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$

پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-1,1]$ در ۶ نقطه ناپیوسته است.

مثال ۲۳: اگر f تابعی بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}5x & ; \text{گویا } x\\ x^2+6 & ; \text{گنگ } x\end{cases}$ باشد، این تابع از نظر پیوستگی در نقاط $x=1$ ، $x=2$ چگونه است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) در هر دو نقطه پیوسته است.
۲) در هردو نقطه ناپیوسته است.
۳) در $x=1$ پیوسته و در $x=2$ ناپیوسته است.
۴) در $x=1$ ناپیوسته و در $x=2$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۴»

یادآوری: توابعی به‌صورت $f(x)=\begin{cases}h(x) & x\in\mathbb{Q}\\ g(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ، ($\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا می‌باشد) فقط به ازای x هایی پیوسته است که داشته باشیم $h(x)=g(x)$ و به ازای بقیه‌ی x ها ناپیوسته است.

تابع $f(x)$ فقط در نقاطی پیوسته است که دو ضابطه‌ی تابع با هم برابر باشند، یعنی داریم:

$$5x=x^2+6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2\ ,\ x=3$$

پس تابع در $x=2$ پیوسته است و در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد.

مثال ۲۴: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{x-1}} & ; x\neq 1\\ A & ; x=1\end{cases}$ مفروض است. A چه مقداری باشد تا تابع f پیوسته گردد؟

(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) e

پاسخ: گزینه «۴» برای آن‌که تابع f پیوسته باشد، باید پیوستگی تابع f را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x-1}}=e^1=e\\ f(1)=A\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow A=e$$

مثال ۲۵: تابع f با ضابطه $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1}$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{1}{n}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۲» اگر $x=0$ باشد، تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل می‌شود:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{1}=0 \Rightarrow f(0)=0$$

و اگر $x\neq 0$ باشد، داریم $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1}\sim\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx}=1$ پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ 1 & ; x\neq 0\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ ناپیوسته است.

مثال ۲۶: فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x^2-5$ باشند، ناحیه‌ای که $f(g(x))$ در آن پیوسته باشد، کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$
۲) $(-\infty,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$
۳) $(-\infty,-1)\cup(-1,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$
۴) $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا تابع $fog(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{x+1}\\ g(x)=x^2-5\end{cases} \Rightarrow fog(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{1}{x^2-5+1}=\frac{1}{x^2-4}$$

$$D_{fog}=R-\{x\,|\,x^2-4=0\}=R-\{-2,2\}$$

پس تابع $fog(x)$ به جز نقاط $x=2$ و $x=-2$ در بقیه نقاط تعریف شده و دارای حد متناهی می‌باشد.

مثال ۲۷: کدام تابع در $x=0$ پیوسته است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\sin x}{x}$

۲) $\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$

پاسخ: گزینه «۳» برا ی حل این سوال تک‌تک گزینه‌ها را باید مورد بررسی قرار داد.

در گزینه اول چون $x=0$ جزء دامنه تابع نمی‌باشد لذا تابع نمی‌تواند در این نقطه پیوسته باشد. (لازم به ذکر است تابع $\frac{\sin x}{x}$ هنگامی که x به صفر میل مـی‌کنـد دارای حدی برابر یک می‌باشد.)

در گزینه دوم چون ($0=$ تابع کراندار $\times 0 = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$) مقدار حد با مقدار تابع $f(0)=1$ برابر نیست پس تابع در این گزینه هم در $x=0$ پیوسته نیست.

در گزینه سوم چون ($0=$ تابع کراندار $\times 0 = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$) و $f(0)=0$ می‌باشد، لذا تابع در $x=0$ پیوسته بوده و این گزینه صحیح می‌باشد.

در گزینه چهارم هم به علت این‌که ($0=$ تابع کراندار $\times 0 = \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$) می‌باشد و $f(0)=1$ است، لذا مقدار حد بـا مقـدار تـابع برابـر نیسـت و تـابع در $x=0$ پیوسته نمی‌باشد.

مثال ۲۸: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{\lfloor 3x-5\rfloor}$ در فاصلهٔ $0\le x\le 1$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) هیچ ۴) بی‌نهایت

پاسخ: گزینه «۲» تابع f در نقاطی ناپیوسته است که اولاً مخرج را صفر کند و ثانیاً به دلیل وجود تابع جزء صحیح در مخرج، عبـارت درون جـزء صـحیح، عدد صحیح باشد، پس داریم:

$$\lfloor 3x-5\rfloor=0\Rightarrow 0\le 3x-5<1\Rightarrow 5\le 3x<6\Rightarrow \frac{5}{3}\le x<2$$

ملاحظه می‌شود که چون بازه داده شده $[0,1]$ می‌باشد، لذا در این بازه هیچگاه مخرج صفر نمی‌شود.

$$3x-5\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$$

چون در تابع جزء صحیح، در نقاط اعداد صحیح از سمت راست پیوسته است لذا در تابع فوق $f(x)$ در $x=0$ از سمت راست پیوسته است، به همین علت این نقطه جزء جواب نمی‌باشد و نقاط ناپیوستگی عبارتند از: $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$.

مثال ۲۹: اگر $f(x)=\begin{cases} 1+\frac{\sin x}{x} & ; x<0 \\ -1+\frac{\text{tg}x}{x} & ; x>0 \end{cases}$ و $f(0)=a$ به ازای کدام مقدار a تابع f در $x=0$ پیوسته است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

پاسخ: گزینه «۳» حد چپ و راست را به‌دست می‌آوریم؛ اگر با هم برابر بودند (یعنی تابع حد داشت) مساوی $f(0)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+\frac{\sin x}{x}) \xlongequal[x\to 0]{\sin x\sim x} \lim_{x\to 0^-}(1+\frac{x}{x})=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-1+\frac{\text{tg}x}{x}) \xlongequal[x\to 0]{\text{tg}x\sim x} \lim_{x\to 0^+}(-1+\frac{x}{x})=0 \end{cases}$$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد و بالطبع پیوسته هم نیست.

مثال ۳۰: به ازای کدام مقدار C تابع $f(x)=\begin{cases} \text{tg}x-\sec x & ; x\neq\frac{\pi}{2} \\ C & ; x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ پیوسته است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) هر چه باشد C

پاسخ: گزینه «۱»

$$\text{tg}x-\sec x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

تابع فوق در بازه $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ در تمام نقاط بجز $x\neq\frac{\pi}{2}$ پیوسته است و لذا برای این‌که تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید حد تـابع در $\frac{\pi}{2}$ برابر مقـدار تـابع در $\frac{\pi}{2}$ باشد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$$

پس اگر $c=0$ باشد آن‌گاه حد با مقدار تابع برابر خواهد بود.

مثال ۳۱ : تابع $f:R\to R$ و با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x \text{ گویا}\\ -2x+3 & ; \quad x \text{ گنگ}\end{cases}$ در کدام نقاط پیوسته است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x=1\,,\,x=0$ ۲) $x=-3\,,\,x=0$ ۳) در اعداد گویا ۴) $x=-3\,,\,x=1$

پاسخ: گزینه «۴» برای پیوستگی چنین توابعی لازم است دو ضابطه با هم برابر باشند:

$$x^2=-2x+3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1\,,\,-3$$

مثال ۳۲ : تابع با ضابطه $f(x)=x-\lfloor x^2\rfloor$ روی بازه $[0,2]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» در بازه‌ی $(0,2)$ تابع f در نقاطی که عبارت x^2 صحیح شود، می‌تواند ناپیوسته باشد، بنابراین نقاط $x=1$، $x=\sqrt{2}$ و $x=\sqrt{3}$ کاندیداهای نقاط ناپیوستگی هستند. اما چون عبارت به صورت $x-\mathrm{Ln}x^2-1$ است باید دقیق‌تر بررسی کنیم:

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1-1=0\ ,\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1-0=1\Rightarrow$ تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^{+1}}f(x)=2-2=0\ ,\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}f(x)=2-1=1\Rightarrow$ تابع در $x=\sqrt{2}$ نیز ناپیوسته است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود تابع در $x=\sqrt{3}$ نیز ناپیوسته است، اما نقاط $x=0$ و $x=2$ که دو سر بازه هستند، نیز باید بررسی شود، اگر f در $x=0$ پیوستگی راست داشته باشد و در $x=2$ پیوستگی چپ، می‌توان گفت در این دو نقطه همه تابع پیوسته است.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0-0=0\ ,\ f(0)=0$$

پس تابع در $x=0$ از راست پیوسته است.

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=2-\lfloor 4^-\rfloor=2-3=-1\ ,\ f(2)=2-\lfloor 4\rfloor=-2$$

پس تابع در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد، پس تابع در مجموع در چهار نقطه $x=1$، $x=\sqrt{2}$، $x=\sqrt{3}$ و $x=\sqrt{2}$ ناپیوسته است.

مثال ۳۳ : اگر $(x\neq2)f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$ تابع f را در $x=1$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $f(1)=-1$ ۲) $f(1)=0$ ۳) $f(1)=1$ ۴) $f(1)=e$

پاسخ: گزینه «۴» برای این‌که تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد باید مقدار حد با مقدار تابع برابر باشد، پس لازم است حد تابع f را در $x=1$ به‌دست آوریم. چون حد تابع f در $x=1$ از نوع 1^∞ مبهم است لذا با استفاده از مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=1^\infty\sim e^{\lim\limits_{x\to1}(x-1)\frac{1}{x-1}}=e^1=e$$

پس باید $f(1)$ هم برابر e باشد تا تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته باشد.

مثال ۳۴ : اگر $(x\neq-2)f(x)=(\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}$، تابع f را در $x=2$ چه مقداری تعریف کنیم تا در این نقطه پیوسته باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) e^2 ۲) e ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e^{-1}

پاسخ: گزینه «۳» کافی است حد تابع f را در نقطه $x=2$ به‌دست بیاوریم و برابر $f(2)$ قرار دهیم، چون حد تابع f در $x=2$ از نوع 1^∞ مبهم می‌باشد، لذا با توجه به مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}=1^\infty\sim e^{\lim\limits_{x\to2}(\frac{x}{2}-1)\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to2}(\frac{x-2}{2})\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f(2)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

مثال ۳۵ : تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{\mathrm{Ln}|x|}$ بر $\mathbb{R}$ از نظر پیوستگی کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) در یک نقطه ناپیوسته ۲) در دو نقطه ناپیوسته ۳) در سه نقطه ناپیوسته ۴) همواره پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{\mathrm{Ln}|x|}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|x|>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}\\ \mathrm{Ln}|x|\neq0\Rightarrow|x|\neq1\Rightarrow x\neq\pm1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=x\in\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$$

تابع f در $\mathbb{R}$ بجز در نقاطی که عضو دامنه نیستند (یعنی ±1 و $x=0$) پیوسته است.

مثال ۳۶: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4} & ; x\neq 0\\ k & ; x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار k در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) 0　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) 1

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا حد f را در $x=0$ به‌دست می‌آوریم. برای محاسبه حد، بسط مک‌لورن e^{-x^2} را تا ۳ جمله می‌نویسیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+\frac{x^4}{2}-1+x^2}{x^4}=\frac{1}{2}$$

از طرفی $f(0)=k$ است. بنابراین برای پیوستگی f در $x=0$، بایستی $k=\frac{1}{2}$ باشد.

مثال ۳۷: اگر تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x} & ; x\neq 0,1\\ a & ; x=0,1\end{cases}$ در بازه $[0,1]$ پیوسته باشد، a کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) صفر　　۲) $-\pi$　　۳) π　　۴) نشدنی

پاسخ: گزینه «۲» برای پیوستگی f در بازهٔ $[0,1]$ لازم است روابط $\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ و $\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$ برقرار باشند.

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\pi x}{x(x-1)}=-\pi\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-x}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\pi\cos\pi x}{2x-1}=-\pi\end{cases}\Rightarrow a=-\pi$$

مثال ۳۸: تابع f را روی $[0,1]$ با ضابطه $f(x)=x$ هرگاه x گویا باشد و $f(x)=1-x$، هرگاه x اصم باشد تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $g(x)=f(f(x))$ کدام گزاره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) f و g تنها در نقطهٔ $\frac{1}{2}$ پیوسته‌اند.　　۲) f و g فقط در نقاط گویا پیوسته هستند.

۳) g در هر نقطه از $[0,1]$ و f در نقاط گویا پیوسته است.　　۴) g در هر نقطه از $[0,1]$ و f تنها در $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

پاسخ: گزینه «۴» به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $g(x)=x$، پس g همواره پیوسته است و f فقط در نقاطی پیوسته است که $x=1-x$ و لذا $x=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۳۹: به ازای چه مقادیری از a در گزینه‌های زیر تابع $f(x)$ در صفر پیوسته است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$$

۱) $e^{-\frac{1}{6}}$　　۲) $e^{-\frac{1}{2}}$　　۳) $e^{\frac{1}{6}}$　　۴) $e^{\frac{1}{2}}$

پاسخ: گزینه «۱» شرط این‌که تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشد این است که $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$ باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty\sim e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}=a$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

مثال ۴۰: اگر $f(x)=x^{(\frac{x}{(x^2-1)})},(x\neq \pm 1)$، مقدار تابع f را در $x=1$ چه مقداری انتخاب کنیم تا در این نقطه پیوسته شود؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sqrt{e}$　　۲) e　　۳) $1+\frac{1}{e}$　　۴) $\sqrt{e}+1$

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** برای این که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد، باید مقدار تابع در $x=1$ با مقدار حد در $x=1$ برابر باشد. برای به‌دست آوردن حد تابع در $x=1$، چون از نوع حد 1^∞ مبهم است، از روابط مقابل استفاده می‌شود: $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$

پس داریم: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x^2-1}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

مثال ۴۱: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط‌های $f(1)=3$ و $f(x+y)=f(x)+f(y),x,y\in\mathbb{R}$، صدق می‌کند. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

☑ **پاسخ: گزینه «۱»**

توضیح: این مسأله بدون شرط پیوستگی، دارای جواب منحصر به فردی نیست. این سؤال بر مبنای یک تمرین معروف، طرح شده است که می‌گوید اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(x+y)=f(x)+f(y)$، آن‌گاه ضابطه‌ی آن به‌صورت $f(x)=ax$ است. اگر شرط پیوستگی را نداشته باشیم؛ لزومی ندارد $f(x)=ax$ باشد، ولی ما با این فرض که f پیوسته باشد، مسأله را حل می‌کنیم:

روش اول: با جایگذاری $x=y=0$، در رابطه داده شده نتیجه می‌شود: $f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

چون طبق فرض f در $x=0$ پیوسته است، لذا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ نیز برابر صفر است.

روش دوم: تابع مورد نظر را می‌توان تابع $f(x)=3x$ در نظر گرفت در این صورت داریم: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

مثال ۴۲: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ a & ; x=0\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر　　۲) $\varnothing$　　۳) ۱　　۴) $\frac{1}{e}$

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** تنها نقطه‌ای که باید پیوستگی آن مورد بررسی قرار گیرد نقطه $x=0$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=0\xrightarrow{\text{تعریف پیوستگی}}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow 0=a$$

درسنامه۴: مجانب توابع و انواع آن

مثال۱: مقادیر c، b و a در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+6}$، کدام است؟ خطوط $x=2$ و $y=3$ مجانب‌های آن بوده و نمودار f از نقطه $P(1,3)$ می‌گذرد.

۱) $a=-9\,,\,b=18\,,\,c=-3$
۲) $a=-3\,,\,b=9\,,\,c=-6$
۳) $a=18\,,\,b=-9\,,\,c=3$
۴) $a=9\,,\,b=-18\,,\,c=6$

پاسخ: گزینه «۱»

$$cx+6=0 \xrightarrow{x=2} 2c+6=0 \Rightarrow c=-3$$

$$y=3 \xrightarrow{\text{مجانب افقی}} y=\frac{a}{c} \Rightarrow 3=\frac{a}{c} \Rightarrow a=3\times -3=-9$$

$$P(1,3)\in f \Rightarrow 3=\frac{-9(1)+b}{-3(1)+6} \Rightarrow b=18$$

مثال۲: خط $x=1$ مجانب قائم نمودار $y=\frac{(m+1)x-2}{x+m-3}$ بوده، معادله مجانب افقی آن به چه صورت است؟

۱) $y=3$
۲) $y=4$
۳) $y=2$
۴) $y=1$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} x+m-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3-m \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow 3-m=1 \Rightarrow m=2 \\ \lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(m+1)x-2}{x+m-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-1}=3 \end{cases}$$

مثال۳: معادله مجانب‌های منحنی $y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$ کدام است؟

۱) $y=2x+3\ ,\ x=0$
۲) $y=2x+1\ ,\ x=0$
۳) $y=2\ ,\ y=2x\ ,\ x=0$
۴) $y=2\ ,\ y=2x+3\ ,\ x=0$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مجانب مایل تابع را با تقسیم صورت بر مخرج به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+x^3+1 & x^3 \\ \cline{2-2} -2x^4 & 2x+1 \\ \hline x^3+1 & \\ -x^3 & \\ \hline R=1 & \end{array}$$

خارج قسمت این تقسیم یعنی خط $y=2x+1$ مجانب مایل است. ریشه‌ی مخرج $x=0$ است و در این نقطه داریم $\lim\limits_{x\to 0} y=\pm\infty$، پس خط $x=0$ مجانب قائم است.

مثال۴: مجموع فواصل نقطه $M(-1,3)$ از خطوط مجانب منحنی به معادله $y=\frac{xe^x}{1+e^x}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}+1$
۲) $2(\sqrt{2}+1)$
۳) $(\sqrt{2}+1)^2$
۴) $(\sqrt{2}-1)^2$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مجانب‌های منحنی داده شده را به‌دست می‌آوریم:

در مخرج کسر داریم $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x)=1+e^{-\infty}=1+0=1$ و در صورت کسر داریم $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=-\infty\times e^{-\infty}=-\infty\times 0=0$. البته علت صفر شدن صورت آن است که $e^{-\infty}$ را می‌توان به‌صورت $\frac{1}{e^{\infty}}$ نوشت و سرعت رشد توابع نمایی از چندجمله‌ای‌ها بیشتر است. به این ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=\frac{0}{1+0}=0 \Rightarrow$$ خط $y=0$ مجانب افقی است.

حالا فرض کنیم $y=mx+n$ مجانب مایل منحنی باشد:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{x(1+e^x)}=1\ ,\ n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^x}{1+e^x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+e^x}=0 \Rightarrow$$ خط $y=x$ مجانب مایل است.

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(-1,3)$ از خط $y=0$ (محور xها) به وضوح برابر با ۳ است. فاصله‌ی این نقطه از خط $y=x$ برابر است با: $\frac{|y_0-x_0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

پس مجموع این دو فاصله برابر با $3+2\sqrt{2}$ یا به عبارت دیگر برابر با $(\sqrt{2}+1)^2$ است.

یادآوری: فاصله‌ی $M(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر با $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

مثال ۵: تابع $y = x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» **روش اول:** اولاً دقت کنید x فقط می‌تواند به سمت $+\infty$ میل کند، چون x زیر رادیکال با فرجه زوج است، برای بررسی مجانب افقی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty\times\cos(\frac{1}{+\infty}) = +\infty\times\cos(0) = +\infty\times 1 = +\infty$$

چون حاصل حد برابر عدد حقیقی نشده است، پس این تابع مجانب افقی ندارد. حالا سراغ بررسی مجانب قائم می‌رویم؛ می‌بینیم که $x = 0$ تنها ریشه مخرج است که می‌تواند کاندیدای مجانب قائم شود، اما به شرط این‌که تابع به ازای این مقدار به سمت بی‌نهایت برود. می‌بینیم که این طور نیست، پس $x = 0$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد:

$$\lim_{x\to 0} y = 0\times\cos\frac{1}{0} = 0\times\cos\infty = 0\times(\text{مقدار کراندار}) = 0$$

اما تابع مجانب مایل دارد، زیرا داریم:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = \cos(0) = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1) = \lim_{x\to+\infty} x(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}})^2) = -\frac{1}{2}$$

روش دوم: برای یافتن معادله‌ی مجانب مایل، می‌توانیم به جای روش معمول، از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم. وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند، آن‌گاه $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$

بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی $\cos u \sim 1-\frac{u^2}{2}$ استفاده کنیم:

$$y = x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} \sim x(1-\frac{1}{2x}) = x-\frac{1}{2}$$

پس خط $y = x-\frac{1}{2}$ مجانب مایل این تابع است.

مثال ۶: عرض از مبدأ مجانب مایل تابع $y = x(1+\frac{1}{x})^x$ کدام است؟

۱) $-e$ ۲) e ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $-\frac{e}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to\infty$، آن‌گاه $u = \frac{1}{x}$ به سمت صفر میل می‌کند. برای آن که بتوانیم از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم، عبارت داده شده را به صورت $y = xe^{x\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x})}$ می‌نویسیم. اکنون از هم‌ارزی $\mathrm{Ln}(1+u) \sim u-\frac{u^2}{2}$ داریم:

$$y \sim xe^{x[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}]} = xe^{1-\frac{1}{2x}} = x.e^{+1}.e^{-\frac{1}{2x}}$$

اکنون از هم‌ارزی $e^u \sim 1+u$ استفاده می‌کنیم:

$$y \sim ex(1-\frac{1}{2x}) = ex-\frac{e}{2}$$

پس خط $y = ex-\frac{e}{2}$ مجانب مایل است و عرض از مبدأ آن $-\frac{e}{2}$ است.

مثال ۷: مجانب‌های تابع $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$ خط $y = \frac{3}{4}x$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، اندازه پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم وقتی $x\to 1^-$ آن‌گاه $\frac{1-x}{1+x}\to 0^+$ و در واقع $f(1) = \log(0^+) = -\infty$ خواهد شد. همچنین وقتی $x\to(-1)^+$ آن‌گاه $(\frac{1-x}{1+x})\to+\infty$ و در واقع $f(-1) = \log(+\infty) = +\infty$ خواهد شد. پس $x = 1$ و $x = -1$ هر دو مجانب قائم تابع هستند.

تابع مجانب افقی و مایل ندارد (چون اگر $x\to\pm\infty$، آن‌گاه عبارت جلوی لگاریتم مقداری منفی می‌شود). پس تابع همان دو مجانب $x = \pm 1$ را دارد و باید محل برخورد دو نقطه را با خط $y = \frac{3}{4}x$ به‌دست بیاوریم:

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow A(1,\frac{3}{4})$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}(-1) = -\frac{3}{4} \Rightarrow B(-1,-\frac{3}{4})$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2} = \sqrt{[\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})]^2+[1-(-1)]^2} = \sqrt{(\frac{6}{4})^2+2^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

مثال ۸: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}\,\text{Arcsin}\frac{1}{x}$ از نظر خط مجانب کدام وضعیت را دارد؟

۱) فاقد مجانب　　۲) دو خط مایل　　۳) دو خط افقی　　۴) یک خط افقی و یک خط مایل

پاسخ: گزینه «۳» اولاً به ازای هیچ عدد حقیقی برای x، $f(x)$ به سمت $\pm\infty$ نمی‌رود؛ پس تابع مجانب قائم ندارد.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}[\sqrt{1+x^2}\,\text{Arcsin}(\frac{1}{x})]=\infty\times 0$$

دقت کنید اگر $u\to 0$، آن‌گاه $\text{Arcsin}\,u\sim u$. در این تست وقتی $x\to\infty$ آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0$ و لذا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2}.\text{Arcsin}(\frac{1}{x}))=\lim_{x\to\infty}|x|.\frac{1}{x}=\begin{cases}1 & \text{اگر } x\to+\infty\\ -1 & \text{اگر } x\to-\infty\end{cases}$$

پس تابع دو مجانب افقی دارد.

مثال ۹: کلیه مجانب‌های نمودار $xy+y=(x-2)^2$ کدام است؟

۱) $y=x-5$ و $x=-1$　　۲) $y=5-x$ و $x=-1$　　۳) $y=5-x$ و $y=0$ و $x=-1$　　۴) $y=0$ و $x=2$

پاسخ: گزینه «۱» با کمی تغییر در ضابطه تابع داریم:

$$xy+y=(x-2)^2\Rightarrow y=\frac{(x-2)^2}{x+1}=\frac{x^2-4x+4}{x+1}$$

مشخص است $x=-1$ مجانب قائم تابع است و با توجه به این‌که درجه صورت از مخرج دقیقاً به اندازه یک واحد بیشتر است، پس با تقسیم کردن صورت بر مخرج معادله مجانب مایل به‌دست می‌آید.

$$y=\underbrace{x-5}_{\text{معادله مجانب مایل}}+\frac{9}{x+1}$$

مثال ۱۰: فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ در این صورت تعداد مجانب‌های قائم و افقی f^{-1} کدام است؟

۱) یک مجانب افقی و سه مجانب قائم دارد.　　۲) مجانب افقی ندارد ولی سه مجانب قائم دارد.

۳) یک مجانب افقی و دو مجانب قائم دارد.　　۴) ۳ مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

پاسخ: گزینه «۴» چون f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند، پس جای مجانب‌های قائم و افقی آن‌ها عوض می‌شود؛ یعنی مجانب‌های قائم f، همان مجانب‌های افقی f^{-1} و مجانب‌های افقی f، همان مجانب‌های قائم f^{-1} خواهند بود. واضح است که f سه مجانب قائم ($x=1$ و $x=0$ و $x=-1$) و یک مجانب افقی ($y=0$) دارد، پس f^{-1} سه مجانب افقی ($y=1$، $y=0$ و $y=-1$) و یک مجانب قائم ($x=0$) دارد.

مثال ۱۱: معادلات مجانب‌های منحنی $y=x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام‌اند؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $y=2\ ,\ x=\pm1$　　۲) $y=2x\ ,\ y=0\ ,\ x=\pm1$　　۳) $y=2x\ ,\ y=1\ ,\ x=1$　　۴) $y=x\ ,\ y=1\ ,\ x=\pm1$

پاسخ: گزینه «۲» واضح است که $x=\pm1$ مجانب‌های قائم تابع هستند. همچنین توجه کنید که وقتی $x\to\pm\infty$، تابع داده شده به‌صورت زیر در می‌آید:

$$x\to+\infty\ \Rightarrow y=x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=x+\frac{x^2}{|x|}=x+x=2x\ \Rightarrow y=2x\ \text{مجانب مایل}$$

$$x\to-\infty\ \Rightarrow y=x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}=x+\frac{x^2}{|x|}=x-x=0\ \Rightarrow y=0\ \text{مجانب افقی}$$

مثال ۱۲: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1+a\sin x}{b+\cos x}$ در بازه $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ پیوسته و بر خط $x=\frac{\pi}{2}$ دارای مجانب است. اگر $f(\frac{3\pi}{2})=0$، آنگاه $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟ (فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $1-\sqrt{3}$　　۲) $\sqrt{3}$　　۳) $1+\sqrt{3}$　　۴) $2+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۴» اولاً چون خط $x=\frac{\pi}{2}$ مجانب تابع $f(x)$ است، بنابراین مخرج کسر باید به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ برابر با صفر شود، و این یعنی $b+\cos\frac{\pi}{2}=0$ و لذا $b=0$ خواهد بود. حالا باید مقدار a نیز تعیین شود تا ضابطه‌ی دقیق $f(x)$ معلوم شود. برای این منظور از شرط $f(\frac{3\pi}{2})=0$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\frac{3\pi}{2})=0\ \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2})=\frac{1+a\sin(\frac{3\pi}{2})}{\cos(\frac{3\pi}{2})}\ \Rightarrow 1+a(-1)=0\ \Rightarrow a=1$$

حالا که ضابطه‌ی $f(x)$ معلوم شد، به راحتی $f(\frac{\pi}{3})$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{1+\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}$$

مثال ۱۳: خط مجانب منحنی به معادله‌ی $y^3 - 8x^3 + 2x^2 = 0$ خود منحنی را با کدام طول قطع می‌کند؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$y^3 = 8x^3 - 2x^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{8x^3 - 2x^2} \sim 2(x - \frac{2}{24})$$

بنابراین معادله مجانب مایل منحنی $y = 2x - \frac{1}{6}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} y = 2x - \frac{1}{6} \\ y^3 = 8x^3 - 2x^2 \end{cases} \Rightarrow 8x^3 - 2x^2 = (2x - \frac{1}{6})^3 \Rightarrow \frac{1}{6}x - \frac{1}{216} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{36}$$

مثال ۱۴: فاصله نقطه M واقع بر منحنی $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ از خط مجانبی آن $\frac{1}{2}$ است. طول نقطه M کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴» نقطه دلخواه $M = (x, \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$ را روی منحنی y درنظر می‌گیریم. ابتدا مجانب منحنی y را پیدا می‌کنیم. چون مخرج کسر $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ فاقد ریشه می‌باشد، لذا منحنی y فاقد مجانب قائم می‌باشد. اما دارای یک مجانب افقی است زیرا داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \text{مجانب افقی منحنی } y \text{ است } \quad y = 1$$

فاصله نقطه M از خط $y = 1$ به‌صورت مقابل محاسبه می‌شود.

$$d = \frac{\left|\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - 1\right|}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$$

توجه: فاصله نقطه $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ از خط D به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۱۵: اگر $f(x) = Lnx$ و $g(x) = e^x - e^{-x}$ باشند، آن‌گاه نقطه‌ای با کدام مختصات بر روی خط مجانب نمودار تابع gof قرار دارد؟
(کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(1,-1)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(2,2)$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا تابع gof را محاسبه می‌کنیم، سپس مجانب این تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$gof = e^{Lnx} - e^{-Lnx} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

مجانب مایل تابع فوق را به‌صورت مقابل محاسبه می‌کنیم: $y = mx + n$: مجانب مایل

که m و n در رابطه‌ی مجانب مایل طبق تعریف به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = 1, n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} - x = 0$$

با قرار دادن m و n فوق در رابطه‌ی مجانب مایل، مجانب مایل تابع $gof(x)$ به‌دست می‌آید. $y = mx + n \Rightarrow y = x$:مجانب مایل

تنها مختصه‌ای که از بین گزینه‌ها در این تابع صدق می‌کند، مختصه $(2,2)$ می‌باشد.

مدرسان شریف

فصل سوم

« مشتق و کاربرد مشتق »

درسنامه: مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

مثال ۱: فرض کنید به ازای هر $x > 2$، این رابطه برای تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ برقرار باشد: $5x - 10 < f(x) - f(2) < 2x^2 - 3x - 2$. در این صورت مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 5 ۳) 2 ۴) -2

پاسخ: گزینه «۲» نامساوی داده شده در صورت سؤال برای هر $x > 2$ برقرار است. اگر طرفین نامساوی را بر $x - 2$ تقسیم کنیم، جهت نامساوی‌ها عوض نمی‌شود؛ زیرا $x - 2 > 0$ است. با انجام این کار می‌توانیم کسر $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ که تعریف مشتق $f'(2)$ است را بین دو کسر دیگر قرار دهیم و سپس با استفاده از قضیه‌ی ساندویچ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ را حساب کنیم:

$$\frac{5x-10}{x-2} < \frac{f(x)-f(2)}{x-2} < \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{5(x-2)}{x-2} \le \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}$$

ذکر این نکته ضروری است که وقتی از طرفین یک نامساوی حد می‌گیریم، نامساوی اکید ($<$) به نامساوی معمولی ($\le$) تبدیل می‌شود. در سمت چپ واضح است که $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{5(x-2)}{x-2} = 5$ در سمت راست فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد و با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال مقدار حد معلوم می‌شود:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{4x-3}{1} = 5$$

بنابراین متوجه شدیم که $f'(2^+) = 5$ در صورت سؤال، مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x)$ ذکر شده است، پس مشتق‌های چپ و راست با هم برابرند و می‌توان نتیجه گرفت که $f'(2) = 5$.

مثال ۲: اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; \ x > 1 \\ 0 & ; \ x = 1 \\ (x-1)^2 & ; \ x < 1 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $A = \lim\limits_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t})$ با کدام برابر است؟

۱) $A = -f'(1^-) = 0$ ۲) $A = f'(1^+) = 3$ ۳) $A = f'(1^-) = 0$ ۴) $A = -f'(1^+) = -3$

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = 1 - \frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $\frac{1}{t} = 1 - x$ پس $t = \frac{1}{1-x}$ است. وقتی t به سمت $+\infty$ میل می‌کند، $\frac{1}{t}$ مقدار مثبتی دارد اما به صفر میل می‌کند؛ پس $x = 1 - \frac{1}{t}$ همواره کوچکتر از یک است اما به یک نزدیک می‌شود؛ به عبارتی داریم $x \to 1^-$.

$$A = \lim_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t}) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{1-x} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}$$

حالا با توجه به آن‌که $f(1) = 0$ است می‌توانیم به جای $f(x)$ در صورت کسر $f(x) - f(1)$ قرار دهیم و این کسر را به تعریف مشتق چپ تبدیل کنیم:

$$A = -\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -f'(1^-) \Rightarrow A = -f'(1^-)$$

تا اینجا متوجه شدیم که حد خواسته شده برابر با قرینه‌ی مشتق چپ در $x = 1$ است.

البته برای محاسبه‌ی مقدار این حد باید ضابطه‌ی $f(x)$ را برای $x < 1$ در آن قرار دهیم:

$$A = -\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$$

با جمع‌بندی نتایج بدست آمده خواهیم داشت:

$$A = \lim_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t}) = -f'(1^-) = 0$$

مثال ۳: فرض کنید $|x|\le 1$ ؛ $f(x)=\sin^2(\frac{1}{2}\text{Arc}\cos x)$، در این صورت $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» محاسبه مستقیم مشتق طولانی است و چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. ابتدا تابع f را به کمک فرمول $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1-\cos(\text{Arc}\cos x)}{2}=\frac{1-x}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2}$$

مثال ۴: مشتق مرتبه دهم تابع $y=e^{3x}$ کدام است؟

۱) e^{3x} ۲) $10e^{3x}$ ۳) $(e^{3x})^{10}$ ۴) $3^{10}e^{3x}$

پاسخ: گزینه «۴» آن چیزی که در بدست آوردن مشتق مراتب بالاتر مهم است، حدس زدن می‌باشد. به روند زیر توجه کنید:

$$y=e^{3x}\Rightarrow y^{(1)}=3^1e^{3x}\quad,\quad y^{(2)}=3\times 3e^{3x}=3^2e^{3x}\quad,\quad y^{(3)}=3^2\times 3e^{3x}=3^3e^{3x}$$

همان‌طور که می‌بینید، e^{3x} در تمام مشتق‌ها وجود دارد و به نسبت مرتبه‌ی مشتق، عدد ۳ به توان همان مرتبه رسیده است. پس به راحتی می‌توان حدس زد، مشتق مرتبه دهم به شکل $y^{(10)}=3^{10}e^{3x}$ خواهد بود و دیگر لازم نیست ۱۰ بار مشتق بگیریم.

مثال ۵: مشتق مرتبه دهم تابع $y=\frac{3x+1}{2x+1}$ به ازای $x=-\frac{3}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}(10!)$ ۲) $\frac{1}{4}(10!)$ ۳) $\frac{1}{2}(10!)$ ۴) $-\frac{1}{2}(10!)$

پاسخ : گزینه «۲» به راحتی با استفاده از فرمول داریم:

$$y=\frac{3x+1}{2x+1}\Rightarrow y^{(10)}=\frac{(10!)(-2)^{10-1}(3\times 1-2\times 1)}{(2x+1)^{10+1}}=\frac{(-2)^9\times 10!\times(3-2)}{(2x+1)^{11}}=\frac{(-2)^9\times 10!}{(2x+1)^{11}}$$

$$y^{(10)}(-\frac{3}{2})=\frac{(-2)^9\times 10!}{(-2)^{11}}=\frac{10!}{(-2)^2}=\frac{1}{4}(10!)$$

مثال ۶: اگر داشته باشیم $y=\text{Ln}(1+x)$، مشتق nام این تابع در $x=0$ کدام است؟

۱) $(-1)^{n-2}(n-1)!$ ۲) $(-1)^{n-2}n!$ ۳) $(-1)^{n-1}n!$ ۴) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

پاسخ : گزینه «۴» برای این مثال هم فرمول مشخصی نداریم، اما با یک‌بار مشتق‌گیری می‌توانیم به عبارتی برسیم که برای آن فرمول داریم:

$$y=\text{Ln}(x+1)\Rightarrow y'=\frac{1}{x+1}$$

حالا می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم. اما حواستان باشد که چون در صورت سؤال مشتق nام سؤال شده و ما الان یکبار از تابع مشتق گرفته‌ایم، پس باید از y' مشتق «$n-1$»ام بگیریم تا به مشتق nام y که خواسته‌ی سؤال است، برسیم. مشتق $(n-1)$ام تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به راحتی با جایگزینی $(n-1)$ به جای n در طرفین فرمول مشتق nام، به‌صورت $(y')^{(n-1)}=(n-1)!(-c)^{n-2}\frac{ad-bc}{(cx+1)^n}$ بدست می‌آید، لذا داریم:

$$(y')^{(n-1)}=(n-1)!(-1)^{n-2}\times\frac{(0-1)}{(x+1)^n}\Rightarrow y^{(n)}(0)=(n-1)!(-1)^{n-2}\times(-1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

مثال ۷: مشتق مرتبه هشتم تابع $f(x)=\sin 2x$ کدام است؟

۱) $256\cos 2x$ ۲) $256\sin 2x$ ۳) $128\cos 2x$ ۴) $128\sin 2x$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y=\sin 2x\Rightarrow y^{(8)}=2^8\sin(\frac{8\pi}{2}+2x)=256\sin(4\pi+2x)=256\sin 2x$$

مثال ۸: با فرض این‌که y تابعی از x است، مشتق تابع $\text{Arctg}y-y+x=0$ کدام است؟

۱) $y'=1+y^2$ ۲) $y'=1+y^{-2}$ ۳) $y'=1-y^{+2}$ ۴) $y'=1-y^{-2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y'=-\frac{1}{\frac{1}{1+y^2}-1}=\frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}}=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1\Rightarrow y'=1+y^{-2}$$

مثال ۹: فرض کنید $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$ در این صورت $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2y-1}$ ۲) $\frac{-1}{2y-1}$ ۳) $\frac{1}{2y+1}$ ۴) $\frac{-1}{2y+1}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^2=x+\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}_{\text{این، همان عبارت داده شده در صورت سؤال یعنی } y \text{ است.}} \Rightarrow y^2=x+y \Rightarrow y^2-x-y=0 \Rightarrow y'=-\frac{-1}{2y-1}=\frac{1}{2y-1}$$

مثال ۱۰: اگر $x^2+y^2=a^2$، آن‌گاه $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{y}$ ۲) $\frac{-a^2}{y}$ ۳) $\frac{-a^2}{y^3}$ ۴) $\frac{-1}{a^2y^3}$

پاسخ: گزینه «۳» مطابق روش گفته شده داریم:

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow x^2+y^2-a^2=0$$

$$2x+2yy'-0=0 \Rightarrow x+yy'=0 \Rightarrow 1+y'y'+yy''=0 \Rightarrow y''=-\frac{1+(y')^2}{y}$$

حالا کافی است y' را حساب کنیم، که به راحتی با توجه به تساوی $x+yy'=0$، برابر با $-\frac{x}{y}$ است و با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$y''=-\frac{1+(-\frac{x}{y})^2}{y}=-\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}\xrightarrow{x^2+y^2=a^2} y''=-\frac{a^2}{y^3}$$

مثال ۱۱: با توجه به معادله $x^4+y^4=x^2y^2$ کدام گزاره حاصل می‌شود؟

۱) $y'=\frac{2x^3+xy^2}{x^2y+2y^3}$ ۲) $y'=\frac{2x^3-xy^2}{x^2y-2y^3}$ ۳) $y'=\frac{xy^2-2x^3}{2y^3-x^2y}$ ۴) مشتق وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» با یک مشتق‌گیری ضمنی خیلی ساده روبه‌رو هستیم!؟

$$x^4+y^4=x^2y^2 \Rightarrow x^4+y^4-x^2y^2=0 \Rightarrow y'=-\frac{4x^3-2xy^2}{4y^3-2yx^2} \Rightarrow y'=\frac{-2x^3+xy^2}{2y^3-x^2y}$$

امیدوارم گزینه (۳) را انتخاب نکرده باشید! چرا که تنها نقطه‌ای که در معادله منحنی صدق می‌کند، نقطه $(0,0)$ است، یعنی $x=y=0$ و تابع در این نقطه نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا شرط لازم برای مشتق‌گیری آن است که تابع در یک همسایگی نقطه مربوطه تعریف شده باشد که در مورد رابطه داده شده در صورت سؤال نقطه‌ی $(0,0)$ یک نقطه‌ی تنها می‌باشد.

مثال ۱۲: اگر $y=\sqrt{u^2+u}$ و $u=x^3-2x$ آن‌گاه $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{21\sqrt{6}}{4}$ ۲) 0 ۳) $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ ۴) 21

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که به ازای $x=2$ مقدار u برابر $u=8-6=2$ می‌شود، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}}\times(3x^2-3) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2\times2+1}{2\sqrt{6}}\times9=\frac{5\times9}{2\sqrt{6}}=\frac{5\times9\times\sqrt{6}}{2\times6}=\frac{15\sqrt{6}}{4}$$

مثال ۱۳: اگر تابع g در نقطه $\frac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $f(x)=g(\sin x+x\cos x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}g'(0)$ ۲) $g'(1)$ ۳) $g'(0)$ ۴) $-\frac{\pi}{2}g'(1)$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم اگر $y=f(u)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $y'=u'f'(u)$، پس داریم:

$$f(x)=g(\sin x+x\cos x) \Rightarrow f'(x)=(\cos x+1\times\cos x-x\sin x)g'(\sin x+x\cos x)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2})g'[\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(\cos\frac{\pi}{2})]=-\frac{\pi}{2}g'(1)$$

مثال ۱۴: اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}=-\frac{2}{3}$ باشد، مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $+2$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به تعریف مشتق، حد فوق مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ می‌باشد؛ به عبارت دیگر $f'(2)=-\frac{2}{3}$ لذا داریم:

$$f'(2)=-\frac{2}{3}\to A=\left[f(\sqrt{1-3x})\right]'=\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}f'(\sqrt{1-3x})\xrightarrow{x=-1}A=\frac{-3}{2\sqrt{4}}f'(2)=\frac{-3}{4}\times(-\frac{2}{3})=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۵: فرض کنید $f(x^3+x)=6x^2+1$، در این صورت مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{24}{3}$ ۳) ۳   ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۳» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:
$$(3x^2+1)f'(x^3+x)=12x$$
ممکن است در ابتدا به نظر برسد که باید به جای x ها عدد ۲ قرار دهیم، در صورتی که با این کار $f'(2)$ بدست نخواهد آمد. باید x را عددی قرار دهیم که x^3+x برابر ۲ باشد، یعنی کافی است به جای x عدد ۱ قرار بگیرد:
$$x=1\Rightarrow(3\times1^2+1)f'(1+1)=12\times1\Rightarrow 4f'(2)=12\Rightarrow f'(2)=3$$

مثال ۱۶: اگر f بر $\mathbb{R}$ دو مرتبه مشتق‌پذیر باشد و $g(x)=f(xf(x))$، آن‌گاه $g''(0)$ کدام است؟

۱) $2(f''(0))^2f(0)+f'(0)$ ۲) $2f'(0)f(0)+(f''(0))^2$ ۳) $f''(0)(f'(0))^2+2f(0)$ ۴) $f''(0)(f(0))^2+2(f'(0))^2$

پاسخ : گزینه «۴» به راحتی با توجه به فرمول داریم:
$$g(x)=f[xf(x)]\Rightarrow g'(x)=(f(x)+xf'(x))f'[xf(x)]$$
$$\Rightarrow g''(x)=(f'(x)+f'(x)+xf''(x))f'(xf(x))+(f(x)+xf'(x))\times(f(x)+xf'(x))f''(xf(x))$$
با جایگزینی $x=0$ در رابطه اخیر نتیجه می‌شود:
$$g''(0)=2(f'(0))^2+(f(0))^2f''(0)$$

مثال ۱۷: مشتق تابع $y=|x^3-2x|$ در نقطه‌ای به طول $x_0=1$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) -1 ۴) -2

پاسخ : گزینه «۳»

روش اول:
$$y=|x^3-2x|\xrightarrow{\text{به ازای x=1، داخل قدرمطلق منفی است}}y=2x-x^3\Rightarrow y'=2-3x^2\Rightarrow y'(1)=-1$$
در این روش ابتدا با توجه به $x_0=1$ مقدار داخل قدرمطلق را تعیین علامت کرده و از قدرمطلق بیرون می‌آوریم و سپس عمل مشتق‌گیری را انجام می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که در مشتق‌گیری از توابع قدرمطلق (مانند انتگرال‌گیری) بهتر است که ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین کرده و سپس نماد قدرمطلق را حذف کنیم.

روش دوم: در $x_0=1$ عبارت داخل قدرمطلق صفر نمی‌شود پس از این فرمول استفاده می‌کنیم:
$$y'=\frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}=\frac{(3x^2-2)(x^3-2x)}{|x^3-2x|}=\frac{(3-2)(1-2)}{|1-2|}=\frac{(+1)(-1)}{|-1|}=-1$$

مثال ۱۸: مشتق تابع $y=|1-x|+|x+2|$ بر بازه $(-2,1)$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) -2 ۴) مشتق ندارد

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم. در بازه‌ی $(-2,1)$ داریم $-2<x<1$، بنابراین $1-x$ و $x+2$ هر دو مثبت هستند. در نتیجه داریم: $|1-x|=1-x$ و $|x+2|=x+2$. حالا می‌توانیم ضابطه‌ی y را در این بازه نوشته و سپس y' را حساب کنیم:
$$y=1-x+x+2=3\Rightarrow y'=0$$

مثال۱۹: تابع $y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|-\left|\sin x-1\right|$ در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{2}$:

۱) فقط مشتق چپ دارد. ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) مشتق‌پذیر نیست. ۴) مشتق دارد.

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا عبارات داخل قدرمطلق را در $x=\frac{\pi}{2}$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$|\sin x+\frac{1}{2}|=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}>0$$

بنابراین $|\sin x+\frac{1}{2}|=\sin x+\frac{1}{2}$. اما عبارت دوم در $\frac{\pi}{2}$ مقدارش صفر است:

$$|\sin x-1|=\sin\frac{\pi}{2}-1=1-1=0$$

بنابراین باید علامت آن را در چپ و راست $\frac{\pi}{2}$ بررسی کنیم. اگر $x\neq\frac{\pi}{2}$ باشد، مقدار $\sin x$ کمتر از یک می‌شود؛ پس $\sin x-1<0$ خواهد بود. پس در سمت چپ و راست $\frac{\pi}{2}$ داریم $|\sin x-1|=-\sin x+1$. به این ترتیب داریم:

$$y=(\sin x+\frac{1}{2})-(-\sin x+1)=\sin x-\frac{1}{2}+\sin x=2\sin x-\frac{1}{2}\Rightarrow y'=2\cos x\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2})=2\times\cos(\frac{\pi}{2})=0$$

مثال۲۰: تابع f با ضابطه $f(x)=x^2|x|$ در $x=0$:

۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد. ۲) مشتق اول و دوم ندارد.

۳) مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد. ۴) مشتق اول و دوم دارد.

پاسخ : گزینه «۴» اولاً تابع f در $x=0$ به وضوح پیوسته است، زیرا $|x|$ و x^2 هر دو پیوسته‌اند. برای بررسی مشتق f، آن را به‌صورت دو ضابطه‌ای برای $x\geq 0$ و $x<0$ می‌نویسیم. وقتی از این تابع دو ضابطه‌ای مشتق می‌گیریم، باید علامت تساوی را از $(x\geq 0)$ برداریم. ابتدا $f'(x)$ و $f''(x)$ را برای $x>0$ و $x<0$ تعیین می‌کنیم.

در پایان بررسی می‌کنیم که آیا $f'(0^+)$ و $f'(0^-)$ با هم برابرند؟ اگر برابر باشند، $f'(0)$ وجود دارد. به همین ترتیب برای وجود $f''(0)$ باید مقدار $f''(0^+)$ و $f''(0^-)$ با هم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ; x\geq 0\\ -x^3 & ; x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2 & ; x>0\\ -3x^2 & ; x<0\end{cases}, f''(x)=\begin{cases}6x & ; x>0\\ -6x & ; x<0\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی $f'(x)$ برای $x>0$ و $x<0$ می‌بینیم که $f'(0^+)=0$ و $f'(0^-)=0$، در نتیجه $f'(0)$ وجود دارد و برابر با صفر است. ضابطه‌ی $f''(x)$ برای $x>0$ و $x<0$ نیز نشان می‌دهد که $f''(0^+)=0$ و $f''(0^-)=0$ است پس $f''(0)$ موجود و برابر با صفر است.

اگر در همین مثال به مشتق سوم دقت کنیم؛ خواهیم داشت $f'''(x)=\begin{cases}6 & ; x>0\\ -6 & ; x<0\end{cases}$ پس $f'''(0^+)=6$ و $f'''(0^-)=-6$ است. این نشان می‌دهد که مشتق سوم در $x=0$ وجود ندارد.

مثال۲۱: فرض کنید $f(x)=\lfloor x\rfloor\sin x$، در این صورت مقدار $f'(\pi)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۰ ۴) وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: توجه کنید که تابع $\lfloor x\rfloor$ در همسایگی نقطه π، (یعنی چه به ازای π^+ و چه به ازای π^-) تابعی ثابت است و مقدار آن برابر ۳ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lfloor x\rfloor=3\Rightarrow f(x)=3\sin x\Rightarrow f'(x)=3\cos x\Rightarrow f'(\pi)=3\cos\pi=-3$$

روش دوم: به ازای $x=\pi$ مقدار داخل جزء صحیح عدد صحیح نمی‌شود پس مشتقِ $\lfloor x\rfloor$ در نقطه‌ی $x=\pi$ برابر با صفر است. حالا از مشتق حاصل‌ضرب استفاده کنیم:

$$f'(x)=(\lfloor x\rfloor)'\sin x+\lfloor x\rfloor(\sin x)'=0\times\sin x+\lfloor x\rfloor\cos x\Rightarrow f'(\pi)=\lfloor\pi\rfloor\cos\pi=-3$$

مثال ۲۲: فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x & ; x\in\mathbb{Q} \\ x\sin\frac{1}{x} & ; x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در صفر:

۱) حد چپ و راست غیر مساوی دارد.　۲) حد چپ و راست ندارد.　۳) پیوسته نیست.　۴) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۴» برای آن‌که حد $f(x)$ در $x=0$ موجود باشد باید $\lim\limits_{x\to 0} x$ و $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\times\sin\infty = 0\times(\text{یک تابع کران‌دار}) = 0\end{cases}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ است. این نشان می‌دهد که حد چپ و راست در $x=0$ موجود و با هم برابرند. برای تشخیص پیوسته بودن $f(x)$ در $x=0$ ابتدا باید $f(0)$ را محاسبه کنیم. دقت کنید که $x=0$ عددی گویاست $(0\in\mathbb{Q})$ بنابراین از ضابطه‌ی $f(x)=x$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت $f(0)=0$، پس حد $f(x)$ در $x=0$ با مقدار آن در این نقطه برابر است یعنی $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

شرط مشتق‌پذیر بودن $f(x)$ در $x=0$ آن است که هر دو ضابطه‌ی آن در این نقطه مقدار مشتق یکسانی داشته باشند. مشتقِ $y=x$ برابر است با $y'=1$، اما تابع $y=x\sin\frac{1}{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. برای اطمینان از این موضوع تعریف مشتق را می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\sin(\infty)\ \Rightarrow (\text{وجود ندارد } f'(0))$$

با جمع‌بندی نتایج فوق می‌بینیم که $f(x)$ در $x=0$ حد دارد و پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۲۳: مشتق منحنی به معادلات پارامتری $\begin{cases}x=1-\cos t \\ y=1+\frac{1}{2}\sin t\end{cases}$ برابر است با:

۱) $-\cot gt$　۲) $-\frac{1}{2}\cot gt$　۳) $\cot gt$　۴) $\frac{1}{2}\cot gt$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2}\cos t}{\sin t}=\frac{1}{2}\cot gt$$

مثال ۲۴: مشتق دوم منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{t^2-1}{t^2+1}$　۲) $4t$　۳) $\frac{4}{3(t^2+1)^3}$　۴) $\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}\Rightarrow y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$

مثال ۲۵: فرض کنید $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+8}-t \\ y=\sqrt{t^2+8}+t\end{cases}$، در این صورت مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $t=1$ چقدر است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۴　۴) ۸

پاسخ: گزینه «۲» روش معمول، استفاده از مشتق‌گیری پارامتری می‌باشد، ولی توجه کنید که اگر رابطه‌ای بین x و y پیدا کنیم، محاسبات ساده‌تر می‌شود.

$$xy=(\sqrt{t^2+8}-t)(\sqrt{t^2+8}+t)=t^2+8-t^2=8\ \Rightarrow y=\frac{8}{x}$$

بنابراین به طور معمول از y دو بار مشتق بر حسب x می‌گیریم، ضمناً توجه کنید که به ازای $t=1$، $x=2$ بدست می‌آید.

$$y=\frac{8}{x}\Rightarrow y'=\frac{-8}{x^2}\Rightarrow y''=\frac{16}{x^3}\xrightarrow{x=2} y''(2)=2$$

مثال ۲۶: اگر $f(x)=x^3+x^2$ باشد، مقدار مشتق تابع معکوس در نقطه‌ای به عرض (۲) واقع بر آن چقدر است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) ۱۲ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۱» توجه شود چون نقطه‌ای به عرض (۲) روی تابع معکوس است، لذا $x=2$ طول روی تابع اصلی است، لذا داریم: $\underset{a}{f(2)}=2^3+2^2=\underset{b}{12}$

در واقع در این تست $a=2$ و $b=12$ می‌باشد، پس داریم: $(f^{-1})'(12)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3(2)^2+2\times 2}=\frac{1}{16}$

مثال ۲۷: اگر $f(x)=\frac{x}{2}(2x-2)(3x-2)(x^2-4)$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۰ ۳) $f(2)$ ۴) -32

پاسخ: گزینه «۱» اگر به ضابطه‌ی $f(x)$ دقت کنید متوجه می‌شوید به ازای $x=2$ صفر می‌شود. در واقع عامل صفرکننده، (x^2-4) می‌باشد؛ لذا کافی است از (x^2-4) مشتق بگیریم و در سایر عبارات ضرب کنیم: $f'(x)\Big|_{x=2}=\frac{x}{2}(2x-2)(3x-2)\times 2x \Rightarrow f'(2)=\frac{2}{2}(4-2)(6-2)\times 4=32$

مثال ۲۸: مشتق مرتبه دوم تابع $y=(2x-1)^2(4x^2+7)^{\frac{1}{3}}$ در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» مشتق مرتبه‌ی دوم را در $x=\frac{1}{2}$ می‌خواهیم؛ عامل صفرشونده یعنی $(2x-1)$ هم دارای توان ۲ است. بنابراین می‌توانیم فقط از این عامل، مشتق دوم بگیریم و در سایر عوامل ضرب کنیم. مشتق $(2x-1)^2$ می‌شود $2\times 2(2x-1)$ و مشتق دوم آن برابر با ۸ است. در نتیجه داریم:

$$y''(\frac{1}{2})=8(4x^2+7)^{\frac{1}{3}}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=8\sqrt[3]{8}=16$$

مثال ۲۹: نرخ تغییر $\sqrt{x^2+8}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x=1$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» با تعریف f و g به شکل مقابل داریم: $f(x)=\sqrt{x^2+8}\ ,\ g(x)=\frac{x}{x+1}$

$$\text{نرخ تغییر}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}}{\frac{1\times(x+1)-x}{(x+1)^2}}\Bigg|_{x=1}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

مثال ۳۰: نسبت تغییرات عبارت $x^4+5x-\sqrt[5]{x}$ به تغییر عبارت x^2+3x+1 در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{44}{15}$ ۲) $\frac{44}{25}$ ۳) $\frac{22}{15}$ ۴) $\frac{22}{15}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر $f(x)=x^4+5x-\sqrt[5]{x}$ و $g(x)=x^2+3x+1$ آن‌گاه داریم:

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x^3+5-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}{2x+3}=\frac{4\times 1+5-\frac{1}{5}}{2\times 1+3}=\frac{9-\frac{1}{5}}{5}=\frac{44}{25}$$

مثال ۳۱: اگر $y=x-x^2$، نسبت تغییرات y^2 به تغییرات x^2 کدام است؟

۱) $2x^2+1$ ۲) $2x^2-3x$ ۳) $1+2x^2-3x$ ۴) $1-2x^2-2x$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا y^2 را به شکل مقابل حساب می‌کنیم: $y^2=(x-x^2)=x^2+x^4-2x^3$

با در نظر گرفتن $f(x)=x^2+x^4-2x^3$ و $g(x)=x^2$ داریم: $\text{نسبت تغییرات}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+4x^3-6x^2}{2x}=\frac{2x}{2x}+\frac{4x^3}{2x}-\frac{6x^2}{2x}=1+2x^2-3x$

مثال ۳۲: اگر $x=y^3+y$ ، نسبت تغییر y به تغییر $\sqrt{5x+6}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $0/3$ ۲) $0/4$ ۳) $0/5$ ۴) $0/6$

پاسخ: گزینه «۲» اگر فرض کنیم $g(x)=\sqrt{5x+6}$ ، آن‌گاه نسبت تغییر y به $\sqrt{5x+6}$ برابر $\frac{y'_x}{g'_x}$ تعریف می‌شود؛ پس داریم:

$$g(x)=\sqrt{5x+6} \Rightarrow g'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+6}} \overset{x=2}{=\!=} \frac{5}{2\sqrt{16}}=\frac{5}{8}$$

از طرفی برای محاسبه y'_x بهتر است x'_y را حساب کرده و آن‌گاه با توجه به رابطه $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ مقدار y'_x را معلوم کنیم:

$$x=y^3+y \Rightarrow x'_y=3y^2+1 \Rightarrow y'_x=\frac{1}{3y^2+1}$$

$$x=y^3+y \xrightarrow{x=2} y^3+y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow y'_x=\frac{1}{3(1)^2+1}=\frac{1}{4} \Rightarrow \text{نسبت تغییرات}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{8}{20}=0/4$$

مثال ۳۳: اگر $f(x)=x\sin x$ و $g(x)=\log(2x+\sqrt{4x^2+1})$ آن‌گاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ تابعی زوج است.
۲) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ نیز تابعی فرد است.
۳) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ تابعی فرد است.
۴) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ نیز تابعی زوج است.

پاسخ: گزینه «۱» $f(x)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است بنابراین مشتق $f(x)$ تابعی فرد و مشتق $g(x)$ تابعی زوج است.

مثال ۳۴: مشتق مرتبه‌ی یازدهم تابع $y=\frac{16}{x^2-4}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{11!}{2^{12}}$ ۲) $-\frac{11!}{2^{10}}$ ۳) $-\frac{1}{2^{12}}$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۴» تابع $y(x)$ زوج است، بنابراین $y'(x)$ فرد است، $y''(x)$ زوج است و به همین ترتیب مشتق‌های مرتبه‌ی زوج آن، زوج هستند و مشتق‌های مرتبه‌ی فرد آن، فرد هستند. پس $y^{(11)}(x)$ تابعی فرد است. از طرفی می‌دانیم که هر تابع فرد که در $x=0$ تعریف شده باشد، در این نقطه مقدارش صفر است. پس $y^{(11)}(0)=0$ است.

مثال ۳۵: تابع $f(x)$ با این ضابطه داده شده است: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x}+(x-1)^3\sin(\frac{\pi}{x-1}) & ; x\neq 0,1 \\ 0 & ; x=0,1 \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه Berkely)

۱) تابع f' در $x=0$ و $x=1$ موجود و پیوسته است.
۲) تابع f در $x=0$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.
۳) تابع f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر است، اما f' در $x=0$ پیوسته نیست.
۴) تابع f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر است، اما f' در $x=1$ پیوسته نیست.

پاسخ: گزینه «۳» این تابع مجموعی از دو تابع $x^2\sin\frac{\pi}{x}$ و $(x-1)^3\sin(\frac{\pi}{x-1})$ است که اولی در $x=0$ نیاز به بررسی دارد و دومی در $x=1$ باید بررسی شود. همه‌ی گزینه‌ها در مورد وجود یا پیوسته بودن $f'(x)$ هستند، پس با در نظر گرفتن $k=1$ و مرور این نتایج، کار را آغاز می‌کنیم. اگر $a>1\times(1+b)-b$ باشد، $f'(x)$ وجود دارد و اگر $a>1\times(1+b)$ باشد، $f'(x)$ پیوسته است. ما باید این موضوع را یک‌بار در $x=0$ و یک‌بار در $x=1$ بررسی کنیم. در نقطه‌ی $x=0$ با توجه به $x^2\sin\frac{\pi}{x}$ داریم $a=2$ و $b=1$، به ازای $k=1$ نامساوی $a>1\times(1+b)-b$ برقرار است و این یعنی $f'(0)$ وجود دارد. اما نامساوی $a>1\times(1+b)$ برقرار نیست که نشان می‌دهد $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته نیست. برای نقطه‌ی $x=1$ با توجه به $(x-1)^3\sin\frac{\pi}{x-1}$ داریم $a=3$ و $b=1$، نامساوی $a>1\times(1+b)-b$ برقرار است، پس $f'(1)$ وجود دارد. همچنین نامساوی $a>1\times(1+b)$ برقرار است، پس $f'(x)$ در $x=1$ پیوسته است. به طور خلاصه دیدیم که $f'(x)$ همواره وجود دارد، اما تابع f' در $x=0$ ناپیوسته است.

مثال ۳۶: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{6})-\cos(\frac{\pi}{6})}{x}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به تعریف مشتق، حد فوق مشتق تابع $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ در نقطه $x_0=0$ می‌باشد. لذا داریم:

$$f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{6})\Rightarrow f'(x)=-\sin(x+\frac{\pi}{6})\Rightarrow f'(0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

مثال ۳۷: مقدار $A=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{Arctg}(x+h)-\mathrm{Arctg}x}{h}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{1}{x^2+1}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به تعریف مشتق، حد فوق مشتق تابع $f(x)=\mathrm{Arctg}x$ در نقطه $x_0=x$ می‌باشد. لذا داریم:

$$A=f'(x)=(\mathrm{Arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

مثال ۳۸: اگر f مشتق سوم پیوسته داشته باشد، حاصل حد زیر کدام است؟

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+3h)-3f(x+h)+3f(x-h)-f(x-3h)}{h^3}\right)$$

۱) $9f'''$ ۲) $6f'''(x)$ ۳) $8f'''(x)$ ۴) $3f'''(x)$

پاسخ: گزینه «۳» مقدار $h=0$ را در کسر جایگذاری می‌کنیم، به جواب $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام از قاعده‌ی هوپیتال استفاده مـی‌کنـیم و ایـن عمـل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا حاصل کسر، عدد شود:

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{3f'(x+3h)-3f'(x+h)-3f'(x-h)+3f'(x-3h)}{3h^2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{9f''(x+3h)-3f''(x+h)+3f''(x-h)-9f''(x-3h)}{6h}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{27f'''(x+3h)-3f'''(x+h)-3f'''(x-h)+27f'''(x-3h)}{6}=\frac{48f'''(x)}{6}=8f'''(x)$$

مثال ۳۹: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و $x\in(0,1)$ باشد، همچنین تساوی $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h\sin 2h}=\frac{1}{2}x$ برقرار باشد، مقدار مشتق $y=f(\sqrt{x})$ در نقطه‌ی $x=4$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم ریاضی عمومی (۱) دانشگاه صنعتی شریف)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به حد دقت کنید، عبارت را با استفاده از هم‌ارزی می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h\sin 2h}\right)\sim\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h\times 2h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}\right)$$

عبارت داخل پرانتز را می‌توان مشتق تابع $f(x)$ در نظر گرفت. بنابراین با توجه به‌صورت سؤال تساوی $\frac{1}{2}f'(x)=\frac{1}{2}x$ را داریم و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{f'(x)}{2}=\frac{1}{2}x\Rightarrow f'(x)=x$$

سؤال مشتق $y=f(\sqrt{x})$ را خواسته که می‌دانیم برابر با $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$ است، اما $f'(\sqrt{x})$ در نقطه‌ی $x=4$ به شکل زیر حساب می‌شود.

$$f'(\sqrt{4})=f'(2)\xrightarrow{f'(x)=x}f'(2)=2\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{4}}f'(\sqrt{4})=\frac{1}{2\times 2}\times 2=\frac{1}{2}$$

مثال ۴۰: اگر $f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)$، آن‌گاه حد $a_n=n^2(f(1+\frac{2}{n^2})-f(1))$ وقتی n به سمت بی‌نهایت مثبت میل می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» وقتی $n\to+\infty$ آن‌گاه با حالت ابهام $\infty\times 0$ مواجه می‌شویم که باید آن را به حالت $\frac{0}{0}$ تبدیل کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\infty\times 0=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1+\frac{2}{n^2})-f(1)}{\frac{1}{n^2}}\right)\xrightarrow{\text{با فرض } h=\frac{1}{n^2} \text{ داریم}}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

می‌دانیم حد فوق، ۲ برابر مشتق راست تابع f در نقطه‌ی $x=1$ است. البته f مشتق‌پذیر است و مشتق چپ و راست آن با هم برابرند؛ پس لازم است $2f'(1)$ را حساب کنیم:

$$f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)=(x-1)(x-2)(x-3)\xrightarrow{\text{مشتق عامل صفرشونده}}f'(1)=1\times(1-2)(1-3)=2$$

بنابراین حاصل حد برابر با $2\times 2=4$ می‌شود.

توضیح: البته اگر در قسمت نهایی متوجه نشویم که حد فوق برابر با $2f'(1)$ است، به راحتی می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کرده و به این نتیجه برسیم.

مثال ۴۱: اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه مقدار $A=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» در این مثال $a=3$ و $b=-1$ می‌باشد:

$$a-b=3-(-1)=4\Rightarrow A=4f'(2)\ ,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow A=4\times f'(2)=4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

مثال ۴۲: اگر $f(a)=0$ و $f'(a)=4$، آن‌گاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: **هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.**

روش اول: دقت کنید که h متغیر و a ثابت است. حالا از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}=\frac{0}{0}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)}{5}=\frac{2f'(a)}{5}=\frac{2\times 4}{5}=\frac{8}{5}$$

روش دوم: طبق مطالب کتاب داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+0\times h)}{h}=(2-0)f'(a)=2f'(a)=2\times 4=8$$

در نتیجه با در نظر گرفتن ضریب ۵ در مخرج کسر داریم:

$$\frac{2f'(a)}{5}=\frac{2\times 4}{5}=\frac{8}{5}=\text{جواب}$$

مثال ۴۳: اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\sqrt{x}$ ، مقدار مشتق $f(\frac{1}{x})$ به ازای $x=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: **گزینه «۲»** حد داده شده به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است، برای رفع ابهام باید از هوپیتال استفاده کرد و داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{1}=2f'(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

حالا به محاسبه $(f(\frac{1}{x}))'$ می‌پردازیم:

$$(f(\frac{1}{x}))'=(\frac{1}{x})'.f'(\frac{1}{x})=\frac{-1}{x^2}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}\ \Rightarrow\ (f(\frac{1}{x}))'_{x=1}=\frac{-1}{1}\times\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{-1}{2}$$

مثال ۴۴: تابع $f(x)=(x-1)|x-1|+|x-2|$ ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) فقط در نقاط $x=1,2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۲) فقط در نقطه‌ی $x=2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳) در تمام نقاط مشتق‌پذیر است.
۴) فقط در نقطه‌ی $x=2$ مشتق‌پذیر است.

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم توابع شامل قدرمطلق در ریشه‌های غیرتکراری عبارات درون قدرمطلق مشتق‌پذیر نمی‌باشند. بنابراین به نظر می‌رسد تابع f در $x=1$ و $x=2$ مشتق‌پذیر نیست. ولی تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر است، زیرا به دلیل وجود عامل $(x-1)$ در پشت قدرمطلق ریشه $x=1$ تکراری (مضاعف) می‌باشد.

مثال ۴۵: فرض کنید $f(x)=Lnx$ و $fog(x)=xLnx$ در این صورت $g'(2)$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $4Ln2$ ۲) $2+Ln2$ ۳) $2Ln2$ ۴) $4(1+Ln2)$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l} fog(x)=xLnx \\ f(x)=Lnx \Rightarrow f(g(x))=Ln(g(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow Ln(g(x))=xLnx \Rightarrow g(x)=e^{xLnx}=e^{Lnx^x}=x^x$$

$$\Rightarrow g'(x)=x^x(Lnx+1) \Rightarrow g'(2)=4(Ln2+1)$$

مثال ۴۶: اگر $f'(2)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(2)-f'(2)$ ۲) $f'(2)-2f(2)$ ۳) $f(2)-2f'(2)$ ۴) $f'(2)-f(2)$

پاسخ : گزینه «۳» حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم است، لذا با استفاده از قضیه هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-2f'(x)}{1}=f(2)-2f'(2)$$

مثال ۴۷: مشتق $y=\arcsin(Lnx)$ در نقطه‌ی $x=\sqrt{e}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) $\sqrt{e}$ ۳) $\sqrt{2e}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3e}}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به فرمول‌های محاسبه مشتق داریم:

$$(Arcsin(Lnx))'=\frac{(Lnx)'}{\sqrt{1-(Lnx)^2}}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(Lnx)^2}} \Rightarrow y'\Big|_{x=\sqrt{e}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{1-(Ln\sqrt{e})^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}.\sqrt{e}}=\frac{2}{\sqrt{3e}}$$

مثال ۴۸: اگر $f(x)=\sinh^{-1}(tgx)$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا فرمول‌های مشتق را یادآوری می‌کنیم:

$$(\sinh^{-1}(u))'=\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \quad , \quad (tgu)'=u'.(1+tg^2u)$$

$$f'(x)=(\sinh^{-1}(tgx))'=\frac{(tgx)'}{\sqrt{1+(tgx)^2}}=\frac{1+tg^2x}{\sqrt{1+tg^2x}}=\sqrt{1+tg^2x} \Rightarrow f'(0)=\sqrt{1+tg^2(0)}=\sqrt{1}=1$$

مثال ۴۹: اگر داشته باشیم $y=(x^2+1)^{e^x}$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $x=1$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $2(2)^{2e-1}$ ۲) $2^e(2)^{e-1}$ ۳) $2^e.e(Ln2+1)$ ۴) $(2e)^e(Ln2-1)$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه‌ی مشتق توابع به‌صورت $y=u^v$ از فرمول $y'=u^v(v'Lnu+v\times\frac{u'}{u})$ استفاده می‌کنیم:

$$y'=(x^2+1)^{e^x}(e^xLn(x^2+1)+\frac{2xe^x}{x^2+1}) \Rightarrow y'(1)=(1+1)^{e^1}(e^1Ln(1+1)+\frac{2e^1}{2})=2^e(eLn2+e)=2^e\times e(Ln2+1)$$

مثال ۵۰: اگر $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ باشد، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ در $t = 1$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\dfrac{3}{4}$ ۲) $-\dfrac{5}{4}$ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{5}{4}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا y'_x را با استفاده از مشتق‌گیری پارامتری حساب می‌کنیم:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} = -\frac{1}{2t^3}$$

حالا مشتق دوم را با دقت به نحوه‌ی محاسبه‌ی مشتق دوم در حالت پارامتری حساب می‌کنیم:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t} = \frac{\frac{6t^2}{4t^6}}{2t} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{6t^2}{8t^7} = \frac{3}{4t^5}$$

به این ترتیب مشتق دوم y نسبت به x بدست آمده است ($\dfrac{d^2y}{dx^2}$ همان y''_{xx} است) و به ازای $t = 1$ داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}$$

مثال ۵۱: با فرض $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ در $x = 1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۳ ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» از $x = 1$ نتیجه می‌شود $y = -1$. با مشتق‌گیری ضمنی از عبارت داده شده خواهیم داشت:

$$2x + 2y + 2xy' + 8yy' = 0 \xrightarrow[y=-1]{x=1} y' = 0$$

از رابطه اخیر دوباره نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2 + 2y' + 2y' + 2xy'' + 8y'^2 + 8yy'' = 0 \xrightarrow[y'=0]{x=1,\ y=-1} y'' = \frac{1}{3}$$

مثال ۵۲: اگر $f(x) = xe^{2x}$ باشد، مشتق مرتبه **n** ام این تابع به ازای $x = 0$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $n.2^n$ ۲) $n \times 2^{n-1}$ ۳) 2^n ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» بطور کلی می‌دانیم که اگر $y = xf(x)$ ، آن‌گاه $y^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ (قاعده لایب نیتز در حالت خاص است). بنابراین داریم:

$$f(x) = x.e^{2x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = x.2^n e^{2x} + n2^{n-1}e^{2x} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n2^{n-1}$$

مثال ۵۳: مشتق تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor \cos x$ در نقطه $x = \dfrac{\pi}{2}$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به این‌که $1 < \dfrac{\pi}{2} < 2$ می‌باشد، لذا تابع $f(x)$ در فاصله $(1,2)$ که همسایگی $x = \dfrac{\pi}{2}$ می‌باشد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

مثال ۵۴: فرض کنید f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $f'(x_0)$ ۲) $2f'(x_0)$ ۳) $\dfrac{1}{2}f'(x_0)$ ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: حد داده شده از نوع مبهم $\dfrac{0}{0}$ است، لذا با استفاده از قضیه هوپیتال داریم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) + f'(x_0 - h)}{1} = 2f'(x_0)$$

روش دوم: با استفاده از فرمول متن کتاب، داریم

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0 + bh)}{h} = (a - b)f'(x_0) \xrightarrow{a = 1, b = -1} 2f'(x_0)$$

مثال ۵۵: فرض کنید $f(۱-x^۳)=۴x^۲$، آن‌گاه $f'(۹)$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f(۱-x^۳)=۴x^۲ \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} (f(۱-x^۳))'=(۴x^۲)' \Rightarrow -۳x^۲f'(۱-x^۳)=۸x \Rightarrow f'(۱-x^۳)=\frac{۸x}{-۳x^۲}=\frac{۸}{-۳x}$$

چون $f'(۹)$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$۱-x^۳=۹ \Rightarrow x^۳=-۸ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow f'(۹)=\frac{۸}{-۳\times(-۲)}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

مثال ۵۶: مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x(x-۱)(x-۲)^۲}$ در $x=۳$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱۷- ۲) $-\frac{۱۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۳۶}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$Lnf(x)=-Lnx-Ln(x-۱)-۲Ln(x-۲) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-۱}{x}-\frac{۱}{x-۱}-\frac{۲}{x-۲} \Rightarrow \frac{f'(۳)}{f(۳)}=\frac{-۱}{۳}-\frac{۱}{۲}-۲ \Rightarrow f'(۳)=\frac{-۱۷}{۶}f(۳)=\frac{-۱۷}{۳۶}$$

مثال ۵۷: مقدار مشتق عبارت $\sinh^۲ ۲x$ در $x=۱$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) $۲e^۲-e^{-۲}$ ۲) $۲e^۴-e^{-۴}$ ۳) $e^۲-e^{-۲}$ ۴) $e^۴-e^{-۴}$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از فرمول مشتق $\sinh^m u$ داریم:

$$(\sinh^m u)'=u'.m.\sinh^{m-۱}u.\cosh u$$

$$f'(x)=(\sinh^۲ ۲x)' \Rightarrow (۲x)'\times ۲\times \sinh(۲x).\cosh(۲x)=۴\sinh(۲x).\cosh(۲x)=۲\sinh ۴x$$

$$f'(۱)=۲\sinh ۴=۲(\frac{e^۴-e^{-۴}}{۲})=e^۴-e^{-۴}$$

مثال ۵۸: مشتق هر تابع زوج تابع .... و مشتق هر تابع فرد تابع .... است. (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) زوج ـ فرد ۲) زوج ـ زوج ۳) فرد ـ زوج ۴) فرد ـ فرد

پاسخ : گزینه «۳» مشتق هر تابع زوج تابع فرد است و مشتق هر تابع فرد تابع زوج است.

تابع زوج : $f(x)=f(-x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} f'(x)=-f'(-x)$ مشتق، تابع فرد است

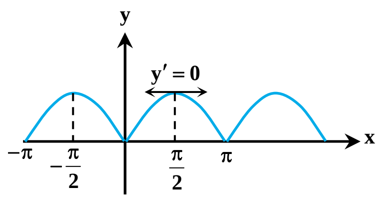
تابع فرد : $f(x)=-f(-x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} f'(x)=f'(-x)$ مشتق، تابع زوج است

مثال ۵۹: اگر $f(x)=|\sin x|$، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

پاسخ : گزینه «۱» چون $\sin x$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{۲}$ همواره مثبت است، لذا می‌توانیم قدرمطلق را برداریم:

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۰$$



$f(x)=|\sin x|$

مثال ۶۰: اگر $y=\frac{e^{۲x}+x}{x+۲}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=۰$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌توان ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورد و سپس با معکوس کردن کسر $\frac{dx}{dy}$ را نیز بدست آورد.

$$y=\frac{e^{۲x}+x}{x+۲} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(۲e^{۲x}+۱)(x+۲)-(e^{۲x}+x)}{(x+۲)^۲}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=۰}=\left(\frac{(x+۲)^۲}{(۲e^{۲x}+۱)(x+۲)-(e^{۲x}+x)}\right)_{x=۰}=\frac{۲^۲}{(۲e^۰+۱)(۰+۲)-(e^۰+۰)}=\frac{۴}{۶-۱}=\frac{۴}{۵}$$

مثال ۶۱: اگر $f(x)=(5+x^3)e^{\sin x}$، مقدار $(f^{-1})'(5)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 3 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ خواهد بود:

$$5=(5+x^3)e^{\sin x}\Rightarrow x=0$$

$$(f^{-1})'(5)=\frac{1}{f'(0)}\ ,\ f'(x)=[3x^2+(5+x^3)\cos x]e^{\sin x}\Rightarrow f'(0)=5\Rightarrow (f^{-1})'(5)=\frac{1}{5}$$

مثال ۶۲: اگر برای $x\ge 0$ داشته باشیم $2x\le f(x)\le x^2+1$، مقدار $f'(1)$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا مقدار تابع f را در $x=1$ بدست می‌آوریم:

$$2x\le f(x)\le x^2+1\Rightarrow 2\le f(1)\le 2\Rightarrow f(1)=2$$

حال برای محاسبه $f'(1)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$2x\le f(x)\le x^2+1\Rightarrow \frac{2x-2}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}\le\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\Rightarrow 2\le f'(1)\le 2$$

و بنابراین $f'(1)=2$.

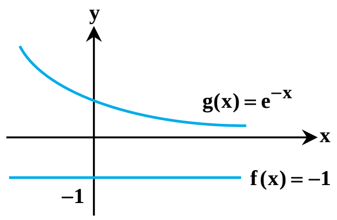
توضیح: شاید این فکر به ذهن برخی از دوستان برسد که کافی است از طرفین نامساوی مشتق بگیریم. اما باید توجه کنید که از نامساوی $g(x)\le f(x)\le h(x)$ نمی‌توان نتیجه گرفت: $g'(x)\le f'(x)\le h'(x)$. برای مثال به تابع $f(x)=\sin(x)$ توجه کنید. همه می‌دانیم که $-1\le\sin x\le 1$، اگر از طرفین مشتق بگیریم داریم: $0\le(\sin x)'\le 0$ نیز $(\sin x)'=0$ که به‌وضوح غلط است. با این حال این روش با یک شرط قابل استفاده است:

قضیه: هرگاه توابع f، g و h مشتق‌پذیر باشند و $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و در نقطه‌ی a داشته باشیم $h(a)=f(a)=g(a)$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت:
$h'(a)\le f'(a)\le g'(a)$

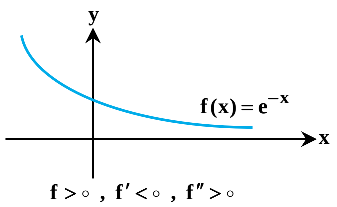
مثال ۶۳: فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ باشند، کدامیک از گزاره‌های زیر اشتباه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) ممکن است همه‌جا $f<g\ ,\ f'>g'$.
۲) ممکن است همه‌جا $f>0\ ,\ f'<0\ ,\ f''>0$.
۳) ممکن است همه‌جا $f>0\ ,\ f'>0\ ,\ f''<0$.
۴) اگر $f'=g'$ و $f(x_0)=g(x_0)$ به ازای یک x_0، آن‌گاه $f=g$.

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. (اما گزینه‌ی (۴) می‌توانست جواب باشد). گزینه‌ی (۱) جمله‌ی درستی را بیان می‌کند. برای مثال توابع $g(x)=e^{-x}$، و $f(x)=-1$ را در نظر بگیرید. اولاً چون $f(x)$ منفی و $g(x)$ مثبت است پس همه‌جا $f(x)<g(x)$ است. ثانیاً $g'(x)=-e^{-x}$ منفی است و $f'(x)=0$ پس $f'(x)>g'(x)$ است. (به جای $f(x)$ می‌توانید هر تابع ثابتِ منفی را در نظر بگیرید).

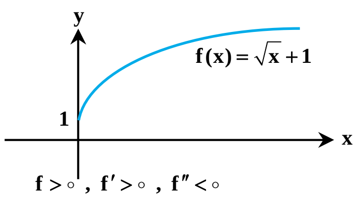


در مورد گزینه‌های (۲) و (۳) باید گفت علامت‌های f، f' و f'' هیچ ربطی به هم ندارند، یعنی هشت حالت مختلف وجود دارد، و از هر حالت می‌توانیم تابعی را مثال بزنیم. در این‌جا برای گزینه‌های (۲) و (۳) مثال مورد نظر را می‌نویسیم:



تابع $f(x)=e^{-x}$، مثبت است $(f>0)$، نزولی است $(f'<0)$ و محدب است $(f''>0)$، پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

تابع $f(x)=1+\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[0,\infty)$ مثبت است $(f>0)$، صعودی است $(f'>0)$، ولی مقعر است $(f''<0)$. پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.



در مورد گزینه‌ی (۴) باید بگوییم، اگر در یک نقطه مانند x_0 داشته باشیم $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x_0)=g'(x_0)$، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که همه‌جا $f=g$ است. مثلاً توابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$ را در نظر بگیرید. در نقطه‌ی $x_0=0$ داریم $f(0)=g(0)$ و $f'(0)=g'(0)$، اما همه‌جا f و g برابر نشده‌اند. پس اگر طراح سؤال این گزینه را به‌صورت $f'(x_0)=g'(x_0)$ و $f(x_0)=g(x_0)$ می‌نوشت، همین گزینه غلط بود و می‌توانست جواب مورد نظر طراح باشد. اما متأسفانه در نوشتن این گزینه اشتباهی رخ داده است و $f'=g'$ در همه‌جا فرض شده است. اگر همه‌جا $f'=g'$، آن‌گاه $f'-g'=0$. پس تابع $f-g$ باید تابع ثابت باشد (چون مشتق آن صفر می‌شود). پس $f(x)-g(x)=c$. از طرفی می‌دانیم که $f(x_0)=g(x_0)$، پس $f(x_0)-g(x_0)=0$ یعنی $c=0$ به عبارتی نتیجه می‌شود که همه‌جا $f(x)=g(x)$ است. با این حساب همه‌ی گزینه‌ها جملات درستی هستند.

مثال ۶۴: اگر f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $2af'(a)-a^2f(a)$ ۲) $a^2f(a)-2af'(a)$ ۳) $2af'(a)-2af(a)$ ۴) $2af(a)-a^2f'(a)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to a}\frac{2xf(a)-a^2f'(x)}{1}=2af(a)-a^2f'(a)$$

مثال ۶۵: اگر $f(x)=(\sin\frac{\pi}{2}x)^n(\cos\pi x)^m$ و $m,n>1$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\pi(\frac{\pi}{2}-m)$ ۴) $\pi(n+m)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f'(x)=\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}(\sin\frac{\pi x}{2})^{n-1}(\cos\pi x)^m-m\pi\sin\pi x(\cos\pi x)^{m-1}(\sin\frac{\pi x}{2})^n\ \Rightarrow f'(1)=0-0=0$$

مثال ۶۶: اگر $f'(tgx)=\frac{1}{2}tg2x$ باشد، مشتق $f(\sin x)$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $\cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) tgx ۴) $\frac{x}{1-x^2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$(f(\sin x))'=(\sin x)'.f'(\sin x)\qquad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(tgx)=\frac{1}{2}tg2x\\ \text{می‌دانیم}: tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(tgx)=\frac{1}{2}(\frac{2tgx}{1-tg^2x})=\frac{tgx}{1-tg^2x}\Rightarrow f'(u)=\frac{u}{1-u^2}\qquad (II)$$

$$\text{از I و II}\Rightarrow (f(\sin x))'=\cos x.\frac{\sin x}{1-\sin^2x}=\cos x.\frac{\sin x}{\cos^2x}=\frac{\sin x}{\cos x}=tgx$$

مثال ۶۷: اگر $\begin{cases}x=\sec t\\ y=tgt\end{cases}$ باشد، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=\frac{\pi}{4}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2t}$، در نتیجه داریم:

$$y=tgt\Rightarrow y^2=tg^2t\Rightarrow y^2+1=tg^2t+1=\frac{1}{\cos^2t}=(\frac{1}{\cos t})^2$$

$$\Rightarrow y^2+1=x^2\Rightarrow y^2+1-x^2=0\quad,\quad t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\sqrt{2}\ ,\ y=1$$

حال مشتق‌گیری را آغاز می‌کنیم:

$$2yy'-2x=0\Rightarrow\begin{cases}2\times1\times y'-2\sqrt{2}=0\Rightarrow y'=\sqrt{2}\\ \text{مجدداً مشتق می‌گیریم}\Rightarrow 2y'y'+2yy''-2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\times1\times y''-2=0\Rightarrow 4+2y''-2=0\Rightarrow 2y''=-2\Rightarrow y''=-1$$

مثال ۶۸: فرض کنید $u=(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ و $v=3x^2-2x$، ضابطه‌ی $\frac{du}{dv}$ به عنوان تابعی از x کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}\ ,\ x\neq\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x^2+9}}$ ۳) $\frac{1}{4(3x-1)\sqrt{x^2+9}}\ ,\ x\neq\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2x(3x-1)}{\sqrt{x^2+9}}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$u=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\quad,\quad v=3x^2-2x\Rightarrow\frac{dv}{dx}=6x-2$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{du}{dv}=\frac{du}{dx}.\frac{dx}{dv}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\times\frac{1}{6x-2}=\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$$

مثال ۶۹: اگر $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{d}{dx}[\cosh(Ln\frac{1}{x})]$، مقدار A کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}(\cosh(Ln\frac{1}{x}))=\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}(\cosh(-Lnx))=\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}(\frac{e^{-Lnx}+e^{Lnx}}{2})=\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+x))=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{-1}{x^2}+1)=\frac{1}{2}$$

مثال ۷۰: اگر $f(x)=2^{\sin x}+x2^x$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)+h}{2h}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1+\ln 2$ ۳) $\frac{1}{2}+\ln 2$ ۴) $\frac{3}{2}+\ln 2$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که:

$$f(x)=2^{\sin x}+x2^x \Rightarrow f'(x)=\cos x 2^{\sin x}\ln 2+x2^x\ln 2+2^x \Rightarrow f'(0)=\ln 2+1$$

برای محاسبه حد داده شده از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)+h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)+f'(-h)+1}{2}=f'(0)+\frac{1}{2}=\ln 2+\frac{3}{2}$$

مثال ۷۱: اگر $f(x)=(2+x^3)e^x$، مقدار $(f^{-1})'(2)$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $22e^2$ ۴) $\frac{1}{22e^2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x)=(2+x^3)e^x \Rightarrow f'(x)=3x^2\times e^x+(2+x^3)e^x=(x^3+3x^2+2)e^x$$

$$f(a)=b \Rightarrow (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

در این تست $b=2$ می‌باشد، لذا باید مقدار a را بدست آوریم:

$$f(a)=b \Rightarrow (2+x^3)e^x=2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2\times e^0}=\frac{1}{2}$$

مثال ۷۲: اگر $f(x)=x^{\sin\pi x}$، مقدار $f'(1)$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 0 ۴) -2π

پاسخ: گزینه «۳» اگر $y=u(x)^{v(x)}$ آن‌گاه مشتق تابع y برابر است با:

$$y'=u^v[v'.\ln u+\frac{u'.v}{u}]$$

که البته این فرمول با گرفتن $\ln$ از طرفین بدست می‌آید: توجه شود در این تست $u=x$ و $v=\sin\pi x$، به ازای $x=1$، $u=1$ و $v=\sin\pi=0$ خواهد بود، لذا دیگر نیاز به محاسبه و نوشتن فرمول نیست، چون $u=1$ جمله اول داخل کروشه و $v=0$ جمله دوم داخل کروشه را صفر می‌کند، پس $y'(1)=0$ خواهد بود.

مثال ۷۳: اگر $f(1)=1$ و $f'(1)=3$ باشد و $g(x)=\frac{f(x^2)}{1+x^3}$، آن‌گاه $g'(1)$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق فرمول داریم:

$$(f(u))'=u'f'(u)$$

$$g'(x)=\frac{2x.f'(x^2)(1+x^3)-3x^2.f(x^2)}{(1+x^3)^2} \Rightarrow g'(1)=\frac{2\times 1\times f'(1)(1+1)-3\times 1\times f(1)}{(1+1)^2}=\frac{9}{4}$$

مثال ۷۴: اگر $y=(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}$ باشد، حاصل $(y''+9y)\cos^2 2x$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $3y$ ۲) $3y'$ ۳) yy' ۴) $y+y'$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=(\cos 2x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}\times(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}(-2\sin 2x)=-3\sin 2x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y''=-6\cos 2x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin 2x)(-3\sin 2x)=-6(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3(\sin 2x)^2}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\Rightarrow (y''+9y)\cos^2 2x=(-6(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3(\sin 2x)^2}{\sqrt{\cos 2x}}+9(\cos 2x)^{\frac{3}{2}})\cos^2 2x$$

$$=(3(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{3(\sin 2x)^2}{\sqrt{\cos 2x}})\cos^2 2x=3(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}.\cos^2 2x+\frac{3(\sin 2x)^2(\cos^2 2x)}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=3(\cos 2x)^{\frac{7}{2}}+3(1-\cos^2 2x)\cos^{\frac{3}{2}} 2x=3(\cos 2x)^{\frac{7}{2}}+3\cos^{\frac{3}{2}} 2x-3\cos^{\frac{7}{2}} 2x=3\cos^{\frac{3}{2}} 2x=3y$$

مثال ۷۵: اگر $f(1)=3$ و $f'(1)=2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{\sqrt{x}-1}\right)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+1}-2}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{1}}}=1$$

مثال ۷۶: اگر $f(x)=\frac{1}{(x+1)^{100}(x+2)^{100}(x+3)^{100}(x+4)^{100}}$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{-1250}{3(24)^{100}}$ ۲) $\frac{-1250}{6(24)^{100}}$ ۳) $\frac{-125}{3(24)^{100}}$ ۴) $\frac{-125}{6(24)^{100}}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y=\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\right)^{100}\Rightarrow Lny=100Ln\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\right)$$

$$\Rightarrow Lny=100[Ln1-(Ln(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)]=-100(Ln(x+1)+Ln(x+2)+Ln(x+3)+Ln(x+4))$$

حال از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=-100\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{y'}{y}=-100\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\ y(0)=\frac{1}{24^{100}}\end{cases}\Rightarrow y'(0)=\frac{-100}{24^{100}}\left(\frac{12+6+4+3}{12}\right)$$

$$\Rightarrow y'(0)=\frac{-100}{24^{100}}\times\frac{25}{12}=\frac{-50\times 25\times 2}{24^{100}\times 2\times 6}=\frac{-1250}{24^{100}\times 6}$$

مثال ۷۷: مشتق هزارم تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $999!$ ۳) $1000!$ ۴) $1001!$

پاسخ : گزینه «۳» به طور کلی مشتق مرتبه nام تابع $y=\frac{1}{ax+b}$ به‌صورت $y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow y^{(1000)}=\frac{(-1)^{1000}\times 1000!}{x^{1001}}\Rightarrow y^{(1000)}(1)=1000!$$

مثال ۷۸: فرض کنید برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ داریم: $f(a+b)=f(a)f(b)$، $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود باشد. در این صورت برای هر $x\neq 0$: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $f'(x)=f(0)f(x)$ ۲) $f'(x)=f'(0)f(x)$ ۳) $f'(x)=f(0)f(x)$ ۴) $f'(x)$ وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا نشان می‌دهیم که $f(0)=1$. در رابطه داده شده به جای a و b صفر قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$f(0+0)=f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=f(0)f(0)\xrightarrow{f(0)\neq 0}f(0)=1$$

حال برای محاسبه $f'(x)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x)f'(0)$$

مثال ۷۹: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sin x}{x^2} & ;\ x\neq 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$، آن‌گاه $f'''(0)$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $-\frac{1}{20}$ ۴) -20

پاسخ : گزینه «۳» در همسایگی $x=0$، $f(x)$ را می‌توان به‌صورت روبرو نوشت:

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2}\sim\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)}{x^2}=\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{6}-\frac{3x^2}{5!}+\cdots\ ,\ f''(x)=\frac{-6x}{5!}+\cdots\ ,\ f'''(x)=\frac{-6}{5!}+\cdots\Rightarrow f'''(0)=\frac{-1}{20}$$

مثال ۸۰: اگر $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$ آن‌گاه: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(x)$ در ۰ دارای مشتق مرتبه‌ی دوم نیست.
۲) $f(x)$ در ۰ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.
۳) $f(x)$ در ۰ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر و دارای بسط تیلور است.
۴) هیچکدام

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

بنابراین $f(x)$ در $x=0$ مشتق‌پذیر است (از مشتق‌پذیر بودن f، پیوسته بودن آن هم نتیجه می‌شود).
به همین ترتیب می‌توان نشان داد f در $x=0$ بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیر است و تمام مشتقات آن از هر مرتبه‌ای برابر صفر است. پس f بسط تیلور دارد، ولی چون $f^{(n)}(0)=0$، بنابراین همه‌ی ضرایب بسط تیلور f، صفر هستند یعنی بسط تیلور f به خود f همگرا نیست.

مثال ۸۱: مشتق تابع $f(x)=x^{\sin x}+(\sin x)^x$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱-
۲) ۰
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(x)=x^{\sin x}+(\sin x)^x \Rightarrow f'(x)=x^{\sin x}(\cos x\operatorname{Ln}x+\frac{1}{x}\sin x)+(\sin x)^x(\operatorname{Ln}\sin x+x.\frac{\cos x}{\sin x})$$

با جایگذاری $\frac{\pi}{2}$ در معادله فوق نتیجه می‌شود $f'(\frac{\pi}{2})=1$.

مثال ۸۲: تابع f با ضابطه $f(x)=\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\sin x))$ روی چه مجموعه‌ای مشتق‌پذیر است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۵)

۱) $[0,2\pi]$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $\{\varnothing\}$
۴) $[0,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را حساب می‌کنیم، عبارت جلوی Ln یعنی $\operatorname{Ln}(\sin x)$ باید بزرگتر از صفر باشد، لذا داریم: $\operatorname{Ln}(\sin x)>0 \Rightarrow \sin x>1$
اما $\sin x$ نمی‌تواند بزرگتر از ۱ باشد! چون همواره کوچکتر یا مساوی ۱ است، پس دامنه‌ی f تهی است و لذا f در هیچ جا مشتق ندارد.

مثال ۸۳: اگر $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-k)$ باشد، آن‌گاه $f'(1)$ کدام است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۵)

۱) $(-1)^{k-1}k!$
۲) $(-1)^{k+1}(k-1)!$
۳) $k!$
۴) $(k-1)!$

پاسخ : گزینه «۲» مشتق با عامل صفرکننده داریم، بنابراین کافی است از عبارت صفرشونده مشتق گرفته و در بقیه عبارات ضرب کنیم؛ عامل صفرکننده $(x-1)$ است و مشتق آن (۱) است، بنابراین داریم:

$$f'(1)=1\times(1-2)(1-3)\cdots(1-k)=\underbrace{(-1)(-2)(-3)\cdots(1-k)}_{\text{تا }(k-1)}=(-1)^{k+1}(k-1)!$$

مثال ۸۴: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$، $g(0)=g'(0)=0$ و $g''(0)=70$، آن‌گاه $f'(0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) ۰
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۳۵
۴) ۷۰

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه $f'(0)$، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=35$$

مثال ۸۵: اندازه مشتق $\operatorname{tgh}^{-1}(\sin 2x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) تعریف نشده

پاسخ : گزینه «۳» با استفاده از فرمول مقابل به سؤال جواب می‌دهیم:

$$(\operatorname{tgh}^{-1}u)'=\frac{u'}{1-u^2}\quad,\quad |x|<1$$

$$\text{مشتق تابع}=\frac{2\cos 2x}{1-\sin^2 2x}=\frac{2\cos 2x}{\cos^2 2x}=\frac{2}{\cos 2x}\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}}\frac{2}{\cos\frac{\pi}{3}}=4$$

مثال ۸۶: مشتق تابع $\cos^{-1}(1+tg^{-1}\sqrt{x})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

۲) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

۳) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

۴) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)\sqrt{-2tg^{-1}\sqrt{x}-(tg^{-1}\sqrt{x})^2}}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم: $(\cos^{-1}(u))'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ و $(tg^{-1}(v))'=\dfrac{v'}{1+v^2}$

با در نظر گرفتن $v=\sqrt{x}$ و $u=1+tg^{-1}(\sqrt{x})$، داریم:

$$u'=\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\Rightarrow[\cos^{-1}(1+tg^{-1}(\sqrt{x}))]'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}{\sqrt{1-(1+tg^{-1}(\sqrt{x}))^2}}$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{1-(1+(tg^{-1}(\sqrt{x}))^2+2tg^{-1}(\sqrt{x}))}}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{-2tg^{-1}(\sqrt{x})-(tg^{-1}(\sqrt{x}))^2}}$$

مثال ۸۷: هرگاه $x^3-y^3=1$، آن‌گاه مقدار y'' برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) xy^3 ۲) $\dfrac{y^2}{x^5}$ ۳) $-\dfrac{2x}{y^5}$ ۴) $\dfrac{x^2+1}{y^5}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$x^3-y^3=1\Rightarrow y'=-\frac{3x^2}{-3y^2}=\frac{x^2}{y^2}\Rightarrow y''=\frac{2xy^2-2yy'x^2}{y^4}=\frac{2xy-2x^2y'}{y^3}$$

$$\xrightarrow{y'=\frac{x^2}{y^2}}y''=\frac{2xy-\frac{2x^4}{y^2}}{y^3}=\frac{2xy^3-2x^4}{y^5}=\frac{2x(y^3-x^3)}{y^5}=\frac{-2x}{y^5}$$

مثال ۸۸: مشتق $\sec^{-1}x$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$ ۲) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}$ ۴) $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$، بنابراین داریم:

$$y'=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

مثال ۸۹: اگر $f(x)=x|x|$، مقدار $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) -1 ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به ضابطه‌ی $|x|$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\ge 0\\ -x^2 & ;\ x<0\end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$ ابتدا باید دید به ازای کدام مقدار x به مقدار $y=-\frac{1}{4}$ می‌رسیم. واضح است که به ازای $x=-\frac{1}{2}$ داریم $y=-x^2=-\frac{1}{4}$، اکنون با استفاده از فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}\Rightarrow(f^{-1})'(-\frac{1}{4})=\frac{1}{f'(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{-2x}\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=1$$

مثال ۹۰: برای توابع حقیقی f و g داریم $g(a+b)=g(a)g(b)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ و $g(x)=xf(x)+1$. در این صورت کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

(نساجی ـ سراسری ۸۸)

۱) $g'(x)=1+f'(x)$
۲) $g'(x)=g(x)$
۳) $g'(x)=f(x)+f'(x)$
۴) در مورد مشتق g قضاوتی نمی‌توان کرد.

پاسخ : **گزینه «۲»** با استفاده از تعریف مشتق $g'(x)$ را حساب می‌کنیم. طبق صورت سؤال از تساوی $g(x+h)=g(x)g(h)$ هم استفاده می‌کنیم.

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-1}{h}g(x)$$

از صورت سؤال داریم $g(h)=hf(h)+1$ در نتیجه:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)+1-1}{h}g(x)=\lim_{h\to 0} f(h)g(x)$$

طبق صورت سؤال $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=1$ در نتیجه داریم:

$$g'(x)=1\times g(x)=g(x)$$

توجه: تابع $g(x)=e^x$ تنها تابعی است که در شرایط داده شده در این مسأله صدق می‌کند.

مثال ۹۱: مشتق تابع $u=\sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

(کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$
۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ : **گزینه «۴»** برای محاسبه مشتق از طرفین رابطه Ln می‌گیریم.

$$\text{Ln}\,u=\frac{1}{2}\text{Ln}(x+1)+\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1)+\frac{1}{2}\text{Ln}(x^3+1)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{u'}{u}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2x}{2(x^2+1)}+\frac{3x^2}{2(x^3+1)}\Rightarrow u'=\sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{2x}{2(x^2+1)}+\frac{3x^2}{2(x^3+1)}\right)$$

حال با قرار دادن $x=1$ در رابطه بالا مقدار $u'=3\sqrt{2}$ بدست می‌آید.

مثال ۹۲: از رابطه $x=\frac{y^2}{2-y}$، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $y=1$ کدام است؟

(کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{8}{9}$
۲) $-\frac{8}{27}$
۳) $\frac{4}{9}$
۴) $\frac{16}{27}$

پاسخ : **گزینه «۲»** به ازای $y=1$ مقدار $x=1$ حاصل می‌شود.

$$x=\frac{y^2}{2-y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{2y(2-y)+y^2}{(2-y)^2}=\frac{4y-y^2}{(2-y)^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(2-y)^2}{4y-y^2}$$

توجه کنید که به ازای $y=1$، مقدار $y'=\frac{1}{3}$ بدست می‌آید، حال برای محاسبه $\frac{d^2y}{dx^2}$ از طرفین رابطه اخیر نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2(2-y)y'(4y-y^2)-(4-2y)y'(2-y)^2}{(4y-y^2)^2}\xrightarrow[y'=\frac{1}{3}]{y=1}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-8}{27}$$

مثال ۹۳: اگر $f(x)=x|x|+1$، مقدار $(f^{-1})'(-3)$ کدام است؟

(کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ : **گزینه «۱»** ابتدا قرار می‌دهیم $x|x|+1=-3$ که از آن $x=-2$ بدست می‌آید. واضح است که به ازای $x<0$، تابع f به‌صورت $f(x)=-x^2+1$ در می‌آید. بنابراین داریم:

$$(f^{-1})'(-3)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{-2x}\xrightarrow{x=-2}\text{خواسته‌ی سؤال}=\frac{1}{4}$$

مثال ۹۴: مشتق مرتبه نهم تابع $y=\frac{1}{2x^2+x}$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) $511\times 8!$
۲) $513\times 8!$
۳) $1023\times 9!$
۴) $1025\times 9!$

پاسخ : **گزینه «۳»** ابتدا کسر مورد نظر را به کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2x^2+x}=\frac{1}{x(2x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+1}\Rightarrow y^{(9)}=\frac{(-1)^9\times 9!}{x^{10}}-\frac{-2^{10}\times 9!}{(2x+1)^{10}}\Rightarrow y^{(9)}(-1)=-9!+2^{10}\times 9!=1023\times 9!$$

توضیح: در بالا از فرمول روبرو استفاده کرده‌ایم:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-c)^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

مثال ۹۵: مشتق مرتبه پانزدهم تابع $f(x)=\frac{x}{1-x}$ در نقطه $x=2$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $14!-13$ ۴) $15!$

پاسخ : گزینه «۴» بطور کلی اگر $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، آن‌گاه $y^{(n)}=\frac{(-c)^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$. بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{x}{1-x}\Rightarrow f^{(15)}(x)=\frac{(-(-1))^{14}(1\times1-0\times(-1))(15!)}{(1-x)^{16}}\Rightarrow f^{(15)}(2)=\frac{15!}{(1-2)^{16}}=15!$$

مثال ۹۶: a و b برای تابع f(x) با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ ax+b & x\geq 1\end{cases}$ چقدر باشد تا به ازای آنها $f'(1)$ وجود داشته باشد؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) $a=-1$ و $b=2$ ۲) $a=1$ و $b=-1$ ۳) $a=2$ و $b=-1$ ۴) جواب ندارد.

پاسخ : گزینه «۳» برای آن‌که $f'(1)$ وجود داشته باشد، لازم است f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست f در $x=1$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}f_+(1)=f_-(1) \Rightarrow a+b=1\\ f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow a=2\end{cases}\Rightarrow b=-1$$

مثال ۹۷: اگر $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=3$ باشد، مشتق $\sqrt{f(x)}$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{3\sqrt2}{4}$ ۲) $\frac{3\sqrt2}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ : گزینه «۱» چون حد مخرج کسر صفر است ($\lim\limits_{x\to-1}x+1=0$) حد کسر صورت نیز باید مساوی صفر باشد تا حد کسر حاصل مبهم و پس از رفع ابهام حد موجود و مساوی ۳ باشد، یعنی داریم:

$$\lim_{x\to-1}f(x)-2=0\to\lim_{x\to-1}f(x)=2$$

چون در صورت سؤال مشتق $\sqrt{f(x)}$ در نقطه $x=-1$ خواسته شده است، پس لزوماً باید تابع $f(x)$ در نقطه $x=-1$ مشتق‌پذیر و پیوسته باشد. پس رابطه زیر برقرار است:

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=2$$

$$3=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)\to f'(-1)=3$$

لذا داریم:

$$(\sqrt{f(x)})'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\xrightarrow{x=-1}(\sqrt f)'(-1)=\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)}}=\frac{3}{2\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{4}$$

مثال ۹۸: مشتق مرتبه دهم تابع $f(x)=x\sin^2x$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) 32π ۲) 64π ۳) 10×2^8 ۴) 10×2^9

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم و سپس به کمک قاعده لایب‌نیتز مشتق می‌گیریم: $y=x\sin^2x=x.\frac{1-\cos2x}{2}=\frac12x-\frac12x\cos2x$

$$\Rightarrow y^{(10)}=0-\frac12(x\times-2^{10}\cos2x-10\times2^9\sin2x)\Rightarrow y^{(10)}(\frac{\pi}{4})=\frac{-1}{2}(\frac{\pi}{4}\times-2^{10}\times\cos\frac{\pi}{2}-10\times2^9\times\sin\frac{\pi}{2})=10\times2^8$$

یادآوری: اگر $y=xf(x)$، آن‌گاه $y^{(n)}=xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)$.

مثال ۹۹: مشتق عبارت $tgh(Lnx)$ به ازای $x=2$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۶۴

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $(tgh\,u)'=\frac{u'}{\cosh^2u}$ و $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. لذا:

$$f'(x)=\frac{1}{\cosh^2(Lnx)}\times\frac1x\xrightarrow{x=2}f'(2)=(\frac45)^2\times\frac12=\frac{16}{50}=0/32$$

در محاسبات فوق مقدار $\cosh(Ln2)$ را به‌صورت روبرو بدست می‌آوریم:

$$\cosh(Ln2)=\frac{e^{Ln2}+e^{-Ln2}}{2}=\frac{e^{Ln2}+e^{Ln2^{-1}}}{2}=\frac{2+\frac12}{2}=\frac54$$

مثال ۱۰۰: هرگاه تابع $f(x)$ دارای خاصیت $f(u+v)=f(u)f(v)$ به ازای هر u و v باشد و $f(0)=f'(0)=1$ آن‌گاه به ازای هر x: (هسته‌ای ـ آزاد ۸۹)

۱) $f'(x)=2f(x)$ ۲) $f(x)=2f'(x)$ ۳) $f'(x)=f(x)$ ۴) $f(x)=\frac{1}{2}f'(x)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اگر در طرفین تساوی $f(u+v)=f(u)f(v)$ به جای u، متغیر x و به جای v متغیر h قرار دهیم، آن‌گاه می‌توان گفت $f(x+h)=f(x)f(h)$ و لذا داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\xrightarrow{f'(0)=1}f'(x)=f(x)$$

مثال ۱۰۱: اندازه مشتق عبارت $\frac{3(\sqrt[3]{5x-2})^2}{(2x-3)^5(x-1)^4}$ به ازای $x=2$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) -124 ۲) -136 ۳) -142 ۴) -163

پاسخ: گزینه «۴» با فرض $f(x)=\frac{3(\sqrt[3]{5x-2})^2}{(2x-3)^5(x-1)^4}$، با استفاده از خاصیت تابع لگاریتم طبیعی Ln داریم:

$$\mathrm{Ln}f(x)=\mathrm{Ln}3+\frac{2}{3}\mathrm{Ln}(5x-2)-5\mathrm{Ln}(2x-3)-4\mathrm{Ln}(x-1)$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{5x-2}-5\times\frac{2}{2x-3}-4\times\frac{1}{x-1}$$

بنابراین داریم:

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{3\sqrt[3]{8\times 8}}{1}=12\Rightarrow\frac{f'(2)}{12}=\frac{10}{24}-10-4=\frac{-326}{24}\Rightarrow\frac{f'(2)}{12}=\frac{-326}{24}\Rightarrow f'(2)=-163$$

مثال ۱۰۲: به ازای چه مقادیری از a و b (برحسب c) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|}&;\ |x|>c\\ a+bx^2;&|x|\le c\end{cases}$ در c مشتق‌پذیر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $b=\frac{3}{2c},a=\frac{-1}{2c^3}$ ۲) $b=\frac{-3}{2c},a=\frac{1}{2c^3}$ ۳) $b=\frac{1}{2c^3},a=\frac{3}{2c}$ ۴) $b=-\frac{1}{2c^3},a=\frac{3}{2c}$

پاسخ: گزینه «۴» برای این‌که تابع f در نقطه‌ی $x=c$ مشتق‌پذیر باشد اولاً باید در این نقطه پیوسته باشد یعنی حد راست و چپ f در این نقطه برابر باشند و مساوی مقدار تابع در این نقطه باشد.

$$f(c)=\lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c^-}f(x)\xrightarrow{f(c)=a+bc^2}a+bc^2=\frac{1}{|c|}\qquad(1)$$

و البته باید $c\neq 0$ باشد، حال فرض می‌کنیم $c>0$ باشد، در نتیجه با محاسبه مشتق چپ و راست داریم: (۲) $f'(c^+)=\frac{-1}{c^2}\ ,\ f'(c^-)=2bc\ \Rightarrow 2bc=\frac{-1}{c^2}$

با حل معادلات (۱) و (۲) $a=\frac{3}{2c}\ ,\ b=\frac{-1}{2c^3}$

مثال ۱۰۳: تابع $y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}&;\ x\neq 0\\ 0&;\ x=0\end{cases}$ در $x=0$: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) دارای مینیمم نسبی است. ۲) ناپیوسته است. ۳) مشتق‌پذیر است. ۴) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۳» برای بررسی پیوستگی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0\ ,\ f(0)=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

بنابراین تابع داده شده در نقطه $x=0$ پیوسته می‌باشد، بنابراین گزینه (۲) غلط است.

برای بررسی مشتق‌پذیری تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=0$ با توجه به تعریف داریم:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\Rightarrow f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\Rightarrow f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0\times\text{کراندار}=0$$

بنابراین تابع داده شده در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است.

مثال ۱۰۴: مشتق مرتبه چهارم تابع $y=\frac{(x-1)^4.\sqrt{x^2+3}}{(3x-1)^3}$ به ازای $x=1$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» مشتق مرتبه‌ی چهارم $f(x)$ را در $x=1$ می‌خواهیم و عامل صفرشونده‌ی $(x-1)^4$ با توان ۴ در این تابع ضرب شده است. کافی است از همین عامل، چهار بار مشتق بگیریم و در سایر عوامل فقط $x=1$ قرار بدهیم.

$$f^{(4)}(1)=\frac{(4\times 3\times 2\times 1)\sqrt{x^2+3}}{(3x-1)^3}\Bigg|_{x=1}=\frac{4\times 3\times 2\times 2}{2^3}=6$$

درسنامه۲: آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و آهنگ‌های وابسته

مثال ۱: نیمه‌عمر یک ماده‌ی رادیواکتیو که از قانون زوال مواد رادیواکتیو پیروی می‌کند، ۳/۶۴ روز است. ۳۰۰ گرم از این ماده داده شده است. اگر m، جرم باقی‌مانده پس از ۱/۸۲ روز باشد آن‌گاه کدام عبارت صحیح است؟

۱) $m < ۲۲۵$ گرم است. ۲) مقدار m دقیقاً ۲۵۵ گرم است. ۳) $m > ۲۲۵$ گرم است. ۴) مقدار m دقیقاً ۱۵۰ گرم است.

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید $m(t)$ جرم باقی‌مانده از این ماده پس از t روز باشد. می‌دانیم $m(t)=m(۰)e^{kt}$. طبق صورت سؤال (گرم) $m(۰)=۳۰۰$.

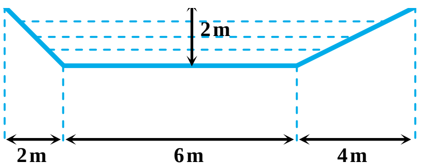
برای تعیین مقدار k از نیمه عمر این ماده استفاده می‌کنیم:
$$T=۳/۶۴ \Rightarrow -\frac{Ln۲}{k}=۳/۶۴ \Rightarrow k=-\frac{Ln۲}{۳/۶۴} \quad (\text{نیمه عمر})$$

با جایگذاری $m(۰)$ و k در فرمول $m(t)$ خواهیم داشت: $m(t)=m(۰)e^{kt} \Rightarrow m(t)=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۳/۶۴}t}$. به ازای $t=۱/۸۲$ داریم:
$$m(۱/۸۲)=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۳/۶۴}\times ۱/۸۲}=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۲}}$$

می‌دانیم که $e^{Ln۲}=۲$، در نتیجه $e^{-\frac{Ln۲}{۲}}=۲^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است:
$$m(۱/۸۲)=۳۰۰\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۳۰۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۳۰۰\sqrt{۲}}{۲}=۱۵۰\sqrt{۲}$$

از آن‌جا که $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، داریم:
$$m(۱/۸۲)=۱۵۰\times ۱/۴\simeq ۲۱۰<۲۲۵$$

مثال ۲: یک استخر مستطیل شکل ۱۲ متر طول و ۶ متر عرض دارد و گودترین قسمت آن ۲ متر عمق دارد. مقطع استخر مطابق شکل زیر است، استخر را با سرعت ۲۰ متر مکعب در دقیقه با آب پر می‌کنیم. سرعت افزایش ارتفاع آب از گودترین قسمت استخر در لحظه‌ای که ارتفاع آب در گودترین قسمت استخر برابر ۱/۵ متر می‌باشد، چند متر بر دقیقه است؟

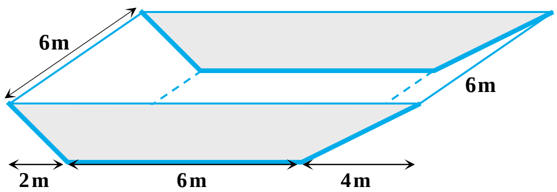


۱) $\frac{۷}{۴۵}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۰}{۶۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۴۹/۵}$

پاسخ: گزینه «۳» در این سؤال سرعت پر شدن استخر (سرعت افزایش حجم آب در استخر) داده شده و **سرعت افزایش ارتفاع آب** خواسته شده است.

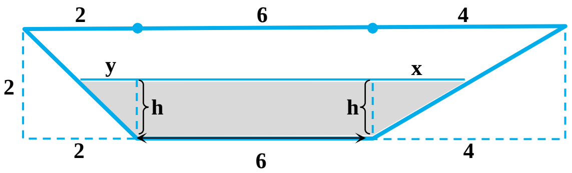
در واقع اگر حجم آب را با V و ارتفاع آب را با h نشان دهیم، $\frac{dV}{dt}$ داده شده و $\frac{dh}{dt}$ خواسته شده است. پس باید دنبال رابطه‌ای بین V و h باشیم.

اکنون روی این هدف متمرکز می‌شویم که چه رابطه‌ای بین حجم آب درون استخر (V) و ارتفاع آب (h) وجود دارد؟



دقت کنید که شکل رسم شده در صورت سؤال، مقطعِ این استخر است، ما در این شکل عرض استخر را نمی‌بینیم فقط عمق و طول آن را می‌بینیم. اگر می‌خواهید تجسم بهتری از این استخر داشته باشید، به شکل مقابل توجه کنید. اما برای ادامه‌ی حل مسأله شکل دوم را رسم کرده‌ایم. وقتی آب درون استخر به ارتفاع h می‌رسد حجم آب درون استخر برابر است با:

$V=$ (عرض استخر) $\times$ (مساحت قسمت پرشده از مقطع استخر)



اکنون به مقطع استخر و بخشی از آن که از آب پرشده است، در شکل دوم دقت کنید. مساحت قسمت پر شده از ۳ بخش تشکیل شده است:

در بخش میانی یک مستطیل به طول ۶ و عرض h داریم که مساحت آن 6h است.

در سمت راست یک مثلث داریم که مساحت آن $\frac{h\times x}{۲}$ است. ولی می‌توان x را برحسب h پیدا کرد.

طبق قضیه‌ی تالس، اضلاع مثلث کوچک و اضلاع مثلث بزرگ با هم تناسب دارند، پس داریم:
$$\frac{h}{۲}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x=۲h$$

پس مساحت مثلث کوچک $\frac{h\times ۲h}{۲}=h^۲$ است.

در سمت چپ هم یک مثلث کوچک داریم که مساحت آن $\frac{h\times y}{۲}$ است. به روش مشابه داریم:
$$\frac{h}{۲}=\frac{y}{۲} \Rightarrow y=h$$

پس مساحت مثلث کوچک $\frac{h\times h}{۲}=\frac{h^۲}{۲}$ است. در نتیجه مساحت مقطعی که از آب پر شده، برابر است با:
$$۶h+h^۲+\frac{h^۲}{۲}$$

و بنابراین حجم آب برابر است با:
$$V=(\text{عرض استخر})\times(\text{مساحت مقطع پرشده از آب})=۶(\frac{h^۲}{۲}+۶h+h^۲)=۹h^۲+۳۶h$$

حالا می‌توانیم از طرفین نسبت به t مشتق بگیریم تا رابطه‌ای بین $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{dh}{dt}$ ایجاد شود:
$$\frac{dV}{dt}=۱۸h\frac{dh}{dt}+۳۶\frac{dh}{dt}$$

طبق صورت سؤال $\frac{dV}{dt}=۲۰$ و $h=۱/۵=\frac{۳}{۲}$. پس داریم:
$$۲۰=۱۸\times\frac{۳}{۲}\frac{dh}{dt}+۳۶\frac{dh}{dt} \Rightarrow ۲۰=۶۳\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{۲۰}{۶۳}\ (\frac{\text{متر}}{\text{دقیقه}})$$

مثال ۳: جمعیت مورچه‌ها در یک لانه از آنها به نسبت تعداد آنها زیاد می‌شود. اگر در ۱۲ روز تعداد آنها دو برابر شود. ضریب رشد کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{Ln2}{12}$ ۴) $\frac{Ln2}{6}$

پاسخ: **گزینه «۳»** اگر جمعیت حاضر را c فرض کنیم و ضریب رشد را α فرض کنیم، در این صورت تعداد جمعیت به‌صورت $x(t)=ce^{\alpha t}$ خواهد بود. چون پس از گذشت ۱۲ روز جمعیت دو برابر شده، پس داریم: $2c=ce^{12\alpha} \Rightarrow e^{12\alpha}=2 \Rightarrow 12\alpha=Ln2 \Rightarrow \alpha=\frac{Ln2}{12}$

مثال ۴: اگر ۲۰ درصد یک جسم رادیواکتیو در سال ناپدید شود، نیمه عمر این جسم رادیواکتیو چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱/۳۸۶ سال ۲) ۲/۲۳ سال ۳) ۳/۱۰۶۷ سال ۴) ۶/۹۳۱ سال

پاسخ: **گزینه «۳»** اگر مقدار اولیه ماده رادیواکتیو را a فرض کنیم، در این صورت مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t برابر $x(t)=ae^{kt}$ خواهد بود. چون در یک سال ۲۰ درصد ماده رادیواکتیو از بین می‌رود، پس داریم: $0/8a=ae^{k} \Rightarrow e^{k}=0/8 \Rightarrow k=Ln(0/8)$

بنابراین نیمه عمر برابر است با: $T=\frac{-Ln2}{k}=\frac{-Ln2}{Ln0/8}\cong 3/1067$

تذکر: نیمه عمر مدت زمانی است که طول می‌کشد تا مقدار ماده رادیواکتیو نصف شود و از فرمول $T=\frac{-Ln2}{k}$ به دست می‌آید.

مثال ۵: حجم یک مکعب به نسبت ۷ سانتی‌متر مکعب در دقیقه اضافه می‌شود. سطح کل مکعب وقتی طول ضلع آن ۱۲ سانتی‌متر است به چه نسبتی زیاد می‌شود؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: **گزینه «۲»** اگر ضلع مکعب را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم مکعب}: V(x)=x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\frac{dV}{3x^2}\\ \text{سطح مکعب}: S(x)=6x^2 \Rightarrow \frac{dS}{dx}=12x \Rightarrow dS=12xdx\end{array}\right\} \Rightarrow dS=12x\times\frac{dV}{3x^2}\left.\begin{array}{l}\\ \\ dV=7\ ,\ x=12 \quad \text{طبق صورت مسأله}\end{array}\right\} \Rightarrow dS=\frac{12\times 7}{3\times 12}=\frac{7}{3}$$

مثال ۶: اگر طول یک مستطیل ۱۵m و در حال افزایش با نرخ $3\frac{m}{s}$ بوده و عرض آن ۶m و در حال کاهش با نرخ $2\frac{m}{s}$ باشد، در این صورت نرخ تغییر مساحت این مستطیل $(\frac{m^2}{s})$ ...... و در حال ...... است. (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۲، کاهش ۲) ۴۸، کاهش ۳) ۱۲، افزایش ۴) ۴۸، افزایش

پاسخ: **گزینه «۱»** طول، عرض و مساحت مستطیل مربوطه تابعی از زمان (t) می‌باشند:

$$s=xy \Rightarrow \frac{ds}{dt}=y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}=6\times 3+15\times(-2)=-12$$

مثال ۷: قانون حرکت جسمی بر روی خط راست $S=t^3-4t^2-3t$ است. شتاب این متحرک در لحظه‌ای که سرعت به صفر برسد، کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: **گزینه «۴»** می‌دانیم اگر $S(t)$ معادله حرکت باشد $S'(t)$ معادله سرعت و $S''(t)$ معادله شتاب می‌باشد. پس داریم:

$$S(t)=t^3-4t^2-3t \Rightarrow S'(t)=3t^2-8t-3 \Rightarrow S'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-\frac{1}{3} \quad \text{غیرقابل قبول (زمان منفی نداریم)}\end{cases}$$

$$S''(t)=6t-8 \Rightarrow S''(3)=6\times 3-8=10$$

مثال ۸: گاز به درون یک بالن کره‌ای شکل به نسبت ۵ متر مکعب در دقیقه دمیده می‌شود. وقتی شعاع کره ۳ متر است. شعاع آن با چه نسبتی در دقیقه زیاد می‌شود؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۵}{۳۶\pi}$ ۲) $\frac{۵}{۳۰\pi}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۰}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow \frac{dv}{dt}=۴\pi r^۲\frac{dr}{dt} \Rightarrow ۵=۴\pi\times ۳^۲\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{۵}{۳۶\pi}$$

مثال ۹: یک نقطه در امتداد منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x}$ به نوعی حرکت می‌کند که مؤلفه‌ی x آن در هر دقیقه ۳ واحد افزایش می‌یابد. وقتی $x=۱$، مؤلفه y آن به چه نسبتی در دقیقه تغییر می‌کند؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۳}$ واحد ۲) $\frac{۲}{۳}$ واحد ۳) $\frac{۳}{۲}$ واحد ۴) ۳ واحد

پاسخ: گزینه «۳» به ازای $x=۱$، مقدار y برابر ۱ خواهد بود.

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow dy=\frac{dx}{۲\sqrt{x}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۱۰: اگر سود به طور پیوسته بر سرمایه اضافه شود ارزش فعلی ۱ میلیون ریال با نرخ سود ۲۰٪ در طی ۵ سال برابر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $۲(۱۰)^۶$ ۲) $e(۱۰)^۶$ ۳) $\frac{۱}{۲}(۱۰)^۶$ ۴) $\frac{۱}{e}(۱۰)^۶$

پاسخ: گزینه «۲» اگر ارزش سرمایه در سال مبدأ $x(t_0)$ و نرخ سود α $(0\le\alpha\le ۱)$ باشد، ارزش سرمایه در سال tاُم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x(t)=x(t_0)e^{\alpha t} \Rightarrow \text{داریم}: x(t)=۱۰^۶e^{0/۲t} \Rightarrow x(۵)=۱۰^۶e^{0/۲\times۵}=۱۰^۶e$$

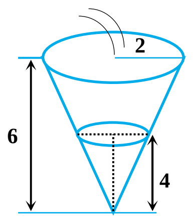
مثال ۱۱: اگر نرخ رشد جمعیت پیوسته باشد، با نرخ ۲٪ تعداد ۱۰۰ نفر در جامعه پس از ۵۰ سال به چه تعدادی خواهد رسید؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $۱۰۰e^۲$ ۲) $۱۰۰e$ ۳) $۲۰۰e$ ۴) $۲۰۰e^۲$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم اگر جمعیت در سال مبدأ برابر $p(t_0)$ باشد و نرخ رشد جمعیت α $(0\le\alpha\le۱)$ باشد، جمعیت در سال tاُم از رابطه $p(t)=p(t_0)e^{\alpha t}$ بدست می‌آید. پس برای این سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p(t_0)=۱۰۰\\ \alpha=0/0۲\\ t=۵۰\end{array}\right\} \Rightarrow p(۵۰)=۱۰۰e^{0/0۲\times۵۰}=۱۰۰e$$

مثال ۱۲: در یک مخزن آب که به شکل مخروط است و رأس مخروط به طرف پائین قرار دارد، آب با سرعت ۰/۵ مترمکعب در دقیقه وارد می‌شود. اگر ارتفاع مخزن ۶ متر و شعاع قاعده آن ۲ متر باشد، ارتفاع آب وقتی به ۴ متری برسد، با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)



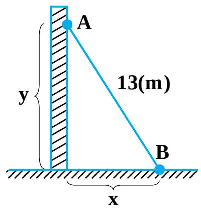
۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۳۲\pi}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶\pi}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲\pi}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم حجم یک مخروط با ارتفاع h و شعاع قاعده r برابر با $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h$ می‌باشد. از طرفی در این مخروط نسبت ارتفاع به شعاع برابر ۶ به ۲ است، یعنی $\frac{h}{r}=\frac{۶}{۲}$. بنابراین $r=\frac{h}{۳}$. پس فرمول حجم مخروط به‌صورت زیر در می‌آید:

$$V=\frac{\pi}{۳}\times(\frac{h}{۳})^۲h=\frac{\pi}{۲۷}h^۳ \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{۹}h^۲\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۹}\times۴^۲\times\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{۹}{۳۲\pi}$$

مثال ۱۳: نردبانی که طول آن ۱۳ متر است کنار دیوار قرار دارد. لحظه‌ای که سر نردبان از زمین ۱۲ متر فاصله دارد و پای نردبان از دیوار ۵ متر فاصله دارد، سر نردبان با سرعت ۳ متر در ثانیه سقوط می‌کند، پای نردبان با چه سرعتی از دیوار دور می‌شود؟ (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$



پاسخ: **هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.** در شکل مقابل فاصله‌ی سر نردبان (A) از زمین را با y و فاصله‌ی پای نردبان (B) از دیوار را با x نشان داده‌ایم. در صورت سؤال سرعت سقوط نردبان یعنی $\frac{dy}{dt}$ را به ما داده‌اند و می‌دانیم که $\frac{dy}{dt}=-۳(\frac{m}{s})$ است. چرا آن را با علامت منفی می‌نویسیم؟ زیرا می‌دانیم که وقتی نردبان سقوط می‌کند، y در حال کاهش است نه در حال افزایش. هدف ما محاسبه‌ی سرعت دور شدن B از دیوار یعنی $\frac{dx}{dt}$ است. اگر بتوانیم رابطه‌ای بین x و y پیدا کنیم، آن‌گاه رابطه‌ی بین $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ هم پیدا می‌شود و مسأله حل می‌شود. با یک نگاه به شکل، واضح می‌شود که قضیه‌ی فیثاغورس قابل استفاده است:

$$x^۲+y^۲=۱۳^۲ \Rightarrow x=\sqrt{۱۶۹-y^۲}$$

اکنون با مشتق‌گیری نسبت به t داریم:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-۲\frac{dy}{dt}y}{۲\sqrt{۱۶۹-y^۲}}$$

اگر $y=۱۲$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-۲(-۳)(۱۲)}{۲\sqrt{۱۶۹-۱۴۴}}=\frac{۶\times ۱۲}{۲\sqrt{۲۵}}=\frac{۳۶}{۵}$$

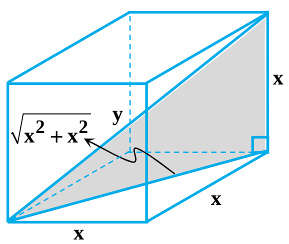
توضیح: می‌توانستیم از طرفین معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱۳$ نسبت به t مشتق بگیریم. با دقت به این‌که x و y هر دو توابعی وابسته به t هستند خواهیم داشت:

$$۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۱۶۹$$

و حالا $x=۵, y=۱۲$ و $\frac{dy}{dt}=-۳$ را قرار می‌دهیم و به جواب $\frac{dx}{dt}=\frac{۳۶}{۵}$ می‌رسیم. در ضمن از همان ابتدا و بدون انجام محاسبات می‌دانستیم که جواب باید مثبت باشد. زیرا وقتی نردبان سقوط می‌کند، x در حال افزایش است پس $\frac{dx}{dt}$ مثبت است.

مثال ۱۴: فرض کنید که قطر یک مکعب با سرعت ۳ اینچ در دقیقه در حال افزایش باشد، سرعت افزایش طول هر ضلع این مکعب در دقیقه برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\sqrt{۲}$ اینچ در دقیقه ۲) $\sqrt{۳}$ اینچ در دقیقه ۳) ۲ اینچ در دقیقه ۴) ۳ اینچ در دقیقه



پاسخ: **گزینه «۲»** اگر طول ضلع مکعب را x و طول قطر آن را y فرض کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$x^۲+(x^۲+x^۲)=y^۲ \Rightarrow ۳x^۲=y^۲ \Rightarrow y=\sqrt{۳}x$$

$$\left.\begin{matrix} dy=\sqrt{۳}dx \\ dy=۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۳=\sqrt{۳}dx \Rightarrow dx=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

مثال ۱۵: یک جسم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که به‌صورت نمایی وزن کم می‌کند. به عنوان مثال جسم ۲۰۰ گرمی پس از یک ساعت به ۵۰ گرم می‌رسد. بعد از سه ساعت چه مقدار از این جسم باقی خواهد ماند؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲۵ گرم ۲) ۵۰ گرم ۳) ۳/۱۲۵ گرم ۴) ۵۰/۹ گرم

پاسخ: **گزینه «۳»** اگر وزن جسم در حال حاضر ۲۰۰ باشد، وزن جسم پس از t ساعت $\omega(t)=۲۰۰(\frac{۱}{۴})^t$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\omega(۳)=۲۰۰(\frac{۱}{۴})^۳=\frac{۲۰۰}{۶۴}=۳/۱۲۵$$

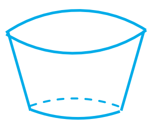
مثال ۱۶: پولی را در نظر بگیرید که در هر ۸ سال ۵ برابر بشود. فرض کنید که صاحب پول به این پول واگذاری تا ۲۴ سال دست نزند. اگر در پایان ۲۴ سال ۱۰۰۰۰ واحد پول به صاحب پول بدهند، اصل پول شخص چقدر بوده است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

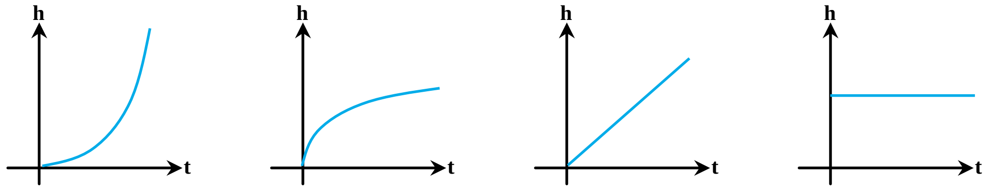
۱) ۸۰ واحد پول ۲) ۶۶۶/۶۷ واحد پول ۳) ۲۰۰۰ واحد پول ۴) ۴۰۰ واحد پول

پاسخ: گزینه «۱» طبق فرض هر ۸ سال مقدار پول ۵ برابر می‌شود، بنابراین پس از ۲۴ سال مقدار پول $۵^۳ = ۱۲۵$ برابر می‌شود. بنابراین داریم:

$$\text{اصل پول شخص} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۲۵} = ۸۰$$

مثال ۱۷: در یک ظرف گلدان شکل به نرخ ثابتی آب می‌ریزیم. ارتفاع سطح آب را با h و زمان را با t نمایش مـی‌دهـیم. کـدامیک از اشـکال زیـر مناسب‌ترین نمودار h برحسب t است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۲)





(۴) (۳) (۲) (۱)

پاسخ: گزینه «۳» واضح است که با گذشت زمان ارتفاع آب در ظرف بیشتر می‌شود، یعنی تابع $h(t)$ باید صعودی باشد، (گزینه‌ی (۱) رد می‌شود). امـا از آنجا که با بالاآمدن، سطح مقطع ظرف بزرگتر می‌شود، سرعت بالا آمدن آب یعنی $\frac{dh}{dt}$ به مرور زمان کاهش خواهد یافت. از اینجـا معلـوم اسـت کـه گزینـه‌ی (۳) صحیح است. در گزینه‌ی (۳) تابع $h(t)$ صعودی است اما هر چه t افزایش پیدا می‌کند، شیب $h(t)$ یعنی $\frac{dh}{dt}$ کمتر می‌شود.

مثال ۱۸: سرعت متحرکی در هر لحظه برابر با $V = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ است، شتاب آن کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

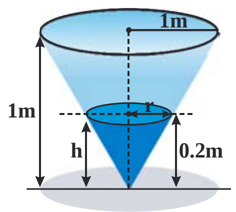
۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم مشتق معادله مکان متحرک برابر معادله سرعت متحرک و مشتق معادله سرعت برابر معادله شتاب متحرک می‌باشد، پس داریم:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}.\sqrt{x} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۹: در یک مخزن مخروطی شکل با ارتفاع یک متر و شعاع قاعده یک متر مایعی را با سرعت ۲ لیتر در دقیقه وارد می‌کنیم. در لحظـه‌ای کـه مایع در ارتفاع ۲۰ سانتی‌متری قرار دارد، سرعت افزایش ارتفاع مایع چند متر در دقیقه است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۲۰\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰\pi}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵\pi}$



پاسخ: گزینه «۱» هر چند شکل رسم شده در صورت سؤال این را نشان نمی‌دهد اما با توجه به ابعاد داده شده، در این مخروط شعاع قاعده با ارتفاع برابر است. اگر r و h شعاع و ارتفاع قسمت پر شده باشند، طبق قضیـه‌ی تـالس در ایـن قسمت هم $h = r$ می‌باشد و با توجه به فرمول حجم مخروط، حجـم مـایع درون ظـرف بـه‌صـورت $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ بیـان می‌گردد داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times h^۲ \times h = \frac{۱}{۳}\pi h^۳ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \pi h^۲ (\frac{dh}{dt})$$

در صورت سؤال عنوان شده که سرعت افزایش حجم مایع، ۲ لیتر در دقیقه و به عبارت دیگر ۰/۰۰۲ مترمکعب در دقیقـه می‌باشد پس داریم:

$$۰/۰۰۲ = \pi \times (۰/۲)^۲ \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{۲۰\pi} (\frac{\text{متر}}{\text{دقیقه}})$$

مثال ۲۰: اگر آهنگ تغییر کمیت x در رابطه $\frac{dx}{dt} = -۲x + ۱$ صدق کند و داشته باشیم $x^۲ + y^۲ = ۵y$. آهنگ تغییر y وقتی $x = ۲$ است، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $(۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۱)$ ۳) $(۴,۲)$ ۴) $(-۴,۴)$

پاسخ: گزینه «۴»

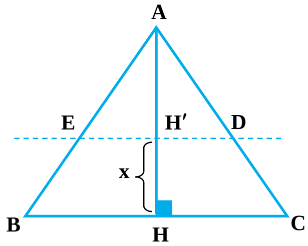
$$x^۲ + y^۲ - ۵y = ۰ \Rightarrow ۲x\frac{dx}{dt} + ۲y\frac{dy}{dt} - ۵\frac{dy}{dt} = ۰ \Rightarrow ۲x(-۲x+۱) + ۲y\frac{dy}{dt} - ۵\frac{dy}{dt} = ۰$$

با جایگذاری نقاط $(۲,۱)$ و $(۲,۴)$ در رابطه فوق مقادیر -۴ و $+۴$ برای $\frac{dy}{dt}$ به دست می‌آید.

مثال ۲۱: در مثلثی ضلع $BC = ۱۲$ و ارتفاع $AH = ۸$ می‌باشد. خطی موازی BC رسم می‌شود و دو ضلع دیگر مثلث را در E و D قطع می‌کنند. مشتق مساحت ذوزنقه $DEBC$ نسبت به x (فاصله دو خط موازی) کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) $۸-\frac{۴}{۳}x$ ۲) $۸-\frac{۳}{۴}x$ ۳) $۱۲-\frac{۳}{۲}x$ ۴) $۱۲-\frac{۲}{۳}x$

پاسخ: گزینه «۳» آنچه از صورت سؤال مشخص است، این است که باید مساحت ذوزنقه را برحسب x به دست آوریم. ابتدا شکل مربوط را رسم می‌کنیم. مساحت ذوزنقه به صورت زیر است:



$$S = \frac{۱}{۲} \times \text{ارتفاع} \times \text{مجموع طول دو قاعده}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times x \times (BC + ED) = \frac{x}{۲}(۱۲ + ED)$$

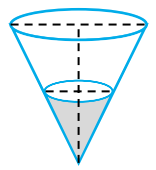
حالا باید ED را برحسب x به دست آوریم، برای این منظور از قضیه‌ی تالس کمک می‌گیریم:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{ED}{۱۲} = \frac{۸-x}{۸} \Rightarrow ED = ۱۲(۱-\frac{x}{۸})$$

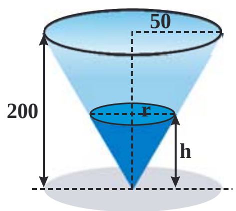
پس مساحت ذوزنقه برحسب x به صورت مقابل است:

$$S = \frac{x}{۲}(۱۲+۱۲-\frac{۱۲x}{۸}) = x(۱۲-\frac{۶x}{۸}) = ۱۲x - \frac{۳x^۲}{۴} \Rightarrow S'(x) = ۱۲ - \frac{۳x}{۲}$$

مثال ۲۲: آب با سرعت $\frac{۳}{۵}$ لیتر در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکل به ارتفاع ۲۰ دسی‌متر و قطر دهانه ۱۰ دسی‌متر می‌شود. پایین مخزن سوراخ است وقتی ارتفاع آب ۱۶ دسی‌متر باشد سطح آب با سرعت ۱ میلی‌متر بر ثانیه بالا می‌آید. مقدار نشت آب در هر ثانیه چند لیتر است؟ $(۱۶\pi = ۵۰)$ (MBA ـ سراسری ۸۶)



۱) ۰/۰۶
۲) ۰/۰۹
۳) ۰/۱
۴) ۰/۱۲



پاسخ: گزینه «۳» هر دسی‌متر، ۱۰ سانتی‌متر است. پس ارتفاع و قطر مخروط، ۲۰۰ و ۱۰۰ سانتی‌متر است. با توجه به شکل روبرو از قضیه‌ی تالس نتیجه می‌شود $\frac{h}{۲۰۰} = \frac{r}{۵۰}$ پس $r = \frac{۱}{۴}h$. بنابراین داریم:

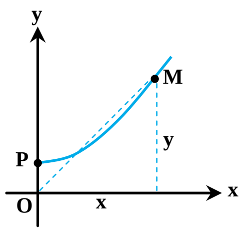
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۴۸}\pi h^۳ \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{۱}{۱۶}\pi h^۲ \frac{dh}{dt}$$

سرعت بالا آمدن آب یعنی $\frac{dh}{dt}$، یک میلی‌متر بر ثانیه یعنی ۰/۱ سانتی‌متر بر ثانیه است. با جایگزینی فرضیات مسأله در رابطه فوق نتیجه می‌شود ($\frac{۳}{۵}$ لیتر برابر $۶۰۰cm^۳$ است):

$$۶۰۰ - \text{مقدار نشتی در هر ثانیه} = \frac{۱}{۱۶}\pi \times ۱۶۰^۲ \times \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{۱۶}\pi \times ۱۶۰^۲ \times ۰/۱ = \frac{\pi}{۱۶} \times ۱۶۰^۲ \times \frac{۱}{۱۰} = ۱۶۰\pi \simeq ۵۰۰$$

$$\Rightarrow \text{مقدار نشتی در هر ثانیه} = ۶۰۰ - ۵۰۰ = ۱۰۰cm^۳ = ۰/۱ \text{ لیتر}$$

مثال ۲۳: یک کشتی از نقطه‌ی P بر روی مسیر سهمی به معادله $y = \frac{۱}{۵}(x^۲+۱۱)$ شروع به حرکت می‌کند و با سرعت ثابت ۰/۵ از نقطه‌ی O دور می‌شود. در لحظه‌ای که فاصله کشتی تا نقطه O برابر ۱۷ واحد طول باشد، سرعت افزایش فاصله کشتی از اتوبان چقدر است؟ (اتوبان کنار ساحل، محور xها فرض شده است.) (فیزیک دریا ـ سراسری ۸۷)



۱) $\frac{۱۷}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۱۷}$

۳) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر فرض کنیم فاصله‌ی نقطه‌ی M از O برابر با $\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد، دنبال $\frac{dy}{dt}$ هستیم. ابتدا فرض می‌کنیم $r = \sqrt{x^۲+y^۲}$ و برای راحتی کار می‌نویسیم $r^۲ = x^۲ + y^۲$ و چون دنبال $\frac{dy}{dt}$ هستیم، بنابراین x را برحسب y می‌نویسیم، چون M بر روی منحنی $y = \frac{۱}{۵}(x^۲+۱۱)$ قرار دارد. پس $x^۲ = ۵y - ۱۱$ و لذا داریم:

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ = ۵y - ۱۱ + y^۲ \Rightarrow ۲r\frac{dr}{dt} = (۲y+۵)\frac{dy}{dt} \xrightarrow[r=۱۷,\, y=۱۵]{\frac{dr}{dt}=۰/۵} ۲\times ۱۷ \times ۰/۵ = (۲\times ۱۵ + ۵)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{۱۷}{۳۵}$$

مثال۲۴: نقطه M بر روی منحنی $y=\sqrt{x}$ با سرعت ثابت $\frac{1}{\sqrt{10}}$ از مبدأ مختصات دور می‌شود. این نقطه در لحظه $x=9$ با کدام سرعت از محور y ها دور می‌شود؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{10}$ ۲) $\frac{6}{19}$ ۳) $\frac{4}{19}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر فاصله از مبدأ را با r نشان دهیم خواهیم داشت $r^2=x^2+y^2$. در صورت سؤال سرعت دور شدن از مبدأ یعنی $\frac{dr}{dt}$ را داریم و سرعت دور شدن از محور y ها را می‌خواهیم. فاصله تا محور y ها برابر است با x در نتیجه ما $\frac{dx}{dt}$ را می‌خواهیم. سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین x و r پیدا کنیم:

$$r^2=x^2+y^2 \xrightarrow{y=\sqrt{x}} r^2=x^2+x \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} 2r\frac{dr}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+\frac{dx}{dt}$$

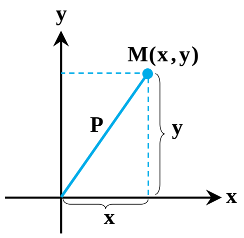
در نقطه‌ی مورد نظر داریم $x=9$ پس $y=\sqrt{9}=3$ و $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{90}$ در ضمن $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ است:

$$2\sqrt{90}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=18\frac{dx}{dt}+\frac{dx}{dt}=19\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{6}{19}$$

مثال۲۵: نقطه M بر روی خط $y=2x$ با سرعت ثابت $\frac{\sqrt{5}}{10}$ واحد در ثانیه از مبدأ مختصات دور می‌شود. سرعت افزایش فاصله این نقطه از محور xها چند واحد در ثانیه است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۱

پاسخ: گزینه «۳» پیش از آن‌که حل مسأله را آغاز کنیم به یک موضوع ساده توجه کنید. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، فاصله‌ی M از محور x ها برابر است با y، فاصله‌ی M از محور y ها برابر است با x و طبق قضیه‌ی فیثاغورس، فاصله‌ی M از مبدأ (که ما آن را با P نشان داده‌ایم) برابر است با: $P=\sqrt{x^2+y^2}$.



طبق صورت سؤال، سرعت دور شدن از مبدأ یعنی $\frac{dP}{dt}$ برابر است با $\frac{\sqrt{5}}{10}$ و ما سرعت دور شدن از محور x ها یعنی سرعت افزایش y به عبارتی $\frac{dy}{dt}$ را می‌خواهیم. اگر بتوانیم رابطه‌ای بین P و y پیدا کنیم، مسأله حل می‌شود. می‌دانیم که $P=\sqrt{x^2+y^2}$. از طرفی می‌دانیم که نقطه‌ی M روی خط $y=2x$ قرار دارد، پس $x=\frac{y}{2}$ است و خواهیم داشت:

$$P=\sqrt{\frac{y^2}{4}+y^2} \Rightarrow P=\sqrt{\frac{5}{4}y^2} \Rightarrow P=\frac{\sqrt{5}}{2}y$$

با مشتق‌گیری نسبت به t داریم:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{1}{5}=0/2$$

درسنامه۳: نوشتن معادلات خطوط قائم و مماس بر یک منحنی

مثال۱: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $x^۳+y^۳-xy-۷=۰$ در نقطه $A(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ : گزینه «۲» با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، شیب خط مماس و به عبارت دیگر مشتق در نقطه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$y'=-\frac{۳x^۲-y}{۳y^۲-x}\Rightarrow m=y'(۱,۲)=-\frac{۳-۲}{۳\times۴-۱}=-\frac{۱}{۱۱}$$

مثال۲: معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt{x+Lnx}$ در نقطه $x=۱$ برابر است با:

۱) $y=۲x+e$ ۲) $y=\frac{x}{e}$ ۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{۱}{x}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا شیب خط مماس را تعیین و سپس معادله خط را می‌نویسیم (دقت کنید؛ چون $x_۰=۱$، لذا $y_۰=\sqrt{۱+Ln۱}=۱$ است).

$$y=\sqrt{Lnx+x}\Rightarrow y'=\frac{\frac{۱}{x}+۱}{۲\sqrt{Lnx+x}}\Rightarrow m=y'(۱)=\frac{۲}{۲}=۱\Rightarrow y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۱=x-۱\Rightarrow y=x$$

مثال۳: معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=\sqrt{Lnx+\sqrt{Lnx+\sqrt{Lnx+\cdots}}}$، در نقطه‌ی $(۱,۰)$ کدام است؟ (جمله‌ها همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

۱) $۲y=-x+۱$ ۲) $۲y=x-۱$ ۳) $y=x-۱$ ۴) $y=-x+۱$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^۲=Lnx+\sqrt{Lnx+\sqrt{Lnx+\sqrt{Lnx+\cdots}}}$$

همان‌طور که می‌بینید، عبارت رادیکالی بالا، همان y است، که با جایگزینی آن داریم:

$$y^۲=Lnx+y\Rightarrow y^۲-Lnx-y=۰$$

برای پیدا کردن معادله‌ی خط قائم، شیب خط قائم مورد نیاز است. لذا داریم:

$$m_{مماس}=\frac{dy}{dx}=-\frac{-\frac{۱}{x}}{۲y-۱}=\frac{۱}{x(۲y-۱)}$$

چون شیب در نقطه‌ی $(۱,۰)$ موردنیاز است، لذا $m_{مماس}=\frac{۱}{۱(۲\times۰-۱)}=-۱$. پس شیب خط قائم برابر با $m_{قائم}=+۱$ است. لذا داریم:

$$y-۰=+۱(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

مثال۴: ضریب زاویه خط مماس به منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^۲+۳t-۸\\y=۲t^۲-۲t-۵\end{cases}$ در نقطه $A(۲,-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ : گزینه«۲» مقدار y'_x برابر است با $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{۴t-۲}{۲t+۳}$. حال مقادیر متناظر t در نقطه $A(۲,-۱)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases}t^۲+۳t-۸=۲\\۲t^۲-۲t-۵=-۱\end{cases}\Rightarrow t=۲\ (\text{ریشه مشترک دو معادله})\Rightarrow m=y'_x(۲)=\frac{۴(۲)-۲}{۲(۲)+۳}=\frac{۶}{۷}$$

مثال۵: خط مماس بر سهمی $x^۲=۱۶y$، بر خط $۲x+۴y+۷=۰$، عمود است. این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۴۸- ۲) ۱۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۶-

پاسخ: گزینه «۴» خط مماس بر سهمی، بر خط $۲x+۴y+۷=۰$ عمود است. با توجه به این‌که دو خط عمود بر هم، شیب‌هایشان عکس و قرینه یکدیگر است، پس شیب خط مماس برابر ۲ است. حال به منظور یافتن نقطه تماس و در نتیجه معادله مماس، ابتدا باید شیب را به کمک مشتق ضمنی تعیین کنیم:

$$x^۲-۱۶y=۰\Rightarrow f'(x)=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲x}{-۱۶}=\frac{x}{۸}\Rightarrow ۲=\frac{x}{۸}\Rightarrow x=۱۶\Rightarrow ۱۶^۲=۱۶y\Rightarrow y=۱۶$$

پس مختصات نقطه تماس $(۱۶,۱۶)$ و $m=۲$ است، لذا معادله‌ی خط مماس به‌صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$y-۱۶=۲(x-۱۶)$$

برای این‌که محل برخورد آن با محور y ها را بدانیم، لازم است به جای x های معادله‌ی خط مماس صفر قرار دهیم:

$$y-۱۶=۲(۰-۱۶)\Rightarrow y=-۱۶$$

مثال ۶: اگر مماس بر منحنی $y=x^3$ با وتر واصل دو نقطه $A(-1,-1)$ و $B(2,8)$ موازی باشد، آن‌گاه طول نقاط تماس مماس این خط با منحنی کدام است؟

۱) $x=\pm 1$ ۲) فقط $x=-1$ ۳) فقط $x=1$ ۴) $x=3$

پاسخ: گزینه «۱» شیب خط واصل AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-(-1)}{2-(-1)}=\frac{9}{3}=3$$

چون مماس بر منحنی با این خط موازی است لذا شیب آن برابر شیب خط AB یعنی $m=3$ می‌باشد:

$$y=x^3\Rightarrow m=y'(x_0)=3x_0^2\Rightarrow 3=3x_0^2\Rightarrow x_0^2=1\Rightarrow x_0=\pm 1$$

مثال ۷: دو منحنی $y=x^2$ و $y=x^3$ تحت چه زاویه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) $\text{Arctg}\frac{2}{7}$ ۲) $\text{Arctg}\frac{5}{7}$ ۳) $\text{Arctg}\frac{3}{7}$ ۴) $\text{Arctg}\frac{1}{7}$

پاسخ: گزینه «۴» طول نقطه محل تلاقی دو منحنی $x=1$ می‌باشد:

$$\begin{aligned}&y=x^2\Rightarrow y'=2x\Rightarrow m=y'(1)=2\\&y=x^3\Rightarrow y'=3x^2\Rightarrow m'=y'(1)=3\end{aligned}\Rightarrow \text{tg}\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{2-3}{1+2\times 3}\right|=\frac{1}{7}\Rightarrow\alpha=\text{Arctg}\frac{1}{7}$$

توجه شود که در نقطه $(0,0)$ نیز دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند اما در این نقطه بر هم مماسند و زاویه‌ای با یکدیگر نمی‌سازند.

مثال ۸: نمودار تابع $y=\frac{x-1}{1+x^2}$ محور yها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\text{Arctg}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(1+x^2)^2}\Rightarrow m=y'(0)=1\Rightarrow m=\text{tg}\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۹: زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌های تابع $f(x)=(x^2-3x+2)\lfloor x\rfloor$ در نقطه‌ی $x=1$ چقدر است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید مشتق‌های چپ و راست این تابع را در $x=1$ محاسبه کنیم. پیش از شروع محاسبات توجه کنید که وقتی $x\to 1^+$ یعنی x از سمت راست به یک میل می‌کند، مقدار آن بیشتر از یک اما نزدیک به آن است (مثلاً $x\simeq 1/01$) در نتیجه $\lfloor x\rfloor=1$ خواهد بود. اما وقتی $x\to 1^-$ یعنی x از سمت چپ به یک میل می‌کند، مقدارش کمتر از یک اما نزدیک به آن است (مثلاً $x\simeq 0/99$) در نتیجه $\lfloor x\rfloor=0$ می‌شود. حالا $f'(1^+)$ و $f'(1^-)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-3x+2)\lfloor x\rfloor-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-3}{1}=-1$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-3x+2)\lfloor x\rfloor}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{0}{x-1}=0$$

در این حد صورت «صفر مطلق» شد؛ پس مقدار حد برابر با صفر می‌شود. اکنون شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست را بدست آورده‌ایم:

$$m=f'(1^+)=-1\quad,\quad m'=f'(1^-)=0$$

زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌ها از این رابطه بدست می‌آید:

$$\text{زاویه بین نیم‌مماس‌ها}=\pi-\text{tg}^{-1}\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\pi-\text{tg}^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

مثال ۱۰: تعداد قائم‌هائی که از نقطه $A(3,0)$ بر منحنی تابع $y^2=4x$ می‌توان رسم کرد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۳» نقطه‌ای به عرض α را روی منحنی فرض می‌کنیم، لذا طول نقطه $\frac{\alpha^2}{4}$ می‌باشد:

$$y^2=4x\Rightarrow 2yy'=4\Rightarrow y'=\frac{2}{y}\Rightarrow m=y'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow m_{\text{قائم}}=-\frac{\alpha}{2}$$

$$y-\alpha=\frac{-\alpha}{2}\left(x-\frac{\alpha^2}{4}\right)\Rightarrow 0-\alpha=\frac{-\alpha}{2}\left(3-\frac{\alpha^2}{4}\right)\Rightarrow\alpha=0\,,\ \alpha=-2\,,\ \alpha=2\Rightarrow m=0\ ,\ m_1=1\ ,\ m_2=-1$$

لذا سه خط قائم با ضریب زاویه‌های ۱، ۱- و ۰ می‌توان بر منحنی رسم کرد.

مثال ۱۱: اگر $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ در کدام نقطه در بازه‌ی $[۰,۲]$ مماس بر نمودار تابع، موازی پاره خط واصل بین نقاط $(۰,f(۰))$ و $(۲,f(۲))$ است؟

(MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ : گزینه «۱» چون مماس بر نمودار در نقطه $(۰,۲)$ با خط واصل نقاط داده شده موازی است، لذا شیب خط مماس برابر شیب خط واصل نقاط داده شده می‌باشد:

$$f(۲)=۸-۶+۱=۳ \qquad f(۰)=۱$$

$$\text{شیب خط واصل نقاط}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

فرض کنیم که نقطه مورد نظر دارای طول $x=c$ است و با توجه به این‌که $f'(x)=۳x^{۲}-۳$، پس داریم:

$$f'(c)=۳c^{۲}-۳=۱\Rightarrow ۳c^{۲}=۴\Rightarrow c^{۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow c=\begin{cases}\frac{۲}{\sqrt{۳}}\\ -\frac{۲}{\sqrt{۳}} & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

مثال ۱۲: اگر $g(x)=\begin{cases}x^{۲}-۱ & ; x>۰\\ ۱ & ; x=۰\\ -\cos x & ; x<۰\end{cases}$ و $f(x)=xg(x)$ در این صورت:

(MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) f در $x=۰$ مشتق‌پذیر است و $f'(۰)=۱$.
۲) f در $x=۰$ ناپیوسته است.
۳) f در $x=۰$ دارای مماسی به معادله $y+x=۰$ است.
۴) f در $x=۰$ مشتق ناپیوسته دارد.

پاسخ : گزینه «۳»

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{xg(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}g(x)=-۱$$

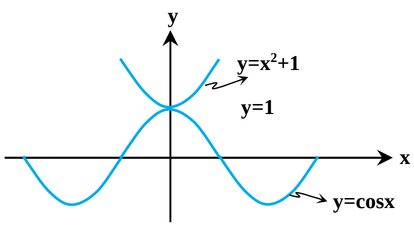
بنابراین شیب خط مماس بر f در $x=۰$ برابر با ۱- می‌باشد، و چون $f(۰)=۰$، پس معادله خط مماس به صورت $y+x=۰$ در می‌آید.

مثال ۱۳: زاویه بین منحنی‌های $y=x^{۲}+۱$ و $y=\cos x$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰   ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا نقطه تلاقی دو منحنی را بدست می‌آوریم:



$$\cos x=x^{۲}+۱\Rightarrow x=۰$$

$$\begin{cases}y_۱=x^{۲}+۱\Rightarrow m=y_۱'(۰)=۲\times ۰=۰\\ y_۲=\cos x\Rightarrow m'=y_۲'(۰)=-\sin ۰=۰\end{cases}\Rightarrow m=m'$$

با توجه به رابطه $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$ ملاحظه می‌گردد که $\alpha=۰$ خواهد بود.

مثال ۱۴: معادله‌ی خط مماس بر منحنی با معادله‌ی $y=x^{x}$ در نقطه‌ای به طول ۲ از آن محور x ها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طولش برابر است با:

(آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $۲\text{Ln}۲$ ۲) $۱+\text{Ln}۲$ ۳) $\frac{۱}{۱+\text{Ln}۲}$ ۴) $\frac{۱+۲\text{Ln}۲}{۱+\text{Ln}۲}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$y=x^{x}\Rightarrow y'=x^{x}(\text{Ln}x+۱)\Rightarrow y'(۲)=۴(\text{Ln}۲+۱)$$

پس معادله خط مماس بر منحنی در نقطه بر منحنی در نقطه $(۲,۴)$ روی منحنی به صورت روبرو است:

$$y-۴=۴(\text{Ln}۲+۱)(x-۲)$$

برای بدست آوردن محل تلاقی با محور x ها، به جای y در معادله فوق صفر قرار می‌دهیم:

$$-۴=۴(\text{Ln}۲+۱)(x-۲)\Rightarrow x-۲=\frac{-۱}{\text{Ln}۲+۱}\Rightarrow x=۲-\frac{۱}{\text{Ln}۲+۱}=\frac{۲\text{Ln}۲+۱}{\text{Ln}۲+۱}$$

مثال ۱۵: زاویه بین دو منحنی $y=e^x$ و $y=1-x^2$ در نقطه $x=0$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» نقطه داده شده نقطه تقاطع دو منحنی است و داریم $(x=0 \Rightarrow y=1)$. برای یافتن زاویه بین دو منحنی در نقطه تماس ابتدا مماس‌های منحنی‌ها را بدست می‌آوریم. زاویه بین مماس‌ها، همان زاویه مورد نظر است:

$$y=e^x \Rightarrow y'=e^x \Rightarrow m=e^0=1$$

$$y=1-x^2 \Rightarrow y'=-2x \Rightarrow m'=0$$

واضح است که زاویه بین یک خط با شیب (۱) (یعنی خط موازی نیمساز ربع اول و سوم است) و یک خط با شیب صفر (یعنی خط موازی محور x هاست) برابر 45° یعنی $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد. البته می‌توان از فرمول زیر هم که برای پیدا کردن زاویه بین دو خط با شیب‌های m و m' به‌کار می‌رود هم استفاده کرد.

$$tg\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \Rightarrow tg\theta=\left|\frac{1-0}{1+0}\right|=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۶: معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=x^{2x}+e^{2Lnx}$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $x+4y=9$ ۲) $4x+y=4$ ۳) $4x-y=2$ ۴) $x-4y=9$

پاسخ : گزینه «۱»

$$y=x^{2x}+e^{2Lnx}=x^{2x}+x^2 \Rightarrow y'=x^{2x}(2Lnx+2)+2x$$

$$x=1 \Rightarrow y=1+1=2\ ,\ y'=1(0+2)+2=4 \Rightarrow \text{شیب خط قائم}=\frac{-1}{4}$$

بنابراین معادله خط قائم به صورت مقابل خواهد بود:

$$y-2=\frac{-1}{4}(x-1) \Rightarrow 4y+x=9$$

مثال ۱۷: مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر خط مماس بر منحنی به معادله $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۴» نقطه دلخواه $P(x_0,y_0)$ را روی منحنی مورد نظر در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \Rightarrow y'=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت مقابل است:

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

برای بدست آوردن طول از مبدأ و عرض از مبدأ به ترتیب در معادله خط قرار می‌دهیم:

$$y=0 \Rightarrow x=x_0+\sqrt{x_0y_0} \qquad , \qquad x=0 \Rightarrow y=y_0+\sqrt{x_0y_0}$$

$$\text{مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ}=x_0+y_0+2\sqrt{x_0y_0}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=4$$

مثال ۱۸: شیب خط مماس بر منحنی به معادله $\frac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}}=\frac{y-x}{x+y}$ در نقطه $(1,4)$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{19}{6}$ ۳) $\frac{41}{15}$ ۴) $\frac{46}{15}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\frac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}}=\frac{y-x}{x+y} \Rightarrow x^2+xy+x\sqrt{y}+y\sqrt{y}=y^2-xy+y\sqrt{x}-x\sqrt{x} \Rightarrow x^2+2xy-y^2+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+y\sqrt{y}+x\sqrt{x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2y+\sqrt{y}-\frac{y}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{2x-2y+\frac{x}{2\sqrt{y}}-\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{y}} \xrightarrow{x=1\ ,\ y=4} \frac{dy}{dx}=\frac{46}{15}$$

مثال ۱۹: خط قائم بر منحنی $y=(x+1)e^{2-x}$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) -4 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 4

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** به ازای $x=2$ ، مقدار $y=3$ بدست می‌آید.

$$y=(x+1)e^{2-x} \Rightarrow y'=e^{2-x}-(x+1)e^{2-x} \Rightarrow y'(2)=-2 \quad \text{شیب خط مماس}$$

بنابراین شیب خط قائم برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2) \xrightarrow{\text{تلاقی با محور }x\text{ها}} -3=\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x=-4$$

مثال ۲۰: خط مماس بر منحنی $y=x^3+3x^2+1$ و عمود بر خط $2x-6y=1$ از کدام نقطه می‌گذرد؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) $(1,2)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(2,-4)$ ۴) $(2,-6)$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** شیب خط $2x-6y=1$ برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد. چون خط مورد نظر بر این خط عمود است، پس شیب آن برابر ۳- می‌باشد. حال نقطه‌ای را بر منحنی داده شده پیدا می‌کنیم که در آن نقطه شیب برابر ۳- باشد.

$$y'=3x^2+6x \xrightarrow{\text{شیب}=-3} 3x^2+6x=-3 \Rightarrow 3x^2+6x+3=0 \Rightarrow 3(x^2+2x+1)=0 \Rightarrow 3(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1\,,\, y=3$$

پس معادله خط مورد نظر به‌صورت مقابل است:

$$y-3=-3(x+1) \Rightarrow y=-3x$$

واضح است که نقطه $(2,-6)$ روی خط بدست آمده در بالا قرار دارد.

مثال ۲۱: عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $y=\mathrm{Ln}(x^2-3)$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) -8 ۲) 4 ۳) 3 ۴) -6

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** با محاسبه مشتق تابع y در نقطه $x=2$ شیب خط مماس را بدست می‌آوریم:

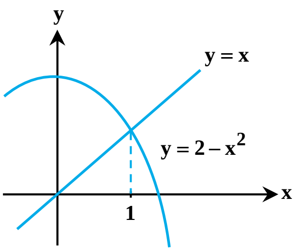
$$m=y'=\frac{2x}{x^2-3} \xrightarrow{x=2} m=y'(2)=\frac{4}{4-3}=4$$

$$\text{خط مماس}: y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-y(2)=4(x-2) \Rightarrow y=4x-8 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-8$$

مثال ۲۲: تابع $f(x)=\min(2-x^2,x)$ مفروض است. زاویه بین دو خط مماس رسم شده بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $x=1$ برابر است با: (مکانیک ـ ساخت و تولید ـ آزاد ۸۹)

۱) $\mathrm{arctg}2$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\mathrm{arctg}3$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** نقطه‌ی $x=1$ یکی از نقاط برخورد منحنـی‌هـای $y=2-x^2$ و $y=x$ است. در واقع اگر به نمودار این دو تابع توجه کنیم، متوجه می‌شویم که در همسایگی $x=1$ یعنـی در نقاط نزدیک به آن داریم:



$$f(x)=\min(2-x^2,x)=\begin{cases}2-x^2 & ; x>1\\ x & ; x\le 1\end{cases}$$

(باز هم دقت کنید که ما ضابطه‌ی $f(x)$ را برای نقاط نزدیک به $x=1$ نوشته‌ایم) حالا می‌توانیم شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ را حساب کنیم:

$$\text{شیب نیم‌مماس راست}=m_1=f'(1^+)=-2x\Big|_{x=1}=-2 \qquad \text{و} \qquad \text{شیب نیم‌مماس چپ}=m_2=f'(1^-)=1$$

زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌ها از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$tg(\theta)=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-2-1}{1-2}\right|=3 \Rightarrow \theta=\mathrm{arctg}3$$

مثال ۲۳: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=\cosh^2x+2\cosh x.\sinh x+\sinh^2x$ در نقطه $x=\mathrm{Ln}2$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) 4 ۲) 6 ۳) 8 ۴) e^2

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** ابتدا تابع $f(x)$ را به فرم ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\cosh^2x+2\sinh x\cos hx+\sinh^2x=(\sinh x+\cosh x)^2$$

از طرفی برای توابع هیپربولیک $\sin hx$ و $\cosh x$ داریم:

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=e^{2x} \Rightarrow f'(x)=2e^{2x}$$

در نتیجه داریم:

$$f'(\mathrm{Ln}2)=2e^{2\mathrm{Ln}2}=2e^{\mathrm{Ln}4}=2\times4=8$$

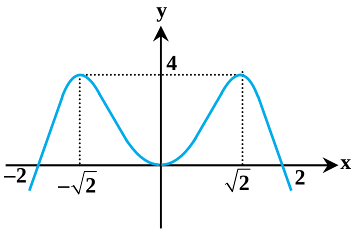
مثال ۲۴: معادله خط مماس افقی نمودار تابع $y = 4x^2 - x^4$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $y = 0$ ۲) $y = 4$ ۳) $y = 2$ ۴) $y = 1$

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن خط مماس افقی نمودار تابع y داریم:

$$y' = 8x - 4x^3 = 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{خط مماس}: y = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{خط مماس}: y = 4 \end{cases}$$

حال نمودار تابع y را به صورت مقابل رسم می‌کنیم:



همانطور که در شکل نیز مشاهده می‌شود خط $y = 0$ فقط در نقطه $x = 0$ بر تابع y مماس است و در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ نمودار تابع را قطع می‌کند، ولی خط افقی $y = 4$ همواره یک مماس افقی برای تابع y به شمار می‌آید.

درسنامه۴: نقاط اکسترمم و نقطه‌ی عطف

مثال۱: تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}x^3 & ; 0\le x<1\\ (x-2)^2 & ; 1\le x\le 3\\ \frac{5-x}{2} & ; 3<x\le 4\end{cases}$ **چندتاست؟**

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» برای تشخیص نقاط بحرانی هم باید به معادله‌ی $f'(x)=0$ توجه کنیم و هم نقاطی را که مشتق در آن‌ها وجود ندارد، پیدا کنیم. ابتدا مشتق این تابع چند ضابطه‌ای را می‌نویسیم. در این مرحله باید علامت‌های تساوی را از نامساوی‌ها برداریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ; 0\le x<1\\ (x-2)^2 & ; 1\le x\le 3\\ \frac{5-x}{2} & ; 3<x\le 4\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2 & ; 0<x<1\\ 2(x-2) & ; 1<x<3\\ -\frac{1}{2} & ; 3<x<4\end{cases}$$

حالا وجود مشتق در نقاط $x=0,1,3,4$ را بررسی می‌کنیم. در $x=0$ تابع $f(x)$ فقط از راست تعریف شده است. در واقع ضابطه‌ی $f(x)$ در $x<0$ داده نشده است، بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد (اولین شرط برای وجود مشتق در نقطه $x=a$ آن است که تابع $f(x)$ در این نقطه از چپ و راست تعریف شده و پیوسته باشد). در $x=1$ تابع $f(x)$ پیوسته است، $(f(1^+)=f(1^-)=f(1)=1)$ اما مشتق‌های چپ و راست برابر نیستند $(f'(1^-)=3\ ;\ f'(1^+)=-2)$، پس $f'(1)$ وجود ندارد. در $x=3$ تابع $f(x)$ پیوسته است $(f(3^-)=f(3^+)=f(3)=1)$ اما باز هم مشتق‌های چپ و راست برابر نیستند $(f'(3^-)=2, f'(3^+)=-\frac{1}{2})$، پس $f'(3)$ نیز وجود ندارد. در $x=4$ همان اشکالی رخ می‌دهد که در $x=0$ داشتیم. تابع $f(x)$ فقط برای $x\le 4$ تعریف شده است. پس در سمت راست یعنی برای $x>4$ تعریف نشده و در نتیجه $f'(4)$ وجود ندارد.

تا این‌جا دیدیم که در نقاط $x=0,1,3,4$ مشتق وجود ندارد. حالا به معادله‌ی $f'(x)=0$ دقت می‌کنیم.

$0<x<1 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2=0 \Rightarrow x=0$ (قابل قبول نیست)

$1<x<3 \xrightarrow{f'(x)=0} 2(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$3<x<4 \xrightarrow{f'(x)=0} -\frac{1}{2}=0 \Rightarrow$ غیرممکن است.

بنابراین فقط در $x=2$ داریم $f'(2)=0$. به این ترتیب متوجه شدیم که تابع $f(x)$ دارای ۵ نقطه‌ی بحرانی است که عبارتند از: $x=0,1,2,3,4$.

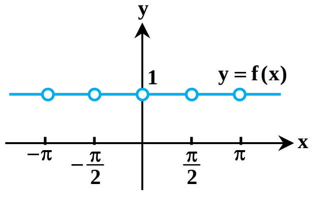
مثال۲: اگر به ازای $x\neq\frac{k\pi}{2}$، $f(x)=\text{tg}x\cot gx$ **باشد و برای هر** $x\in\mathbb{R}$، $g(x)=\text{sgn}\lfloor x\rfloor$، **آن‌گاه در مورد تعداد نقاط بحرانی f و g کدام گزینه صحیح است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)** (از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه‌های روسیه)

۱) f بی‌شمار نقطه بحرانی و g چهار نقطه بحرانی دارد. ۲) f دو نقطه بحرانی و g بی‌شمار نقطه بحرانی دارد.
۳) f و g هر دو بی‌شمار نقطه بحرانی دارند. ۴) f دو نقطه بحرانی و g چهار نقطه بحرانی دارد.

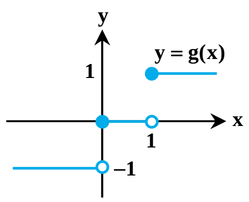
پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به ضابطه‌ی $f(x)$ توجه می‌کنیم. در مضارب $\frac{\pi}{2}$، $f(x)$ تعریف نشده است اما در سایر نقاط داریم:

$$f(x)=\text{tg}x\cot gx=\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=1$$

پس نمودار $f(x)$ به شکل مقابل است:



به عبارتی در هر $x\neq k\frac{\pi}{2}$، نمودار $f(x)$ یک پاره‌خط افقی است و شیب آن صفر می‌شود: $f'(x)=0$. پس این تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد. اکنون به ضابطه‌ی $g(x)$ توجه می‌کنیم. اگر $x<0$ باشد $\lfloor x\rfloor$ هم منفی است و خواهیم داشت $g(x)=\text{sgn}\lfloor x\rfloor=-1$. در فاصله‌ی $0\le x<1$ داریم $\lfloor x\rfloor=0$ پس $g(x)=\text{sgn}\lfloor x\rfloor=0$ است. برای اعداد $x\ge 1$ داریم $\lfloor x\rfloor\ge 1$، در نتیجه $\lfloor x\rfloor$ مثبت می‌شود و داریم $g(x)=\text{sgn}\lfloor x\rfloor=1$. به این ترتیب ضابطه‌ی $g(x)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



$$g(x)=\begin{cases}-1 & ; x<0\\ 0 & ; 0\le x<1\\ 1 & ; 1\le x\end{cases}$$

این تابع در $x=0$ و $x=1$ ناپیوسته است و مشتق ندارد. در سایر نقاط شیب $g(x)$ صفر است، یعنی $g'(x)=0$ می‌شود. پس در هر عددی حقیقی مانند x، یا $g'(x)$ وجود ندارد یا $g'(x)=0$ است. همه‌ی اعداد حقیقی، نقطه‌ی بحرانی برای $g(x)$ هستند. پس $g(x)$ هم بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

مثال ۳: نقطه $x=-۳$ برای تابع $f(x)=۲x^{۳}+۶x^{۲}-۱۸x+۵$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی　۲) مینیمم نسبی　۳) نقطه بازگشت　۴) نقطه زاویه‌دار

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و سپس از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$$f'(x)=۶x^{۲}+۱۲x-۱۸ \Rightarrow f''(x)=۱۲x+۱۲$$

$$\Rightarrow f'(-۳)=۶(-۳)^{۲}+۱۲(-۳)-۱۸=۰ \ , \ f''(-۳)=۱۲\times(-۳)+۱۲=-۲۴<۰$$

چون $f''(-۳)<۰$ است پس $x=-۳$ ماکزیمم نسبی می‌باشد.

مثال ۴: مقدار مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x)=۳x^{\frac{۲}{۳}}-۲x$ روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ به ترتیب کدام است؟

۱) ۵- و ۱　۲) ۰ و ۵　۳) ۱ و ۵　۴) ۵- و ۵

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

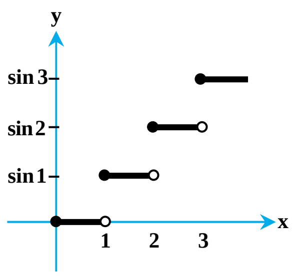
$$f'(x)=۳(\frac{۲}{۳})x^{\frac{-۱}{۳}}-۲=۲(x^{\frac{-۱}{۳}}-۱)=۰ \Rightarrow x=۱$$

همچنین توجه کنید که $x^{-\frac{۱}{۳}}$ در نقطه $x=۰$ تعریف نشده است، بنابراین $x=۰$ نیز یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌باشد. بنابراین نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقاط بحرانی f می‌باشند که به ازای آن‌ها باید مقدار تابع حساب شود، البته مقدار تابع به ازای $x=-۱$ نیز حساب شود، چون نقطه ابتدای بازه است. $f(-۱)=۵$، $f(۱)=۱$ و $f(۰)=۰$. همان‌طور که می‌بینید ۵ ماکزیمم مطلق و صفر مینیمم مطلق است.

مثال ۵ (سخت): اگر $f(x)=\sin\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\begin{cases}|x+۱| & ; |x|\le ۱\\ \sin(\pi x) & ; ۱<|x|\le ۲\end{cases}$، آن‌گاه در مورد $f(x)$ و $g(x)$ کدام گزینه درست است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) تابع $f(x)$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۱ و مینیمم مطلق برابر با صفر است.
۲) تابع $f(x)$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۲ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.
۳) تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطه بحرانی و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۱ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.
۴) تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطه بحرانی و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلقی برابر با ۲ و مینیمم مطلقی برابر با صفر است.

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که در فاصله‌ی بین دو عدد صحیح m و $m+۱$ خواهیم داشت $\lfloor x\rfloor=m$. به عبارت دقیق‌تر وقتی $m\le x<m+۱$ باشد داریم $f(x)=\sin\lfloor x\rfloor=\sin(m)$. پس در این بازه $f(x)$ مقدار ثابتی دارد و $f'(x)=۰$ است. البته در اعداد صحیح یعنی در $x=m$ تابع $f(x)$ ناپیوسته است و $f'(m)$ وجود ندارد.



در شکل مقابل بخشی از نمودار $f(x)$ را نشان داده‌ایم (البته با این فرض که x برحسب درجه باشد، نمودار رسم شده است). با توجه به این توضیحات متوجه می‌شویم که در اعداد صحیح $f'(m)$ وجود ندارد و در سایر نقاط $f'(x)=۰$ است. پس هر عدد حقیقی، یک نقطه‌ی بحرانی برای $f(x)$ است. اکنون به تابع $g(x)$ توجه کنید. نامساوی $|x|\le ۱$ نشان‌دهنده‌ی ناحیه‌ی $-۱\le x\le ۱$ است. نامساوی $۱<|x|\le ۲$ دو قسمت را نشان می‌دهد که یکی از آن‌ها $۱<x\le ۲$ و دیگری $-۲\le x<-۱$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & ; -۱\le x\le ۱\\ \sin(\pi x) & ; -۲\le x<-۱ \ , \ ۱<x\le ۲\end{cases}$$

در مورد ضابطه‌ی اول توجه کنید که در فاصله‌ی $-۱\le x\le ۱$ داریم $x+۱\ge ۰$ در نتیجه می‌توان آن را از قدرمطلق خارج کرد. با توجه به حدود x، دامنه‌ی $g(x)$ بازه‌ی $[-۲,۲]$ است. ابتدا $g'(x)$ را حساب می‌کنیم. در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ تابع $g(x)$ پیوسته نیست، در نتیجه مشتق‌پذیر هم نیست. برای مثال در $x=۱$ داریم $g(۱^{+})=\sin(\pi)=۰$ و $g(۱^{-})=۱+۱=۲$ نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ نیز ابتدا و انتهای دامنه هستند و تابع $g(x)$ در آن‌ها فقط از یک طرف تعریف شده است، بنابراین در این نقاط هم مشتق وجود ندارد.

برای محاسبه‌ی سایر نقاط بحرانی، ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم. در بازه‌ی $-۱<x<۱$ داریم $g'(x)=۱$، پس مشتق در این فاصله صفر نمی‌شود. پس ریشه‌های $\pi\cos\pi x$ را بررسی کنیم:

$$g'(x)=\pi\cos(\pi x)=۰ \Rightarrow \pi x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۲}=\frac{\text{عدد فرد}}{۲}$$

در فاصله‌ی $۱<x<۲$ و $-۲<x<-۱$ جواب‌های $x=\pm\frac{۳}{۲}$ بدست می‌آیند. به این ترتیب در یک جمع‌بندی نقاط $x=\pm۲$، $x=\pm۱$ و $x=\pm\frac{۳}{۲}$ نقاط بحرانی هستند. در ضمن $x=\pm۲$ ابتدا و انتهای دامنه نیز محسوب می‌شوند. مقدار $g(x)$ را در این نقاط محاسبه می‌کنیم:

$$g(۱)=۱+۱=۲ \ , \ g(-۱)=-۱+۱=۰ \ , \ g(\pm۲)=\sin(\pm۲\pi)=۰ \ , \ g(\pm\frac{۳}{۲})=\sin(\pm\frac{۳\pi}{۲})=\pm۱$$

مقادیر بدست آمده برای $g(x)$ عبارتند از ۰، ±۱ و ۲. در نتیجه ماکزیمم مطلق برابر با ۲ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.

مثال ۶ (سخت): اگر $f(x)=\lfloor \cos x \rfloor$ و $g(x)=tgx+\cot gx$ آن‌گاه در مورد تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم g در یک دوره تناوب آن و وضعیت f در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام گزینه صحیح است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه‌های روسیه)

۱) f در $x=\frac{\pi}{2}$ دارای ماکزیمم نسبی و g دارای یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم نسبی است.

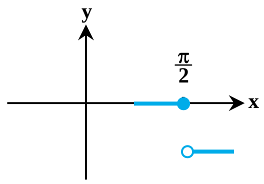
۲) f در $x=\frac{\pi}{2}$ دارای مینیمم نسبی و g دارای یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه مینیمم نسبی است.

۳) f دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ نیست و g دارای ۲ ماکزیمم و یک مینیمم نسبی است.

۴) f دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی در $x=\frac{\pi}{2}$ نیست و g دارای ۲ مینیمم و یک ماکزیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا وضعیت تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی می‌کنیم. این تابع در $\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است؛ زیرا در این نقطه مقدار عبارت داخل جزءصحیح، عددی صحیح می‌شود. به همین دلیل، مقدار $f(x)$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ و در سمت چپ و راست این نقطه حساب می‌کنیم. پس با مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده متوجه می‌شویم که $x=\frac{\pi}{2}$ چه نوع نقطه‌ای برای $f(x)$ است. به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم $f(\frac{\pi}{2})=\left\lfloor \cos\frac{\pi}{2} \right\rfloor=\lfloor 0 \rfloor=0$. در سمت راست $\frac{\pi}{2}$ یعنی وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ کمی بیشتر باشد، $-1<\cos x<0$ است در نتیجه $f(x)=\lfloor \cos x \rfloor=-1$. در سمت چپ این نقطه، یعنی وقتی که x کمی کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ باشد، $0<\cos x<1$ است و در نتیجه $f(x)=\lfloor \cos x \rfloor=0$. بنابراین ضابطه‌ی $f(x)$ در همسایگی $\frac{\pi}{2}$ و نمودار آن در این نقطه به این صورت است:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x\le\frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



بنابراین می‌بینید که $x=\frac{\pi}{2}$ یک نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است زیرا در همسایگی $\frac{\pi}{2}$ مقدار $f(x)$ همواره از $f(\frac{\pi}{2})$ کوچکتر یا مساوی است (در این مثال می‌بینید که با وجود ناپیوسته بودن $f(x)$ در $\frac{\pi}{2}$ و عدم وجود مشتق در این نقطه، ماکزیمم نسبی رخ داده است):

اکنون تابع $g(x)$ را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانید دوره‌ی تناوب tgx و $cotgx$ برابر است با π، پس تابع $g(x)$ را در بازه‌ی $(0,\pi)$ بررسی می‌کنیم ($x=0$ و $x=\pi$ در دامنه‌ی تابع قرار ندارند.)

حالا مشتق‌های اول و دوم $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g(x)=tgx+\cot gx \ \Rightarrow g'(x)=1+tg^2x-1-\cot g^2x=tg^2x-\cot g^2x \ \Rightarrow g''(x)=2tgx(1+tg^2x)+2\cot gx(1+\cot g^2x)$$

ریشه‌های $g'(x)$ و نقاطی که $g'(x)$ در آن‌ها وجود ندارد را پیدا می‌کنیم:

$$g'(x)=0 \ \Rightarrow tg^2x-\cot g^2x=0 \Rightarrow tg^2x=\cot g^2x \ \Rightarrow tg^2x=\frac{1}{tg^2x} \ \Rightarrow tg^4x=1 \ \Rightarrow tgx=\pm1$$

می‌دانیم که در مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$، tgx و $cotgx$ با هم برابر یا قرینه‌ی هم می‌شوند. در بازه‌ی $(0,\pi)$ نقاط $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{3\pi}{4}$ بدست می‌آیند. اکنون به علامت $g''(x)$ در این نقاط دقت می‌کنیم.

$$g''(\frac{\pi}{4})=2(1+1)+2(1+1)=8>0 \quad , \quad g''(\frac{3\pi}{4})=-2(1+1)-2(1+1)=-8<0$$

با توجه به علامت $g''(x)$ در این نقاط نتیجه می‌گیریم که $x=\frac{\pi}{4}$، نقطه‌ی مینیمم نسبی و $x=\frac{3\pi}{4}$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است. بنابراین تابع $g(x)$ در فاصله‌ی $(0,\pi)$ دارای یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی است.

مثال ۷: منحنی $f(x)=\sqrt[۱۳۹۷]{(x^۳-۴x^۲+۴x)^{۱۳۹۴}(ax\cos\pi x+\sin\pi x+۱)^{۱۳۹۵}}$ در $x=۲$ مینیمم نسبی دارد. حدود a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}<a<\infty$　۲) $-\frac{۱}{۲}<a<۰$　۳) $۰<a<\frac{۱}{۲}$　۴) $\frac{۱}{۲}<a<\infty$

پاسخ: گزینه «۱» اگر عبارت زیر رادیکال به‌صورت $(x-۲)^{۲n}g(x)$ باشد و $g(۲)>۰$، آن‌گاه $x=۲$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی f است. با کمی دقت به عبارت $x^۳-۴x^۲+۴x$ و فاکتورگیری از x می‌بینیم که عامل $(x-۲)^۲$ در آن حضور دارد:

$$x^۳-۴x^۲+۴x=x(x^۲-۴x+۴)=x(x-۲)^۲\ \Rightarrow f(x)=\sqrt[۱۳۹۷]{(x-۲)^{۲\times ۱۳۹۴}x^{۱۳۹۴}(ax\cos\pi x+\sin\pi x+۱)^{۱۳۹۵}}$$

با کنار گذاشتن $(x-۲)^{۲\times۱۳۹۴}$ خواهیم داشت:

$$g(x)=x^{۱۳۹۴}(ax\cos\pi x+\sin\pi x+۱)^{۱۳۹۵}$$

می‌خواهیم $g(۲)>۰$ باشد:

$$g(۲)>۰\ \Rightarrow ۲^{۱۳۹۴}(۲a+۰+۱)^{۱۳۹۵}>۰\ \Rightarrow ۲a+۱>۰\ \Rightarrow a>-\frac{۱}{۲}$$

مثال ۸: برد تابع $f(x)=\frac{۴x}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $[-۴,۴)$　۲) $[-۲,۲]$　۳) $(-۲,۲)$　۴) $[-۴,۴]$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم. در این مثال $f(x)$ همه‌جا تعریف شده است و داریم $D_f=(-\infty,+\infty)$. در مرحله‌ی بعدی نقاط بحرانی را تعیین می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۴(x^۲+۱)-۸x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۴(۱-x^۲)}{(x^۲+۱)^۲}=۰\ \Rightarrow x=\pm۱$$

اکنون مقدار $f(x)$ را در نقاط بحرانی و حد آن را در دو سر دامنه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۱)=\frac{۴}{۱+۱}=۲\ ,\ f(-۱)=\frac{-۴}{۱+۱}=-۲ \\ f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x}{x^۲+۱}=۰\quad ,\quad f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴x}{x^۲+۱}=۰ \end{cases}$$

توجه کنید که درجه‌ی مخرج بیشتر از صورت است، پس حد $f(x)$ در $+\infty$ و $-\infty$ صفر می‌شود. با مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده داریم:

$$\min f(x)=-۲\ ,\ \max f(x)=۲\ \Rightarrow f_{\text{برد}}=R_f=[-۲,۲]$$

از آن‌جا که مقادیر $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=-۲$ با جایگذاری ساده بدست آمده‌اند، نه با حدگیری، برد تابع باید بازه‌ی بسته باشد.

مثال ۹: برد تابع $f(x)=x-\sqrt{۴x-x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲+\sqrt{۵}]$　۲) $[۲-\sqrt{۵},۱]$　۳) $[۲-\sqrt{۵},۲+\sqrt{۵}]$　۴) $[-۱,۲-\sqrt{۵}]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم. این‌کار را می‌توانیم با تعیین علامت معادله‌ی درجه‌ی دو یا با ایجاد مربع کامل در زیر رادیکال انجام دهیم. اگر مربع کامل ایجاد کنیم، در ادامه‌ی حل نیز محاسبات راحت‌تر انجام می‌شوند، به همین دلیل این مسیر را انتخاب می‌کنیم:

$$۴x-x^۲+۱=-[x^۲-۴x-۱]=-[(x-۲)^۲-۵]=۵-(x-۲)^۲$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=x-\sqrt{۵-(x-۲)^۲}$$

حالا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$۵-(x-۲)^۲\ge۰\ \Rightarrow ۵\ge(x-۲)^۲\ \Rightarrow -\sqrt{۵}\le(x-۲)\le\sqrt{۵}\ \Rightarrow ۲-\sqrt{۵}\le x\le۲+\sqrt{۵}$$

دامنه‌ی $f(x)$ برابر است با:

$$D_f=[۲-\sqrt{۵}\ ,\ ۲+\sqrt{۵}]$$

در گام بعدی نقاط بحرانی $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=۱-\frac{-۲(x-۲)}{۲\sqrt{۵-(x-۲)^۲}}=۰\ \Rightarrow -(x-۲)=\sqrt{۵-(x-۲)^۲}$$

مقدار سمت راست، مثبت است پس سمت چپ هم باید مثبت باشد پس $x<۲$ است، حالا محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$(x-۲)^۲=۵-(x-۲)^۲\ \Rightarrow ۲(x-۲)^۲=۵\ \Rightarrow (x-۲)^۲=\frac{۵}{۲}\ \Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{\frac{۵}{۲}}\ \Rightarrow x=۲\pm\sqrt{\frac{۵}{۲}}\ \xrightarrow{x<۲}\ x=۲-\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

البته باید مراقب باشیم که نقطه‌ی بحرانی بدست آمده در دامنه‌ی $f(x)$ قرار داشته باشد. در این‌جا $x=۲-\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ در بازه‌ی $[۲-\sqrt{۵},۲+\sqrt{۵}]$ قرار دارد.

گام بعدی آن است که مقدار $f(x)=x-\sqrt{۵-(x-۲)^۲}$ را در نقطه‌ی بحرانی و در دو سر دامنه حساب کنیم:

$$\begin{cases} f(۲\pm\sqrt{۵})=۲\pm\sqrt{۵}-\sqrt{۵-(\pm\sqrt{۵})^۲}=۲\pm\sqrt{۵} \\ f(۲-\sqrt{\frac{۵}{۲}})=۲-\sqrt{\frac{۵}{۲}}-\sqrt{۵-\frac{۵}{۲}}=۲-\sqrt{\frac{۵}{۲}}-\sqrt{\frac{۵}{۲}}=۲-۲\sqrt{\frac{۵}{۲}}=۲-\sqrt{۱۰} \end{cases}\Rightarrow\ \min f(x)=۲-\sqrt{۱۰}\ ,\ \max f(x)=۲+\sqrt{۵}$$

بنابراین برد f به‌صورت $R_f=[۲-\sqrt{۱۰},۲+\sqrt{۵}]$ است.

مثال۱۰: کدامیک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی صعودی است؟

۱) $f(x)=\sin x-x$ ۲) $f(x)=x+2\cos x$ ۳) $f(x)=x+2\sin x$ ۴) $f(x)=x-\sin x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای آن که تابع $f(x)$ صعودی باشد، باید $f'(x)\geq 0$ باشد که تنها گزینه «۴» این حالت را دارد.

$$f'(x)=1-\cos x\xrightarrow{-1\leq\cos x\leq 1} 0\leq f'(x)\leq 2$$

برای گزینه (۱) داریم $f'(x)=\cos x-1$، پس $f'(x)\leq 0$ و بنابراین، این تابع نزولی است. برای گزینه (۲) داریم $f'(x)=1-2\sin x$ و نمی‌توان گفت این تابع نزولی است یا صعودی. برای گزینه (۳) داریم $f'(x)=1+2\cos x$ که در این مورد نیز صعودی یا نزولی بودن تابع را نمی‌توان مشخص کرد.

مثال۱۱: به ازای چه مقادیری از b، تابع $f(x)=\sin x-bx+c$ همواره نزولی است؟

۱) $b\geq 1$ ۲) $b\leq 1$ ۳) $b>4$ ۴) $b\leq 0$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$f(x)=\sin x-bx+c\ \Rightarrow f'(x)=\cos x-b\leq 0\ \Rightarrow \cos x\leq b$$

برای برقراری نامساوی فوق باید $b\geq 1$ باشد.

مثال۱۲: کدامیک از توابع زیر صعودی نیست؟

۱) $y=x^2|x|$ ۲) $y=x|x|$ ۳) $y=\operatorname{Ln}x$ ۴) $y=x+\sin x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» باید تمام توابع را بررسی کنیم.

$$y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & ;\ x\geq 0\\ -x^3 & ;\ x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x^2 & ;\ x\geq 0\\ -3x^2 & ;\ x<0\end{cases}$$

چون y' در فاصله $(-\infty,0)$ مقداری منفی است. پس در این فاصله تابع نزولی است.

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & ;\ x\geq 0\\ -x^2 & ;\ x<0\end{cases}\ \Rightarrow\ \text{پس } y' \text{ مثبت است}$$

$$y=\operatorname{Ln}x\ \Rightarrow y'=\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه Ln، چون } x>0}\text{پس } y' \text{ مثبت است}$$

$$y=x+\sin x\ \Rightarrow y'=1+\cos x\xrightarrow{-1\leq\cos x\leq 1}\text{پس } y' \text{ مثبت است}$$

مثال۱۳: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ مشتق‌پذیر و تابع با ضابطه $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$ نزولی باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) g در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.
۲) f در بازه $(-\infty,0)$ نزولی است.
۳) f صعودی است.
۴) f یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بزرگ‌تر از ۳ است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» چون تابع g نزولی اکید است، پس باید $g'(x)<0$ باشد. با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ داریم:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)(x^2+1)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}<0\ \ \Rightarrow(x^2+1)f'(x)-2xf(x)<0\Rightarrow f'(x)<\frac{f(x)}{x^2+1}(2x)$$

برد $f(x)$ در صورت سؤال $[0,\infty)$ عنوان شده و این یعنی $f(x)\geq 0$، از طرفی در سمت راست نامساوی مقدار x^2+1 هم همواره مثبت است، پس اگر $x<0$ آن‌گاه سمت راست نامساوی فوق منفی می‌شود پس $f'(x)$ هم منفی می‌شود، در واقع f بر بازه $(-\infty,0)$ نزولی است.

مثال ۱۴ (سخت): کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}$ صحیح است؟ $(x>0)$

۱) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ مینیمم نسبی دارد و برای $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2e-1}$ نزولی است.

۲) $f(x)$ بر دامنه‌اش که $(\frac{1}{2},\infty)$ می‌باشد، اکیداً نزولی است و نقطه‌ی اکسترمم ندارد.

۳) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ ماکزیمم نسبی دارد و برای $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2e-1}$ نزولی است.

۴) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ مینیمم نسبی دارد و برای $x>\frac{e}{2e-1}$ صعودی است.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به دامنه‌ی $f(x)$ دقت می‌کنیم. برای آن‌که این تابع تعریف شده باشد، باید پایه‌ی آن مثبت باشد:

$2-\frac{1}{x}>0 \Rightarrow 2>\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}<x \Rightarrow$ بنابراین دامنه‌ی این تابع $(\frac{1}{2},\infty)$ است.

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن $f(x)$ باید به علامت $f'(x)$ توجه کنیم. ابتدا $f'(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}} \Rightarrow \mathrm{Ln}f(x)=(2-\frac{1}{x})\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x}) \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}(2-\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)[\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}]$$

با جایگذاری $f(x)$ در رابطه‌ی بدست آمده داریم:

$$f'(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}]$$

با فاکتور گرفتن از $\frac{1}{x^2}$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$f'(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}[\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+1]$$

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن $f(x)$ به تعیین علامت $f'(x)$ احتیاج داریم. برای تعیین علامت $f'(x)$ راه‌های مختلفی وجود دارد. اگر $f'(x)$ یک چندجمله‌ای بود، ریشه‌های آن را بدست می‌آوردیم تا با مشخص شدن محل ریشه‌ها، علامت $f'(x)$ در بین ریشه‌ها و خارج از ریشه‌ها معلوم شود. اما برای توابع دیگر (مانند این مثال) معمولاً نامساوی $f'(x)>0$ یا $f'(x)<0$ را حل می‌کنیم. هر کدام را که حل کنیم، فرقی ندارد. برای مثال اگر $f'(x)>0$ را حل کنید مجموعه‌ی نقاطی که در آن $f'(x)$ مثبت است، معلوم می‌شود. واضح است که در سایر نقاطِ دامنه، $f'(x)\le 0$ خواهد بود. به همین ترتیب اگر $f'(x)<0$ را حل کنیم مجموعه نقاطی که $f'(x)$ منفی است، معلوم می‌شود و متوجه می‌شویم که در سایر نقاط $f'(x)\ge 0$ بوده است.

در دامنه‌ی $f(x)$ یعنی در بازه‌ی $\frac{1}{2}<x<\infty$، عبارت $(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}$ مثبت است. کسر $\frac{1}{x^2}$ هم به وضوح مثبت است. بنابراین علامتِ $f'(x)$ به علامتِ $[\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+1]$ بستگی دارد. ببینیم $f'(x)$ در کدام ناحیه مثبت است؟

$$f'(x)>0 \Rightarrow \mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+1>0 \Rightarrow \mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})>-1 \Rightarrow 2-\frac{1}{x}>e^{-1} \Rightarrow 2-\frac{1}{e}>\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2e-1}{e}>\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{e}{2e-1}<x$$

در نتیجه تابع $f(x)$ در بازه‌ی $\frac{e}{2e-1}<x<\infty$ اکیداً صعودی است؛ زیرا در این ناحیه $f'(x)>0$ می‌شود.

اما برای $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2e-1}$، علامت $f'(x)$ منفی می‌شود؛ پس $f(x)$ در این ناحیه اکیداً نزولی است. بنابراین متوجه شدیم که این تابع قبل از نقطه‌ی $\frac{e}{2e-1}$ نزولی است و بعد از آن صعودی می‌شود. این نشان می‌دهد که $x=\frac{e}{2e-1}$ نقطه‌ی مینیمم این تابع است.

توضیح: اگر برای تعیین نقطه‌ی اکسترمم فقط معادله $f'(x)=0$ را می‌نوشتیم نقطه‌ی $x=\frac{e}{2e-1}$ بدست می‌آمد، اما نمی‌دانستیم که این نقطه ماکزیمم نسبی است یا مینیمم نسبی؟ به هر حال توجه به علامت $f'(x)$ برای تشخیص گزینه‌ی صحیح لازم بود. البته به جای تعیین علامت $f'(x)$ می‌توانیم از آزمون مشتق دوم و تعیین علامت $f''(x)$ نیز استفاده کنیم، اما این کار برای این تابع، بسیار وقت‌گیر است.

مثال ۱۵: فرض کنید $f(x)=e^x-e^{-x}+2x$ و $g(x)=x^3-x^2$ باشد، در این صورت مقدار ماکزیمم نسبی fog کدام است؟

۱) $e-\frac{1}{e}+2$ ۲) $\frac{1}{e}-e-2$ ۳) صفر ۴) $\frac{3}{2}+2\ln 2$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که $f'(x)=e^x+e^{-x}+2>0$، پس f تابعی اکیداً صعودی است و بنابراین طبق نکته گفته شده، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی fog و g یکسان خواهد بود. پس کافی است نقاط مینیمم و ماکزیمم نسبی g را پیدا کنیم: $g'(x)=3x^2-2x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=\frac{2}{3}$

$g''(x)=6x-2 \Rightarrow g''(0)=-2<0 \Rightarrow$ نقطه ماکزیمم نسبی $x=0$ و $g''(\frac{2}{3})=6\times\frac{2}{3}-2=2>0 \Rightarrow$ نقطه مینیمم نسبی $x=\frac{2}{3}$

$fog(0)=f(g(0))=f(0)=e^0-e^0+2\times 0=0$

مثال ۱۶: کدام تابع روی $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است؟

۱) $f(x)=x^3-x$ ۲) $f(x)=x^3+x$ ۳) $f(x)=x^2-x$ ۴) $f(x)=x^2+x$

پاسخ: گزینه «۲» به علامت $f'(x)$ توجه می‌کنیم:

در گزینه‌ی (۱) داریم $f'(x)=3x^2-1$، پس $f'(x)$ در برخی نقاط مثبت و در برخی نقاط منفی است. مثلاً $f'(0)<0$ و $f'(1)>0$؛ پس $f(x)$ نه همواره صعودی و نه همواره نزولی است. در نتیجه $f(x)$ یک به یک نیست و معکوس‌پذیر هم نیست.

در گزینه‌ی (۲) داریم $f'(x)=3x^2+1$، مشتق همواره مثبت است؛ پس $f(x)$ اکیداً صعودی، یک به یک و معکوس‌پذیر است.

در گزینه‌ی (۳) داریم $f'(x)=2x-1$، پس $f'(x)$ تغییر علامت می‌دهد.

در گزینه‌ی (۴) هم $f'(x)=2x+1$ گاهی مثبت و گاهی منفی است. گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) یک به یک نیستند، پس معکوس‌پذیر هم نیستند.

مثال ۱۷: اگر f و g دو بار مشتق‌پذیر باشند و تمام مشتق‌های دوم توابع زیر هیچ‌جا صفر نباشند، در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) اگر تقعر f و g روی بازه I رو به بالا باشند، آن‌گاه تقعر $f+g$ نیز روی این بازه رو به بالاست.

۲) اگر تقعر f روی بازه I رو به بالا باشد و f مثبت باشد، آن‌گاه تابع $g(x)=(f(x))^2$ روی بازه I نیز تقعرش رو به بالاست.

۳) اگر f و g روی بازه I مثبت، صعودی و تقعر آن‌ها رو به بالا باشد، آن‌گاه fg نیز روی بازه I تقعرش رو به بالاست.

۴) اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه تقعر fg یا « رو به بالا » و یا « رو به پایین » است.

پاسخ: گزینه «۴» با یک سؤال نسبتاً مفهومی روبه‌رو هستیم و ناچاریم تمام گزینه‌ها را بررسی کنیم:

بررسی گزینه (۱): دنبال بررسی وضعیت تقعر $f+g$ هستیم، بنابراین با فرض $h=f+g$ باید h'' را بدست بیاوریم: $h'=f'+g' \Rightarrow h''=f''+g''$

با توجه به فرض $f''>0$ و $g''>0$، پس $f''+g''>0$ و لذا $h''>0$ و این یعنی تقعر $f+g$ نیز رو به بالاست. پس جمله‌ی داده شده در این گزینه صحیح است.

بررسی گزینه (۲): دنبال بررسی وضعیت تقعر $g(x)=(f(x))^2$ هستیم، بنابراین باید $g''(x)$ را حساب کنیم:

$g'(x)=2f(x)f'(x) \Rightarrow g''(x)=2(f'(x))^2+f(x)2f''(x)=2[(f'(x))^2+f''(x)f(x)]$

چون $f(x)>0$ و $f''(x)>0$، لذا $f''(x)f(x)>0$ و چون $(f'(x))^2$ همواره مثبت است، پس $g''(x)>0$ و لذا تقعر g هم رو به بالا است. پس جمله‌ی داده شده در این گزینه هم صحیح است.

بررسی گزینه (۳): قرار می‌دهیم $h=fg$ و چون دنبال وضعیت h هستیم، باید h'' را حساب کنیم:

$h=fg \Rightarrow h'=f'g+g'f \Rightarrow h''=f''g+g'f'+g''f+g'f' \Rightarrow h''=f''g+2f'g'+g''f$

از اطلاعات داده شده در گزینه (۳) می‌دانیم f، g، f'، g'، f'' و g'' همگی مثبت هستند، پس $h''>0$ و این یعنی تقعر $h=fg$ هم رو به بالاست. پس جمله‌ی داده شده در این گزینه هم درست است.

بررسی گزینه (۴): واضح است جمله‌ی داده شده در این گزینه باید نادرست باشد. برای اثبات درستی جمله داده شده در این گزینه فرض کنیم $f=x^3$ و $g=\frac{1}{x}$، بنابراین برای هر $x>0$ داریم $h=fg=x^2$ و بنابراین $h''=2>0$ و این یعنی تقعر $h=fg$ رو به بالاست. اگر $f(x)=x$ و $g(x)=-x^2$ $(x>0)$، آن‌گاه $h=fg=-x^3$ و بنابراین $h''=-6x$ و چون $x>0$ فرض شده، لذا $h''<0$ و این یعنی تقعر $h=fg$ رو به پایین است. اما اگر فرض کنیم $f(x)=x$ و $g=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ آن‌گاه $h=fg=1$ و این یعنی تقعر $h=fg$ نه رو به بالا است و نه رو به پایین و $h=fg$ یک خط افقی است.

توضیح بیشتر: ممکن است مثال‌ها برای حالت $fg=1$ به ذهنتان نرسد برای همین می‌توان $h=fg$ فرض کرد و پس از محاسبه‌ی $h''=f''g+g''f+2f'g'$ گفت؛ با توجه به این‌که h'' محدودیتی ندارد، یعنی می‌تواند مثبت، منفی و یا حتی صفر باشد، پس نمی‌توان در مورد جهت تقعر آن اظهارنظر کرد چون ما فقط می‌دانیم $f'>0$ و $g'<0$.

مثال ۱۸: اگر $f''(x)$ همه‌جا پیوسته باشد و $f''(6)=f'(6)=0$، آن‌گاه در مورد وضعیت f در $x=6$ به طور قطعی چه می‌توان گفت؟

۱) مینیمم نسبی دارد. ۲) ماکزیمم نسبی دارد. ۳) مماس افقی و نقطه‌ی عطف دارد. ۴) مماس افقی دارد.

پاسخ: گزینه «۴» یک مثال مفهومی که حل آن به دقت در مفاهیم نیاز دارد. این‌که $f'(6)=0$ است، نشان می‌دهد شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه صفر است و این یعنی خط مماس به‌صورت افقی در می‌آید. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است. اما در مورد سایر گزینه‌ها دقت کنید که اگر $f''(6)<0$، این نقطه ماکزیمم موضعی بود و اگر $f''(6)>0$ مثبت بود، می‌گفتیم این نقطه مینیمم موضعی است. اما هنگامی‌که $f''(6)=0$ است نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که این نقطه ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی یا حتی نقطه‌ی عطف است. به شرطی $x=6$ نقطه‌ی عطف است که $f''(x)$ در $x=6$ تغییر علامت دهد. اما ما در این زمینه اطلاعی نداریم فقط می‌دانیم که $f''(6)=0$ شده است و نمی‌دانیم در سمت چپ و راستِ این نقطه علامت $f''(x)$ چگونه است. پس گزینه‌ی (۳) صحیح نیست.

مثال ۱۹ (سخت): اگر $f(x)=(\operatorname{Ln}x)^2$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$، آن‌گاه در مورد تعداد نقاط عطف f و g کدام گزینه صحیح است؟

۱) f دو نقطه عطف و g سه نقطه عطف دارد. ۲) f و g هر کدام دو نقطه عطف دارند.

۳) f یک نقطه عطف و g دو نقطه عطف دارد. ۴) f یک نقطه عطف و g سه نقطه عطف دارد.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $f(x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=2(\operatorname{Ln}x)\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\operatorname{Ln}x \Rightarrow f''(x)=-\frac{2}{x^2}\operatorname{Ln}x+\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}(1-\operatorname{Ln}x)$$

معادله‌ی $f''(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 1-\operatorname{Ln}x=0 \Rightarrow \operatorname{Ln}x=1 \Rightarrow x=e$$

$f''(e)=0$ است و $f''(x)$ در $x=e$ تغییر علامت می‌دهد. زیرا اگر $x>e$، آن‌گاه $\operatorname{Ln}x>1$ است، پس $f''(x)$ منفی می‌شود. اگر $x<e$، آن‌گاه $\operatorname{Ln}x<1$، پس $f''(x)$ مثبت می‌شود. در نتیجه $x=e$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است. در ضمن در $x=0$ مشتق‌های اول و دوم وجود ندارند، اما از آن‌جا که دامنه‌ی $f(x)$ فقط شامل $x>0$ است، نقطه‌ی $x=0$ نمی‌تواند نقطه‌ی عطف باشد (به عبارتی اصلاً در سمت چپ $x=0$ نموداری وجود ندارد که جهت تقعر آن تغییر کند).

حالا به تابع $g(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$ دقت می‌کنیم. برای مشتق‌گیری ساده‌تر، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+(x+1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow g''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

به عبارتی داریم $g'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)$ و $g''(x)=-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}\right)$. معادله‌ی $g''(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$g''(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}} \Rightarrow x+1=-(x-1) \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

پس $g''(0)=0$ است. حالا باید ببینیم آیا $g''(x)$ در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد یا خیر؟

اگر $1>x>0$ باشد، داریم $x+1>1$ و $-1<x-1<0$، پس $\sqrt[3]{(x+1)^5}>1$ و $-1<\sqrt[3]{(x-1)^5}<0$، اگر آن‌ها را وارونه کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}<-1\ ,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}<1$$

در نتیجه مجموع آن‌ها منفی است:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}<0$$

این نشان می‌دهد که $g''(x)>0$ است. با همین روش معلوم می‌شود که اگر $x<0$ باشد، آن‌گاه $g''(x)<0$ است؛ پس $g''(x)$ در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد و این یعنی $x=0$ نقطه‌ی عطف $g(x)$ است.

علاوه بر این، در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق دوم وجود ندارد، زیرا مخرج کسرها صفر می‌شوند. واضح است که $g''(x)$ در این دو نقطه تغییر علامت می‌دهد. زیرا در $x=1$ داریم:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

در $x=-1$ نیز به همین ترتیب از یک طرف $+\infty$ و از طرف دیگر $-\infty$ بدست می‌آید، پس این دو نقطه نیز نقاط عطف تابع $g(x)$ هستند.

مثال ۲۰ (سخت): فرض کنید c عددی حقیقی باشد و $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+c}$، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $c\ge 1$، آن‌گاه f روی بازه $(-\infty,-1)$ صعودی و روی بازه $(-1,\infty)$ نزولی است.

۲) اگر $c>1$، آن‌گاه ماکزیمم مطلق تابع برابر با $\frac{1}{c-1}$ خواهد شد.

۳) وقتی $c\ge 1$، نقطه‌ی عطف داریم.

۴) مختصات طول نقطه عطف به‌صورت $x=-1\pm\frac{\sqrt{3(c-1)}}{3}$ است.

پاسخ: گزینه «۳» برای پاسخ به این سؤال هر کدام از گزینه‌ها را به‌صورت جداگانه بررسی خواهیم کرد. اما ابتدا ضابطه‌ی $f'(x)$ و $f''(x)$ را می‌نویسیم:

$$f'(x)=\frac{-(2x+2)}{(x^2+2x+c)^2}=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+c)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x^2+2x+c)^2-2(2x+2)(x^2+2x+c)[-2(x+1)]}{(x^2+2x+c)^4}$$

با ساده کردن (x^2+2x+c) از صورت و مخرج داریم:

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+2x+c)+4(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x+c)^3}=\frac{2[3x^2+6x+4-c]}{(x^2+2x+c)^3}$$

پیش از آن‌که بررسی گزینه‌ها را آغاز کنیم، این موضوع را مورد توجه قرار می‌دهیم که آیا $f'(x)$ و $f''(x)$ در همه‌ی نقاط وجود دارند؟ باید ببینیم معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+2x+c=0$ دارای جواب است یا خیر؟ در این معادله داریم $\Delta=4-4c=4(1-c)$، بنابراین اگر $c\le 1$ باشد، آن‌گاه $\Delta\ge 0$ می‌شود و مخرج دارای ریشه است، یعنی $f'(x)$ و $f''(x)$ در برخی از نقاط وجود ندارند. اما اگر $c>1$ باشد، آن‌گاه Δ منفی می‌شود و عبارت x^2+2x+c ریشه ندارد و همواره مثبت است. با این مقدمه به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه (۱): اگر $c\ge 1$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+2x+c=0$ یا ریشه ندارد (در حالت $c>1$)، یا دارای ریشه‌ی مضاعف است (در حالت $c=1$). اگر $c>1$، x^2+2x+c همواره مثبت است. اگر $c=1$، داریم: $x^2+2x+c=x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$. بنابراین با شرط $c\ge 1$ می‌توان نتیجه گرفت که x^2+2x+c هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

اکنون به تعیین علامت $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+c)^2}$ می‌پردازیم. گفتیم که مخرج کسر منفی نمی‌شود. برای $x<-1$ داریم $x+1<0$، پس $f'(x)>0$ و برای $x>-1$ داریم $x+1>0$ پس $f'(x)<0$. به عبارتی $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,-1)$ صعودی و در بازه‌ی $(-1,\infty)$ نزولی است. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

بررسی گزینه (۲): اگر $c>1$ باشد، در مخرج کسر Δ منفی است و x^2+2x+c ریشه ندارد و همواره مثبت است. اکنون به ضابطه‌ی $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{(x^2+2x+c)^2}$ توجه می‌کنیم. برای $x<-1$، علامت $f'(x)$ مثبت است، پس $f(x)$ در این بازه صعودی است. برای $x>-1$ علامت $f'(x)$ منفی می‌شود، پس $f(x)$ در این بازه نزولی است. همین اطلاعات نشان می‌دهد که تابع $f(x)$ در $x=1$ به بیشترین مقدار خود رسیده است. به ازای $x=-1$ خواهیم داشت:

$$f(1)=\frac{1}{1-2+c}=\frac{1}{c-1}$$

پس ماکزیمم مطلق $f(x)$ برابر با $\frac{1}{c-1}$ است.

بررسی گزینه (۳): نامساوی $c\ge 1$ شامل دو حالت $c=1$ و $c>1$ است. بررسی کردن این تابع در حالت $c=1$ راحت است زیرا در این صورت با ایجاد اتحاد در مخرج کسر داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2}$$

بنابراین $f'(x)=-2(x+1)^{-3}$ و $f''(x)=6(x+1)^{-4}$ است. حالا به ضابطه‌ی $f''(x)=\frac{6}{(x+1)^4}$ توجه کنید. به وضوح این عبارت همواره مثبت است. پس وقتی $c=1$ باشد، $f''(x)$ همواره مثبت است و تقعر منحنی همیشه به سمت بالاست. در این حالت نقطه‌ی عطف وجود نخواهد داشت. پس گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا در حالت $c=1$ دیدیم که نقطه‌ی عطف وجود ندارد. اما برای کامل کردن جواب، حالت $c>1$ را هم بررسی می‌کنیم. در این صورت $f''(x)=\frac{2[3x^2+6x+4-c]}{(x^2+2x+c)^3}$ است و چون $c>1$ است، در مخرج کسر $\Delta<0$ می‌شود، پس مخرج ریشه ندارد و همواره مثبت است.

معادله‌ی $f''(x)=0$ را حل می‌کنیم.

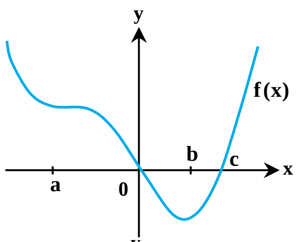
$$f''(x)=0\Rightarrow 3x^2+6x+4-c=0\Rightarrow \Delta=36-12(4-c)=12c-12=12(c-1)$$

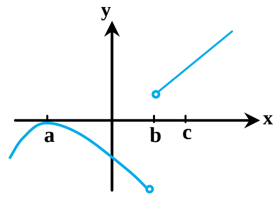
$$x=\frac{-6\pm\sqrt{12(c-1)}}{6}=\frac{-6\pm 2\sqrt{3(c-1)}}{6}=-1\pm\frac{\sqrt{3(c-1)}}{3}$$

هر دو ریشه، ریشه‌های ساده هستند، پس $f''(x)$ در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. به عبارت دیگر $x=-1\pm\frac{\sqrt{3(c-1)}}{3}$ طول نقاط عطف $f(x)$ هستند (البته با شرط $c>1$).

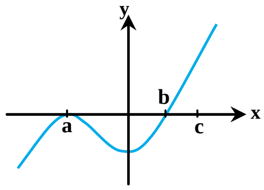
بررسی گزینه (۴): ضمن بررسی گزینه (۳) متوجه شدیم که اگر $c>1$ باشد، آن‌گاه طول نقاط عطف این تابع $x=-1\pm\frac{\sqrt{3(c-1)}}{3}$ هستند.

مثال۲۱: نمودار $f(x)$ داده شده است. نمودار $f'(x)$ کدام است؟

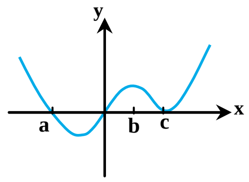




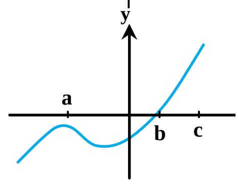
(۱)



(۲)

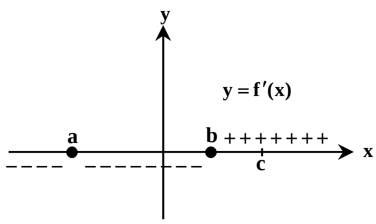


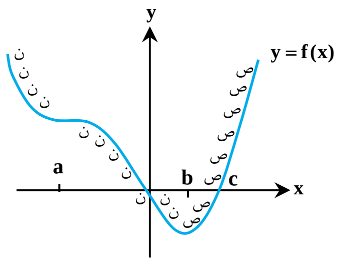
(۳)



(۴)

پاسخ: گزینه «۲» از چپ به راست حرکت می‌کنیم و در کنار نمودار $y = f(x)$، صعودی یا نزولی بودن آن را با حروف (ص) و (ن) می‌نویسیم. حالا یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا در آن دستگاه، علامت $f'(x)$ را مشخص کنیم. به جای حروف (ص) یک علامت (+) بالای محور x ها قرار می‌دهیم و به جای حروف (ن) یک علامت (-) زیر محور x می‌نویسیم.



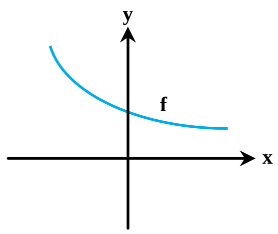


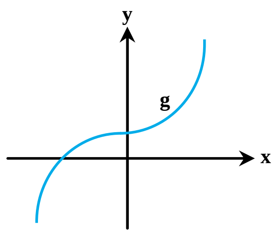
اکنون علامت $f'(x)$ را در نواحی مختلف می‌دانیم.

در بازه‌ی $(-\infty,b)$ نمودار $f(x)$ زیرمحور x ها است و در بازه‌ی (b,∞) نمودار $f(x)$ بالای محور x است. گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) این ویژگی را دارند؛ اما گزینه (۳) رد می‌شود. حالا به این نکته توجه می‌کنیم که نمودار $f(x)$ در هیچ نقطه‌ای ناپیوسته یا گوشه‌دار نشده است. پس $f'(x)$ در همه‌ی نقاط وجود دارد این نشان می‌دهد که گزینه‌ی (۱) صحیح نیست، زیرا طبق این گزینه، $f'(b)$ وجود ندارد.

در پایان وقتی به نقاط a و b توجه می‌کنیم، در هر دو نقطه، شیب نمودار $f(x)$ صفر شده است و این یعنی در این نقاط باید $f'(x)$ با محور x ها برخورد کند. پس گزینه‌ی (۴) رد می‌شود و گزینه (۲) صحیح است.

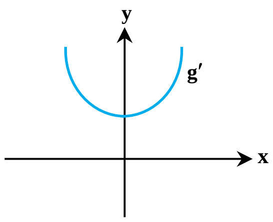
مثال۲۲: در مورد توابع f و g که در نمودار نشان داده شده است، کدام گزینه صحیح است؟



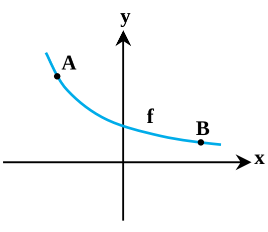


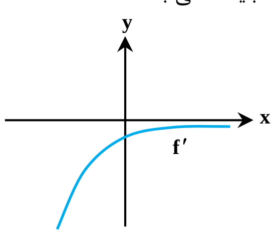
۱) مشتق سوم هر دو تابع f و g می‌تواند مثبت باشد.
۲) مشتق سوم هیچ کدام از دو تابع نمی‌تواند مثبت باشد.
۳) مشتق سوم f می‌تواند مثبت باشد و مشتق سوم g مثبت نیست.
۴) مشتق سوم g می‌تواند مثبت باشد، ولی مشتق سوم f مثبت نیست.

پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت به نمودار g متوجه می‌شویم که g یک تابع اکیداً صعودی است و این یعنی $g' > 0$ است. تقعر نمودار g دقیقاً در $x = 0$ عوض می‌شود در $x < 0$ تقعر رو به پایین است و این یعنی $g'' < 0$ و بعد از $x = 0$ تقعر رو به بالا است و این یعنی $g'' > 0$، به عبارت دیگر این نتیجه را نیز می‌توانیم بگیریم، که تابع g' به ازای $x < 0$ نزولی و به ازای $x > 0$ صعودی است وتقریباً نموداری شبیه نمودار مقابل را برای g' رسم کنیم و چون تقعر g' رو به بالاست، پس مشتق دوم g' یعنی مشتق سوم g مثبت است.

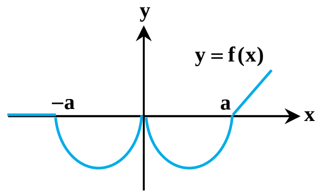


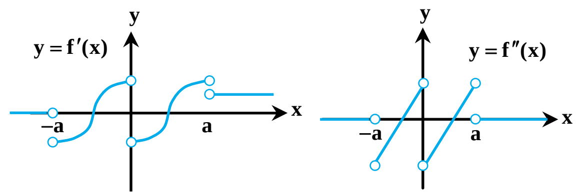
حالا نشان می‌دهیم که مشتق سوم f نمی‌تواند مثبت باشد. به شیب نمودار f توجه کنید، این نمودار همواره نزولی است بنابراین همواره $f' < 0$ است. اما اگر مقدار شیب نمودار $f(x)$ دقیق‌تر نگاه کنیم. هر چه به سمت راست حرکت می‌کنیم، سرعت نزول f کمتر می‌شود. برای مثال به دو نقطه‌ی A و B توجه کنید. در نقطه‌ی A، نمودار f با شیب تندی به سمت پایین می‌آید اما در نقطه‌ی B، نمودار f تقریباً افقی است و با شیب ملایمی در حال نزول است. پس نمودار f' همواره منفی است اما به سمت صفر میل می‌کند. به این ترتیب می‌توانیم شکل تقریبی f' را رسم کنیم. با رسم این نمودار می‌بینیم که جهت تقعر f' به سمت پایین است پس مشتق دوم f' یعنی f''' باید منفی باشد.



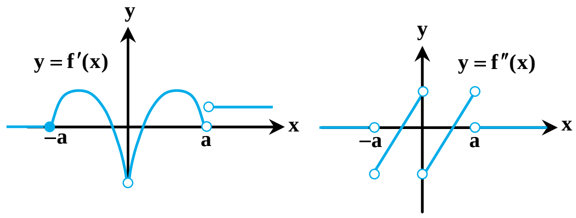


مثال ۲۳: نمودار $f(x)$ داده شده است. در کدام گزینه نمودارهای $f'(x)$ و $f''(x)$ به درستی رسم شده‌اند؟

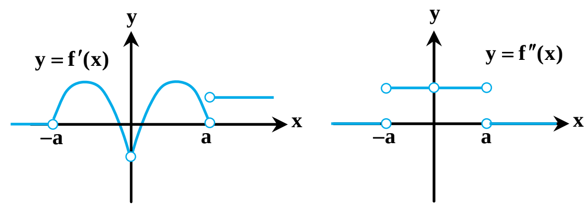




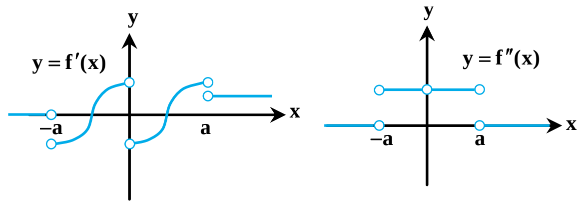
(۱)



(۲)



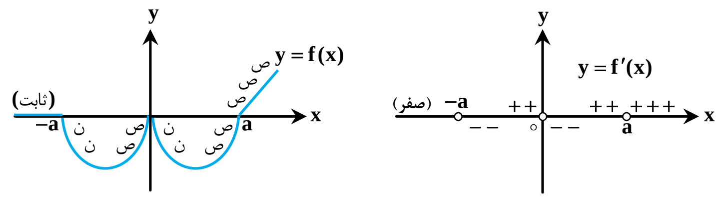
(۳)



(۴)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» پیش از شروع بررسی‌ها توجه کنید که در نقاط $x=a$، $x=۰$ و $x=-a$ تابع $f(x)$ دارای گوشه (زاویه) شده است پس در این ۳ نقطه، $f'(x)$ وجود ندارد. در نتیجه $f''(x)$ هم وجود ندارد. پس در گزینه‌ی صحیح باید این سه نقطه توخالی باشند. در ضمن نمودار $f'(x)$ در این نقاط باید ناپیوستگی رفع نشدنی داشته باشد یعنی مشتق‌های چپ و راست در این ۳ نقطه نباید با هم برابر باشند. پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند زیرا در $x=۰$ و $x=-a$ مشتق‌های چپ و راست برابر شده‌اند. هر دو گزینه‌ی (۱) و (۴) علامت $f'(x)$ را به درستی نشان داده‌اند. حالا کافی است اطلاعاتی در مورد $f''(x)$ به دست آوریم تا گزینه‌ی صحیح معلوم شود. اگر $f(x)$ دارای نقطه‌ی عطف باشد، در آن نقطه باید $f''(x)$ تغییر علامت بدهد. اما در این مثال نمودار $f(x)$ نقطه عطف ندارد. در بازه‌های $(-\infty,-a)$ و (a,∞)، نمودار $f(x)$ یک خط راست است پس نه تقعر رو به بالا و نه تقعر رو به پایین دارد. اما در بازه‌ی $(-a,۰)$ و $(۰,a)$ همواره تقعر f به سمت بالا است یعنی $f''(x)$ در این فاصله باید مثبت باشد. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

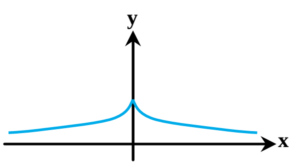
برای تکمیل جواب تشریحی و تشخیص نمودار f' ابتدا روی نمودار f از چپ به راست حرکت کرده و با حروف (ص) و (ن) وضعیت صعودی یا نزولی بودن f را یادداشت می‌کنیم. حالا یک دستگاه محورهای x و y را رسم می‌کنیم. حروف (ص) را به علامت (+) و حروف (ن) را با علامت (−) تعبیر می‌کنیم.



در ضمن در بازه‌ی $(-\infty,-a)$ نمودار f ثابت است پس نمودار f' در این قسمت باید صفر باشد.

مثال ۲۴: ضابطه نمودار مقابل کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۷۷)

۱) $y=\dfrac{۱}{x^{۲}+۱}$
۲) $y=\dfrac{۱}{|x|+۱}$
۳) $y=\dfrac{|x|}{x^{۲}}$
۴) $y=\dfrac{۱}{|x|-۱}$



☑ **پاسخ:** **گزینه «۲»** نمودار داده شده در همه‌ی نقاط یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$ تعریف شده است. بنابراین مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد. پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر نمودار رسم شده در $x=۰$ دارای گوشه است پس $f'(۰)$ وجود ندارد. در حالی‌که گزینه‌ی (۱) در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است. در گزینه‌ی (۱) داریم:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^{۲}+۱)^{۲}} \Rightarrow f'(۰)=۰$$

اما گزینه‌ی (۲) در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا تابع $y=|x|$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. مشتق‌های چپ و راست تابع $|x|$ در $x=۰$ به صورت ±۱ هستند.

مثال ۲۵: با کدامیک از شروط زیر حاصل‌ضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازاء جمیع مقادیر x صعودی است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $g(x) > 0 \ , \ f(x) > 0$
۲) $g'(x) > 0 \ , \ f'(x) > 0$
۳) $g'(x) > 0 \ , \ f'(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \ , \ f(x) > 0$
۴) $g''(x) > 0 \ , \ f''(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \ , \ f(x) > 0$

پاسخ: **گزینه «۳»** برای این‌که $f(x).g(x)$ صعودی باشد باید $[f(x).g(x)]' > 0$ باشد، در نتیجه داریم: $f'(x).g(x) + g'(x).f(x) > 0$
هرگاه $f'(x), g(x), f(x)$ و $g'(x)$ همگی مثبت باشند، رابطه فوق برقرار خواهد بود.

مثال ۲۶: در نقطه بحرانی، تابع $f(x) = 2x.e^{4x}$ کدام وضع را دارد؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) بازگشت ۲) قطع ۳) مینیمم ۴) ماکزیمم

پاسخ: **گزینه «۳»** ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = 2xe^{4x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{4x} + 4e^{4x} \times 2x = 2e^{4x}(1+4x) \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 4x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

حال به دو روش می‌توان تشخیص داد که $x = \frac{-1}{4}$ طول نقطه مینیمم است یا ماکزیمم؟

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

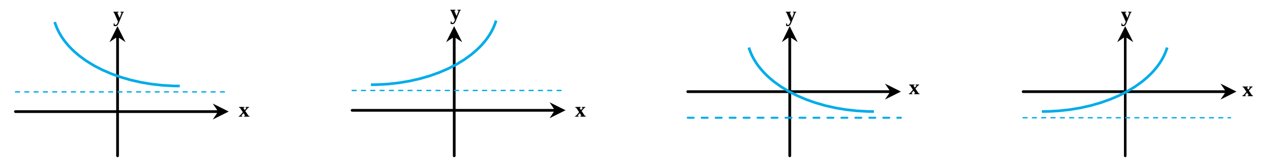
روش اول: تعیین علامت مشتق چون از $(-)$ به $(+)$ تبدیل می‌شود $x = -\frac{1}{4}$ طول نقطه min است.

روش دوم: با استفاده از آزمون مشتق دوم:

$$f(x) = 2x.e^{4x} \quad , \quad f'(x) = 2e^{4x}(1+4x) \Rightarrow f''(x) = 8e^{4x}(1+4x) + 4 \times 2e^{4x} = 8e^{4x}(2+4x) \Rightarrow f''(-\frac{1}{4}) = 8e^{-1}(2-1) = \frac{8}{e} > 0$$

بنا بر آزمون مشتق دوم چون در $x = -\frac{1}{4}$ مشتق دوم مثبت است، یعنی تقعر رو به بالا $(\cup)$ است لذا این نقطه طول نقطه min تابع می‌باشد.

مثال ۲۷: نمودار تابع $y = e^x - 1$ به کدام صورت است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)



(۴) (۳) (۲) (۱)

پاسخ: **گزینه «۱»** سؤال را با دو روش جواب می‌دهیم:

روش اول: چون $y' = e^x > 0$، لذا تابع همواره صعودی است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) غلط می‌باشد و چون $y(0) = e^0 - 1 = 0$ (یعنی تابع از مبدأ عبور می‌کند)، لذا با توجه به شکل گزینه (۳) هم غلط می‌باشد، لذا گزینه (۱) صحیح است.

روش دوم: با توجه به اشکال داده شده ملاحظه می‌شود که تابع دارای یک مجانب افقی است، لذا داریم: $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = +\infty$
که این شرط فقط در گزینه (۱) برقرار است.

مثال ۲۸: به ازای کدام مقادیر n، مبدأ مختصات یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $y = x^{3n-2}$ است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $n > \frac{2}{3}$ ۲) $n < 1$ ۳) $n < \frac{3}{2}$ ۴) $n > 2$

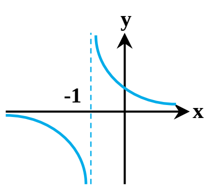
پاسخ: **گزینه «۱»** برای این‌که مبدأ بتواند نقطه بحرانی باشد لازم است مبدأ جزء دامنه تابع باشد، پس باید $3n - 2 > 0$ و یا $n > \frac{2}{3}$ باشد.

مثال ۲۹: توابع f و g با ضوابط $f(x) = \frac{1}{x+1}$ و $g(x) = e^x$ بر $\mathbb{R}$ چگونه‌اند؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) f نزولی و g صعودی است.
۲) f صعودی و g صعودی است.
۳) f و g هر دو نزولی هستند.
۴) فقط g صعودی است.

پاسخ: **گزینه «۴»** ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \ , \ g'(x) = e^x > 0$$



به نظر می‌رسد که f نزولی باشد ولی چون f در $x = -1$ ناپیوستگی دارد، لذا فقط در فواصل پیوسته نزولی است و بر کل $\mathbb{R}$ نزولی نیست (به شکل توجه کنید).

نکته: توابع $(y = \frac{ax+b}{cx+d} \ , \ ad \neq bc)$ در دامنه خود یکنوا هستند اما در $\mathbb{R}$ یکنوا نمی‌باشند.

مثال ۳۰: اگر $a>0$، بیشترین مقدار تابع $f(x)=ax-(1+a^4)x^2$ چقدر است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f'(x)=a-2(1+a^4)x=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2(1+a^4)} \Rightarrow f(\frac{a}{2(1+a^4)})=\frac{a^2}{4(1+a^4)}$$

حال لازم است بیشترین مقدار عبارت $\frac{a^2}{4(1+a^4)}$ را بدست آوریم $(a>0)$. بدین منظور ابتدا مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$(\frac{a^2}{4(1+a^4)})'=\frac{8a(1-a^4)}{16(1+a^4)^2}=0 \Rightarrow a=0\,,1\,,-1$$

که فقط $a=1$ قابل قبول است و به ازای $a=1$ مقدار عبارت برابر $\frac{1}{8}$ خواهد بود.

مثال ۳۱: تابع f در نقطه $x=1$ دارای مشتق مرتبه اول و دوم و سوم برابر صفر است و مشتق چهارم تابع f در $x=1$ منفی است. نقطه $x=1$ روی منحنی متناظر با چه نوع نقطه‌ای است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ماکزیمم ۲) عطف ۳) مینیمم ۴) بازگشت

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید تابع f در شرایط روبرو صدق کند: $f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0\ ,\ f^{n}(a)\neq 0$

در این صورت اگر n زوج و $f^{(n)}(a)>0$، آن‌گاه نقطه a، نقطه مینیمم خواهد بود و اگر n زوج و $f^{(n)}(a)<0$، آن‌گاه نقطه a، نقطه ماکزیمم خواهد بود و اگر n فرد باشد، a نقطه عطف است.

مثال ۳۲: اگر f تابعی با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^x & ;\ x>0 \\ 1 & ;\ x=0 \\ 1+e^{-\frac{1}{x^2}} & ;\ x<0 \end{cases}$ باشد، f چند نقطه بحرانی و چند اکسترمم دارد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) یک نقطه بحرانی و یک اکسترمم ۲) دو نقطه بحرانی و یک اکسترمم ۳) نقطه بحرانی و اکسترمم ندارد. ۴) دو نقطه بحرانی و دو اکسترمم

پاسخ: گزینه «۲» اگر $x<0$، آن‌گاه داریم: $f(x)=1+e^{-x^{-2}} \Rightarrow f'(x)=2x^{-3}e^{-x^{-2}}<0$

بنابراین f در فاصله $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است و در این فاصله نقطه بحرانی ندارد.

اگر $x>0$، آن‌گاه داریم: $f(x)=x^x \Rightarrow f'(x)=x^x(\mathrm{Ln}x+1)\ ,\ f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$

بنابراین $\frac{1}{e}$ یک نقطه بحرانی می‌باشد و چون در دو طرف این نقطه مشتق تغییر علامت می‌دهد بنابراین نقطه اکسترمم نیز می‌باشد.

چون ضابطه f در دو طرف نقطه $x=0$ عوض می‌شود، برای بررسی مشتق‌پذیری در $x=0$، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^{-x^{-2}}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x^{-2}}}{x}=0\quad ;\quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(\mathrm{Ln}x+1)}{1}=-\infty$$

چون مشتق چپ و راست f در صفر با هم برابر نیست، بنابراین f در صفر مشتق‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین صفر یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌باشد. ولی نقطه بحرانی صفر، نقطه اکسترمم نسبی نیست، زیرا مشتق f در دو طرف صفر تغییر علامت نمی‌دهد.

مثال ۳۳: مختصات نقطه مینیمم نسبی تابع با ضابطه $y=\frac{4\mathrm{Ln}^2x}{x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $(1,0)$ ۲) $(e,\frac{4}{e})$ ۳) $(\frac{1}{e},-\frac{4}{e})$ ۴) $(\frac{-1}{e},-4e)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=\frac{4\mathrm{Ln}^2x}{x} \Rightarrow y'=\frac{8\mathrm{Ln}x\times\frac{1}{x}\times x-4\mathrm{Ln}^2x}{x^2}=\frac{8\mathrm{Ln}x-4\mathrm{Ln}^2x}{x^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow 8\mathrm{Ln}x-4\mathrm{Ln}^2x=0 \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{Ln}x=0 \Rightarrow x=1 \\ 2-\mathrm{Ln}x=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x=2 \Rightarrow x=e^2\end{cases}$$

		1		e^2	
y'	−	○	+	○	−
	↘	min	↗		↘

min نقطه طول $x=1 \Rightarrow y=0$

مثال ۳۴: کدام مورد درباره تابع f به معادله $y=\cosh x$ نادرست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) زوج ۲) محدب ۳) دارای نقطه عطف ۴) دارای مینیمم

پاسخ: گزینه «۳»

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\Rightarrow y'=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\Rightarrow y''=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}$$

چون y'' همواره مثبت است، لذا تابع y همواره دارای تقعر رو به بالاست (یعنی محدب است) و دارای نقطه عطف نیست، از طرفی چون $D_y=\mathbb{R}$ و $f(-x)=f(x)$ می‌باشد، لذا تابع زوج است.

مثال ۳۵: ماکزیمم تابع f با ضابطه $f(x)=(\frac{۱}{x})^x$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) e^e ۲) $(\frac{۱}{e})^e$ ۳) $(e)^{\frac{۱}{e}}$ ۴) $(\frac{۱}{e})^{\frac{۱}{e}}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$y=(\frac{۱}{x})^x=x^{-x}\Rightarrow y'=x^{-x}(-\text{Ln}x-۱)$$

نقطه بحرانی $y'=۰\Rightarrow -\text{Ln}x-۱=۰\Rightarrow \text{Ln}x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{e}$

با توجه به این‌که به ازای $x<\frac{۱}{e}$، $y'>۰$ و به ازای $x>\frac{۱}{e}$، $y'<۰$، پس نقطه $x=\frac{۱}{e}$ نقطه ماکزیمم تابع می‌باشد، بنابراین $y(\frac{۱}{e})=e^{\frac{۱}{e}}$.

مثال ۳۶: تابع $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}-۲x^{\frac{۱}{۳}}$ در نقطه $x=۱$ و نقطه $x=۸$ به ترتیب دارای: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) یک ماکزیمم و یک نقطه عطف است. ۲) یک مینیمم و یک نقطه عطف است.

۳) یک نقطه عطف و یک ماکزیمم است. ۴) یک مینیمم و یک ماکزیمم است.

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا از تابع داده شده مشتق اول و دوم می‌گیریم و نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم و سپس رفتار y' و y'' را در اطراف نقاط بدست آمده بررسی می‌کنیم:

$$y=x^{\frac{۲}{۳}}-۲x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}(x^{\frac{-۱}{۳}}-x^{\frac{-۲}{۳}})$$

$$y'=۰\Rightarrow x^{-\frac{۱}{۳}}=x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow ۱=x^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow x=۱\rightarrow \text{نقطه بحرانی}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}})=\frac{۲}{۹}(-x^{-\frac{۴}{۳}}+۲x^{-\frac{۵}{۳}})$$

$$y''=۰\Rightarrow -x^{-\frac{۴}{۳}}+۲x^{-\frac{۵}{۳}}=۰\Rightarrow x^{-\frac{۴}{۳}}=۲x^{-\frac{۵}{۳}}\Rightarrow \frac{۱}{x^{\frac{۴}{۳}}}=\frac{۲}{x^{\frac{۵}{۳}}}\Rightarrow \frac{x^{\frac{۵}{۳}}}{x^{\frac{۴}{۳}}}=۲\Rightarrow x^{\frac{۱}{۳}}=۲\Rightarrow x=۸$$

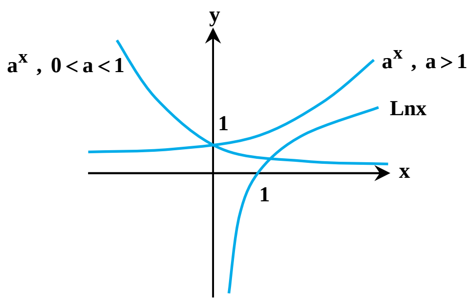
چون $f'(۱)=۰$ است و $f''(۱)=\frac{۲}{۹}(-۱+۲)>۰$، پس تابع در $x=۱$ دارای min است.

چون $f''(۸)=۰$ و در اطراف $x=۸$، f'' تغییر علامت می‌دهد، لذا $x=۸$ نقطه عطف است.

مثال ۳۷: اگر $۰<a<۱$ و $f(x)=xa^x$. به ازای چه مقادیری از x، f نزولی است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x>-\frac{۱}{\text{Lna}}$ ۲) $x<-\frac{۱}{\text{Lna}}$ ۳) $x>-\text{Lna}$ ۴) $x<-\text{Lna}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل نمودارها و فرمول‌های مشتق داریم:



$$(a^x)'=a^x\text{Lna}$$

$$\Rightarrow f(x)=xa^x\Rightarrow f'(x)=a^x+xa^x\text{Lna}=a^x(۱+x\text{Lna})$$

چون $۰<a<۱$است، لذا a^x همواره مثبت است. برای این‌که $f'(x)\le ۰$ باشد باید داشته باشیم:

$$۱+x\text{Ln}a\le ۰\Rightarrow x\text{Lna}\le -۱\Rightarrow (۰<a<۱\Rightarrow \text{Lna}<۰)\Rightarrow x\ge\frac{-۱}{\text{Lna}}$$

مثال ۳۸: تابع $f(x)=\frac{۲x^۲}{x^۲+۳}$ مفروض است. کدامیک از ادعاهای زیر برای این تابع کاملاً مصداق دارد؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) این تابع دارای یک مجانب $y=۲$، یک نقطه مینیمم و دو نقطه عطف دارد.
۲) این تابع دارای یک مجانب افقی و سه نقطه مینیمم است.
۳) این تابع دارای دو نقطه مینیمم است.
۴) این تابع دارای دو نقطه عطف و یک مینیمم است ولیکن مجانب افقی ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲+۳}=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow$ مجانب افقی

$f'(x)=\frac{۴x(x^۲+۳)-۲x(۲x^۲)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{۱۲x}{(x^۲+۳)^۲}=۰\Rightarrow x=۰\Rightarrow$ نقطه بحرانی

$f''(x)=\frac{۱۲(x^۲+۳)^۲-۴۸x^۲(x^۲+۳)}{(x^۲+۳)^۴}=\frac{۳۶-۳۶x^۲}{(x^۲+۳)^۳}\ ,\ f''(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱$

چون در دو طرف نقاط $x=\pm۱$، f'' تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط، نقاط عطف هستند. ضمناً در نقاط بحرانی $x=۰$، $f''>۰$، بنابراین نقطه $x=۰$ نقطه مینیمم منحنی می‌باشد.

مثال ۳۹: تابع $f(x)=x^۲-\frac{۲}{x}$ مفروض است. کدامیک از گزاره‌های ذیل در مورد این تابع صادق است؟ (عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) در نقطه $x=۰$ ناپیوسته است. یک نقطه مینیمم و یک نقطه عطف دارد.
۲) یک نقطه مینیمم و یک نقطه ماکزیمم دارد.
۳) در نقطه $x=۰$ مشتق ندارد و یک نقطه ماکزیمم دارد.
۴) در نقطه $x=۰$ یک مجانب عمودی دارد و فقط یک نقطه عطف دارد و نقاط مینیمم و ماکزیمم ندارد.

☑ **پاسخ:** **گزینه «۱»** چون $x=۰\notin D_f$، واضح است که تابع f در $x=۰$ پیوسته نمی‌باشد و لذا مشتق هم در این نقطه ندارد.
اگر x به سمت ∞ میل کند y هم به سمت ∞ میل می‌کند، لذا f دارای مجانب افقی هم نیست. اگر x به سمت صفر میل کند y هم به سمت ∞ میل خواهد کرد لذا مشخص است که $x=۰$ مجانب قائم تابع می‌باشد. برای یافتن نقاط اکسترمم و عطف مشتق می‌گیریم:

$f(x)=x^۲-\frac{۲}{x}\Rightarrow f'(x)=۲x+\frac{۲}{x^۲}=\frac{۲x^۳+۲}{x^۲}$

چون f' در همه جا بجز $x=۰$ موجود است و $x=۰\notin D_f$، لذا تابع f فقط در نقاطی بحرانی است که $f'(x)=۰$. در نتیجه داریم: $۲x^۳+۲=۰\Rightarrow x=-۱$

چون مشتق در دو سمت $x=-۱$ تغییر علامت می‌دهد، (در سمت چپ مشتق منفی و در سمت راست مثبت است) لذا $x=-۱$، طول نقطه min تابع f می‌باشد و تابع نقطه اکسترمم دیگری ندارد.

با توجه به گزینه‌ها واضح است که مطالب فوق بیانگر صحیح بودن گزینه (۱) است اما جهت اطلاع وجود نقطه عطف را هم بررسی می‌کنیم:

$f'(x)=\frac{۲x^۳+۲}{x^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۶x^۲.x^۲-۲x(۲x^۳+۲)}{x^۴}=\frac{۲x^۳-۴}{x^۳}$

$f''(x)=۰\Rightarrow ۲x^۳-۴=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$

چون f'' در دو طرف نقطه $x=\sqrt[۳]{۲}$ تغییر علامت می‌دهد، لذا این نقطه طول نقطه عطف برای منحنی داده شده است.

مثال ۴۰: فاصله نقطه مینیمم نسبی منحنی تابع $y=x^۲e^{-x}$ از خط مجانب آن چقدر است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** **گزینه «۱»** ابتدا مجانب را بدست می‌آوریم: مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲}{e^x}=۰$

ملاحظه می‌شود که خط $y=۰$ مجانب افقی تابع مورد نظر می‌باشد و این تنها مجانب تابع است. حال نقطه min تابع را بدست می‌آوریم:

$y=x^۲e^{-x}=\frac{x^۲}{e^x}\Rightarrow y'=\frac{۲xe^x-x^۲e^x}{(e^x)^۲}=\frac{۲x-x^۲}{e^x}$

چون مخرج همواره بزرگتر از صفر است لذا نقاط بحرانی فقط ریشه‌های صورت است:

$y'=۰\Rightarrow ۲x-x^۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$

حال مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

		۰		۲	
y'	$-$		$+$		$-$
	↘	min	↗	max	↘

ملاحظه می‌شود که تابع $y=x^۲e^{-x}$ در $x=۰$ دارای min و فاصله این نقطه تا خط $y=۰$ برابر صفر می‌باشد.

مثال۴۱: تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin(\frac{1}{x}) & ; \ x\neq 0 \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$ تعریف شده است، کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد تابع f درست است؟

(هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است.
۲) تابع f در همه نقاط به جز مبدأ مشتق‌پذیر است.
۳) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ نزولی است.
۴) تابع f در همه نقاط مشتق‌پذیر است و در یک همسایگی مبدأ صعودی است.

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** واضح است که f در نقاط غیرصفر پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشد، و فقط نقطه $x=0$ را باید مورد بررسی قرار داد:

بررسی مشتق‌پذیری در مبدأ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x\sin\frac{1}{x})=1+0\times$ تابع کراندار $=1+0=1$

پس f در $x=0$ نیز مشتق‌پذیر است. حال توجه کنید که از مثبت بودن f' در یک نقطه نمی‌توان صعودی بودن f در همسایگی آن نقطه را نتیجه گرفت. در واقع اگر به ضابطه‌ی $f'(x)$ توجه کنیم داریم: $f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}$

حالا به نقاط $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ و $t_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ توجه کنید. $f'(x_n)=1+0-2<0$ و $f'(t_n)=1+0+2>0$ است. از آن‌جا که x_n و t_n هر دو به صفر میل می‌کنند، در هر همسایگی از مبدأ نقاطی وجود دارند که f نزولی است و نقاطی وجود دارند که f صعودی است.

مثال۴۲: فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی یک به یک باشد. پس برای هر $x,y\in[a,b]$ که $x<y$ داریم $f(x)\neq f(y)$ و لذا $f(x)<f(y)$ یا $f(x)>f(y)$ از این استدلال می‌توان چه نتیجه‌ای گرفت؟

(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) اگر فرض پیوستگی f هم اضافه شود آن‌گاه f یکنواست.
۲) f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.
۳) f قطعه به قطعه اکیداً یکنواست.
۴) اصولاً این استدلال هیچ نتیجه‌ای در مورد یکنوا بودن f نمی‌دهد.

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** طبق متن درس، هر تابعی که بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و یک به یک باشد اکیداً یکنوا و در نتیجه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. اما در صورت سؤال شرط پیوسته بودن f را نداریم پس گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند. در ضمن حتی با اضافه کردن شرط پیوستگی به صورت سؤال باز هم استدلال مطرح شده کامل نیست، بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است.

مثال۴۳: مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y=e^{2x}+e^{-2x}$ کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

☑ **پاسخ: گزینه «۴»**

روش اول: $y=e^{2x}+e^{-2x}\Rightarrow y'=2e^{2x}-2e^{-2x}\Rightarrow y'=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y(0)=2$

روش دوم: می‌دانیم اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه $a+\frac{1}{a}\geq 2$؛ چون $e^{2x}>0$ است، لذا داریم: $y=e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}\geq 2$، ملاحظه می‌شود که مقدار مینیمم y برابر ۲ است.

مثال۴۴: تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x}-Lnx$ از نظر ماکزیمم و مینیمم نسبی چگونه است؟ $(x>0)$

(ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) فقط یک مینیمم دارد.
۲) فقط یک ماکزیمم دارد.
۳) یک ماکزیمم و یک مینیمم دارد.
۴) ماکزیمم و مینیمم نسبی ندارد.

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** $y=\sqrt{x}-Lnx\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$, $y'=0\Rightarrow x-2\sqrt{x}=0\Rightarrow x=2\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غیرقابل قبول}\\ x=4\end{cases}$

x		0		4	
y'		‖	$-$	0	$+$
			$\searrow$	min	$\nearrow$

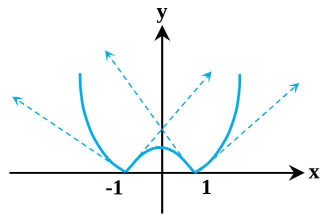
جزء دامنه نمی‌باشد

مثال ۴۵: تابع $f(x)=|x^2-1|$ در بازه $[-2,2]$ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) مشتق‌پذیر نیست و مینیمم مطلق دارد.
۲) مشتق‌پذیر است و مینیمم مطلق ندارد.
۳) مشتق‌پذیر است و مینیمم مطلق دارد.
۴) مشتق‌پذیر نیست و مینیمم مطلق ندارد.

پاسخ: **گزینه «۱»** **نکته:** تابع $f(x)=|g(x)|$ در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق مشتق‌پذیر نمی‌باشد و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقاط مینیمم مطلق این تابع نیست. پس تابع f در $x=\pm1$ مشتق‌پذیر نیست $(g(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm1)$ و این نقاط برای تابع f نقاط min مطلق تابع می‌باشد.

نمودار تابع f به‌صورت روبرو است، ملاحظه می‌شود که نقاط $x=\pm1$ نقاط زاویه‌دار می‌باشند.



مثال ۴۶: تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ مفروض است، کدام گزینه نادرست است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) تابع f در فاصله $(-1,0)$ صعودی است.
۲) تابع f در نقطه $x=1$ مینیمم نسبی دارد.
۳) تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد.
۴) تابع f در فاصله $x>0$ صعودی است.

پاسخ: **گزینه «۲ و ۳»**

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}(x+1)=\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+1)$$

اگر $x>-1$ باشد، آن‌گاه $f'(x)>0$. پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-1,\infty)$ صعودی است. در نتیجه هم در بازه‌ی $(-1,0)$ و هم در بازه‌ی $(0,\infty)$ یعنی $x>0$ می‌توانیم بگوییم که $f(x)$ صعودی است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) جملات درستی هستند. تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین $x=0$ نقطه بحرانی می‌باشد. ولی $f'(x)$ حول نقطه $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد، در واقع $f'(0^+)$ و $f'(0^-)$ هر دو $+\infty$ می‌شوند. بنابراین $x=0$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی نمی‌باشد. نقطه $x=1$، نقطه عادی روی منحنی می‌باشد زیرا f در $x=1$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن مخالف صفر می‌باشد.

مثال ۴۷: در تابع $y=x^3+px^2+q$ مقادیر p و q را طوری بیابید که نقطه مینیمم تابع به طول ۲ روی محور x ها باشد. (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $q=4\ ,\ p=-3$
۲) $q=-4\ ,\ p=3$
۳) $q=-4\ ,\ p=-3$
۴) $q=4\ ,\ p=3$

پاسخ: **گزینه «۱»** نقطه $(2,0)$ روی منحنی قرار دارد و مشتق تابع در این نقطه برابر صفر است.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(2)=0 \Rightarrow 8+4p+q=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 6+2p=0 \Rightarrow p=-3\ ,\ q=4 \end{cases}$$

مثال ۴۸: تابع $y=\frac{x^2+3}{ax+b}$ مفروض است، $a\neq0$ این تابع: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) همواره دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم است.
۲) Max و Min ندارد
۳) فقط یک Max دارد.
۴) فقط یک Min دارد.

پاسخ: **گزینه «۱»**

$$y'=\frac{2x(ax+b)-a(x^2+3)}{(ax+b)^2}=\frac{ax^2+2bx-3a}{(ax+b)^2}=0 \Rightarrow ax^2+2bx-3a=0$$

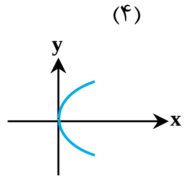
معادله اخیر همواره دو ریشه دارد (زیرا $\Delta>0$) و چون y' در دو طرف ریشه‌ها تغییر علامت می‌دهد، پس یکی مینیمم و دیگری ماکزیمم می‌باشد.

مثال ۴۹ : مختصات نقطه عطف منحنی به معادله $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^2+2t \end{cases}$ در صفحه xoy، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

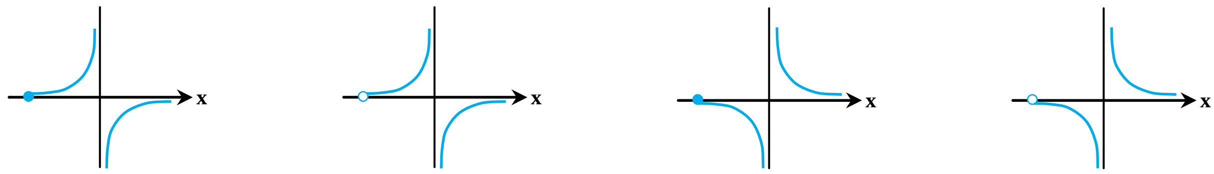
۱) $(0,0)$
۲) $(4,0)$
۳) $(1,3)$
۴) فاقد نقطه عطف

(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: **گزینه «۴»** با حذف t بین x و y به رابطه $y=x\pm2\sqrt{x}$ می‌رسیم. در همسایگی مبدأ $x\pm2\sqrt{x}\sim\pm2\sqrt{x}$ و بنابراین منحنی را می‌توان به‌صورت $y=\pm\sqrt{x}$، در نظر گرفت که نمودار آن به‌صورت زیر می‌باشد و با توجه به شکل نمودار در مبدأ دارای خط مماس است و جهت تقعر نیز عوض می‌شود. ولی خط مماس در نقطه‌ی $x=0$ از نمودار تابع عبور نمی‌کند؛ بنابراین نقطه‌ی $x=0$ نقطه عطف تابع نمی‌باشد.



مثال ۵۰: برای $x>0$ تابع $f(x)=\log_x e$ را در نظر می‌گیریم. کدام‌یک از تصاویر زیر نمودار f را بهتر نمایش می‌دهد؟(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۵)



(۱) (۲) (۳) (۴)

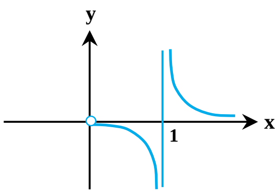
پاسخ: گزینه «۱» ابتدا هشدار می‌دهیم که هر خط عمودی را به عنوان محور y ها در نظر نگیرید. در گزینه‌های داده شده، محور x معلوم است اما خط عمودی رسم شده، لزومی ندارد که محور y ها باشد. تابع $f(x)$ را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم: $f(x)=\log_x e=\frac{1}{\log_e x}=\frac{1}{\text{Ln}x}$

تابع $\text{Ln}x$ برای $x>0$ تعریف شده است، همچنین در $x=1$ داریم: $\text{Ln}1=0$، پس این نقطه در دامنه f نیست در نتیجه دامنه‌ی f برابر با $(0,\infty)-\{1\}$ است. می‌توان گفت دامنه‌ی f برابر با $(0,1)\cup(1,\infty)$ است. وضعیت $f(x)$ را در لبه‌ی این بازه‌ها مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\text{Ln}\infty}=\frac{1}{\infty}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{\text{Ln}(0^+)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{\text{Ln}(1^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{\text{Ln}(1^-)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

در مورد حدهای چپ و راست در نقطه‌ی $x=1$ دقت کنید که برای x های کوچکتر از یک، $\text{Ln}x$ منفی است و برای x های بزرگتر از یک $\text{Ln}x$ مثبت است. در ضمن وقتی $x\to 0^+$ داریم: $y\to 0$، پس نمودار $f(x)$ به نقطه‌ی $(0,0)$ میل می‌کند اما $x=0$ در دامنه‌ی f قرار ندارد، پس نمودار f شامل مبدأ نیست. در واقع با در نظر گرفتن محور y ها نمودار $f(x)$ به‌صورت مقابل است اما در گزینه‌ها محور y ها رسم نشده است.



مثال ۵۱: اگر $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\sin\pi x$، آن‌گاه تعداد نقاط بحرانی تابع gof روی بازه $[0,\frac{9}{4}]$ کدام است؟(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا ضابطه‌ی $h(x)=gof(x)$ را می‌نویسیم: $h(x)=gof(x)=g(f(x))=\sin(\pi f(x))=\sin(\pi(x-\lfloor x\rfloor))$

مقدار $\lfloor x\rfloor$ در فواصل مختلف تغییر می‌کند. بهتر است $h(x)$ را در فاصله‌ی $0\le x\le\frac{9}{4}$ به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم:

$$h(x)=\begin{cases}\sin\pi(x-0) & ; \quad 0\le x\le 1\\ \sin\pi(x-1) & ; \quad 1\le x<2\\ \sin\pi(x-2) & ; \quad 2\le x<\frac{9}{4}\end{cases}$$

با استفاده از انتقال‌های مثلثاتی داریم: $\sin\pi(x-1)=\sin(\pi x-\pi)=-\sin\pi x$ و $\sin\pi(x-2)=\sin(\pi x-2\pi)=\sin\pi x$ در نتیجه داریم:

$$h(x)=\begin{cases}\sin\pi x & ; \quad 0\le x<1\\ -\sin\pi x & ; \quad 1\le x<2\\ \sin\pi x & ; \quad 2\le x<3\end{cases}\xrightarrow{\text{برای تشخیص نقاط بحرانی } h'(x) \text{ را حساب می‌کنیم}} h'(x)=\begin{cases}\pi\cos\pi x & ; \quad 0<x<1\\ -\pi\cos\pi x & ; \quad 1<x<2\\ \pi\cos\pi x & ; \quad 2<x<3\end{cases}$$

ما به دنبال نقاطی هستیم که در آن‌ها $h'(x)=0$ باشد یا $h'(x)$ وجود نداشته باشد. ابتدا مشتق‌پذیری $h(x)$ در نقاط $x=0,1,2,\frac{9}{4}$ را بررسی می‌کنیم.

نقاط $x=0$ و $x=\frac{9}{4}$ که لبه‌های بازه هستند، جزو نقاط بحرانی‌اند، زیرا در $x=0$ مشتق مشتق راست را داریم و در $x=\frac{9}{4}$ فقط مشتق چپ را داریم. در $x=1$ داریم $h'(1^+)=-\pi\cos\pi=\pi$ و $h(1^-)=\pi\cos\pi=-\pi$ پس $h'(1)$ وجود ندارد. در $x=2$ داریم $h'(2^+)=\pi\cos 2\pi=\pi$ و $h'(2^-)=-\pi\cos 2\pi=-\pi$ در نتیجه $h'(2)$ وجود ندارد. تا اینجا دیدیم که $x=0,1,2,\frac{9}{4}$ نقاط بحرانی هستند. حالا به جواب‌های معادله‌ی $h'(x)=0$ دقت کنیم. با توجه به ضابطه‌ی $h'(x)$، هرجا که $\cos\pi x=0$ باشد، داریم $h'(x)=0$.

$$\cos\pi x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

البته ما فقط جواب‌هایی را که در بازه‌ی $[0,\frac{9}{4}]$ هستند، در نظر گرفته‌ایم. در نهایت می‌بینیم که ۶ نقطه‌ی بحرانی در این بازه وجود دارد که عبارتند از: $\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{9}{4}\}$

مثال ۵۲: اگر $x \le 1$ ، $f(x) = x^3 - 3x + 2$ و $g(x) = x^3 + x$ باشد، بزرگترین مقدار تابع gof کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) ۳۰ ۲) ۵۴ ۳) ۶۸ ۴) ۱۳۰

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که g تابعی اکیداً صعودی است ($g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$)، لذا بیشترین مقدار gof به ازای بیشترین مقدار f در فاصله $(-\infty, 1]$ حاصل می‌شود.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 , +1 \Rightarrow f(-1) = 4 , f(1) = 0$$

بنابراین بیشترین مقدار f برابر ۴ است. در نتیجه داریم:

$$g(4) = 4^3 + 4 = 64 + 4 = 68$$

توجه: هرگاه تابع $g(x)$ در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد بیشترین مقدار $gof(x)$ در آن بازه به ازای بیشترین مقدار $f(x)$ در آن بازه حاصل می‌شود.

مثال ۵۳: مقدار ماکزیمم مطلق تابع $y = -|x| + |3x+6| - |3x+5|$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» طراح سؤال، محدوده‌ای برای x تعیین نکرده است پس منظور آن است که ماکزیمم مطلق را روی کل دامنه‌ی $f(x)$ پیدا کنیم. این تابع در همه‌ی نقاط تعریف شده است، پس دامنه‌ی f، بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ است. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. سپس مقدار $f(x)$ را در همه‌ی نقاط بحرانی و در دو سرِ دامنه محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم. می‌دانیم توابعی به شکل کلی $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده معادله‌ی $f(x) = 0$ مشتق‌پذیر نیستند، پس داریم:

$$(x = 0) \; ; \; (3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2) \; ; \; (3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3})$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x = -2, 0, -\frac{5}{3}$، حالا مقدار $f(x)$ را در این نقاط و در دو سرِ دامنه حساب می‌کنیم:

$$f(-2) = -2 + 0 - 1 = -3 \quad , \quad f(0) = 0 + 6 - 5 = 1 \; , \; f(-\frac{5}{3}) = -\frac{5}{3} + 1 - 0 = \frac{1}{3}$$

هرگاه $x \to -\infty$ میل کند، همه‌ی عبارات داخل قدرمطلق‌ها منفی می‌شوند و داریم: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [x - 3x - 6 + 3x + 5] = \lim\limits_{x \to -\infty} [x - 1] = -\infty$

هرگاه $x \to +\infty$ میل کند، همه‌ی عبارات داخل قدرمطلق‌ها مثبت می‌شوند و داریم: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [-x + 3x + 6 - 3x - 5] = \lim\limits_{x \to +\infty} [-x + 1] = -\infty$

با مقایسه‌ی مقادیر به دست آمده می‌بینیم که ماکزیمم مطلق $f(x)$ برابر با ۱ است.

مثال ۵۴: در مورد تابع $f(x) = xLnx$ ، $0 \le x \le 1$ (۰ نقطه ناپیوستگی رفع کردنی تابع است)، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (معدن ـ سراسری ۸۷)

۱) دارای مینیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است. ۲) دارای ماکزیمم مقدار $\frac{1}{e}$ است.

۳) تقعر منحنی در تمام بازه رو به بالاست. ۴) تقعر منحنی در تمام بازه رو به پایین است.

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x) = xLnx \Rightarrow f'(x) = Lnx + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(e^{-1}) > 0 \Rightarrow$ نقطه $x = e^{-1}$ نقطه مینیمم تابع است

مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$ می‌باشد و در بازه مورد نظر همواره $f'' > 0$ است، پس تقعر منحنی روبه بالاست.

مثال ۵۵: اگر $f(x) = -x^2 + 2x$ ، $g(x) = (x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x}$ ، بیشترین مقدار تابع gof کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{31}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» چون تابع g صعودی است ($g'(x) > 0$)، بنابراین بیشترین مقدار gof وقتی حاصل می‌شود که f ماکزیمم باشد.

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (gof)(1) = g(f(1)) = g(1) = 0$$

مثال ۵۶: تقعر نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$ در کدام بازه به طرف yهای مثبت است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

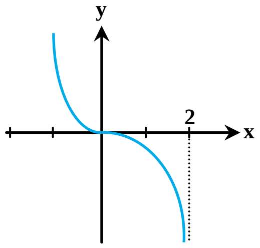
۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(1, +\infty)$ ۴) $(1, 3)$

پاسخ: گزینه «۲»

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}}) \Rightarrow f''(x) = \underbrace{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})}_{\text{همواره مثبت}}$$

توجه کنید که دامنه f بازه $[0, +\infty)$ است. بنابراین روی همه‌ی بازه‌هایی که در قسمت $x \ge 0$ قرار داشته باشند، تقعر f رو به بالاست. اما گزینه‌ی (۲) بزرگترین بازه با این خاصیت است.

مثال ۵۷: قسمتی از نمودار $y=\dfrac{x^n}{x^2-b^2x+2b}$ به صورت زیر است. ماکزیمم مقدار nb کدام است؟ (n عددی طبیعی است.) (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)



۱) ۳-
۲) ۱-
۳) ۳
۴) ۵

پاسخ: گزینه «۱» مطابق نمودار داده شده، $x=2$ مجانب قائم است؛ بنابراین $x=2$ باید ریشه‌ی مخرج باشد. با قرار دادن $x=2$ در مخرج کسر داریم:

$$4-2b^2+2b=0 \Rightarrow -2(b^2-b-2)=0 \Rightarrow -2(b-2)(b+1)=0 \Rightarrow b=2 \text{ یا } b=-1$$

با توجه به شکل، در $x=0$، جهت تقعر منحنی عوض شده است، پس $x=0$ نقطه‌ی عطف است. از طرفی $x=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی n برای این تابع است. می‌دانیم که در این حالت n باید عددی فرد و بزرگتر از یک باشد. به عبارتی $n=3,5,7,\dots$ می‌تواند باشد، پس $n\ge 3$ است. اکنون به ضابطه‌ی $f'(x)$ دقت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{nx^{n-1}(x^2-b^2x+2b)-(2x-b^2)x^n}{(x^2-b^2x+2b)^2}=\frac{x^{n-1}[(n-2)x^2+b^2(1-n)x+2bn]}{(x^2-b^2x+2b)^2}$$

در نزدیکی عدد صفر چه از چپ و چه از راست، تابع $f(x)$ نزولی است یعنی $f'(x)$ باید منفی باشد:

$$\frac{x^{n-1}[(n-2)x^2+b^2(1-n)x+2bn]}{(x^2-b^2x+2b)^2}\le 0$$

n عددی فرد است، پس $n-1$ عددی زوج است و $x^{n-1}\ge 0$ می‌شود. در مخرج هم توان ۲ داریم و $(x^2-b^2+2b)^2\ge 0$ است. بنابراین برای آن که $f'(x)$ در نزدیکی صفر منفی باشد باید $(n-2)x^2+b^2(1-n)x+2bn$ در نزدیکی صفر، مقدارش منفی باشد. با جایگذاری $x=0$ در این عبارت می‌بینیم که مقدارش در صفر برابر است با $2bn$ پس $2bn<0$ است. عدد طبیعی n مثبت است، پس $b<0$ است. از اینجا متوجه می‌شویم که $b=2$ قابل قبول نیست و $b=-1$ تنها مقدار قابل قبول برای b است. در یک جمع‌بندی، متوجه شدیم که $b=-1$ و $n\ge 3$ است. پس $nb\le -3$ است.

مثال ۵۸: تابع $f(x)=\sqrt[5]{x-1}\sqrt[7]{x-2}\,|(x-1)(x-2)|$ در $x=1$ و $x=2$ به ترتیب چگونه است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

۱) عطف و مینیمم
۲) ماکزیمم و مینیمم
۳) هر دو مینیمم
۴) هر دو عطف

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها $x=1$ و $x=2$ هیچکدام نقطه‌ی عادی نیستند. بنابراین فقط می‌ماند تشخیص نوع آن‌ها که مینیمم هستند یا ماکزیمم یا نقطه‌ی عطف. در $x=1$ داریم $f(1)=0$. در سمت چپ این نقطه (مثلاً $x=0/9$) داریم $f(x)>0$ و در سمت راست آن (مثلاً $x=1/1$) داریم $f(x)<0$. پس در نزدیکی نقطه‌ی $x=1$ در برخی نقاط $f(x)>f(1)$ و در برخی نقاط دیگر $f(x)<f(1)$ است. پس $f(1)$ نه مینیمم نسبی f است و نه ماکزیمم نسبی آن است. در نتیجه باید نقطه‌ی عطف باشد.

بررسی مشابهی نشان می‌دهد که $x=2$ هم نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست و باید نقطه‌ی عطف باشد. در $x=2$ داریم $f(2)=0$. در سمت چپ این نقطه (مثلاً $x=1/9$) داریم $f(x)<0$ و در سمت راست آن (مثلاً $x=2/1$) داریم $f(x)>0$. پس $f(2)$ نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. به این ترتیب گزینه‌ی (۴) صحیح است.

توضیح: برای یک حل کاملاً تشریحی که وابسته به گزینه‌ها نباشد، باید $f'(x)$ و $f''(x)$ را در این دو نقطه حساب کنیم که با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ وقت‌گیر است. به عنوان نمونه برای محاسبه‌ی $f'(1)$ بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x-1}\sqrt[7]{x-2}\,|(x-1)(x-2)|}{x-1}$$

حالا می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\pm 1$ در نتیجه:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x-1}\sqrt[7]{x-2}\,|x-2|}{\pm 1}=0$$

مثال ۵۹: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ روی بازه $[-\pi,\pi]$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: ابتدا توجه کنید که داریم:

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\cos x}{|\cos x|}$$

با توجه به ضابطه f' نتیجه می‌گیریم f' در $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ وجود ندارد؛ یعنی f در $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر نیست. از طرفی نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس f دارای چهار نقطه بحرانی است.

روش دوم: ضابطه f را به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\pi-x & ; x>\frac{\pi}{2}\\ x & ; \frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\pi-x & ; x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ می‌توان نوشت، در این‌صورت واضح است که f در نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست در این نقاط با هم برابر نیست و نقاط $\pm\pi$ نیز نقاط بحرانی هستند، پس f چهار نقطه بحرانی دارد.

مثال ۶۰: تابع با ضابطه $f(x)=x-x^{\frac{2}{3}}$ روی بازه $[-1,2]$، کدام وضع را دارد؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) فقط مینیمم نسبی
۲) فقط ماکزیمم نسبی
۳) ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی
۴) فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x)=x-x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

واضح است که f' در $x=0$ وجود ندارد پس $x=0$ نقطه بحرانی f می‌باشد. از طرفی معادله از $f'(x)=0$، مقدار $x=\frac{8}{27}$ به‌دست می‌آید. حال از تعیین علامت f' نتیجه می‌شود که $x=0$ ماکزیمم نسبی و $x=\frac{8}{27}$ مینیمم نسبی f است.

مثال ۶۱: نقاط عطف منحنی تابع $f(x)=x^4-2x^3+1$ بر روی کدام خط قرار دارند؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $x+y=1$
۲) $2x+y=1$
۳) $x-y=1$
۴) $x-2y=1$

پاسخ: گزینه «۱» برای بدست آوردن نقاط عطف معادله $y''=0$ را حل می‌کنیم.

$$y=x^4-2x^3+1\Rightarrow y'=4x^3-6x^2\Rightarrow y''=12x^2-12x=0\Rightarrow 12x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow y=1\\ x=1\Rightarrow y=0\end{cases}$$

معادله خطی که از نقاط $A(0,1)$ و $B(1,0)$ عبور کند به‌صورت $x+y=1$ می‌باشد.

مثال ۶۲: تابع $f(x)=|1-|x||$ در بازه $[-2,2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» بطور کلی می‌دانیم تابع $y=|f(x)|$ در ریشه‌های غیر تکراری $f(x)=0$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع داده شده در صورت سؤال در نقطه $x=0$ و نقاطی که $1-|x|=0$، یعنی نقاط $x=\pm1$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین مجموعه نقاط $\{-1,0,1\}$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند و با توجه به این‌که نقاط مرزی نیز نقاط بحرانی هستند پس دربازه مورد نظر نقاط $\{-2,-1,0,1,2\}$ مجموعه نقاط بحرانی هستند.

مثال ۶۳: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1+|\sin x| & ; x<\frac{\pi}{2}\\ 2+(x-\frac{\pi}{2})^2 & ; x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $f(x)$ بر $\mathbb{R}$ دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.
۲) $f(x)$ در تمام $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.
۳) $f(x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق پذیر نیست.
۴) $x=\frac{\pi}{2}$ یک نقطه عطف برای $f(x)$ است.

پاسخ: گزینه «۴» در همسایگی نقطه $\frac{\pi}{2}$ ضابطه تابع f را به‌صورت $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & ; x<\frac{\pi}{2}\\ 2+(x-\frac{\pi}{2})^2 & ; x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$ می‌توان نوشت، پیوسته بودن در $x=\frac{\pi}{2}$ واضح است، با مشتق‌گیری از آن داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & ; x<\frac{\pi}{2}\\ 2(x-\frac{\pi}{2}) & ; x>\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad \text{و}\quad f''(x)=\begin{cases}-\sin x & ; x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & ; x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

مشتق چپ و راست f در $\frac{\pi}{2}$ موجود و با هم برابرند، اما f'' در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ وجود ندارد و f'' در این نقطه تغییر علامت می‌دهد، یعنی $x=\frac{\pi}{2}$ نقطه عطف تابع f است.

مثال ۶۴: تنها حداکثر نسبی تابع $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+1$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x^2-24x=0 \Rightarrow 4x(x^2-x-6)=0 \Rightarrow x=0,-2,3$$

برای تعیین نوع نقاط اکسترمم از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$f''(x)=12x^2-8x-24$$

چون مقدار f'' در نقطه $x=0$ منفی می‌باشد، پس تنها همین نقطه می‌تواند نقطه ماکزیمم تابع f باشد که در آن $f(0)=1$ حاصل می‌شود. دقت کنید وقتی از حداکثر یک تابع صحبت می‌کنیم منظور مقدار y است نه مقدار x.

مثال ۶۵: در مورد تابع $f(x)=x^2+\cosh x-1$ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $f(x)=0$ ریشه حقیقی ندارد.

۲) ریشه $f(x)=0$ نقطه مینیمم مطلق تابع f است.

۳) ریشه $f(x)=0$ یکی از نقاط مینیمم موضعی تابع f است.

۴) ریشه $f(x)=0$ نقطه عطف منحنی تابع f را به ما می‌دهد.

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x)=x^2+\cosh x-1 \Rightarrow f'(x)=2x+\sinh x=0$$

واضح است که $x=0$ ریشه معادله فوق می‌باشد، پس $x=0$ نقطه بحرانی تابع f است. با توجه به این‌که $f''(x)=2+\cosh x$ و $f''(0)=3$ بدست می‌آید، پس طبق آزمون مشتق دوم نقطه $x=0$ نقطه مینیمم تابع f می‌باشد. همچنین توجه کنید که $x=0$ نقطه مینیمم مطلق تابع f است (زیرا توابع x^2 و $\cosh x$ به ازای تمام مقادیر x نامنفی هستند و کمترین مقدار آنها به ازای $x=0$ حاصل می‌شود).

مثال ۶۶: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x} & ; \ x>1\\ 3x-x^2 & ; \ x\le 1\end{cases}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) فاقد نقطه بحرانی

پاسخ: گزینه «۱» نقاط بحرانی، نقاطی هستند که مشتق در آن نقاط برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد. بنابراین ابتدا مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم (چون تابع f پیوسته است لذا مشتق‌پذیر می‌باشد):

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2} & x>1\\ 3-2x & x<1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1\notin\{x>1\} \Rightarrow \text{غ ق ق می‌باشد.}\\ 3-2x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\notin\{x\le 1\} \Rightarrow \text{غ ق ق می‌باشد.}\end{cases}$$

لذا f نقطه بحرانی از نوع $f'(x)=0$ ندارد. حال وضعیت مشتق‌پذیری در نقطه $x=1$ را بررسی می‌کنیم زیرا با توجه به ضابطه f' تنها نقطه‌ای که ممکن است مشتق‌پذیر نباشد نقطه $x=1$ است.

$$f'_+(1)=\frac{1-1}{1}=0 \ ; \ f'_-(1)=3-2=1$$

لذا f در نقطه $x=1$ مشتق‌ناپذیر است و در نتیجه نقطه $x=1$ یک نقطه بحرانی برای f می‌باشد.

مثال ۶۷: بیشینه (ماکسیمم) و کمینه (مینیمم) تابع f بر $(0,\infty)$ با ضابطه $f(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) بیشینه e و کمینه $\frac{1}{e}$.　　۲) بیشینه e و کمینه ندارد.　　۳) بیشینه $\frac{1}{e}$ و کمینه ندارد.　　۴) بیشینه $\frac{1}{e}$ و کمینه ۰.

پاسخ: گزینه «۳» همان‌طور که می‌دانیم برای یافتن ماکزیمم و مینیمم تابع f، باید نقاط بحرانی f را تعیین کرده و سپس علامت مشتق f را در اطراف این نقاط بدست آوریم:

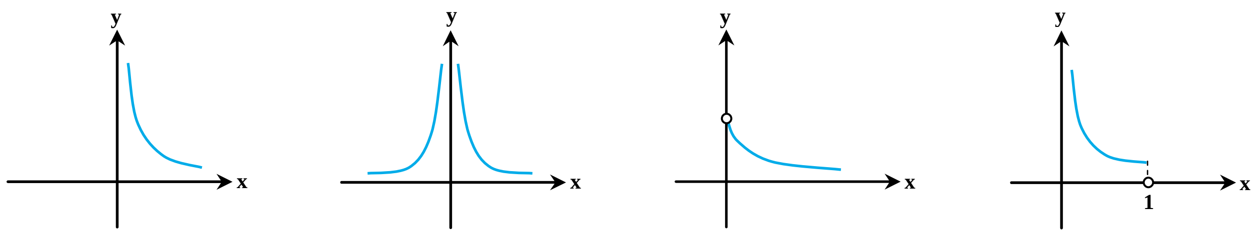
$$f(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{1-\operatorname{Ln}x}{x^2} \rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \operatorname{Ln}(x)=1 \Rightarrow x=e \quad \text{نقطه بحرانی}$$

(f' به ازای $x=0$ تعریف نمی‌شود و چون $x=0$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست). علامت f' در اطراف نقطه $x=e$ به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

x	0		e	
f '(x)		+		−

با توجه به جدول فوق $x=e$ نقطه ماکزیمم تابع f است و مقدار ماکزیمم f به ازای $x=e$ برابر است با $f(e)=\frac{\operatorname{Ln}e}{e}=\frac{1}{e}$ و تابع مینیمم ندارد.

مثال ۶۸: نمودار تقریبی $y=\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ بر $(0,+\infty)$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۸۹)



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: **گزینه «۲»** دامنه‌ی تابع $y=\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ شامل همه‌ی نقاط به جز ریشه‌های مخرج است: $1-e^{-x}=0 \Rightarrow x=0$

پس این تابع در هر نقطه به جز $x=0$ تعریف شده است. یعنی $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ با این حال طراح سؤال فقط در بازه‌ی $(0,\infty)$ نمودار را می‌خواهد. حالا حد $f(x)$ را در دو سر این بازه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}(1-e^{-x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}-1}=0$$

در آخرین تساوی از قانون سرعت رشد استفاده کرده‌ایم. البته قاعده‌ی هوپیتال هم قابل استفاده بود. در $x=0$ با استفاده از هم‌ارزی‌ها داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\simeq\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{x}=1$$

دیدیم که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$، بنابراین تنها گزینه‌ای که می‌تواند درست باشد گزینه‌ی (۲) است.

مثال ۶۹: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ فرد و در نقطه $x=c$ یک مینیمم نسبی دارد. در این صورت: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) f در $-c$ یک ماکزیمم نسبی دارد.

۲) f در $-c$ یک مینیمم نسبی دارد.

۳) f در $-c$ نه مینیمم نسبی دارد و نه ماکزیمم نسبی

۴) در مورد رفتار f در $x=-c$ قضاوتی نمی‌توان کرد.

پاسخ: **گزینه «۱»** تابع فرد نسبت به مبدأ قرینه است و بر اساس تعریف برای تابع فرد $f(x)$ داریم: $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(-c)=-f(c)$

از طرفی با توجه به تعریف نقطه مینیمم نسبی $x=c$ برای تابع $f(x)$ داریم: $\forall x\ \ f(x)\ge f(c) \Rightarrow f(x)\le -f(c)$

با توجه به تعریف تابع فرد و روابط فوق، داریم: $f(-x)\le f(-c)$

بنابراین نقطه $-c$ یک ماکزیمم نسبی برای تابع f می‌باشد و گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۷۰: اگر $f(x)=x^{-x}$، آن‌گاه روی $(0,+\infty)$ کدام گزینه درست است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) f در $x=e$ مینیمم مطلق دارد.

۲) f در $x=1$ ماکزیمم مطلق دارد.

۳) f در $x=\dfrac{1}{e}$ ماکزیمم مطلق دارد.

۴) f فقط در یک نقطه مینیمم مطلق دارد و مقدار آن صفر است.

پاسخ: **گزینه «۳»** ابتدا نقطه اکسترمم تابع $f(x)$ را می‌یابیم لذا:

$$\mathrm{Ln}f(x)=-x\mathrm{Ln}x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{f'(x)}{f(x)}=-\mathrm{Ln}x-1 \Rightarrow f'(x)=-(\mathrm{Ln}x+1)x^{-x}\quad,\quad f'(x)=0 \Rightarrow \mathrm{Ln}x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

چون دامنه‌ی f فقط شامل $x>0$ است پس $x^{-x}=\dfrac{1}{x^{x}}>0$. حالا اگر $0<x<\dfrac{1}{e}$ آن‌گاه $\mathrm{Ln}x<-1$ پس $f'(x)>0$ است. اگر $\dfrac{1}{e}<x<\infty$ آن‌گاه $\mathrm{Ln}x>-1$ پس $f'(x)<0$ است، به عبارتی تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,\dfrac{1}{e})$ صعودی و در بازه‌ی $(\dfrac{1}{e},\infty)$ نزولی است پس $x=\dfrac{1}{e}$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق f است.

مثال۷۱: ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ \ , x\le ۳\\ ۸-x \ \ , x>۳\end{cases}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) فاقد ماکزیمم نسبی

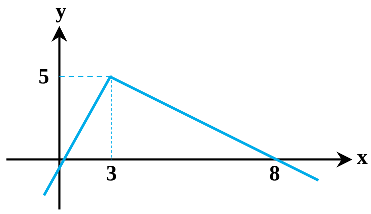
پاسخ: گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم و برای این منظور مشتق تابع را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ & ; \ x<۳\\ -۱ & ; \ x>۳\end{cases}$$

توجه کنید تابع در نقطه $x=۳$ پیوسته می‌باشد اما مشتق‌پذیر نیست. بنابراین نقطه $x=۳$ یک نقطه بحرانی برای تابع $f(x)$ می‌باشد و مقدار تابع در این نقطه برابر است با: $f(۳)=۵$

از طرفی با توجه به این‌که برای $x<۳$ تابع صعودی است $(f'(x)>۰)$ و برای $x>۳$ تابع نزولی است $(f'(x)<۰)$ بنابراین نقطه $x=۳$ یک نقطه ماکزیمم نسبی است.



روش دوم: نمودار تابع f به سادگی قابل رسم است
بنابراین نقطه $M(۳,۵)$ نقطه ماکزیمم نسبی f می‌باشد.

مثال۷۲: تابع با ضابطه $f(x)=(|x+۱|-|x|)^۲$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(-\frac{۱}{۲},۰)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(۰,\frac{۱}{۲})$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود $|x|$ و $|x+۱|$ در ضابطه‌ی $f(x)$، متوجه می‌شویم که در نقاط $x=۰$ و $x=-۱$ ضابطه‌ی $f(x)$ عوض می‌شود. بنابراین بهتر است ضابطه $f(x)$ را برای سه ناحیه‌ی $x<-۱$، $-۱\le x\le ۰$ و $x>۰$ بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(-x-۱+x)^۲ & ; \ x<-۱\\ (x+۱+x)^۲ & ; \ -۱\le x\le ۰\\ (x+۱-x)^۲ & ; \ ۰<x\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & ; \ x<-۱\\ (۲x+۱)^۲ & ; \ -۱\le x\le ۰\\ ۱ & ; \ ۰<x\end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f'(x)=\begin{cases}۰ & ; \ x<-۱\\ ۴(۲x+۱) & ; \ -۱<x<۰\\ ۰ & ; \ ۰<x\end{cases}$$

شرط آن‌که $f(x)$ اکیداً صعودی باشد آن است که $f'(x)>۰$ باشد. در نواحی $x<-۱$ و $x>۰$ داریم $f'(x)=۰$، پس این دو ناحیه جزء جواب نیستند. در بازه‌ی $-۱<x<۰$ داریم:

$$f'(x)>۰ \Rightarrow ۴(۲x+۱)>۰ \Rightarrow ۲x+۱>۰ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{-۱<x<۰} -\frac{۱}{۲}<x<۰$$

پس این تابع در بازه‌ی $(-\frac{۱}{۲},۰)$ اکیداً صعودی است.

مثال۷۳: مجانب‌های مایل منحنی به معادله $y=\left|x+\frac{۱}{x}\right|$ در نقطه A متقاطع‌اند، فاصله نقطه A از یک نقطه مینیمم این تابع کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا معادله y را به‌صورت دو ضابطه‌ای نوشته و مشتق اول و دوم را می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}x+\frac{۱}{x} & ; \ x>۰\\ -x-\frac{۱}{x} & ; \ x<۰\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}۱-\frac{۱}{x^۲} & ; \ x>۰\\ -۱+\frac{۱}{x^۲} & ; \ x<۰\end{cases} \Rightarrow y''=\begin{cases}\frac{۲}{x^۳} & ; \ x>۰\\ -\frac{۲}{x^۳} & ; \ x<۰\end{cases}$$

معادله‌ی $y'=۰$ در دو نقطه‌ی $x=\pm۱$ رخ می‌دهد که نقاط $(۱,۲)$ و $(-۱,۲)$ را به ما می‌دهند. در هر دو نقطه، $y''>۰$ است. پس هر دو نقطه مینیمم‌های نسبی f هستند. وقتی $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ داریم $\frac{۱}{x}\to۰$ پس مجانب‌های مایل تابع y به‌صورت $y=x$ و $y=-x$ هستند که در نقطه $(۰,۰)$ متقاطع هستند، فاصله‌ی نقاط $(\pm۱,۲)$ از نقطه‌ی $(۰,۰)$ برابر است با $\sqrt{۵}$.

مثال ۷۴: کدام تابع در بازه‌ی $(۰,۱)$ ماکزیمم مطلق دارد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sin\frac{۱}{x}$ ۲) ۲^{-x} ۳) $\frac{\sin x}{x}$ ۴) $Ln(x+۱)$

پاسخ: گزینه «۱» هر یک از گزینه‌ها را به‌صورت مجزا در بازه $(۰,۱)$ بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $f(x)=\sin\frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}\cos\frac{۱}{x}=۰ \Rightarrow \cos\frac{۱}{x}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}} \quad (k=۰,۱,۲,...)$

از طرفی f' در $x=۰$ تعریف نشده است ولی چون $۰\notin(۰,۱)$، لذا روی آن بحث نمی‌کنیم.

$$f''(x)=\frac{۲}{x^۳}\cos\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۴}\sin\frac{۱}{x}$$

$$f''\left(\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}}\right)=\underbrace{۲(k\pi+\frac{\pi}{۲})^۳\cos(k\pi+\frac{\pi}{۲})}_{۰}-(k\pi+\frac{\pi}{۲})^۴\sin(k\pi+\frac{\pi}{۲})$$

$$f''\left(\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}}\right)=-(k\pi+\frac{\pi}{۲})^۴\cos(k\pi)=-(-۱)^k(k\pi+\frac{\pi}{۲})^۴$$

برای این‌که $x=\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ ماکزیمم شود باید $f''\left(\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}}\right)<۰$ باشد، پس k باید زوج باشد. لذا تابع برای $x=\frac{۱}{k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ (k زوج) دارای ماکزیمم مطلق است.

گزینه‌ی (۲) نادرست است زیرا داریم: $f(x)=۲^{-x} \Rightarrow f'(x)=-۲^{-x}(Ln۲)=\frac{-Ln۲}{۲^x}$

چون $۲^x\neq۰$ لذا f' ریشه ندارد، پس نمی‌توان روی ماکزیمم یا مینیمم بحث کرد، زیرا $f'<۰$ یعنی f' نزولی است.

گزینه‌ی (۳) نادرست است، زیرا داریم: $f(x)=\frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^۲}=۰ \Rightarrow x=\frac{\sin x}{\cos x}$

لذا f' در $(\cos x=۰)x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است و این نقاط بحرانی هستند ولی چون در $(۰,۱)$ واقع نیستند، نمی‌توان در مورد max یا min تابع f بحث کرد.

گزینه‌ی (۴) نادرست است، زیرا داریم: $f(x)=Ln(x+۱) \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{x+۱}$

تابع f' در $x=-۱$ تعریف نشده است و این نقطه بحرانی است ولی چون $-۱\notin(۰,۱)$ نمی‌توان در مورد max یا min تابع f بحث کرد.

مثال ۷۵: تابع $f(x)=|x|^۳$ در $x=۰$: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) مشتق‌پذیر است و دارای مینیمم است.
۲) پیوسته است ولیکن مشتق‌پذیر نیست.
۳) مشتق‌پذیر است و دارای ماکزیمم است.
۴) پیوسته نیست لذا مشتق‌پذیر نیست.

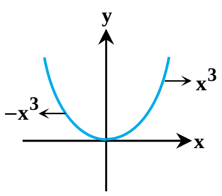
پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(x)$ به شکل زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}x^۳ & x\geq۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$

لذا برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ داریم: $\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}x^۳=۰ \;,\; \lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}(-x^۳)=۰ \;,\; f(۰)=۰$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ پیوسته است، لذا گزینه (۴) غلط است. برای مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ داریم:

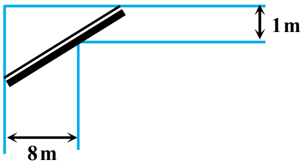
$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲ & ;\ x\geq۰\\ -۳x^۲ & ;\ x<۰\end{cases} \rightarrow f'(۰)=۰$$



بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ مشتق‌پذیر است، لذا گزینه (۲) غلط است.
برای تشخیص نوع اکسترمم نقطه $x=۰$ با استفاده از رسم نمودار $f(x)$ داریم:
لذا نقطه $x=۰$ یک نقطه مینیمم می‌باشد.

درسنامه۵: مسائل بهینه‌سازی (کاربرد عملی مشتق)

مثال۱ (سخت): طول بزرگترین تیر چوبی که از یک راهرو L شکل (مطابق شکل زیر) قابل عبور باشد، برحسب متر کدام است؟ (از ضخامت تیر صرف‌نظر می‌شود.) (از سؤالات پایان ترم ریاضی عمومی (۱) دانشگاه صنعتی شریف)



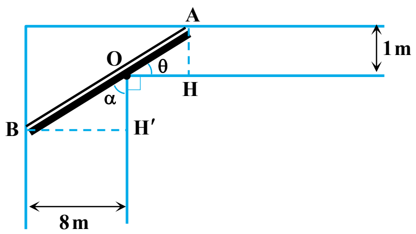
۱) $۴\sqrt{۲}+۲$

۲) $۳\sqrt{۶}+۱$

۳) $۲\sqrt[۳]{۲۱}$

۴) $۵\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق شکل زیر، دو سر تیر چوبی را با A و B و طول میله را با L نامگذاری می‌کنیم. برای آن‌که بتوانیم از اطلاعات داده شده استفاده کنیم باید رابطه‌ای بین L و عرضِ هر کدام از دالان‌ها پیدا کنیم. چون (در صورت سؤال عرض هر کدام از دالان‌ها مشخص شده است) برای رسیدن به این هدف، خطوط قائم AH و BH' را بر دیواره‌ها رسم می‌کنیم. واضح است که $AH = ۱m$ و $BH' = ۸m$. حالا از نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا طول میله را به‌صورت تابعی یک ضابطه‌ای برحسب زاویه‌ی θ بنویسیم. یک توضیح مختصر هم در مورد زاویه‌ها لازم است؛ بدیهی است که $\theta + ۹۰^\circ + \alpha = ۱۸۰^\circ$ پس $\theta + \alpha = ۹۰^\circ$ یعنی $\alpha = ۹۰ - \theta$ است. پس $\sin\alpha = \sin(۹۰ - \theta) = \cos\theta$. حالا از این‌جا شروع می‌کنیم که $L = OA + OB$ است. هر کدام از اضلاع OA و OB وتر یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، پس می‌توانیم اندازه‌ی آن‌ها را برحسب زاویه‌ی θ بدست آوریم. در این صورت داریم:



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{OA} = \frac{۱}{OA} \Rightarrow OA = \frac{۱}{\sin\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH'}{OB} = \frac{۸}{OB} \Rightarrow \cos\theta = \frac{۸}{OB} \Rightarrow OB = \frac{۸}{\cos\theta}$$

با جایگذاری نتایج بدست آمده در ضابطه‌ی L داریم:

$$L = \frac{۱}{\sin\theta} + \frac{۸}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{d\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin^۲\theta} + \frac{۸\sin\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۸\sin^۳\theta - \cos^۳\theta}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta} = ۰ \Rightarrow ۸\sin^۳\theta - \cos^۳\theta = ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۳\theta}{\cos^۳\theta} = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow tg^۳\theta = \frac{۱}{۸} \Rightarrow tg\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱ + tg^۲\theta} = \cos^۲\theta \Rightarrow \frac{۱}{۱ + (\frac{۱}{۲})^۲} = \cos^۲\theta \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \cos^۲\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

اگر مقادیر فوق را در ضابطه‌ی L جایگزین کنیم، داریم:

$$L = \sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} = ۵\sqrt{۵}$$

مثال۲: به فرض این‌که تابع تقاضا برای یک واحد صنعتی به‌صورت $p = ۸/۲۵e^{-۰/۰۲q}$ باشد که در آن q و p به ترتیب میزان و قیمت فروش می‌باشد. حساب کنید در چه سطحی از فروش درآمد کل این واحد صنعتی حداکثر می‌گردد؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $q = ۳۷$　　۲) $q = ۳۹$　　۳) $q = ۵۰$　　۴) $q = ۵۵$

پاسخ: گزینه «۳» اگر مقدار درآمد واحد صنعتی را برابر A بگیریم، می‌دانیم (میزان فروش × قیمت فروش = درآمد)، پس داریم:

$$A = p \times q = ۸/۲۵e^{-۰/۰۲q} \times q = ۸/۲۵qe^{-۰/۰۲q}$$

برای این‌که مقدار حداکثر درآمد را بدست آوریم کافی است نقاط بحرانی را بدست بیاوریم، یعنی جایی که مشتق صفر است و یا مشتق وجود ندارد.

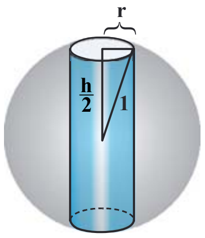
$$(A)' = \frac{dA}{dq} = ۸/۲۵e^{-۰/۰۲q} - ۰/۰۲e^{-۰/۰۲q} \times ۸/۲۵q = (۸/۲۵ - ۰/۰۲ \times ۸/۲۵q)e^{-۰/۰۲q}$$

$$(A)' = ۰ \Rightarrow (۸/۲۵ - ۰/۰۲ \times ۸/۲۵q) = ۰ \Rightarrow ۸/۲۵(۱ - ۰/۰۲q) = ۰ \Rightarrow ۰/۰۲q = ۱ \Rightarrow q = ۵۰$$

مثال ۳: ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکزیمم که درون یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد، کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ارتفاع استوانه مورد نظر را h و شعاع قاعده استوانه را r در نظر بگیرید، با توجه به شکل روبرو داریم:



$$(\frac{h}{۲})^۲ + r^۲ = ۱ \Rightarrow r^۲ = ۱ - \frac{h^۲}{۴}$$

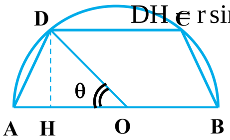
حجم استوانه $v = \pi r^۲ h \Rightarrow v = \pi(۱ - \frac{h^۲}{۴})h = \pi(h - \frac{h^۳}{۴})$

$$\Rightarrow V' = \pi(۱ - \frac{۳}{۴}h^۲) = ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۳}{۴}h^۲ = ۰ \Rightarrow h^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۴: ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر $۲r$ محاط است، به طوری که قاعده‌ی ذوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است. ارتفاع ذوزنقه چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}r$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ ۳) $\frac{۳}{۲}r$ ۴) $\frac{۳}{۴}r$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل داریم: $DH = r\sin\theta, OH = r\cos\theta \Rightarrow S = \frac{r\sin\theta}{۲}(۲r + ۲r\cos\theta) = r^۲\sin\theta(۱ + \cos\theta)$



برای محاسبه ماکزیمم مساحت، لازم است ماکزیمم عبارت فوق را در فاصله $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$، بدست می‌آوریم.

$$S' = r^۲(\cos\theta(۱ + \cos\theta) - \sin^۲\theta) = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲\theta + \cos\theta - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos\theta = -۱, \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین $\theta = \frac{\pi}{۳}$ تنها ریشه معادله فوق در فاصله $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ می‌باشد.

$$S(۰) = ۰, \quad S(\frac{\pi}{۲}) = r^۲, \quad S(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}r^۲$$

بنابراین S در $\theta = \frac{\pi}{۳}$ ماکزیمم خواهد شد، که در این صورت ارتفاع ذوزنقه برابر است با:

$$h = r\sin\frac{\pi}{۳} = r\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۵: طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع x و y برابر $\sqrt{۵}$ است، بیشترین مقدار $x + y$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر مجموع مربعات دو متغیر مثبت x و y مقداری ثابت باشد، مجموع آنها وقتی $\max$ است که $x = y$ باشد.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۵ \\ x = y \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{\frac{۵}{۲}}, \; y = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \quad \Rightarrow x + y = ۲\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۱۰}$$

توضیح: البته می‌توانیم از روش مشتق گرفتن و تعیین ماکزیمم تابع نیز به همین نتیجه برسیم.

مثال ۶: مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر ۹ است. حاصل‌ضرب این دو عدد وقتی حاصل‌ضرب یکی در مربع دیگری ماکزیمم باشد، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) ۸ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای دو متغیر x و y که مجموع آنها ثابت است، حاصل‌ضرب $x^\alpha y^\beta$ وقتی ماکزیمم است که $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$ باشد برای این سؤال، $xy^۲$ وقتی $\max$ است که $x = \frac{y}{۲}$ باشد، پس داریم:

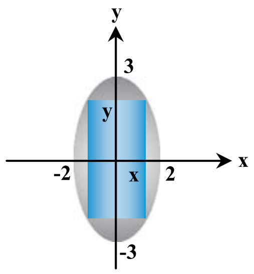
$$\begin{cases} x = \frac{y}{۲} \\ x + y = ۹ \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{۲} + y = ۹ \Rightarrow y = ۶, \quad x = ۳ \quad \Rightarrow x \times y = ۱۸$$

توضیح: البته می‌توانیم از روش مشتق گرفتن و تعیین ماکزیمم تابع نیز به همین نتیجه برسیم.

مثال ۷: بیشترین مساحت از بین مستطیل‌ها محاط در بیضی به معادله $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه «۲» اگر طول مستطیل محاط شده را $2x$ و عرض آن را $2y$ بنامیم، مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=(2x)(2y)=4xy \Rightarrow S^2=16x^2y^2$$

از طرفی با توجه به رابطه $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ داریم: $y^2=9(1-\frac{x^2}{4}) \Rightarrow S^2=16.x^2.9(1-\frac{x^2}{4})=36\times x^2(4-x^2)$

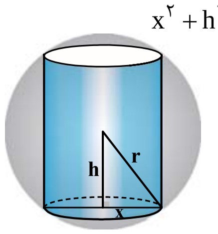
توجه شود $x^2+(4-x^2)=4$، لذا مقدار $x^2.(4-x^2)$ وقتی ماکزیمم است که $x^2=4-x^2$. پس داریم:

$$x^2=4-x^2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow S^2=36\times 2(4-2)=144 \Rightarrow S=12$$

مثال ۸ : در داخل کره‌ای به شعاع $\sqrt{6}$ استوانه‌ای با حجم ماکزیم محاط می‌کنیم. شعاع قاعده استوانه کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر ارتفاع استوانه را $2h$ فرض کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه مشخص شده داریم: $x^2+h^2=r^2 \Rightarrow x^2=r^2-h^2$



$$V=\pi x^2 2h=2\pi(r^2-h^2)(h)=2\pi(r^2h-h^3)$$

$$V'(h)=2\pi(r^2-3h^2)=0 \Rightarrow h^2=\frac{r^2}{3} \Rightarrow h=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$x=\sqrt{r^2-(\frac{r}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}r^2}=r\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2$$

مثال ۹: بزرگترین مقدار حجم استوانه‌هایی که مجموع محیط قاعده و ارتفاع آنها برابر ۱۲ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر مکعب است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{36}{\pi}$ ۲) $\frac{48}{\pi}$ ۳) $\frac{56}{\pi}$ ۴) $\frac{64}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۴» فرض کنید ارتفاع استوانه h و شعاع قاعده استوانه r باشد. داریم:

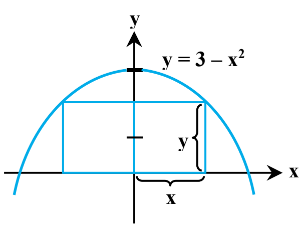
$$\left.\begin{array}{l}\text{حجم استوانه}=V=\pi r^2h\\ \text{مجموع محیط قاعده و ارتفاع}=2\pi r+h=12 \Rightarrow h=12-2\pi r\end{array}\right\} \Rightarrow V=\pi r^2(12-2\pi r)=12\pi r^2-2\pi^2r^3$$

$$V'=24\pi r-6\pi^2r^2=6\pi r(4-\pi r) \quad , \quad V'=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 & \text{غیرقابل قبول}\\ r=\frac{4}{\pi} \Rightarrow h=4 \end{cases} \Rightarrow V=\pi\times(\frac{4}{\pi})^2\times 4=\frac{64}{\pi}$$

مثال ۱۰: مساحت بزرگترین مستطیلی که می‌تواند در یک ناحیه‌ی محدود به $y=3-x^2$ و محور x ها محاط شود، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴»



با توجه به شکل مقابل مساحت مستطیل برابر $S=2xy$ است و با جایگزینی y برحسب x از رابطه داده شده بدست می‌آید:

$$S(x)=2x(3-x^2)=6x-2x^3 \Rightarrow S'(x)=6-6x^2=0 \Rightarrow x=1\ ,\ y=2$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S=2\times1\times2=4$ خواهد بود.

مثال۱۱: از دایره‌ای به شعاع R، قطاعی با زاویه مرکزی $(\circ < \theta < ۲\pi)$ بریده و با آن یک مخروط قائم دوار با رأس O مـی‌سـازیم. بـه ازای کـدام θ مخروط با ماکزیمم حجم حاصل می‌شود؟ (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۲}{۳}\pi$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۳) $\pi\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ ۴) $۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

☑ **پاسخ:** **گزینه «۴»** می‌خواهیم حجم مخروط ماکزیمم شود. بنابراین اولین قدم نوشتن فرمول حجم مخروط است. حجم مخروطی به شعاع r و ارتفاع h به صـورت $V = \frac{\pi}{۳}r^۲h$ به دست می‌آید. حالا باید رابطه‌ای بین r و h پیدا کنیم و به کمک آن V را به تابعی یک متغیره تبدیل کنیم. برای رسیدن به این هدف به نحوه‌ی سـاخت مخروط دقت می‌کنیم. مطابق شکل قطاعی با زاویه‌ی θ از دایره‌ای به شعاع R بریده شده است. طول کمان AB برابر است با θR. وقتی نقاط A و B را بر هـم منطبـق می‌کنیم تا مخروط ساخته شود، همین کمان، محیط قاعده‌ی مخروط را تشکیل می‌دهد پس داریم:

$$\text{محیط قاعده‌ی مخروط} = \theta R \Rightarrow ۲\pi r = \theta R \Rightarrow r = \frac{\theta R}{۲\pi}$$

از طرفی رابطه‌ی بین ارتفاع و شعاع مخروط از قضیه‌ی فیثاغورث به دست می‌آید:

$$h^۲ + r^۲ = R^۲ \Rightarrow h = \sqrt{R^۲ - r^۲} \Rightarrow h = \sqrt{R^۲ - \frac{\theta^۲R^۲}{۴\pi^۲}} \Rightarrow h = R\sqrt{۱ - \frac{\theta^۲}{۴\pi^۲}}$$

حالا که r و h را بر حسب θ پیدا کردیم، می‌توانیم V را برحسب θ بنویسیم:

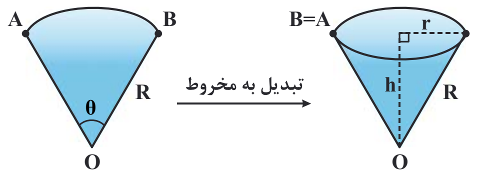
$$V = \frac{\pi}{۳}r^۲h = \frac{\pi}{۳}\frac{R^۲\theta^۲}{۴\pi^۲}R\sqrt{۱ - \frac{\theta^۲}{۴\pi^۲}} \Rightarrow V = \frac{R^۳}{۲۴\pi^۲}\theta^۲\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}$$

حالا معادله‌ی $V'(\theta) = \circ$ را حل می‌کنیم:

$$V'(\theta) = \frac{R^۳}{۲۴\pi^۲}[۲\theta\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲} - \frac{\theta^۳}{\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}}] = \circ \Rightarrow ۲\theta\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲} = \frac{\theta^۳}{\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}} \Rightarrow ۲\theta(۴\pi^۲ - \theta^۲) = \theta^۳ \Rightarrow \theta(۸\pi^۲ - ۳\theta^۲) = \circ$$

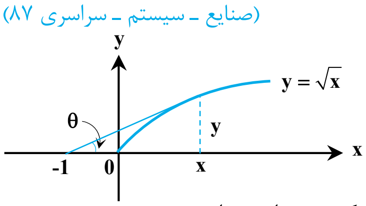
$$\Rightarrow \theta = \circ \quad \text{و} \quad \theta = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\pi$$

به ازای $\theta = \circ$ داریم $V = \circ$ و به ازای $\theta = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\pi$ بیشترین حجم مخروط به دست می‌آید:



نکته: اگر $u + v = c$ مقدار ثابتی داشته باشد، u^av^b وقتی ماکزیمم است که $\frac{u}{a} = \frac{v}{b}$ باشد. در این مثال هم وقتی $V = \frac{R^۳}{۲۴\pi^۲}\theta^۲\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}$ به دست آمد می‌توانیم بگوییم مجموع $\theta^۲$ و $۴\pi^۲ - \theta^۲$ همواره ثابت است. پس ماکزیمم V وقتی به دست می‌آید که $\frac{\theta^۲}{۱} = \frac{۴\pi^۲ - \theta^۲}{\frac{۱}{۲}}$ و از اینجا $\theta = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\pi$ به دست می‌آید.

مثال۱۲: بیشترین مقدار زاویه θ در شکل مقابل کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)



۱) $\theta = \frac{\pi}{۲}$ ۲) $\theta = \frac{\pi}{۴}$

۳) $\theta = tg^{-۱}\frac{۱}{۳}$ ۴) $\theta = tg^{-۱}\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** **گزینه «۴»** هدف ما پیدا کردن ماکزیمم θ است. اگر به مثلث قائم‌الزاویه‌ای که θ زاویه‌ی آن است توجه کنید، خواهیم داشت:

$$tg\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x+۱} \Rightarrow \theta = tg^{-۱}(\frac{y}{x+۱})$$

پس برای θ یک فرمول برحسب x و y پیدا کرده‌ایم. حالا باید یک رابطه بین x و y داشته باشیم تا با استفاده از آن θ را به تابعی یک متغیره تبدیل کنیم. ایـن رابطه را صورت سؤال به ما داده است. نقطه‌ی (x, y) روی منحنی $y = \sqrt{x}$ قرار دارد، پس داریم:

$$\theta = tg^{-۱}(\frac{\sqrt{x}}{x+۱})$$

حالا می‌توانیم بیشترین مقدار θ را پیدا کنیم:

$$\theta'_x = \frac{(\frac{\sqrt{x}}{x+۱})'}{۱ + (\frac{\sqrt{x}}{x+۱})^۲} = \circ \Rightarrow (\frac{\sqrt{x}}{x+۱})' = \circ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱) - \sqrt{x}}{(x+۱)^۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱) - \sqrt{x} = \circ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow x+۱ = ۲x \Rightarrow x = ۱$$

به ازای $x = ۱$ خواهیم داشت:

$$\theta = tg^{-۱}(\frac{\sqrt{x}}{x+۱}) = tg^{-۱}(\frac{۱}{۲})$$

مثال ۱۳: اگر $x+y=۳$ باشد، کمترین مقدار $x^۳+y^۳$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{۲۷}{۴}$ ۲) $\frac{۲۷}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$y=۳-x \Rightarrow x^۳+y^۳=x^۳+(۳-x)^۳=f(x)$$

$$f'(x)=۳x^۲-۳(۳-x)^۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}, y=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \min(x^۳+y^۳)=(\frac{۳}{۲})^۳+(\frac{۳}{۲})^۳=\frac{۲۷}{۸}+\frac{۲۷}{۸}=\frac{۲۷}{۴}$$

مثال ۱۴: بیشترین حجم یک قوطی استوانه‌ای بدون سر با سطح ۱۲π برابر کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۸π ۲) ۹π ۳) ۱۲π ۴) ۱۶π

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم شعاع قاعده قوطی r و ارتفاع آن h باشد، لذا $V=\pi r^۲h$. حجم طبق فرض مسأله قوطی بدون سر است، لذا سطح آن (مساحت جانبی) برابر است با:

$$S=\text{مساحت جانبی}=\pi r^۲+۲\pi rh \xlongequal{\text{طبق فرض}} ۱۲\pi \rightarrow h=\frac{۱۲-r^۲}{۲r} \Rightarrow V=\pi r^۲(\frac{۱۲-r^۲}{۲r})=۶\pi r-\frac{\pi}{۲}r^۳$$

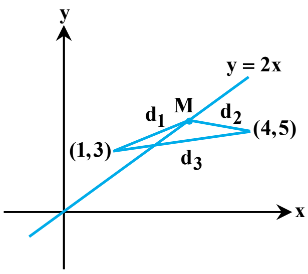
حال V یک تابع یک متغیره است و برای محاسبه حجم ماکزیمم از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

$$V'=۶\pi-\frac{۳\pi}{۲}r^۲=۰ \rightarrow r=۲, h=\frac{۱۲-r^۲}{۲r} \xrightarrow{r=۲} h=۲ \Rightarrow V=\pi r^۲h \xrightarrow[h=۲]{r=۲} V_{max}=۸\pi$$

چون V یک نقطه بحرانی بیشتر ندارد نیازی به بررسی ماکزیمم بودن V در $r=۲$ نمی‌باشد.

مثال ۱۵: نقطه M به طول α بر روی خط $y=۲x$ طوری انتخاب می‌شود که مجموع فواصل M از دو نقطه $(۱,۳)$ و $(۴,۵)$ مینیمم گردد، α کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

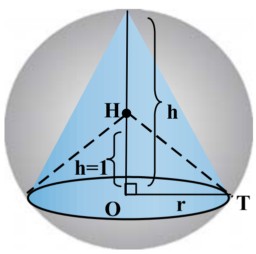


پاسخ: گزینه «۳» برای آن که مجموع فواصل نقطه پارامتری $M\left|\begin{matrix}\alpha\\ ۲\alpha\end{matrix}\right.$ از نقاط مینیمم گردد باید از $d_۱+d_۲\geq d_۳$ (به عنوان نامساوی مثلث) داشته باشیم $\min(d_۱+d_۲)=d_۳$. یعنی خط گذرنده از $(۱,۳)$ ، $(۴,۵)$ را که معادله آن به‌صورت مقابل است در نظر می‌گیریم: $y=\frac{۲}{۳}(x-۱)+۳$

حال باید M روی این خط قرار گیرد: $M\in d_۳ \Rightarrow ۲\alpha=\frac{۲}{۳}(\alpha-۱)+۳ \Rightarrow ۶\alpha=۲\alpha-۲+۹ \Rightarrow ۴\alpha=۷ \Rightarrow \alpha=\frac{۷}{۴}$

مثال ۱۶: مخروط مستدیر قائم با کمترین حجم ممکن بر کره‌ای به شعاع یک واحد محاط شده است، ارتفاع این مخروط کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$



پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. فرض کنید ارتفاع مخروط h و شعاع قاعده آن r باشد:

شعاع قاعده مخروط : r

ارتفاع مخروط : h

با توجه به فرم حجم مخروط داریم: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$

از شکل فوق داریم: $r^۲=۱-(h-۱)^۲=۲h-h^۲ \Leftarrow r^۲+(h-۱)^۲=۱ \Leftarrow$ رابطه فیثاغورس برای مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OHT}$

در نتیجه داریم: $V(h)=\frac{۱}{۳}\pi(۱-(h-۱)^۲)h=\frac{۱}{۳}\pi(۲h^۲-h^۳)$

برای بدست آوردن ارتفاع مخروط باید معادله‌ی $V'(h)$ را مساوی صفر قرار دهیم. در نتیجه داریم: $V'(h)=\frac{۱}{۳}\pi(۴h-۳h^۲)=۰ \Rightarrow h=\frac{۴}{۳}$ یا ۰

مشاهده می‌شود مقدار h بدست آمده در بین گزینه‌ها وجود ندارد، لذا سؤال نادرست است.

توضیح: گویا نظر طراح سؤال این بوده که مخروطی با کمترین حجم بر کره‌ای به شعاع ۱ **محیط** شده است که در این صورت ارتفاع مخروط بر طبق مطالب درسنامه باید ۴ برابر شعاع کره یعنی برابر با $۴\times۱=۴$ باشد. سازمان سنجش هم گزینه (۳) را به عنوان پاسخ اعلام کرده بود!!

درسنامه ۷: بررسی قضایای مقدار میانگین، رُل و کشی

مثال ۱: عدد c مورد نظر در قضیه رُل برای تابع $f(x)=x^2-7x+18$ روی بازه $[3,4]$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(x)=x^2-7x+18 \Rightarrow f'(x)=2x-7 \Rightarrow f'(c)=2c-7=0 \Rightarrow c=\frac{7}{2}$$

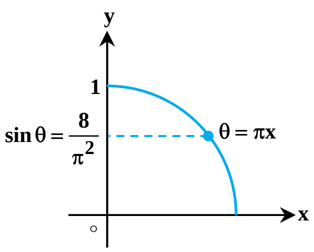
به عنوان یک راه دیگر، یادآوری می‌کنیم که برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دو، نقطه‌ی c همیشه وسط بازه است؛ یعنی $c=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$.

مثال ۲: تعداد ریشه‌های معادله $\pi\cos\pi x=4(1-2x)$ در بازه $(0,\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) دقیقاً یک ریشه ۲) حداقل یک ریشه ۳) دقیقاً دو ریشه ۴) حداکثر دو ریشه

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای استفاده از نتیجه‌ی قضیه‌ی رل ابتدا تعداد ریشه‌های تابع $f'(x)$ را معلوم می‌کنیم:

$$f(x)=\pi\cos\pi x-4(1-2x) \Rightarrow f'(x)=-\pi^2\sin\pi x+8=0 \Rightarrow \sin\pi x=\frac{8}{\pi^2}$$



دقت کنید چون $1<\frac{8}{\pi^2}>0$، معادله‌ی $\sin\pi x=\frac{8}{\pi^2}$ دارای جواب است در ضمن طبق صورت سؤال $0<x<\frac{1}{2}$ پس $0<\pi x<\frac{\pi}{2}$ یعنی زاویه‌ی πx در ربع اول قرار دارد و در ربع اول فقط یک زاویه هست که سینوس آن برابر با $\frac{8}{\pi^2}$ باشد.

پس تابع f' بر بازه $(0,\frac{1}{2})$ فقط یک ریشه دارد و بنابر نتیجه قضیه رُل تابع f حداکثر می‌تواند دارای دو ریشه باشد، یکی از ریشه‌ها $x=\frac{1}{2}$ است، که خارج از بازه‌ی $(0,\frac{1}{2})$ قرار می‌گیرد، پس f در بازه $(0,\frac{1}{2})$ **حداکثر یک** ریشه دارد.

حالا می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی وجود حداقل یک ریشه را برای f نشان دهیم، اما $f(\frac{1}{2})=0$ پس برای این که بتوانیم از قضیه مقدار میانی استفاده کنیم. بهتر است یک عدد دیگر، مثلاً $\frac{1}{4}$ را برای تابع امتحان کنیم:

$$f(\frac{1}{4})=\pi\cos\frac{\pi}{4}-4[1-2(\frac{1}{4})]=\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2>0$$

اما برای نقطه ابتدای بازه $f(0)=\pi-4<0$، بنابراین طبق قضیه مقدار میانی، f **حداقل یک** ریشه در بازه $(0,\frac{1}{2})$ دارد. اکنون این دو نتیجه را کنار هم قرار دهید: f حداکثر یک ریشه دارد و f حداقل یک ریشه دارد. از این دو جمله معلوم است که f دقیقاً یک ریشه در بازه $(0,\frac{1}{2})$ دارد.

مثال ۳ (سخت): فرض کنید $f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ که در آن a، b، c و d اعداد مخالف صفر هستند و $a+b+c+d=0$ است. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

۱) $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[0,1]$ دارد.

۲) $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است.

۳) $f(x)$ نقطه عطف ندارد.

۴) $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[-1,0]$ دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا گزینه‌های (۲) و (۳) را با توجه به ضابطه‌ی $f'(x)$ و $f''(x)$ رد می‌کنیم: $f'(x)=12ax^2+6bx+2c$, $f''(x)=24ax+6b$

تابع $f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی یک است بنابراین معادله‌ی $f''(x)=0$ دقیقاً یک ریشه دارد و در این نقطه تغییر علامت خواهد داد. به عبارتی نقطه‌ی $x=-\frac{6b}{24a}$ نقطه‌ی عطف $f(x)$ است. گزینه‌ی (۲) هم به سادگی رد می‌شود؛ زیرا $f'(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. برای مثال ممکن است $(a,b,c,d)=(-1,-1,-1,3)$ باشند و در این صورت $f'(x)=-12x^2-6x-2$ است و واضح است که همواره مثبت نیست.

اکنون به بررسی گزینه‌های (۱) و (۴) می‌پردازیم. شاید اولین راهی که به فکر ما می‌رسد، استفاده از پیوستگی $f(x)$ و قضیه‌ی مقدار میانی است. اگر بتوانیم نشان دهیم که $f(0)$ و $f(1)$ مختلف‌العلامه هستند، آن‌گاه $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[0,1]$ خواهد داشت. اما با کمی دقت متوجه می‌شوید که استفاده از این روش در این مثال ممکن نیست. زیرا $f(0)=d$ و $f(1)=4a+3b+2c+d$ و شما هیچ دلیلی ندارید که نشان دهد این دو مقدار، مختلف‌العلامه هستند. به همین ترتیب در بازه‌ی $[-1,0]$ استفاده از این روش بی‌فایده است. زیرا $-4a+3b-2c+d$ و دلیلی نداریم که $f(0)$ و $f(-1)$ مختلف‌العلامه هستند. با این

توضیحات متوجه می‌شویم که باید از قضیه‌ی رُل استفاده کنیم. اما قضیه‌ی رُل وجود ریشه برای مشتق را نشان می‌دهد نه وجود ریشه برای خود تابع را، به همین دلیل ابتدا تابعی را پیدا می‌کنیم که $f(x)$ مشتق آن باشد. به سادگی می‌توان این تابع را حدس زد. می‌دانیم که $4x^3$، مشتقِ x^4 است و $3x^2$ مشتق x^3 است و به همین ترتیب اگر فرض کنیم $F(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$ آن‌گاه $F'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ یعنی $F'(x)=f(x)$ است. حالا اگر نشان دهیم $F(x)$ شرایط قضیه‌ی رُل را دارد، کار تمام است. برای این کار $F(0)$ و $F(1)$ را حساب می‌کنیم. به وضوح $F(0)=0$ است و با جایگذاری $x=1$ داریم:

$$F(1)=a+b+c+d=0$$

پس تابع $F(x)$ در $x=0$ و $x=1$ دارای ریشه است. طبق قضیه‌ی رُل نقطه‌ای مانند c در این بازه وجود دارد چنان که $F'(c)=0$ است. به عبارتی $f(c)=0$ است. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است. گزینه‌ی (۴) صحیح نیست زیرا دلیلی نداریم که $F(-1)$ برابر با صفر باشد.

مثال ۴: فرض کنید $f(0)=-5$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f'(x)\le 2$، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $f(2)\ge 1$ ۲) $f(2)\le -1$ ۳) $f(2)\le -5$ ۴) $f(2)\ge 5$

پاسخ: گزینه «۲» اگر در قضیه‌ی مقدار میانگین فرض کنیم $b=2$ و $a=0$، لذا داریم:

$$f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)\ \Rightarrow f(2)=f(0)+2f'(c)$$

در اینجا c نقطه‌ای از بازه‌ی $(0,2)$ است. حالا طبق فرض می‌دانیم که $f(0)=-5$ و در هر نقطه داریم $f'(x)\le 2$ در نتیجه $f'(c)\le 2$ و با این اطلاعات خواهیم داشت:

$$f(2)\le -5+2\times 2\ \Rightarrow f(2)\le -1$$

مثال ۵: اگر $f'(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$، آن‌گاه برای هر دو عدد متمایز a و b در دامنه‌ی f داریم $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le L$، کمترین مقدار L کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۳» تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بنابراین $|f'(c)|=\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$. در نتیجه نامساوی $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le L$ معادل است با نامساوی $|f'(c)|\le L$. پس کافی است کران بالای $|f'(c)|$ را پیدا کنیم.

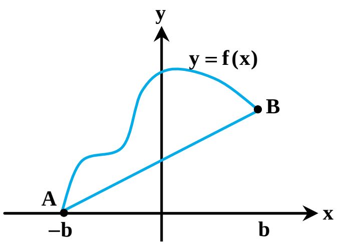
$$f'(c)=\frac{c}{1+c^2}\ \Rightarrow |f'(c)|=\frac{|c|}{1+c^2}$$

از طرفی دیگر می‌دانیم که:

$$(1-|c|)^2\ge 0\ \Rightarrow 1+c^2-2|c|\ge 0\ \Rightarrow 1+c^2\ge 2|c|\ \Rightarrow \frac{|c|}{1+c^2}\le\frac{1}{2}$$

بنابراین $|f'(c)|\le\frac{1}{2}$ و در نتیجه $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le\frac{1}{2}$. پس عدد L که در صورت سؤال آمده است، حداقل می‌تواند $\frac{1}{2}$ باشد.

مثال ۶: فرض کنید $b>0$ و تابع مشتق‌پذیر $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ چنان است که $|f'(x)|\le e^{bx}+e^{-bx}$. هرگاه خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x=0$ با پاره‌خط AB موازی باشد، مقدار $f(b)$ حداکثر چقدر است؟



۱) $2b$
۲) $2eb$
۳) $4b$
۴) eb

پاسخ: گزینه «۳» طبق قضیه‌ی مقدار میانگین نقطه‌ای مانند c در این بازه وجود دارد، به‌طوری که داریم:

$$f(b)-f(-b)=f'(c)(b-(-b))\ \Rightarrow f(b)=f(-b)+2bf'(c)$$

اکنون به اطلاعات داده شده در صورت سؤال توجه می‌کنیم. مطابق شکل داده شده، $f(-b)=0$ است. همچنین از صورت سؤال معلوم است که $c=0$ است. [همان‌طور که در تعبیر هندسی قضیه‌ی مقدار میانگین مشاهده کردید، در این قضیه نقطه‌ی c جایی قرار دارد که خط مماس بر منحنی در آن نقطه با پاره‌خط AB موازی است.] پس داریم:

$$f(b)=0+2bf'(0)$$

حالا از نامساوی $|f'(x)|\le e^{bx}+e^{-bx}$ به ازای $x=0$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت: $|f'(0)|\le e^0+e^0$ پس $|f'(0)|\le 2$ یعنی $-2\le f'(0)\le 2$ و در نتیجه داریم:

$$f(b)=2bf'(0)\le 4b$$

مثال ۷: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sin\sqrt[3]{x^2})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین برای تابع $f(t)=\sin\sqrt[3]{t^2}$ خواهیم داشت:

$$f(x+1)-f(x)=f'(c_x)(x+1-x)=f'(c_x)$$

که c_x عددی در بازه‌ی $[x\ ,\ x+1]$ است. بنابراین داریم:

$$\sin\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sin\sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c_x}}\cos\sqrt[3]{c_x^2}$$

وقتی $x\to\infty$ داریم $c_x\to\infty$، عبارت $\cos\sqrt[3]{c_x^2}$ کران‌دار است و حد عبارت $\frac{2}{3\sqrt[3]{c_x}}$ صفر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sin\sqrt[3]{x^2})=0\times\text{کران‌دار}=0$$

مثال ۸: تابع f در فاصله $[0,2]$ دو بار مشتق‌پذیر است، و $f(0)=f(2)=0$ و برای هر $x\in[0,2]$، $f''(x)\neq 0$، در بازه $(0,2)$ کدام بیان درست است؟
(هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) f ریشه ندارد. ۲) f' دو ریشه متمایز دارد. ۳) f حداقل یک ریشه دارد. ۴) f' ریشه ندارد.

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم که f در بازه $(0,2)$ ریشه ندارد. فرض کنید f یک ریشه مانند a بین 0 و 2 داشته باشد. در این صورت طبق قضیه رُل، چون $f(0)=f(a)=0$، پس نقطه‌ای مانند a_1 بین 0 و a وجود دارد به طوری‌که $f'(a_1)=0$، و به همین ترتیب نقطه‌ای مانند a_2 بین a و 2 وجود دارد به طوری‌که $f'(a_2)=0$. حال چون $f'(a_1)=f'(a_2)$، پس طبق قضیه رل نقطه‌ای مانند a_3 بین a_1 و a_2 وجود دارد به طوری‌که $f''(a_3)=0$. که این خلاف فرض مسأله می‌باشد.

مثال ۹: برای تابع f با ضابطه $f(x)=\cos^2 x+2x+5$ کدام‌یک از عبارات زیر در مورد معادله $f(x)=0$ صحیح است؟
(آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. ۲) حداقل یک ریشه حقیقی دارد.
۳) می‌تواند سه ریشه حقیقی داشته باشد. ۴) اصلاً ریشه حقیقی ندارد.

پاسخ : گزینه «۱»

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+2=-\sin 2x+2>0$$

بنابراین تابع f، یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس f حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد. از طرفی داریم:

$$f(-\pi)=\cos^2(-\pi)+2(-\pi)+5=6-2\pi<0\ ,\ f(0)=6$$

پس طبق قضیه مقدار میانی f حداقل یک ریشه بین $-\pi$ و 0 دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً یک ریشه دارد.

مثال ۱۰: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^3\ ; & 0\le x\le 1\\ x^2\ ; & 1<x\le 2\end{cases}$ و تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}\sin x\ ; & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \cos x\ ; & \frac{\pi}{2}<x\le 2\end{cases}$ بر بازه $[0,2]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین به کدام صورت می‌باشد؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۹)

۱) f صدق می‌کند ولی g صدق نمی‌کند. ۲) هیچکدام صدق نمی‌کنند.
۳) g صدق می‌کند ولی f صدق نمی‌کند. ۴) هر دو صدق می‌کنند.

پاسخ : گزینه «۲» تابع $g(x)$ در $x=\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است. به وضوح $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}g(x)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ ، اما $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}g(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ پس $g(x)$ در بازه‌ی $[0,2]$ ناپیوستگی دارد. در نتیجه شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را ندارد. تابع f در این بازه پیوسته است، اما در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست. با محاسبه‌ی $f'(x)$ داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & ;\ 0<x<1\\ 2x & ;\ 1<x<2\end{cases}$$

حالا در $x=1$، مشتق راست $f'(1^+)=2$ و مشتق چپ $f'(1^-)=3$ است. بنابراین تابع f نیز شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را ندارد. یادآوری می‌کنیم که شرط قضیه‌ی مقدار میانگین، پیوسته بودن بر $[0,2]$ و مشتق‌پذیر بودن در $(0,2)$ است.

مثال ۱۱: اگر $f(1)=10$ و به ازای $1 \le x \le 4$ داشته باشیم $f'(x) \ge 2$، در این صورت کمترین مقدار ممکن برای $f(4)$ برابر است با ...
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱۳   ۲) ۱۴   ۳) ۱۵   ۴) ۱۶

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** طبق قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[1,4]$ داریم:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c) \qquad 1<c<4$$

چون $f'(c) \ge 2$، بنابراین داریم:

$$\frac{f(4)-10}{3} \ge 2 \Rightarrow f(4) \ge 16$$

مثال ۱۲: اگر $-1 \le f'(x) \le 1$ باشد، کدام نامساوی درست است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $f(x)-f(a) \ge x-a$ ۲) $|f(x)-f(a)| \ge |x-a|$ ۳) $f(x)-f(a) \le x-a$ ۴) $|f(x)-f(a)| \le |x-a|$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** با توجه به قضیه مقدار میانگین برای تابع f در فاصله $[a,x]$ داریم:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \Rightarrow -1 \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 1 \Rightarrow -(x-a) \le f(x)-f(a) \le (x-a) \Rightarrow |f(x)-f(a)| \le |x-a|$$

مثال ۱۳: اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، معادله $x^n+nx+1=0$ دارای ....
(آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) دقیقاً یک ریشه است.   ۲) حداکثر یک ریشه است.   ۳) یک ریشه مکرر است.   ۴) n ریشه است.

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** در صورت سؤال نگفته ریشه‌های حقیقی و هر چندجمله‌ای درجه‌ی n با احتساب ریشه‌های تکراری، دارای n ریشه در اعداد مختلط است. پس گزینه (۴) درست است. اما اگر ریشه‌های حقیقی مورد نظر باشد، معادله $x^n+nx+1=0$ که در آن n فرد است دارای حداقل یک ریشه حقیقی است و چون مشتق چندجمله‌ای داده شده همواره مثبت است، لذا این چندجمله‌ای صعودی است و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

توجه: چون در صورت سؤال از لغت «ریشه» استفاده شده گزینه (۴) صحیح است اما اگر از لغت «ریشه حقیقی» استفاده می‌شد، گزینه (۱) پاسخ مسأله می‌بود.

مثال ۱۴: در مورد ریشه‌های حقیقی $x^7+2x+c=0$ که در آن c مقدار ثابت است، کدام گزینه صحیح است؟
(آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) ریشه حقیقی ندارد.   ۲) فقط سه ریشه حقیقی دارد.   ۳) فقط یک ریشه حقیقی دارد.   ۴) فقط پنج ریشه حقیقی دارد.

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** فرض کنید $f(x)=x^7+2x+c$، چون $f'(x)=7x^6+2>0$، پس f تابعی اکیداً صعودی است و حداکثر یک ریشه حقیقی دارد. از طرفی f یک چندجمله‌ای از درجه فرد می‌باشد، پس حداقل یک ریشه حقیقی دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود f دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

نکته: معادله $x^n+ax+b=0$ که در آن n فرد و $a \ge 0$ است، فقط دارای یک ریشه حقیقی است.

مثال ۱۵: معادله‌ی $2x^3-3x^2-12x-6=0$ در کدام فاصله فاقد ریشه است؟
(آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $(3,+\infty)$ ۴) $(4,+\infty)$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** فرض کنید $f(x)=2x^3-3x^2-12x-6$ چون $f(4)>0$ و مشتق f یعنی $f'(x)=6x^2-6x-12$ در فاصله $(4,+\infty)$ همواره مثبت است، پس f در $(4,+\infty)$ ریشه ندارد.

مثال ۱۶: اگر تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و روی (a,b) اکسترمم نسبی نداشته باشد، آن‌گاه کدام‌یک از عبارات زیر در هر حال صحیح است؟
(نساجی ـ سراسری ۸۲)

۱) f تابعی نزولی است.   ۲) f تابعی صعودی است.
۳) f تابعی یک‌به‌یک است.   ۴) نمی‌توان نتیجه‌ای از آن گرفت.

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** ثابت می‌کنیم که تحت این شرایط f تابعی یک به یک است. فرض کنیم $x_1 \ne x_2$ باشد و x_1 و x_2 دو عدد در بازه‌ی $[a,b]$ باشند. نشان می‌دهیم $f(x_1) \ne f(x_2)$ است.

بدون آن‌که از کلیت مسأله کاسته شود فرض می‌کنیم $x_1<x_2$ باشد. (در حالت $x_2<x_1$ اثبات به صورت مشابه است.)

تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[x_1,x_2]$ پیوسته است، بنابراین ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خود را در این بازه اختیار می‌کند.

اگر این نقاط در درون بازه‌ی (x_1,x_2) قرار داشته باشند به این معناست که تابع f دارای اکسترمم نسبی است. اما این با فرض تناقض دارد. پس ماکزیمم و می‌نیمم مطلق f روی بازه‌ی $[x_1,x_2]$ در نقاط ابتدا و انتهای بازه رخ می‌دهند، پس یکی از آن‌ها ماکزیمم و دیگری می‌نیمم مطلق f در این بازه هستند در نتیجه $f(x_1)<f(x_2)$ یا $f(x_2)<f(x_1)$. پس f تابعی یک به یک است.

برای رد کردن گزینه‌های (۱) و (۲) به توابع $h(x)=x$ و $g(x)=1-x$ در بازه‌ی $[0,1]$ توجه کنید.

هر دو تابع در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته‌اند و در بازه‌ی $(0,1)$ اکسترمم نسبی ندارند، اما یکی از آن‌ها صعودی و دیگری نزولی است. پس نه گزینه‌ی (۱) همواره برقرار است و نه گزینه‌ی (۲).

مثال ۱۷: به ازای کدام مجموعه از مقادیر k معادلهٔ $x^3-3x+k=0$ دو جواب متمایز و متعلق به بازهٔ $[0,1]$ دارد؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-1,0]$

پاسخ : گزینه «۱» فرض کنید $f(x)=x^3-3x+k$، در این صورت $f'(x)=3x^2-3$ چون f' در بازه $(0,1)$ ریشه ندارد، پس تابع f در بازه $(0,1)$ حداکثر یک ریشه می‌تواند داشته باشد.

مثال ۱۸: تابع f بر بازهٔ $[-1,4]$ پیوسته و بر بازهٔ $(-1,4)$ مشتق‌پذیر است. $f(-1)=2$ و $f(4)=-4$. مقدار $f'(x)$ که در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{6}{5}$

پاسخ : گزینه «۳» چون تابع f بر روی بازه $[-1,4]$ پیوسته بر روی بازه $(-1,4)$ مشتق‌پذیر است لذا حداقل یک نقطه مانند c، $(-1<c<4)$ وجود دارد به‌طوری‌که داریم:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)} \Rightarrow f'(c)=\frac{-4-2}{5}=\frac{-6}{5}$$

مثال ۱۹: فرض کنید برای اعداد حقیقی C_0 و C_1 و C_n داریم: $C_0+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n=0$، در این صورت: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) معادله $C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n=0$ یک ریشه حقیقی در بازهٔ $[0,1]$ دارد.

۲) به ازای هر x، $C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0$

۳) معادله $C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0$ ریشه حقیقی ندارد.

۴) به ازای هر x، $C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n\neq 0$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا قرار می‌دهیم $f(x)=C_0x+\frac{C_1}{2}x^2+\frac{C_2}{3}x^3+\cdots+\frac{C_n}{n+1}x^{n+1}$. در این صورت واضح است که $f(0)=0$ و طبق فرض $f(1)=0$. بنابراین طبق قضیه رُل $f'(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n=0$ حداقل یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ دارد.

مثال ۲۰: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $f'(x)<1$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ در این صورت تعداد نقاطی که در رابطه $f(x)=x$ صدق می‌کند برابر است با: (نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) دقیقاً ۱ ۲) حداکثر ۱ ۳) دقیقاً ۲ ۴) حداکثر ۲

پاسخ : گزینه «۲» تابع $g(x)=f(x)-x$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاطی که در آن‌ها معادلهٔ $f(x)=x$ برقرار است، برابر با تعداد ریشه‌های $g(x)$ است. با محاسبهٔ $g'(x)$ داریم $g'(x)=f'(x)-1<0$، پس $g(x)$ تابعی نزولی است. هر تابع نزولی حداکثر دارای یک ریشه است. برخی از توابع نزولی مانند $g(x)=1-x$ دقیقاً یک ریشه دارند و برخی از آن‌ها مثل $g(x)=1+e^{-x}$ اصلاً ریشه ندارند. بنابراین $g(x)$ حداکثر یک ریشه دارد. برای اثبات این مطلب می‌توانیم از قضیهٔ رُل هم استفاده کنیم. اگر $g(a)=0$ و $g(b)=0$ باشد آن‌گاه در نقطه‌ای مانند c باید $g'(c)=0$ باشد، که تناقض است، زیرا $g'(x)<0$ است.

مثال ۲۱: معادله $3tgx+x^3=2$ دارای: (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) تنها یک ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است.

۲) دو ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است.

۳) ریشه‌ای در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ نیست.

۴) دارای سه ریشه در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ است.

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا معادله را به صورت $f(x)=3tgx+x^3-2=0$ بازنویسی می‌کنیم.

با توجه به این‌که $f(0)<0$ و $f(\frac{\pi}{4})>0$، پس معادله $f(x)=0$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه در بازه $(0,\frac{\pi}{4})$ دارد. از طرفی $f'(x)=3(1+tg^2x)+3x^2>0$، پس f تابعی اکیداً صعودی در بازه $(0,\frac{\pi}{4})$ است و لذا نمی‌تواند بیش از یک ریشه در این بازه داشته باشد.

مثال ۲۲: فرض کنید $f(x)=1+(x^2+1)(x^2-3x+2)$، اکنون معادله جبری $f'(x)=0$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه کامل است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۷)

۱) حداقل یک ریشه حقیقی است.
۲) یک ریشه ساده و یک ریشه مضاعف حقیقی دارد.
۳) سه ریشه حقیقی متمایز دارد.
۴) دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم: $f'(x)=2x(x^2-3x+2)+(x^2+1)(2x-3)=4x^3-9x^2+6x-3=0$

خُب چون $f'(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی فرد است، پس معادله‌ی $f'(x)=0$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. حالا $f''(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f''(x)=12x^2-18x+6=6(2x^2-3x+1)=6(2x-1)(x-1)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=1$$

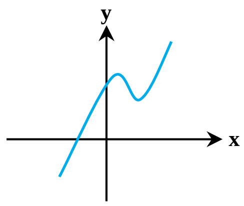
حالا طبق قضیه‌ی مقدار میانی چون $f''(1)$ و $f''(\frac{1}{2})$ منفی است، پس می‌توان گفت f'' هیچ ریشه‌ای ندارد، بنابراین $f'(x)=0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

مثال ۲۳: معادله درجه سوم $x^3-2x^2+x+1=0$ از نظر تعداد و علامت ریشه‌ها چگونه است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) یک ریشه منفی
۲) یک ریشه مثبت
۳) ریشه ساده مثبت ـ مضاعف منفی
۴) ریشه ساده منفی ـ مضاعف مثبت

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** با در نظر گرفتن تابع $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ داریم:

$$f'(x)=3x^2-4x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow \min \\ x=\frac{1}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3})=\frac{31}{27} \Rightarrow \max \end{cases}$$



چون ضریب x^3 هم مثبت است لذا تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل خواهد بود. پس واضح است که $f(x)=0$ یک ریشه منفی دارد.

مثال ۲۴: در تابع پیوسته و مشتق‌پذیر (و با مشتق پیوسته) $f(x)$، اگر $f(1)=3$ و $f(2)=5$ و $f(3)=1$ و $f(4)=4$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

۱) در بازه $[1,4]$ فقط یک نقطه وجود دارد که $f'(x_0)=\frac{1}{3}$
۲) در بازه $[1,4]$ حداقل دو نقطه وجود دارد که $f'(x_0)=\frac{1}{3}$
۳) در بازه $[1,4]$ حداقل چهار نقطه وجود دارد که $f'(x_0)=\frac{7}{2}$
۴) در بازه $[1,4]$ حداقل دو نقطه وجود دارد که $f'(x_0)=\frac{7}{2}$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** برای هر کدام از بازه‌های $[1,2]$، $[2,3]$ و $[3,4]$ قضیه‌ی مقدار میانگین را می‌نویسیم:

$$\exists c_1\in[1,2] \quad f'(c_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=2 \quad ; \quad \exists c_2\in[2,3] \quad f'(c_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=-4 \quad ; \quad \exists c_3\in[3,4] \quad f'(c_3)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=3$$

حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. عدد $\frac{1}{3}$ را در نظر بگیرید. $-4<\frac{1}{3}<2$ پس $f'(c_2)<\frac{1}{3}<f'(c_1)$ طبق صورت سؤال f' پیوسته است. بنابر بر قضیه‌ی مقدار میانی اگر f' در یک نقطه بزرگتر از $\frac{1}{3}$ و در نقطه‌ی دیگری کمتر از $\frac{1}{3}$ باشد، حتماً در نقطه‌ای مانند x_1 داریم $f'(x_1)=\frac{1}{3}$. نقطه‌ی x_1 بین c_1 و c_2 قرار دارد. از طرف دیگر $-4<\frac{1}{3}<3$ یعنی $f'(c_2)<\frac{1}{3}<f'(c_3)$ پس با استدلال مشابه، نقطه‌ای مانند x_2 بین c_2 و c_3 وجود دارد که $f'(x_2)=\frac{1}{3}$ باشد. پس معادله‌ی $f'(x)=\frac{1}{3}$ حداقل دو جواب دارد که در بازه‌ی $[1,4]$ قرار دارند.

مثال ۲۵: معادله‌ی $7x^7+5x^5+3x^3+e^x=1-x$ روی $[0,2]$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** ابتدا تمام جملات معادله را به یک طرف منتقل می‌کنیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم: $f(x)=7x^7+5x^5+3x^3+x+e^x-1=0$

واضح است که نقطه $x=0$ یکی از ریشه معادله فوق می‌باشد پس معادله یک ریشه دارد ولی توجه کنید که همواره $f'(x)>0$ است پس تابع f اکیداً صعودی است و نمی‌تواند بیش از یک ریشه داشته باشد، بنابراین دقیقاً یک ریشه دارد.

مثال ۲۶: هرگاه برای تابعی $f(۰)=۰$ و برای هر x داشته باشیم $f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$، آن‌گاه کدام رابطه صحیح است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۲}<f(۲)<\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۵}<f(۲)<\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۵}<f(۲)<۲$
۴) $۱<f(۲)<۲$

پاسخ : گزینه «۳» قضیه مقدار میانگین را برای تابع f در بازه‌ی $[۰,۲]$ به‌کار می‌بریم، در این‌صورت:

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=f'(c)\,,\ ۰<c<۲\ \Rightarrow f(۲)=۲f'(c)=\frac{۲}{۱+c^۲}$$

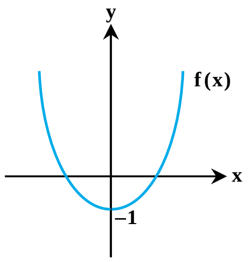
حال با توجه به این‌که $۰<c<۲$، پس $\frac{۲}{۵}<\frac{۲}{۱+c^۲}<۲$ خواهد بود.

مثال ۲۷: در مورد معادله $x^۲-x\sin x-\cos x=۰$ می‌توان گفت: (مکانیک ـ سراسری ۷۱ و عمران ـ آزاد ۸۳ و نفت ـ سراسری ۸۵ و عمران ـ سراسری۸۸)

۱) فقط یک جواب دارد.
۲) فقط دو جواب دارد.
۳) بیش از دو جواب دارد.
۴) اصلاً جواب ندارد.

پاسخ : گزینه «۲» $f(x)$ تابعی زوج است. اگر تعداد ریشه‌ها را در بازه‌ی $[۰,\infty)$ بررسی کنیم، تعداد ریشه‌ها در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ هم معلوم می‌شود. با مقایسه‌ی علامت f در $x=۰$ و $x\to+\infty$ بررسی را آغاز می‌کنیم.

$f(۰)=-۱$ است. از طرفی با توجه به کران‌دار بودن $\sin x$ و $\cos x$ و استفاده از قاعده‌ی بزرگترین درجه واضح است که $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\simeq\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^۲=+\infty$.



تا اینجا مطمئن شدیم که $f(x)$ در این بازه تغییر علامت می‌دهد و حداقل یک ریشه دارد. با کمک قضیه‌ی رُل در مورد تعداد ریشه‌ها بحث می‌کنیم. با محاسبه‌ی $f'(x)$ داریم:

$$f'(x)=۲x-\sin x-x\cos x+\sin x=x(۲-\cos x)$$

در بازه‌ی $(۰,\infty)$ داریم $x>۰$ و عبارت $۲-\cos x$ هم همواره مثبت است زیرا $-۱\le\cos x\le۱$، پس در بازه $f'(x)>۰$ است بنابراین $f(x)$ نمی‌تواند دو یا چند ریشه داشته باشد. [اگر f بخواهد دو ریشه داشته باشد، f' هم باید حداقل یک جا صفر شود.] پس $f(x)$ دقیقاً یک ریشه در بازه‌ی $(۰,\infty)$ دارد، بنابراین دقیقاً یک ریشه هم در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ دارد. با این حساب f دقیقاً دارای ۲ ریشه است.

مثال ۲۸: فرض می‌کنیم f بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و برای چهار عدد $a<b<c<d$ داشته باشیم $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$، معادله‌ی $f'(x)=۰$ بر $\mathbb{R}$ حداقل چند جواب دارد؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) جواب ندارد.

پاسخ : گزینه «۲» **یادآوری:** (قضیه رول) فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)$ آن‌گاه حداقل یک عدد c در بازه (a,b) موجود است به طوری که $f'(c)=۰$.

در سؤال فوق f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f(a)=f(b)$ پس حداقل یک عدد $c_۱$ در بازه (a,b) موجود است به طوری که $f'(c_۱)=۰$ مشابهاً حداقل یک عدد $c_۲$ در بازه (b,c) و حداقل یک عدد $c_۳$ در بازه (c,d) موجود است به طوری که $f'(c_۲)=f'(c_۳)=۰$. چون a,b,c,d متمایز هستند پس $c_۱,c_۲,c_۳$ نیز متمایزند در نتیجه f' حداقل ۳ ریشه دارد. یعنی معادله‌ی $f'(x)=۰$ در $\mathbb{R}$ حداقل ۳ جواب دارد.

مثال ۲۹: نقطه‌ای بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x}{۳x+۵},x\in[-۱,۱]$ وجود دارد که خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی پاره‌خطی است که دو نقطه ابتدا و انتهای منحنی را بهم وصل می‌کند. طول آن نقطه کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{-۲}{۳}$
۲) $\frac{-۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ : گزینه «۲» این مسئله در واقع بیانی از قضیه مقدار میانگین می‌باشد.

$$\frac{۱۵}{۱۶}=\frac{\frac{۳}{۸}-(-\frac{۳}{۲})}{۲}=\frac{f(۱)-f(-۱)}{۱-(-۱)}=$$ شیب پاره‌خطی که دو نقطه ابتدا و انتهای منحنی را به‌هم وصل می‌کند.

و می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی در نقطه a مساوی $f'(a)$ می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{۳(۳x+۵)-۹x}{(۳x+۵)^۲}=\frac{۱۵}{(۳x+۵)^۲}=\frac{۱۵}{۱۶}\Rightarrow(۳x+۵)^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow ۳x+۵=-۴\ \text{یا}\ ۳x+۵=۴\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\ \text{یا}\ x=-۳$$

ولی چون $-۳\notin[-۱,۱]$ لذا $x=-۳$ غیر قابل قبول است و نقطه مورد نظر $-\frac{۱}{۳}$ است (در $x=-\frac{۱}{۳}$ شیب خط مماس مساوی شیب پاره خط مفروض در مسأله می‌باشد).

مثال۳۰: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق پذیر و به ازای هر عدد حقیقی x، $f(x)+(x-a)f'(x)>0$ در این‌صورت معادله $f(x)=0$: (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) ریشه حقیقی ندارد.
۲) حداقل یک ریشه حقیقی دارد
۳) حداکثر دو ریشه حقیقی دارد
۴) با اطلاعات فوق در مورد ریشه $f(x)=0$ قضاوتی نمی‌توان کرد.

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** فرض کنیم $g(x)=(x-a)f(x)$ در این صورت داریم $g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)$ پس طبق صورت سؤال $g'(x)>0$ است. پس معادله‌ی $g(x)=0$ نمی‌تواند ریشه‌ی مضاعف یا ریشه‌ی مرتبه‌ی بالاتر داشته باشد زیرا اگر $x=a$ ریشه‌ی مضاعف $g(x)$ باشد باید $g'(a)=0$ شود که تناقض است. از این‌جا متوجه می‌شویم که در تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ فقط $(x-a)$ در $x=a$ صفر می‌شود و $f(a)\neq 0$ است. از طرفی $g(x)$ صعودی اکید است پس فقط همین یک ریشه را دارد پس در سایر نقاط نیز داریم $g(x)\neq 0$ در نتیجه $f(x)\neq 0$. بنابراین $f(x)$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال۳۱: به ازای $x>0$ کدام نامساوی صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{1+x}<\operatorname{Ln}x<\frac{1}{x}$
۲) $\frac{1}{1+x}<\operatorname{Ln}(1+x)<\frac{1}{x}$
۳) $\frac{1}{1+x}<\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$
۴) $\frac{2}{1+x}<\operatorname{Ln}(1+x^2)<\frac{2}{x}$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** تابع $f(x)=\operatorname{Ln}(1+x)$ را در فاصله $[0,x]$ در نظر می‌گیریم. تابع f در فاصله مذکور پیوسته و در فاصله $(0,x)$ مشتق‌پذیر است، پس طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\exists c\in(0,x)\ \text{s.t.}\ f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\ \Rightarrow\ f'(c)=\frac{1}{1+c}=\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x}\qquad(1)$$

$$0<c<x\ \Rightarrow 1<1+c<1+x\ \Rightarrow\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}<1\quad(2)$$

با جایگذاری (۱) در (۲) داریم:

$$\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{x}<1\ \overset{x>0}{\Rightarrow}\ \frac{x}{x+1}<\operatorname{Ln}(1+x)<x$$

چون $x>0$ فرض شده است، لذا می‌توان در نامعادله بالا به جای x از $\frac{1}{x}$ استفاده کرد:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}<\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}\ \Rightarrow\frac{1}{1+x}<\operatorname{Ln}(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

درسنامه۷: تعریف دیفرانسیل و محاسبه‌ی مقدار تقریبی تابع

مثال۱: اگر $y=\frac{x}{1+x}$ باشد، حاصل $\Delta y-dy$ در نقطه $x=0$ به ازای $\Delta x=0/2$ کدام است؟

۱) $-0/015$ ۲) $-0/034$ ۳) $0/035$ ۴) $0/015$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا مقدار نمو y را از $x=0$ تا $x+\Delta x=0+0/2$ حساب می‌کنیم:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(0/2)-f(0)=\frac{0/2}{1+0/2}-\frac{0}{1+0}=\frac{0/2}{1/2}=\frac{1}{6}=0/166$$

حالا با استفاده از مشتق، دیفرانسیل y را حساب می‌کنیم:

$$dy=y'dx=\frac{1\times(1+x)-1\times x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{(1+0)^2}\times 0/2=0/2$$

در نتیجه اختلاف Δy و dy برابر است با:

$$\Delta y-dy=0/166-0/2=-0/034$$

مثال۲: در تابع $y=\frac{x}{1+x}$ اگر $x_0=1$ و $\Delta x=0/4$ است. مقدار دیفرانسیل y کدام است؟

۱) $0/1$ ۲) $0/2$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

پاسخ : گزینه «۱»

$$dy=y'dx\Rightarrow dy=\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{(1+x)^2}dx\xrightarrow[\Delta x=0/4]{x=1}dy=\frac{1}{(1+1)^2}\times 0/4=0/1$$

مثال۳: در تابعی به معادله $y=xe^{2x}+5x+1$ ، با افزایش یک واحدی برای x، در نقطه $x=0$ تقریباً چه مقدار به y اضافه می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ : گزینه «۴» چون مقدار تغییرات تقریبی این تابع مورد نظر است، لذا دیفرانسیل y را حساب می‌کنیم.

$$dy=y'dx=(e^{2x}+2xe^{2x}+5+0)dx\xrightarrow{x=0,dx=1}dy=(e^0+0+5)\times 1=6$$

مثال۴: اگر داشته باشیم $x^2-5xy+y^2-7x+y=-9$ ، مقدار دیفرانسیل y در نقطه $(1,1)$ به کدام صورت است؟

۱) $dy=-\frac{1}{2}dx$ ۲) $dy=-5dx$ ۳) $dy=-\frac{1}{5}dx$ ۴) $dy=-2dx$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی y' را بدست می‌آوریم:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x-5y-7}{-5x+2y+1}\Big|_{(1,1)}=-\frac{2-5-7}{-5+2+1}=-5$$

حال از رابطه‌ی $dy=y'dx$ نتیجه می‌شود $dy=-5dx$.

مثال۵: اگر $y=x^2+x$ باشد، حاصل $(dy-\Delta y)$ در نقطه $x=1$ و $\Delta x=0/1$ برابر است با :

۱) $-0/02$ ۲) $-0/01$ ۳) $0/02$ ۴) $0/03$

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(1/1)-f(1)=(1/21+1/1)-(1+1)=0/31$$

$$dy=y'dx=(2x+1)dx=(2\times 1+1)\times 0/1=0/3\Rightarrow dy-\Delta y=0/3-0/31=-0/01$$

روش دوم: چون $f(x)$ چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است و ضریب x^2 در آن $a=1$ است داریم:

$$\Delta y-dy=a(\Delta x)^2=1\times(0/1)^2=0/01\Rightarrow dy-\Delta y=-0/01$$

مثال۶: دیفرانسیل مرتبه دوم تابع با ضابطه $y=xe^x$ در نقطه $x=1$ ، در صورتی که $\Delta x=0/1$ باشد، برابر است با:

۱) $0/02e$ ۲) $0/01e$ ۳) $0/03e$ ۴) $0/1e$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا مشتق مرتبه‌ی دوم را حساب می‌کنیم:

$$y=xe^x\Rightarrow y'=e^x+xe^x\Rightarrow y''=e^x+e^x+xe^x=(2+x)e^x$$

بنابراین داریم:

$$d^2y=y''dx^2=(2+x)e^xdx^2=(2+1)e^1\times(0/1)^2=0/03e$$

مثال ۷: مقدار تقریبی $\operatorname{Arccotg} ۰/۹۹$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲۰۰}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲۰۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۱۰۰}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این مثال می‌خواهیم مقدار تقریبی تابع $f(x)=\operatorname{Arccotg} x$ را در $x=۰/۹۹$ حساب کنیم. فرض می‌کنیم $x_۰=۱$ باشد، پس $dx=x-x_۰=-۰/۰۱$. در ضمن $f'(x)=\frac{-۱}{۱+x^۲}$ است.

$$f(x)\simeq f(x_۰)+f'(x_۰)\Delta x \Rightarrow f(۰/۹۹)\simeq f(۱)+f'(۱)\times(-۰/۰۱) \Rightarrow \operatorname{Arccotg} ۰/۹۹\simeq \operatorname{Arccotg} ۱-\frac{۱}{۱+۱^۲}\times(-۰/۰۱)=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲۰۰}$$

مثال ۸: کدام‌یک از مقادیر زیر تقریب بهتری برای کسینوس یک رادیان است؟

۱) $۰/۴۸$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۰/۵۴$ ۴) $۰/۶۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هدف ما تقریب زدن مقدار تابع $f(x)=\cos x$ در زاویه‌ی یک رادیان است. در بین زوایای شناخته شده‌ی $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ مقدار $x_۰=\frac{\pi}{۳}$ از همه به یک نزدیک‌تر است، زیرا $\pi\simeq ۳/۱۴$ است. بنابراین $\Delta x=x-x_۰=۱-\frac{\pi}{۳}$ و خواهیم داشت:

$$f(x)\simeq f(x_۰)+f'(x_۰)\Delta x=\cos\frac{\pi}{۳}-\sin\frac{\pi}{۳}\times(۱-\frac{\pi}{۳})$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱-\frac{\pi}{۳})\simeq ۰/۵-۰/۸۵(۱-۱/۰۳)=۰/۵+(۰/۸۵)(۰/۰۳)=۰/۵+۰/۰۳۹=۰/۵۳۹\simeq ۰/۵۴$$

با توجه به آن که $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ و $\pi\simeq ۳/۱$، داریم: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\simeq ۰/۸۵$ و $\frac{\pi}{۳}\simeq ۱/۰۳$.

مثال ۹: اگر شعاع داخلی یک کره فلزی ۴ سانتی‌متر و شعاع خارجی آن $۴\frac{۱}{۱۶}$ سانتی‌متر باشد، حجم تقریبی جداره‌ی کره چقدر است؟

۱) ۳π ۲) ۴π ۳) ۲π ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در این مثال حجم پوسته‌ی یک کره را می‌خواهیم. فرمول حجم کره به‌صورت $V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ است. شعاع داخلی $r_۰=۴$ است و شعاع خارجی $r=۴\frac{۱}{۱۶}=۴+\frac{۱}{۱۶}$ پس $dr=r-r_۰=\frac{۱}{۱۶}$ است. اکنون مقدار دیفرانسیل حجم را حساب می‌کنیم تا حجم پوسته بدست آید.

$$\text{حجم پیوسته}=dV=V'(r_۰)\times dr=۴\pi r_۰^۲\times\frac{۱}{۱۶}=۴\pi\times۱۶\times\frac{۱}{۱۶}=۴\pi$$

مثال ۱۰: اگر تابع f در شرایط $f(۱)=۳$ و $f'(۱)=۴$ صدق کند، آن‌گاه مقدار $f^{-۱}(۳/۱)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۱/۱۲۵$ ۲) $۱/۱$ ۳) $۱/۰۷۵$ ۴) $۱/۰۲۵$

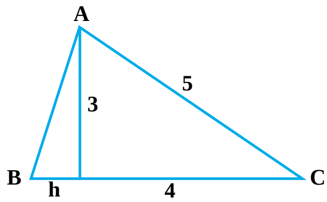
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این مثال با تابع $f^{-۱}(x)$ سروکار داریم و می‌خواهیم مقدار تقریبی آن را در $x=۳/۱$ حساب کنیم. فرض می‌کنیم $x_۰=۳$ باشد پس $dx=x-x_۰=۰/۱$. طبق صورت سؤال $f(۱)=۳$، پس $f^{-۱}(۳)=۱$ و طبق فرمول مشتقِ تابع معکوس داریم:

$$(f^{-۱})'(۳)=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۴}$$

حالا می‌توانیم تقریب خواسته شده را انجام دهیم:

$$f^{-۱}(x)\simeq f^{-۱}(x_۰)+(f^{-۱})'(x_۰)\Delta x \Rightarrow f^{-۱}(۳/۱)\simeq f^{-۱}(۳)+(f^{-۱})'(۳)\times۰/۱=۱+\frac{۱}{۴}\times۰/۱=۱+\frac{۱}{۴۰}=۱/۰۲۵$$

مثال ۱۱: در مثلث ABC ، طول بعضی از قطعات مربوط در شکل مشخص شده است. فرض کنید طول h در مقایسه با سایر طول‌های نمایش داده شده بسیار کوچک است. از روش تقریب خطی مقدار تقریبی برای سینوس زاویه‌ی $B\hat{A}C$ کدام است؟

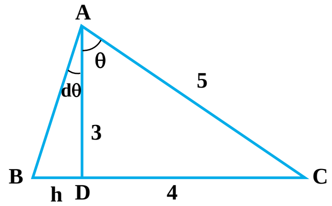


۱) $۰/۸+۰/۳\ \text{Arc}\sin\frac{h}{۳}$

۲) $۰/۶+۰/۵\ \text{Arctg}\frac{h}{۳}$

۳) $۰/۸+۰/۶\ \text{Arctg}\frac{h}{۳}$

۴) $۰/۸+۰/۴\ \text{Arc}\sin\frac{h}{۳}$



پاسخ: گزینه «۳» در شکل داده شده، پای عمود را D می‌نامیم، فرض کنید $D\hat{A}C=\theta$ و $B\hat{A}D=d\theta$ باشد. خواسته‌ی مسئله $\sin(\theta+d\theta)$ است. برای تابع $f(\theta)=\sin\theta$ داریم، $f(\theta+d\theta)\simeq f(\theta)+f'(\theta)d\theta$ پس $\sin(\theta+d\theta)=\sin\theta+\cos\theta d\theta$ با توجه به اندازه‌های داده شده مشخص است که $\sin\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۴}{۵}$، $\cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۳}{۵}$. پس داریم: $\sin(\theta+d\theta)\simeq\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}d\theta$

اکنون به زاویه‌ی $d\theta$ در مثلث $B\hat{A}D$ توجه کنید. $\text{tg}(d\theta)=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{h}{۳}\Rightarrow d\theta=\text{Arctg}\frac{h}{۳}$ بنابراین داریم:

$$\sin(\theta+d\theta)\simeq\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}\text{Arctg}\frac{h}{۳}=۰/۸+۰/۶\text{Arctg}\frac{h}{۳}$$

مثال ۱۲: برای تقریب مقدار $f(x)$ در نقاط نزدیک به صفر از تخمین $f(x)\simeq f(۰)$ استفاده کرده‌ایم. خطای نسبی در محاسبه‌ی $\sin(ax)+\cos(ax)$ در نقاط نزدیک به مبدأ، دو برابر خطای نسبی محاسبه‌ی $۲\sin x+۳\cos x$ در این نقاط است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق صورت سؤال برای تقریب مقدار تابع در نقطه‌ی $x=x_۰+\Delta x$ از تقریب ساده‌ی $f(x_۰+\Delta x)\simeq f(x_۰)$ استفاده کرده‌ایم (البته $x_۰=۰$ است). خطای نسبی محاسبه‌ی $f(x)$ در نقاط نزدیک به نقطه‌ی $x=x_۰$ برای این فرمول برابر است با: $\frac{f'(x_۰)\Delta x}{f(x_۰)}$ بنابراین برای توابع $f(x)=\sin ax+\cos ax$ و $g(x)=۲\sin x+۳\cos x$ در نقاط نزدیک به $x_۰=۰$ داریم:

$$\text{خطای نسبی محاسبه‌ی } f(x)=\frac{f'(x_۰)\Delta x}{f(x_۰)}=\frac{a\cos ax_۰-a\sin ax_۰}{\sin ax_۰+\cos ax_۰}\Delta x\xrightarrow{x_۰=۰}\text{خطای نسبی محاسبه‌ی } f(x)=a\Delta x$$

$$\text{خطای نسبی محاسبه‌ی } g(x)=\frac{g'(x_۰)\Delta x}{g(x_۰)}=\frac{۲\cos x_۰-۳\sin x_۰}{۲\sin x_۰+۳\cos x_۰}\Delta x\xrightarrow{x_۰=۰}\text{خطای نسبی محاسبه‌ی } g(x)=\frac{۲}{۳}\Delta x$$

طبق صورت سؤال خطای نسبی f، دو برابر خطای نسبی g است پس داریم: $a=۲\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$

مثال ۱۳: تقریب $\sqrt[۱۰]{۱+h}\simeq ۱+\frac{h}{۱۰}$ را در نظر می‌گیریم. کدام‌یک از احکام زیر برای $|h|<\frac{۱}{۱۰۰}$ درست است؟

۱) تقریب برای h مثبت دقیق‌تر از تقریب برای h منفی با همان قدرمطلق است.

۲) تقریب برای h منفی دقیق‌تر از تقریب برای h مثبت با همان قدرمطلق است.

۳) تقریب برای h مثبت و h منفی با قدرمطلق برابر به یک دقت است.

۴) هیچ‌یک از سه حکم بالا برای h با $۰<|h|<\frac{۱}{۱۰۰}$ صادق نیست.

پاسخ: گزینه «۱» در این مثال به‌جای Δx از حرف h استفاده شده است. تقریب $\sqrt[۱۰]{۱+h}\simeq ۱+\frac{h}{۱۰}$ را با فرمول $f(x_۰+h)\simeq f(x_۰)+f'(x_۰)h$ مقایسه کنید. متوجه می‌شوید که با تابع $f(x)=\sqrt[۱۰]{x}$ سروکار داریم و $x_۰=۱$ است. حالا که این تقریب با استفاده از فرمول $f(x_۰)+f'(x_۰)h$ نوشته شده است، خطای آن از رابطه‌ی $\varepsilon=f''(c)\frac{h^۲}{۲!}$ بدست می‌آید. مشتق دوم f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۱۰}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۱۰}x^{-\frac{۹}{۱۰}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۹}{۱۰۰}x^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$$

در نتیجه خطای این تقریب از رابطه‌ی $\varepsilon=-\frac{۹}{۱۰۰}c^{-\frac{۱۹}{۱۰}}\frac{h^۲}{۲!}$ بدست می‌آید. پس قدرمطلق خطا برابر است با: $|\varepsilon|=\frac{۹h^۲}{۲۰۰}c^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$

که c عدد بین $x_\circ=۱$ و $x_\circ+h=۱+h$ است. حالا فرض کنیم این تقریب را یک بار برای مقدار مثبت $h_۱$ و یک بار هم برای مقدار منفی $h_۲=-h_۱$ انجام داده باشیم. خطای این تقریب‌ها را با $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ نشان می‌دهیم:

$$\varepsilon_۱=\frac{f''(c_۱)}{۲!}h_۱^۲\Rightarrow|\varepsilon_۱|=\frac{۹h_۱^۲}{۲۰۰}c_۱^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$$

$$\varepsilon_۲=\frac{f''(c_۲)}{۲!}h_۲^۲\Rightarrow|\varepsilon_۲|=\frac{۹h_۲^۲}{۲۰۰}c_۲^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$$

چون $h_۱>\circ$ مثبت است پس $c_۱\in(۱,۱+h_۱)$ و چون $h_۲<\circ$، پس $c_۲\in(۱+h_۲,۱)$. حالا قدرمطلق خطاهای بدست آمده را با هم مقایسه می‌کنیم، چون $h_۱$ و $h_۲$ قرینه هم هستند پس $h_۱^۲=h_۲^۲$ و تفاوت خطاها فقط در ضرایب $c_۱^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$ و $c_۲^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$ است. $c_۱$ در بازه‌ی $۱<c_۱<۱+h_۱$ قرار دارد پس بزرگتر از یک است. اما $c_۲<۱$، این نشان می‌دهد که $c_۲<۱<c_۱$ پس $c_۲^{\frac{۱۹}{۱۰}}<c_۱^{\frac{۱۹}{۱۰}}$ و با وارونه کردن طرفین (یعنی قرینه کردن توان‌ها) داریم $c_۲^{-\frac{۱۹}{۱۰}}>c_۱^{-\frac{۱۹}{۱۰}}$. پس $|\varepsilon_۲|>|\varepsilon_۱|$ یعنی خطای مربوط به $h_۲$ بیشتر از خطای مربوط به $h_۱$ است.

مثال ۱۴: کدام‌یک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt{۵}$ هستند؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱/۷۵　　۲) ۲　　۳) ۲/۲۵　　۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n+b}\sim a+\frac{b}{n.a^{n-1}}$ در این تست $n=a=۲$ و $b=۱$ می‌باشد: $\sqrt{۵}=\sqrt{۲^۲+۱}=۲+\frac{۱}{۲\times۲}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

مثال ۱۵: اگر $Ln\frac{x+y}{x-y}=۳$ باشد حاصل $\lim\limits_{\Delta y\to\circ}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{y}{x}$　　۲) $\frac{-x}{y}$　　۳) $\frac{x}{y}$　　۴) $\frac{-y}{x}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم که وقتی Δy کوچک باشد داریم: $\Delta y\simeq dy$ همچنین نمادهای Δx و dx معادلند، بنابراین $\frac{dx}{dy}=\lim\limits_{\Delta y\to\circ}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ پس کافی است از تابع داده شده نسبت به y مشتق بگیریم و چون تابع ضمنی است فرمول به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}\ ,\ Ln(\frac{x+y}{x-y})=۳\Rightarrow Ln(x+y)-Ln(x-y)-۳=\circ$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{۱}{x+y}+\frac{۱}{x-y}}{\frac{۱}{x+y}-\frac{۱}{x-y}}=-\frac{\frac{(x-y)+(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{(x-y)-(x+y)}{(x+y)(x-y)}}=-\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)-(x+y)}=\frac{-۲x}{-۲y}=\frac{x}{y}$$

مثال ۱۶: وقتی $h>\circ$ خیلی کوچک باشد، کدام‌یک از مقادیر زیر تقریب بهتری برای $\frac{۱}{\sqrt{۲۵+h}}-\frac{۱}{۵}$ است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{h}{۱۵۰}$　　۲) $-\frac{h}{۲۵۰}$　　۳) $\frac{h}{۱۵۰}$　　۴) $\frac{h}{۲۵۰}$

پاسخ: گزینه «۴» تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $x_\circ=۲۵$ و $x=۲۵+h$ باشد. در این صورت $\Delta x=x-x_\circ=h$ است و خواهیم داشت:

$$f(x)\simeq f(x_\circ)+f'(x_\circ)\Delta x\Rightarrow f(x)\simeq\frac{۱}{\sqrt{x_\circ}}-\frac{x_\circ^{-\frac{۳}{۲}}}{۲}\Delta x$$

با جایگذاری $x_\circ=۲۵$، $\Delta x=h$ و $x=۲۵+h$ داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲۵+h}}\simeq\frac{۱}{\sqrt{۲۵}}-\frac{(۲۵)^{-\frac{۳}{۲}}}{۲}\times h\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲۵+h}}\simeq\frac{۱}{۵}-\frac{h}{۲۵۰}\Rightarrow\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{\sqrt{۲۵+h}}\simeq\frac{h}{۲۵۰}$$

مثال ۱۷: در تابع $y=\frac{1}{x}$ مقدار $\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'$ کدام است؟ (آبیاری و زهکشی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{x(x+\Delta x)}$ ۲) $\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$ ۳) $\frac{1}{x^2(x+\Delta x)}$ ۴) $\frac{\Delta x}{x^2(x+\Delta x)}$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت خواسته شده را می‌توان به این شکل نوشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'=\frac{\Delta y-y'\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}$$

پس Δy و dy را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$dy=f'(x)\Delta x=-\frac{1}{x^2}\times\Delta x=\frac{-\Delta x}{x^2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}+\frac{\Delta x}{x^2}}{\Delta x}=-\frac{1}{x(x+\Delta x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{\Delta x}{x^2(x+\Delta x)}$$

مثال ۱۸: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{31/2}$ با استفاده از دیفرانسیل کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱/۹۸۰ ۲) ۱/۹۸۵ ۳) ۱/۹۹۰ ۴) ۱/۹۹۵

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{na^{n-1}}$، بنابراین داریم:

$$\sqrt[5]{2^5-0/8}\simeq 2-\frac{0/8}{5\times 2^4}=2-\frac{1}{100}=1/99$$

مثال ۱۹: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{(63/4)^2}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱۵/۸۸ ۲) ۱۵/۹۰ ۳) ۱۵/۹۲ ۴) ۱۵/۹۴

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$، $x_0=64$ و $\Delta x=-0/6$، در این صورت به کمک فرمول تقریب $f(x_0+\Delta x)\sim f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[3]{(63/4)^2}\sim\sqrt[3]{64^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{64}}\times(-0/6)=16-0/1=15/90$$

مثال ۲۰: مقدار تقریبی عدد $\sqrt[5]{(31/55)^2}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) ۳/۹۷۲۵ ۲) ۳/۹۸۷۵ ۳) ۳/۹۸۲۵ ۴) ۳/۹۷۷۵

پاسخ: گزینه «۴» تابع $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که:

$$x_0=32\quad,\quad \Delta x=-0/45$$

بنابراین با استفاده از دیفرانسیل تابع f خواهیم داشت:

$$df=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}\Delta x=\frac{2}{5}\left(\frac{-0/45}{\sqrt[5]{x^3}}\right)\xrightarrow{x=32}df=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-0/45}{8}\right)=-\frac{0/09}{4}$$

از طرفی با توجه به تعریف دیفرانسیل تابع f داریم:

$$df|_{x=x_0}\simeq f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Rightarrow df|_{x=32}=f(31/55)-f(32)\Rightarrow$$

$$f(31/55)\simeq f(32)+df=4+\left(\frac{-0/09}{4}\right)=3/9775$$

مدرسان شریف

فصل چهارم

« انتگرال »

درسنامه: فرمول‌های انتگرال‌گیری و استفاده از تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

مثال ۱: حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$

۲) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c$

۳) $x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$

۴) $x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ ، $dx=\cos\theta\,d\theta$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)^3}}=\int\frac{\cos\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=tg\,\theta+c=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

در این نوع انتگرال‌ها در قسمت نهایی پاسخ، باید عبارت به‌دست آمده بر حسب θ را به عبارتی بر حسب x تبدیل کنیم. برای این منظور چون $x=\sin\theta$ ، آن‌گاه $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ و لذا $tg\theta$ را می‌توان به‌صورت $tg\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ نوشت. البته در این سؤال استفاده از فرمول‌های مثلثاتی راحت بود. اما یک روش جالب، رسم یک مثلث قائم‌الزاویه است که در مثال‌های بعدی آن روش را نیز خواهیم دید.

مثال ۲: حاصل $I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$ ، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3+C$

۲) $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3+C$

۳) $-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3+C$

۴) $-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3+C$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای محاسبه‌ی این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم، فرض کنید؛ $x=\sin\theta$ ، پس $dx=\cos\theta d\theta$ و با توجه به رابطه $1+\cot g^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ ، داریم:

$$I=\int\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^4\theta}\cos\theta d\theta=\int\frac{|\cos\theta|}{\sin^4\theta}\cos\theta d\theta\xlongequal{\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}d\theta=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$\Rightarrow I=\int\cot g^2\theta(1+\cot g^2\theta)d\theta\xrightarrow{\text{از تغییر متغیر } u=\cot g\theta \text{ داریم}}I=-\frac{u^3}{3}+c=-\frac{\cot g^3\theta}{3}+c=-\frac{1}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\right]+c$$

خُب، انتگرال بر حسب θ محاسبه شد، اما گزینه‌ها بر حسب x هستند، بنابراین باید حاصل انتگرال را بر حسب x بنویسیم، برای این منظور باید $\cos\theta$ را نیز بر حسب x حساب کنیم:

$$x=\sin\theta\Rightarrow x^2=\sin^2\theta\Rightarrow 1-x^2=1-\sin^2\theta\Rightarrow 1-x^2=\cos^2\theta\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$

بنابراین داریم:

$$I=-\frac{1}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\right]+c=-\frac{1}{3}\left[\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{x^3}\right]+c$$

مثال ۳: حاصل انتگرال $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$ ۲) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+c$ ۳) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+c$ ۴) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که مشتق عبارت داخل رادیکال، بیرون رادیکال موجود نیست و عبارت زیر رادیکال به فرم $\sqrt{u^2+a^2}$ می‌باشد. پس از متغیر $u=a\,tg\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$x=2tg\theta \Rightarrow dx=2(1+tg^2\theta)d\theta=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=2\sec^2\theta d\theta$$

$$I=\int\frac{2\sec^2\theta d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4+4tg^2\theta}}=\int\frac{2\sec^2\theta d\theta}{4tg^2\theta\sqrt{4(1+tg^2\theta)}}=\int\frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4tg^2\theta)(2\sec\theta)}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta}{tg^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int\underbrace{(\sin\theta)}_{u}{}^{-2}\underbrace{\cos\theta d\theta}_{du}=-\frac{1}{4}\sin^{(-2+1)}\theta+c=-\frac{1}{4\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$$

توجه شود در قسمت نهایی که عبارت را برحسب x نوشتیم چون $x=2tg\theta$ و $\cot g\theta=\frac{2}{x}$ و از آنجایی که $\sin^2\theta=\frac{1}{1+\cot g^2\theta}$ می‌توان نتیجه گرفت $\sin^2\theta=\frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2}=\frac{x^2}{x^2+4}$. لذا $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ به‌دست آمد.

مثال ۴: در پاسخ انتگرال $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$، یکی از جمله‌ها به‌صورت $A\sin^{-1}(x+\frac{1}{2})$ می‌باشد. مقدار A کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا انتگرال را به‌صورت $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{4-(2x+1)^2}}$ بازنویسی می‌کنیم، سپس با به کارگیری تغییر متغیر $u=2x+1$، داریم:

$$I=\int\frac{\frac{u-1}{2}\times\frac{du}{2}}{\sqrt{4-u^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}du=\frac{1}{4}\int\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}du-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{4-u^2}}du=\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})\int(4-u^2)^{-\frac{1}{2}}(-2u)du-\frac{1}{4}\text{Arc}\sin(\frac{u}{2})$$

$$=-\frac{1}{8}(2(4-u^2)^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{4}\text{Arc}\sin\frac{2x+1}{2}=-\frac{1}{4}[4-u^2]^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\text{Arc}\sin(x+\frac{1}{2})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{4-(2x+1)^2}-\frac{1}{4}\text{Arc}\sin(x+\frac{1}{2})+C$$

مثال ۵: حاصل $\int x^{4x}(Lnx+1)\,dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{4}x^{4x}+c$ ۲) $4xLnx+c$ ۳) $4xe^{4xLnx}+c$ ۴) $\frac{1}{4}x(Lnx+1)+c$

پاسخ: **گزینه «۱»** از تغییر متغیر $u=x^{4x}$، $du=4x^{4x}(Lnx+1)dx$ استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\int x^{4x}(Lnx+1)\,dx=\int\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}u+c=\frac{1}{4}x^{4x}+c$$

مثال ۶: حاصل $I=\int\sin^2(\frac{1}{2}\text{Arc}\cos x)dx$ کدام است؟ (تأسیسات و آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $-\frac{1}{4}x^4-2x+c$ ۲) $\frac{1}{2}x^2+2x+c$ ۳) $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c$ ۴) $\frac{1}{2}x^2+4x+c$

پاسخ: **گزینه «۳»** با توجه به این که توان سینوس زوج است، بنابراین از فرمول توان‌شکن استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2(\frac{1}{2}\text{Arc}\cos x)=\frac{1-\cos(\text{Arc}\cos x)}{2}=\frac{1-x}{2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int(1-x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{4}+c$$

مثال ۷: حاصل انتگرال $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9-x^2)}}$، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{9}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}]+c$
۲) $\frac{9}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}]+c$
۳) $\frac{3}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}]+c$
۴) $\frac{3}{2}[\sin^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}]+c$

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** با توجه به وجود $\sqrt{9-x^2}$ در زیر رادیکال، از تغییر متغیر $x=3\sin t$، $dx=3\cos tdt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{9\sin^2 t\times 3\cos tdt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}=\int 9\sin^2 tdt=\frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{9}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+c=\frac{9}{2}(\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9})+c$$

مثال ۸: انتگرال $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{4}{5}x^{5/4}-x+\frac{4}{3}x^{3/4}-2x^{1/2}+4x^{1/4}-4\text{Ln}|1+x^{1/4}|+C$
۲) $\sin^{-1}(x^2-\sqrt{x})+C$
۳) $\text{Ln}|\sin^{-1}\sqrt{x}|+C$
۴) $\frac{3}{4}x^{3/4}-2x^{1/2}+\text{Ln}|x^2-\sqrt{x}|+C$

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** با توجه به این که فرجه‌ی رادیکال‌ها ۴ و ۲ می‌باشد، باید از تغییر متغیر $x=u^k$، استفاده کنیم که k، کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها است. از تغییر متغیر $x=u^4$ و $dx=4u^3du$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4u^5}{1+u}du\xrightarrow{\text{با تقسیم صورت بر مخرج}}I=4\int(u^4-u^3+u^2-u+1-\frac{1}{u+1})du$$

$$=\frac{4}{5}u^5-u^4+\frac{4}{3}u^3-2u^2+4u-4\text{Ln}|u+1|+c=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4\text{Ln}(1+x^{\frac{1}{4}})+c$$

مثال ۹: مقدار انتگرال $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+c$
۲) $\sqrt{x}-1+c$
۳) $2\text{Ln}|\sqrt{x}+1|+c$
۴) $2\text{Ln}|\sqrt{x}-1|+c$

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** برای حل انتگرال داده شده از تغییر متغیر $u=\sqrt{x}$، به‌صورت مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u=\sqrt{x}\Rightarrow x=u^2\Rightarrow dx=2udu$$

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}=\int\frac{2udu}{u^2-u}=2\int\frac{du}{u-1}=2\text{Ln}|u-1|+c=2\text{Ln}|\sqrt{x}-1|+c$$

مثال ۱۰: انتگرال $\int\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}dx$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $\sqrt{2}\text{Ln}|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}|$
۲) $\sqrt{2}\text{Ln}|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}|-2\sqrt{1+x}+c$
۳) $\text{Ln}|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}|+\text{Ln}\sqrt{1+x}+c$
۴) $\sqrt{2}\text{Ln}|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}|+2\sqrt{1+x}+c$

☑ **پاسخ: گزینه «۲»** از تغییر متغیر $u=\sqrt{x+1}$، $x=u^2-1$ و $dx=2udu$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}dx=\int\frac{2u^2du}{2-u^2}du=\int\frac{(2u^2-4)+4}{2-u^2}du=\int(-2+\frac{4}{2-u^2})du$$

$$=\int-2du-4\int\frac{du}{u^2-2}=-2u-\frac{4}{2\sqrt{2}}\text{Ln}|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}|+c=-2\sqrt{1+x}+\sqrt{2}\text{Ln}|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}|+c$$

مثال ۱۱: اگر $F(x)=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+6}}$، مقدار $F(30)-F(3)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}Ln\frac{13-3\sqrt{5}}{13+3\sqrt{5}}$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}Ln\frac{13+3\sqrt{5}}{13-3\sqrt{5}}$
۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}Ln\frac{13-3\sqrt{5}}{13+3\sqrt{5}}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}Ln\frac{13+3\sqrt{5}}{13-3\sqrt{5}}$

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این سوال از تغییر متغیر $u^2=x+6$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$x+6=u^2 \Rightarrow dx=2udu$$

$$F(x)=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+6}}=\int \frac{2udu}{(u^2-5)u}=2\int \frac{du}{u^2-5}=\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{5}}$$

$$F(30)-F(3)=\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\frac{\sqrt{36}-\sqrt{5}}{\sqrt{36}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}[Ln(\frac{6-\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}})-Ln(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}})]=\frac{1}{\sqrt{5}}Ln\frac{(6-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(6+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}}{5}Ln(\frac{13+3\sqrt{5}}{13-3\sqrt{5}})$$

مثال ۱۲: انتگرال $\int \frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $CLn(1-e^x)+x^2$
۲) $CLn(1-e^x)+x-x^2$
۳) $x-Ln(1+e^x)+C$
۴) $x+Ln(1+e^x)+C$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx=x-Ln(1+e^x)+C$$

مثال ۱۳: انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+25\cos^2 x}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{10}tg^{-1}(\frac{2}{5}tgx)+c$
۲) $\frac{1}{10}tg(\frac{2}{5}tgx)+c$
۳) $\frac{1}{10}tg(\frac{2}{5}tg^{-1}x)+c$
۴) $\frac{1}{10}tg^{-1}(\frac{2}{5}tg^{-1}x)+c$

پاسخ: گزینه «۱» با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\cos^2 x$ داریم:

$$I=\int \frac{dx}{4\sin^2 x+25\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{25+4tg^2x}dx=\frac{1}{4}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{25}{4}+tg^2x}$$

حالا فرض می‌کنیم $tgx=u$ و لذا $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$، پس طبق فرمول داریم:

$$I=\frac{1}{4}(\frac{1}{\frac{5}{2}})Arctg[\frac{tgx}{\frac{5}{2}}]+c=\frac{1}{10}Arctg[\frac{2}{5}tgx]+c$$

مثال ۱۴: حاصل $I=\int \frac{1}{1-x^2}Ln\frac{1+x}{1-x}dx$، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}Ln^2(\frac{1+x}{1-x})+c$
۲) $\frac{1}{8}Ln(\frac{1+x^2}{1-x^2})+c$
۳) $\frac{3}{5}Ln(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}})+c$
۴) $\sqrt{1+x}Ln(\frac{x}{1-x})+c$

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $u=Ln\frac{1+x}{1-x}$، استفاده می‌کنیم:

$$u=Ln(1+x)-Ln(1-x) \Rightarrow du=(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})dx \Rightarrow du=\frac{2}{1-x^2}dx \Rightarrow dx=(\frac{1-x^2}{2})du$$

بنابراین داریم:

$$I=\int (\frac{1}{1-x^2})u[(\frac{1-x^2}{2})du]=\frac{1}{2}\int udu=\frac{1}{2}[\frac{u^2}{2}]+c=\frac{u^2}{4}+c=\frac{1}{4}[Ln(\frac{1+x}{1-x})]^2+c$$

نکته تستی: تابع تحت انتگرال، تابعی فرد است، بنابراین می‌شه فهمید؛ حاصل انتگرال باید زوج باشه! بنابراین همین‌جا از گزینه‌های (۳) و (۴)، خداحافظی می‌کنیم. اگر کمی تست انتگرال حل کرده باشید، بین گزینه‌های (۱) و (۲) اصلاً به گزینه (۲) فکر هم نمی‌کنید!! (به $Ln(\frac{1+x}{1-x})$ در زیر انتگرال دقت کنید.)

مثال ۱۵: **شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$، در هر نقطه‌ی $M(x,y)$ واقع بر آن، برابر مربع عرض آن نقطه است. اگر $f(0)=2$ باشد، مختصات مرکز تقارن تابع $f(x)$ کدام است؟** (برنامه‌ریزی شهری ـ سراسری ۸۸)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(\frac{1}{2},0)$ ۴) $(1,\frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه «۳» از فصل مشتق می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع $f(x)$، برابر با $f'(x)$ است، پس داریم:

$$f'(x)=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow y^{-2}dy=dx \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} -y^{-1}=x+c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y}=x+c \xrightarrow{y(0)=2} -\frac{1}{2}=0+c \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f(x)$ به‌صورت $-\frac{1}{y}=x-\frac{1}{2}$، و یا به عبارت دیگر به‌صورت $y=-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{2x-1}$ نوشته می‌شود. اما سؤال، مختصات مرکز تقارن تابع را خواسته است، از طرفی می‌دانیم برای توابع هموگرافیک محل برخورد مجانب‌ها، مرکز تقارن است، پس تابع فوق دارای مجانب افقی $y=0$ و مجانب قائم $x=\frac{1}{2}$ است و بنابراین نقطه $(\frac{1}{2},0)$ مرکز تقارن منحنی است.

مثال ۱۶: **شیب خط مماس بر منحنی (c) در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن، برابر $\frac{x^2}{y}$ است. اگر این منحنی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\sqrt{7}$ قطع کند، خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟** (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به توضیحات سؤال داریم:

$$y'=\frac{x^2}{y} \Rightarrow yy'=x^2 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+c_1 \xrightarrow{\text{نقطه } (0,\sqrt{7}) \text{ در معادله صدق می‌کند}} \frac{7}{2}=c_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{x=3} \frac{y^2}{2}=\frac{27}{3}+\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{25}{2} \Rightarrow y=5$$

مثال ۱۷: **حاصل $I=\int\frac{dx}{1+\sin x}$، برابر با کدام گزینه است؟** (هسته‌ای ـ آزاد ۸۹)

۱) $tgx-\operatorname{cosec}x+c$ ۲) $\cot gx+tgx+c$ ۳) $tgx-\sec x+c$ ۴) $\sec^2 x+c$

پاسخ: گزینه «۳» بهترین روش، ضرب صورت و مخرج در « $1-\sin x$ » است:

$$I=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=tgx-\frac{1}{\cos x}+c=\mathbf{tgx-\sec x+c}$$

درسنامه ۲: محاسبه‌ی انتگرال‌های شامل توابع مثلثاتی و هیپربولیک که با توان‌های مختلف فرد و یا زوج هستند.

مثال ۱: حاصل انتگرال $I=\int \sin^4 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$
۲) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$
۳) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$
۴) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

پاسخ: گزینه «۲»

$$I=\int \sin^4 x\,dx=\int(\frac{1-\cos 2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int[1-2\cos 2x+(\frac{1+\cos 4x}{2})]dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+c=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

مثال ۲: حاصل انتگرال $I=\int \cot g^3 x\,dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}\cot g^2 x+\mathrm{Ln}|\sin x|+c$
۲) $-\frac{1}{2}\cot g^2 x-\mathrm{Ln}|\sin x|+c$
۳) $\frac{1}{2}\cot g^2 x+\mathrm{Ln}|\sin x|+c$
۴) $\frac{1}{2}\cot g^2 x-\mathrm{Ln}|\sin x|+c$

پاسخ: گزینه «۲»

$$I=\int \cot g^3 x\,dx=\int[(\cot g^3 x+\cot gx)-\cot gx]dx=\int \underbrace{\cot gx}_{u}\,\underbrace{(\cot g^2 x+1)\,dx}_{-du}-\int \cot gx\,dx=-\frac{\cot g^2 x}{2}-\mathrm{Ln}|\sin x|+c$$

مثال ۳: حاصل $I=\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$ کدام است؟

۱) $-x+tgx+c$
۲) $-x-tgx+c$
۳) $-x+\cot gx+c$
۴) $-x-\cot gx+c$

پاسخ: گزینه «۴» حل این انتگرال بسیار ساده می‌باشد، کافی است ابتدا از قوانین مثلثاتی (فرمول‌های توان‌شکن) استفاده کنیم:

$$I=\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx=\int\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}dx=\int(\cot g^2 x)dx=\int(\cot g^2 x+1-1)dx=\int(\cot g^2 x+1)dx-\int dx=-\cot gx-x+c$$

مثال ۴: حاصل انتگرال $I=\int tg^5 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+\mathrm{Ln}|\sec x|+c$
۲) $\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}+c$
۳) $\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}+\mathrm{Ln}|\sin x|+c$
۴) $\frac{tg^2 x}{4}-\frac{tg^4 x}{2}+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته گفته شده، در این مثال $n=5$ است، لذا $k=2$ خواهد بود: $\int tg^5 x\,dx=\frac{tg^4 x}{4}-\frac{tg^2 x}{2}+(-1)^2\times \mathrm{Ln}|\frac{1}{\cos x}|+c$

مثال ۵: حاصل انتگرال $I=\int tg^6 x\,dx$ کدام است؟

۱) $tg^5 x-\frac{1}{3}tg^3 x+tgx+c$
۲) $\frac{1}{5}tg^5 x+\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+c$
۳) $\frac{1}{5}tg^3 x+\frac{1}{3}tg^5 x-tgx+c$
۴) $\frac{1}{5}tg^5 x-\frac{1}{3}tg^3 x+tgx-x+c$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته گفته شده، در این مثال $n=6$ است، لذا $k=3$ می‌باشد: $I=\int tg^6 x\,dx=\frac{tg^5 x}{5}-\frac{tg^3 x}{3}+tgx+(-1)^3 x+c$

مثال ۶: حاصل انتگرال $I=\int \sin 9x\sin x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$
۲) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin 10x+c$
۳) $\frac{1}{20}\sin 10x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$
۴) $\frac{1}{20}\sin 8x-\frac{1}{16}\sin x+c$

پاسخ: گزینه «۱» به راحتی با توجه به فرمول داریم:

$$I=\int\frac{1}{2}[\cos 8x-\cos 10x]dx=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$$

مثال ۷: حاصل $I=\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\cot g^{-1}[tg(\frac{x}{2})+\frac{2}{3}]+c$ ۲) $tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+\frac{2}{3}]+c$ ۳) $\cot g^{-1}[tg\frac{x}{2}+1]+c$ ۴) $tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+1]+c$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=z$، داریم:

$$I=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+2(\frac{2z}{1+z^2})+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2}{2z^2+4z+4}dz=\int\frac{1}{z^2+2z+2}dz=\int\frac{dz}{(z+1)^2+1}=tg^{-1}(z+1)+c=tg^{-1}[tg(\frac{x}{2})+1]+c$$

مثال ۸: اگر در حاصل انتگرال $I(x)=\int\frac{2\sin x-3\cos x}{4\sin x+3\cos x}dx$ ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد، آن‌گاه مقدار $I(\frac{\pi}{2})$ چقدر است؟

۱) $\frac{1+36Ln2}{25}$ ۲) $-\frac{1-54Ln2}{25}$ ۳) $-\frac{1+36Ln2}{25}$ ۴) $\frac{1-54Ln2}{25}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق توضیحات داده شده باید به صورت زیر عمل کنیم:

$$2\sin x-3\cos x=A(4\sin x+3\cos x)+B(4\cos x-3\sin x)\Rightarrow 2\sin x-3\cos x=(4A-3B)\sin x+(3A+4B)\cos x$$

با متحد قرار دادن طرفین تساوی فوق یک دستگاه داریم که با حل آن A و B به دست می‌آید:

$$\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\begin{cases}4A-3B=2\\3A+4B=-3\end{cases}\Rightarrow 25A=-1\Rightarrow A=-\frac{1}{25}\Rightarrow B=-\frac{54}{75}=-\frac{18}{25}$$

بنابراین انتگرال به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int\frac{-\frac{1}{25}(4\sin x+3\cos x)-\frac{18}{25}(4\cos x-3\sin x)}{4\sin x+3\cos x}dx=-\frac{1}{25}\int 1\times dx-\frac{18}{25}\int\frac{\overbrace{(4\cos x-3\sin x)dx}^{du}}{\underbrace{4\sin x+3\cos x}_{u}}=-\frac{1}{25}-\frac{18}{25}Ln|4\sin x+3\cos x|+c$$

$$\xrightarrow{c=0,\,x=\frac{\pi}{2}}I(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{25}-\frac{18}{25}Ln4=-\frac{1}{25}-\frac{18\times2}{25}Ln2=-\frac{1}{25}(1+36Ln2)$$

توجه: فرم کلی‌تر و سخت این نوع سؤالات هم وجود دارد که در صورت و مخرج کسر، اعداد ثابت هم وجود دارند، در این حالت‌ها روش کار یکسان است؛ ولی در روند حل به سه انتگرال برخورد می‌کنیم که ۲ انتگرال اول مانند مثال فوق و انتگرال سوم تقسیم عددی ثابت بر مخرج کسرِ زیر انتگرال است که حل آن زمان‌بر و بر اساس تغییرمتغیر $tg\frac{x}{2}=t$ و یا نظایر آن صورت می‌گیرد. (در آزمون (۳) تست‌های خودسنجی نمونه‌ای آورده شده است) البته تاکنون در آزمون‌ها از این نوع انتگرال‌ها مطرح نشده، ولی به هر حال شما باید همیشه آماده باشید!

مثال ۹: اگر $\frac{f(x)}{\sin x+\cos x}=\int(\frac{\sec x}{1+\tan x})^2dx$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\cos x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $\sin x$

پاسخ: **گزینه «۱»** برای محاسبه‌ی انتگرال، از تغییر متغیر $u=1+tgx$ استفاده می‌کنیم:

$$1+tgx=u\Rightarrow\frac{1}{\cos^2x}dx=du\Rightarrow(\sec x)^2dx=du$$

$$I=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}\Rightarrow I=-\frac{1}{1+tgx}=-\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\Rightarrow \mathbf{f(x)=-\cos x}$$

مثال۱۰: حاصل انتگرال $\int \sec x.dx$ ، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\text{Ln}|\sec x+\text{tg}x|+c$ ۲) $\text{Ln}|\text{cosec}x+\text{tg}x|+c$ ۳) $\text{Ln}\sqrt{(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})}+c$ ۴) $\text{Ln}(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})^2+c$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول‌های ابتدای فصل، واضح است که گزینه ۱ صحیح می‌باشد. اما جهت یادگیری بهتر، نحوهٔ اثبات را نیز به‌صورت زیر ارائه می‌نمائیم:

به‌دست آوردن انتگرال $\int \sec x dx$ ، روش‌های مختلفی دارد، اما یک روش ابتکاری و راحت این است که صورت و مخرج این کسر را در $(\sec x+\text{tg}x)$ ضرب کنیم:

$$\int(\sec x)dx=\int\frac{\sec x(\sec x+\text{tg}x)}{\sec x+\text{tg}x}dx=\int\frac{\sec^2 x+(\sec x)\text{tg}x}{\sec x+\text{tg}x}dx$$

حالا اگر از تغییر متغیر $\sec x+\text{tg}x=u$ استفاده کنیم، داریم:

$$\frac{1}{\cos x}+\text{tg}x=u\Rightarrow[\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}]dx=du\Rightarrow[\frac{1}{\cos x}(\frac{\sin x}{\cos x})+\sec^2 x]dx=du\Rightarrow[(\sec x)\text{tg}x+\sec^2 x]dx=du$$

ملاحظه می‌کنید که مشتق مخرج کسر در صورت کسر وجود دارد، لذا داریم:

$$I=\int\frac{du}{u}=\text{Ln}|u|+c=\mathbf{Ln}|\mathbf{sec x}+\mathbf{tgx}|+\mathbf{c}$$

مثال۱۱: کدام گزینه جواب انتگرال $\int \sin x\cos x dx$ نیست؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2}\cos^2 x+c$ ۲) $\frac{1}{2}\cos^2 x+c$ ۳) $-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ ۴) $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ و لذا داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+c$$

از طرفی می‌دانیم $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ و یا $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ پس حاصل انتگرال به‌صورت‌های $-\frac{1}{2}\cos^2 x+c$ و $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$ نیز قابل نمایش است، پس فقط حاصل انتگرال را نمی‌توان به شکل گزینه (۲) نوشت.

مثال۱۲: انتگرال نامعین $\int\frac{\text{tg}x\sqrt{\sec x}+\sec x\sqrt{\text{tg}x}}{\cos x}dx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{3}(\sqrt{\csc^3 x+\text{cotg}^3 x})+c$ ۲) $\frac{2}{3}(\sqrt{\cos^3 x+\text{tg}^3 x})+c$ ۳) $\frac{2}{3}(\sqrt{\sec^3 x}+\sqrt{\text{tg}^3 x})+c$ ۴) $\frac{2}{3}(\sqrt{\cos^3 x}+\sqrt{\text{tg}^3 x})+c$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا انتگرال را کمی ساده کرده و سپس انتگرال را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$\text{انتگرال}=\int(\frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\text{tg}x}}{\cos^2 x})dx=\int\frac{\sin x dx}{(\cos x)^{\frac{5}{2}}}+\int\frac{\sqrt{\text{tg}x}}{\cos^2 x}dx$$

برای محاسبه انتگرال اول از تغییر متغیر $u=\cos x$ ، $du=-\sin x dx$ و برای محاسبه انتگرال دوم از تغییر متغیر $v=\text{tg}x$ ، $dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم، در این‌صورت داریم:

$$\text{انتگرال}=\int\frac{-du}{u^{\frac{5}{2}}}+\int\sqrt{v}dv=\frac{2}{3}u^{-\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(\sqrt{\sec^3 x}+\sqrt{\text{tg}^3 x})+c$$

درسنامه۳: روش انتگرال‌گیری جزء به جزء

مثال ۱: جواب انتگرال $\int \frac{Ln(Lnx)}{x}dx$ کدام است؟

۱) $LnxLn(Lnx)-Lnx+c$ ۲) $Lnx-Ln(Lnx)+c$ ۳) $Ln(Lnx)-Lnx+c$ ۴) $LnxLn(Lnx)+c$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $u=Lnx$، استفاده می‌کنیم، در این صورت $du=\frac{dx}{x}$ داریم:

$$I=\int \frac{Ln(Lnx)}{x}dx=\int Lnudu \xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} I=uLnu-u+c=LnxLn(Lnx)-Lnx+c$$

مثال ۲: ضریب $\cos(Lnx)$ در حاصل انتگرال $I=\int \sin(Lnx)dx$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{x}{2}$ ۳) $-\frac{x}{2}$ ۴) x

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $u=Lnx$، آن‌گاه $du=\frac{1}{x}dx$ و چون $x=e^u$، لذا $dx=e^udu$ و بنابراین داریم:

$$I=\int e^u \sin udu=\frac{e^u}{2}(\sin u-\cos u)+c=\frac{x}{2}[\sin(Lnx)-\cos(Lnx)]+c \Rightarrow$$ بنابراین ضریب $\cos(Lnx)$ برابر با $-\frac{x}{2}$ است.

توضیح: در محاسبه‌ی انتگرال $\int e^u \sin udu$ از رابطه‌ی گفته شده استفاده کردیم، بنابراین به خاطر سپردن حاصل دو انتگرال گفته شده در خیلی از سؤالات به ما صرفه‌جویی از وقت را هدیه می‌دهد!

مثال ۳: حاصل انتگرال $\int x^2 \sin xdx$ کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x+C$ ۲) $-x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$

۳) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$ ۴) $x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x+C$

پاسخ: **گزینه «۳»** برای حل این انتگرال از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم و با توجه به جدول مقابل نتیجه می‌شود:

	مشتق	انتگرال
⊕	x^2	$\sin x$
⊖	$2x$	$-\cos x$
⊕	2	$-\sin x$
⊖	0	$\cos x$

$$\Rightarrow \int x^2\sin xdx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$$

مثال ۴: حاصل $\int x^2 tg^{-1}xdx$، برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}x^3tg^{-1}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}Ln(1+x^2)+C$ ۲) $\frac{1}{3}x^3tg^{-1}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}Ln(1+x^2)+C$

۳) $\frac{1}{3}x^3tg^{-1}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}tg^{-1}x+C$ ۴) $\frac{1}{3}x^3tg^{-1}x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}tg^{-1}x+C$

پاسخ: **گزینه «۱»** از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=Arctgx \Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=x^2dx \Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{cases} \Rightarrow \int x^2Arctgxdx=\frac{x^3}{3}Arctgx-\int\frac{x^3}{3(1+x^2)}dx=\frac{x^3}{3}Arctgx-\frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}Arctgx-\frac{1}{3}\int(x-\frac{x}{x^2+1})dx=\frac{x^3}{3}Arctgx-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}Ln(1+x^2)+c$$

مثال ۵: اگر ثابت انتگرال‌گیری $c=-1$ فرض شود، حاصل انتگرال $f(x)=\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$ به ازای $x=0$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲» برای محاسبه انتگرال داده شده از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u=xe^x \Rightarrow du=(e^x+xe^x)dx=(x+1)e^x dx \quad , \quad dv=\frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v=\frac{-1}{x+1}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\frac{-xe^x}{x+1}+\int e^x dx=\frac{-xe^x}{x+1}+e^x+c=\frac{e^x}{x+1}+c$$

به ازای $c=-1$ نتیجه می‌شود $f(x)=\frac{e^x}{x+1}-1$، بنابراین $f(0)=0$.

مثال ۶: اگر $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\text{Ln}x)^n dx$، آن‌گاه می‌توان نشان داد که $I_{m,n}=aI_{m,n-1}$ مقدار a کدام است؟ $(m,n\in\mathbb{N})$ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $a=-\frac{n}{m}$ ۲) $a=\frac{-m}{n}$ ۳) $a=\frac{n}{m+1}$ ۴) $a=\frac{-n}{m+1}$

پاسخ: گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u=(\text{Ln}x)^n \Rightarrow du=n(\text{Ln}x)^{n-1}.\frac{1}{x}dx \quad , \quad dv=x^m dx \Rightarrow v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$I_{m,n}=\frac{x^{m+1}(\text{Ln}x)^n}{m+1}\Bigg|_0^1-\int_0^1 \frac{n}{m+1}.x^m(\text{Ln}x)^{n-1}dx=\frac{-n}{m+1}I_{m,n-1}$$

درسنامه۴: روش انتگرال‌گیری به روش تجزیه کسرها

مثال ۱: تابع اولیه تابع $f(x)=\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $\text{Ln}|x|-2\text{Ln}|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+c$

۲) $\text{Ln}|x|-2\frac{x+1}{\text{Ln}(x+1)}+c$

۳) $\text{Ln}(x)-2\text{Ln}|x+1|+\frac{\text{Lnx}}{2(1+x)}+c$

۴) $\text{Ln}|x|-\text{Ln}|1+x|+\frac{1}{1+x}+c$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از روش هویساید، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(1+x)^2}\Rightarrow A=\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0}=1\ ,\ B=\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=-1}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=-1}=-1\ ,\ C=\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}=-1$$

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx=\text{Ln}|x|-\text{Ln}|1+x|+\frac{1}{1+x}+c$$

مثال ۲: انتگرال نامعین $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$ برابر با کدام گزینه است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $\text{Ln}|x|-\frac{1}{2}\text{Ln}|x^2+4|+c$

۲) $\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+\text{Lnx}+c$

۳) $\frac{1}{2}\text{Ln}|x^2+4|+\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+c$

۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right|+\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+c$

پاسخ: گزینه «۴» از روش تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

از ضرب کردن طرفین رابطه در $x(x^2+4)$ به‌دست می‌آید:

$$A(x^2+4)+x(Bx+C)=x+4\Rightarrow A=1\ ,B=-1\ ,\ C=1$$

$$\Rightarrow\int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{-x+1}{x^2+4}dx=\text{Lnx}-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+4)+\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{1}{2}\text{Lnx}^2-\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+4)+\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{x}{2}+C$$

درسنامه ۵: انتگرال معین و خواص آن

مثال ۱: حاصل $I=60\int_{1}^{2}(x^2-4x)(x-2)^9dx$ کدام است؟

۱) ۲۳　　۲) ۱۹　　۳) ۱۸　　۴) ۱۷

پاسخ : گزینه «۲» با کمی دقت واضح است؛ می‌توان انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$I=60\int_{1}^{2}[(x-2)^2-4](x-2)^9dx=60\int_{1}^{2}[(x-2)^{11}-4(x-2)^9]dx=60\left[\frac{(x-2)^{12}}{12}-\frac{4(x-2)^{10}}{10}\right]_{1}^{2}=19$$

مثال ۲: حاصل $I=\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{3x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۵　　۳) ۴　　۴) ۰

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$\sqrt{x^2+1}=u\to x^2+1=u^2\to 2xdx=2udu\to xdx=udu$$

بازه‌ی انتگرال‌گیری را نیز با توجه به تغییر متغیر عوض می‌کنیم:

$$x=0\Rightarrow u=\sqrt{0^2+1}=1\ ,\ x=\sqrt{3}\Rightarrow u=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{(3x^2)(x)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_{1}^{2}\frac{3(u^2-1)udu}{u}=\int_{1}^{2}(3u^2-3)du=[u^3-3u]_{1}^{2}=4$$

مثال ۳: اگر $\int_{0}^{k\pi}\sin\frac{x}{k}dx=6$ باشد، آن‌گاه k کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$I=\int_{0}^{k\pi}\sin(\frac{x}{k})dx=[-k\cos(\frac{x}{k})]_{0}^{k\pi}=-k\cos(\frac{k\pi}{k})+k\cos(0)=k+k=2k=6\Rightarrow 2k=6\Rightarrow k=3$$

مثال ۴: مقدار $\int_{1}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که درجه «صورت کسر» از درجه‌ی «مخرج کسر» بیشتر است، بنابراین باید صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم:

$$\int_{1}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx=\int_{1}^{2}\frac{x+2-1}{\sqrt{x+2}}dx=\int_{1}^{2}(\sqrt{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x+2}})dx=(\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2})\Big|_{1}^{2}=\frac{4}{3}$$

مثال ۵: اگر $F(x)=\int_{-Ln2}^{t}e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{t\to 0}F(x)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　۲) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}$　　۳) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　۴) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال در اصل باید حاصل $\int_{-Ln2}^{0}e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$ را به‌دست آوریم، با فرض $e^x=\sin\theta$، آن‌گاه $e^xdx=\cos\theta d\theta$. از طرفی برای بازه‌های انتگرال، روابط مقابل را داریم:

$$x=0\Rightarrow e^0=\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=-Ln2\Rightarrow e^{-Ln2}=\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta|\cos\theta d\theta\xrightarrow{\theta\ \text{در ربع اول}}I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}(0-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

مثال ۶: چندجمله‌ای درجه‌ی دوم P در شروط $P(0)=P(1)=0, \int_0^1 P(x)dx=1$ صدق می‌کند، مقدار $P(2)$، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲- ۴) ۲۴-

پاسخ: گزینه «۳» چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)$ را به‌صورت $P(x)=ax^2+bx+c$ فرض می‌کنیم، در این صورت، طبق شرط سؤال، یعنی $P(0)=P(1)=0$، داریم:

$$P(0)=0 \Rightarrow a(0)+b(0)+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$P(1)=0 \Rightarrow a(1^2)+b(1)+c=0 \xrightarrow{c=0} a+b=0 \quad ,(1)$$

برای تعیین a و b، لازم است یک معادله‌ی دیگر بر حسب a و b به‌دست آوریم، از شرط بعدی یعنی $\int_0^1 P(x)dx=1$، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^1 P(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx)dx=1 \Rightarrow a[\frac{x^3}{3}]_0^1+b[\frac{x^2}{2}]_0^1=1 \Rightarrow \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1 \quad , \quad (2)$$

بنابراین دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -2 \\ \ \end{matrix}\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+3b=6 \end{cases} \Rightarrow 3b-2b=6 \Rightarrow b=6 \ , \ a=-6$$

و لذا ضابطه‌ی $P(x)$ به‌صورت $P(x)=-6x^2+6x$ است و بنابراین $P(2)=-6(2^2)+6\times 2=\mathbf{-12}$.

مثال ۷: حاصل $I=\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$، چند برابر $\frac{\pi}{3}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\sqrt{4x-x^2}$ را مربع کامل کرده و آن را به‌صورت $\sqrt{4-(x-2)^2}$ می‌نویسیم، سپس با استفاده از روش تغییر متغیر مثلثاتی، فرض می‌کنیم؛ $x-2=2\sin\theta$، در نتیجه $dx=2\cos\theta d\theta$، به ازای $x=1$ داریم $\theta=-\frac{\pi}{6}$ و به ازای $x=3$ داریم $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$$I=\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\theta+2}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}(2\cos\theta d\theta)=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2(\sin\theta+1)}{2|\cos\theta|}(2\cos\theta d\theta)$$

$$\xlongequal[\cos\theta>0]{\theta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2(\sin\theta+1)d\theta=[-2\cos\theta+2\theta]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=[-2(\cos\frac{\pi}{6}-\cos(-\frac{\pi}{6}))+2(\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6}))]=[-2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+2(\frac{\pi}{3})]=\frac{2\pi}{3}$$

توضیح: البته استفاده از تغییر متغیر $u=x-2$ و نوشتن انتگرال به صورت $\int_{-1}^{1}\frac{(u+2)du}{\sqrt{4-u^2}}$ می‌تواند به حل راحت‌تر انتگرال کمک کند.

مثال ۸: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin^2 x\cos x}{1+e^2\sin^2 x})dx$ به‌صورت $\frac{k}{e}(1-k\text{Arctg}e)$ می‌باشد، مقدار k کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» وجود « e » درون انتگرال، کمی چهره سؤال را ناخوشایند کرده! اما این به معنی آن نیست که نباید سمتش برویم!! اگر از تغییر متغیر $u=\sin x$ استفاده کنیم، داریم:

$$u=\sin x \Rightarrow du=\cos xdx \quad , \quad x=0 \Rightarrow u=\sin(0)=0 \ , \ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\sin(\frac{\pi}{2})=1$$

$$I=\int_0^1\frac{u^2du}{1+e^2u^2}=\int_0^1\frac{1}{e^2}(1-\frac{1}{1+e^2u^2})du=\frac{1}{e^2}\int_0^1 du-\frac{1}{e^2}\int\frac{du}{1+e^2u^2}=\frac{1}{e^2}[u]_0^1-\frac{1}{e^2}[\frac{1}{e}\text{Arctg}eu]_0^1=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}\text{Arctg}e$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{e^2}(1-\frac{1}{e}\text{Arctg}e) \Rightarrow k=\frac{1}{e}$$

مثال ۹: حاصل انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$، کدام است؟

۱) 0 ۲) $\text{Ln}\frac{4}{3}$ ۳) $\text{Ln}\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}\text{Ln}6$

پاسخ: گزینه «۲» از تغییر متغیر $\sin x=t$، آن‌گاه $\cos x dx=dt$ و چون $x=\text{Arc}\sin t$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$، بنابراین داریم:

$$x=0\Rightarrow \text{Arc}\sin t=0\xrightarrow{0\le t\le 1} t=0\quad,\quad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \text{Arc}\sin t=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{0\le t\le 1} t=1$$

$$I=\int_0^1\frac{dt}{6-5t+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{(t-3)(t-2)}=[\text{Ln}(\frac{t-3}{t-2})]_0^1=\text{Ln}2-\text{Ln}\frac{3}{2}=\text{Ln}\frac{4}{3}$$

مثال ۱۰: مقدار انتگرال $\int_0^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{x^4+2x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» برای حل انتگرال داده شده به جهت اینکه مخرج کسر یک چندجمله‌ای درجه ۲ نسبت به x^2 است و این چندجمله‌ای درجه ۲ نسبت به x^2، دارای ریشهٔ حقیقی نیست $(\Delta<0)$. لذا ابتدا باید مخرج را به فرم مربع کامل درآورد و سپس با استفاده از فرمول‌های گفته شده در ابتدای فصل، به حل انتگرال پرداخت:

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2+(\sqrt{3})^2}=\int\frac{\frac{1}{2}du}{u^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{x^4+2x^2+3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{x^2+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

مثال ۱۱: اگر $F(x)=\int_0^t x\,tg^{-1}x dx$، آن‌گاه مقدار $\lim_{t\to 1}F(x)$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال در اصل باید حاصل $I=\int_0^1 x\,tg^{-1}x dx$ را حساب کنیم، برای این منظور از قاعده‌ی جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u=tg^{-1}x\xrightarrow{\text{دیفرانسیل می‌گیریم}}du=\frac{1}{1+x^2}dx\quad,\quad xdx=dv\xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}\frac{x^2}{2}=v$$

$$I=[\frac{x^2}{2}tg^{-1}x]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}(\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{1}{2}tg^{-1}(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x-\text{Arctg}x]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مثال ۱۲: فرض کنید نقطه $p(1,3)$ مرکز تقارنِ نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و داشته باشیم $\int_{-1}^2 f(x)dx=12$ در این صورت حاصلِ $I=\int_0^3 f(x)dx$ کدام است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) 6 ۴) -6

پاسخ: گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که وقتی نمودار $y=f(x)$ در نقطه‌ی (α,β) مرکز تقارن داشته باشد، با جایگذاریِ $2\alpha-x$ و $2\beta-y$ به جای x و y، باز هم معادله برقرار خواهد بود. به عبارتی داریم: $y=f(x)\Rightarrow 2\beta-y=f(2\alpha-x)$

وقتی نقطه‌ی $p(1,3)$ مرکز تقارن نمودار $y=f(x)$ باشد، نتیجه می‌گیریم که در این تابع اگر به جای x و y، به ترتیب $2-x$ و $6-y$ قرار بدهیم، باز هم تساوی برقرار خواهد بود. به عبارتی داریم: $y=f(x)\Rightarrow 6-y=f(2-x)\Rightarrow f(2-x)=6-f(x)$

به عبارتی داریم $f(2-t)=6-f(t)$ اکنون در انتگرالِ $I=\int_0^3 f(x)dx$ تغییر متغیر $x=2-t$ را انجام می‌دهیم. در این صورت داریم $dx=-dt$، به ازای $x=0$ داریم $t=2$ و به ازای $x=3$ مقدار $t=-1$ به دست می‌آید.

$$I=\int_0^3 f(x)dx=\int_2^{-1}f(2-t)(-dt)=-\int_2^{-1}f(2-t)dt$$

با قرینه کردن انتگرال، حدود آن را جابجا می‌کنیم. در ضمن از تساوی $f(2-t)=6-f(t)$ استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{-1}^2[6-f(t)]dt=\int_{-1}^2 6dt-\int_{-1}^2 f(t)dt=6\times3-12=6$$

مثال ۱۳: حاصل $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx$، چند برابر حاصل $I_2=\int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2}dx$ می‌باشد؟ (sgnx تابع علامت است.)

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال I_1، باید از دست قدرمطلق خلاص شویم! به این منظور تابع را در بازه‌ی داده شده، تعیین علامت کرده و از قدرمطلق بیرون می‌آوریم. از آنجایی که x در ربع اول واقع است و cos x در این ربع، علامتش مثبت می‌باشد، لذا داریم: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

برای محاسبه انتگرال I_2، باید ابتدا تابع $\operatorname{sgn}(x-2)$ را تشکیل دهیم، سپس بر اساس محدوده x، مقدار تابع علامت را جایگذاری کنیم و در نهایت از عبارات به وجود آمده، انتگرال بگیریم:

$$\operatorname{sgn}(x-2)=\begin{cases}+1 & x-2>0\Rightarrow x>2\\ 0 & x-2=0\Rightarrow x=2\\ -1 & x-2<0\Rightarrow x<2\end{cases}\Rightarrow I_2=\int_1^2\frac{-1}{x^2}dx+\int_2^3\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}\Big|_1^2+(-\frac{1}{x})\Big|_2^3=(\frac{1}{2}-1)+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=-\frac{1}{3}$$

بنابراین حاصل $\frac{I_1}{I_2}=-3$ است.

مثال ۱۴: در انتگرال $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$، حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n-2}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» برای یافتن رابطه‌ی بازگشتی، ابتدا I_n را به‌صورت $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^{n-1}xdx$ می‌نویسیم و سپس با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء و با فرض $u=\cos^{n-1}x$ و $dv=\cos xdx$ خواهیم داشت: $du=(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$ و $v=\sin x$، بنابراین داریم:

$$I_n=[\sin x\cos^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(n-1)(-\sin x)\cos^{n-2}xdx\Rightarrow I_n=(0-0)-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(1-\sin^2x)-1]\cos^{n-2}xdx$$

$$\Rightarrow I_n=-(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}xdx]\Rightarrow I_n=-(n-1)I_n+(n-1)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow nI_n=(n-1)I_{n-2}\Rightarrow\frac{I_n}{I_{n-2}}=\frac{n-1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n-2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})=1$$

مثال ۱۵: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin\theta+\cos\theta}d\theta$، برابر کدام گزینه است؟

۱) Ln۲ ۲) $-$Ln۲ ۳) ۲Ln۲ ۴) $-$۲Ln۲

پاسخ: گزینه «۱» همان‌طور که گفتیم برای محاسبه‌ی این‌گونه انتگرال‌ها باید قرار دهیم: $z=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ که نتیجه می‌دهد؛ $d\theta=\frac{2dz}{1+z^2}$، $\cos\theta=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $\sin\theta=\frac{2z}{1+z^2}$، بنابراین خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+2z+1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{2(1+z)}=\operatorname{Ln}(1+z)+c=[\operatorname{Ln}(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}+c=\operatorname{Ln}(1+1)-\operatorname{Ln}(1+0)=\mathbf{Ln2}$$

مثال ۱۶: مقدار تقریبی $F(x)=\int_1^{1/01}\operatorname{arctg}xdx$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{800}$ ۲) $\frac{\pi}{200}$ ۳) $\frac{\pi}{400}$ ۴) $\frac{\pi}{120}$

پاسخ: گزینه «۳» یک سؤال نسبتاً جالب از تعریف انتگرال معین! از فصل کاربرد مشتق رابطه‌ی تقریب مقابل را می‌دانیم: $F(x+\Delta x)-F(x)\simeq F'(x)\Delta x$

اگر فرض کنیم $\Delta x=0/01$ و $x=1$، آن‌گاه داریم:

$$F(1/01)-F(1)=F'(1)\times\frac{1}{100}$$

خواسته‌ی ما سمت چپ عبارت بالاست که برابر با $\frac{F'(1)}{100}$ شده است، اما از طرفی $F'(x)$ برابر با عبارت زیر انتگرال یعنی arctgx است، پس $F'(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ و لذا مقدار تقریبی خواسته شده برابر با $\frac{\pi}{400}$ می‌شود.

مثال ۱۷: حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\right)dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{13}(6\pi+5\text{Ln}\frac{2}{3})$ ۲) $\frac{1}{13}(6\pi+5\text{Ln}6)$ ۳) $\frac{1}{13}(6\pi-5\text{Ln}6)$ ۴) $\frac{1}{13}(6\pi+5\text{Ln}\frac{3}{2})$

پاسخ: گزینه «۴» باید عبارت صورت کسر را بر حسب ترکیب خطی «مخرج» و «مشتق مخرج» نوشته شود. مشتق مخرج کسر برابر با $2\cos x-3\sin x$، است، لذا داریم:

$$3\sin x+2\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\cos x-3\sin x)\Rightarrow 3\sin x+2\cos x=(2A-3B)\sin x+(3A+2B)\cos x$$

با متحد قرار دادن طرفین معادله‌ی فوق، دستگاه مقابل را داریم:

$$\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\begin{cases}2A-3B=3\\3A+2B=2\end{cases}\Rightarrow -9B-4B=9-4\Rightarrow B=\frac{-5}{13}\Rightarrow A=\frac{12}{13}$$

لذا داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{12}{13}(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\frac{5}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{5}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{(2\cos x-3\sin x)dx}^{du}}{\underbrace{2\sin x+3\cos x}_{u}}$$

$$=\frac{12}{13}[x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{5}{13}[\text{Ln}|2\sin x+3\cos x|]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{13}(\frac{\pi}{2})-\frac{5}{13}\text{Ln}|2\sin\frac{\pi}{2}+3\cos\frac{\pi}{2}|+\frac{5}{13}\text{Ln}|2\sin(0)+3\cos(0)|$$

$$\Rightarrow I=\frac{6\pi}{13}-\frac{5}{13}\text{Ln}2+\frac{5}{13}\text{Ln}3=\frac{1}{13}(6\pi)+\frac{5}{13}(\text{Ln}3-\text{Ln}2)=\frac{1}{13}[6\pi+5\text{Ln}\frac{3}{2}]$$

مثال ۱۸: حاصل $I=\int_{-2}^{0}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}+2$ ۲) $\pi+2$ ۳) $\pi-2$ ۴) $\frac{\pi}{2}-1$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه این انتگرال، صورت و مخرج عبارت زیر رادیکال را در $2+x$ ضرب می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int_{-2}^{0}\sqrt{\frac{(2+x)^2}{4-x^2}}dx=\int_{-2}^{0}\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{-2}^{0}\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}+\int_{-2}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}=[2\text{Arc}\sin(\frac{x}{2})]_{-2}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}-2x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\text{حاصل انتگرال}=[2\text{Arc}\sin(\frac{x}{2})-\frac{1}{2}2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}]_{-2}^{0}=[2\text{Arc}\sin(\frac{x}{2})-\sqrt{4-x^2}]_{-2}^{0}=2[0-(-\frac{\pi}{2})]-(\sqrt{4}-0)=\pi-2$$

مثال ۱۹: اگر $I=\int\left(\frac{4x\cos 4x-\sin 4x}{x^2}\right)dx$، آن‌گاه با شرط $I(\pi)=0$، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}I$ برابر با کدام گزینه به‌دست می‌آید؟

۱) ∞ ۲) 1 ۳) -4 ۴) 4

پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت واضح است عبارت زیر انتگرال مشتق عبارت $\frac{\sin 4x}{x}$ می‌باشد، بنابراین $I=\frac{\sin 4x}{x}+C$ و چون $I(\pi)=0$، لذا $\frac{\sin 4\pi}{\pi}+C=0$ و بنابراین $C=0$ به‌دست می‌آید، پس $I=\frac{\sin 4x}{x}$ که حد آن وقتی $x\to 0$ برابر با **۴** می‌شود.

مثال ۲۰: حاصل $I=\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi^3}{4}-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» از قاعده‌ی جزء به جزء (روش جدول) استفاده می‌کنیم. با فرض $u=x^2$ و $dv=(\sin^2 x)dx$، داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$\sin^2 x$	x^2	$\oplus$
$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$	$2x$	$\ominus$
$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x$	2	$\oplus$
$\frac{x^3}{12}+\frac{1}{16}\sin 2x$	0	$\ominus$

$$I=[(\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{4}\sin 2x)-(\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\cos 2x)+(\frac{x^3}{6}+\frac{1}{8}\sin 2x)]_0^{\pi}$$

$$I=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{6}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۱ (سخت): اگر برای $n \geq 2$ تابع f به‌صورت $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}$ تعریف شود و $g(x)=(\underbrace{fof\cdots of}_{n\ \text{بار}})(x)$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\int_0^1 x^{n-2}g(x)dx$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\dfrac{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}-n}{n(n-1)}$ ۲) $\dfrac{2n(1+n)^{1-\frac{1}{n}}-2}{(n-1)(n+2)}$ ۳) $\dfrac{(1+n)^{1-\frac{1}{n}}-1}{n(n-1)}$ ۴) $\dfrac{2n^2(1+n)^{1+\frac{1}{n}}-2n^2}{(n-1)(n+2)}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$fof(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}}{\sqrt[n]{1+\left(\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}\right)^n}}=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}}{\sqrt[n]{1+\frac{x^n}{1+x^n}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}}{\frac{\sqrt[n]{1+2x^n}}{\sqrt[n]{1+x^n}}}=\frac{x}{\sqrt[n]{1+2x^n}}$$

به همین ترتیب $fofof(x)=\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+3x^n}}$ به‌دست می‌آید، در نهایت می‌توان گفت؛ $(\underbrace{fof\cdots of}_{n\ \text{بار}})(x)=\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+nx^n}}$، پس داریم:

$$I=\int_0^1 x^{n-2}g(x)dx=\int_0^1 x^{n-2}\left(\frac{x}{\sqrt[n]{1+nx^n}}\right)dx=\int_0^1\frac{x^{n-1}dx}{(1+nx^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{n^2x^{n-1}dx}{(1+nx^n)^{\frac{1}{n}}}$$

با فرض $1+nx^n=u$، آن‌گاه $n^2x^{n-1}dx=du$ و لذا داریم:

$$I_1=\frac{1}{n^2}\int\frac{du}{u^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n^2}\int u^{-\frac{1}{n}}du=\frac{1}{n^2}\left(\frac{u^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1}\right)+C=\frac{u^{1-\frac{1}{n}}}{n(n-1)}+C\Rightarrow I=\left[\frac{(1+nx^n)^{1-\frac{1}{n}}}{n(n-1)}\right]_0^1=\frac{(1+n)^{1-\frac{1}{n}}-1}{n(n-1)}$$

مثال ۲۲ (سخت): حاصل $\lim\limits_{t\to 0}\left[\int_0^1(bx+a(1-x))^t dx\right]^{\frac{1}{t}}$، کدام است؟ $(0<a<b)$ (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه Berkeley)

۱) $(b^{-b}a^{a})^{\frac{1}{b-a}}e$ ۲) $(b^{b}a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}e^{-1}$ ۳) $(b^{b}a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}e$ ۴) $(b^{-b}a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}e^{-1}$

پاسخ: گزینه «۲» سؤال بسیار جالب و تقریباً جدید است. این سؤال را به دو روش یکی صحیح و دیگری غلط حل می‌کنیم، که جالب این است کـه در هـر دو حالت به جواب صحیح می‌رسیم!

روش صحیح: وقتی $t\to 0$، آن‌گاه داریم: $\text{حاصل حد}=\left[\int_0^1(bx+a(1-x))^0dx\right]^{\frac{1}{0}}=\left[\int_0^1 1dx\right]^{\infty}=[(x)_0^1]^{\infty}=1^{\infty}$

با حالت ابهام 1^{∞} روبه‌رو هستیم و می‌دانیم برای حدهایی با این ابهام، حاصل حد به‌صورت $e^{\lim\limits_{t\to a}(\text{پایه}-1)\times\text{توان}}$ نوشته می‌شود. مـا ابتـدا حـد تـوان e را حساب می‌کنیم و در آخر آن را بر توان e قرار می‌دهیم! برای این منظور ابتدا حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 0}(\text{پایه}-1)\times\text{توان}=\lim_{t\to 0}\left[\int_0^1[bx+a(1-x)]^t dx-1\right]\times\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b-a}\left[\frac{[bx+a(1-x)]^{t+1}}{t+1}\right]_0^1-1\right\}\times\frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{[b\times 1+a(1-1)]^{t+1}-[b\times 0+a(1-0)]^{t+1}}{(b-a)(t+1)}-1\right]\times\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{b^{t+1}-a^{t+1}}{(b-a)(t+1)}-1\right]\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{b^{t+1}-a^{t+1}-(b-a)(t+1)}{(b-a)(t^2+t)}$$

اگر در عبارت فوق، $t=0$ قرار دهیم، با حالت ابهام $\frac{0}{0}$ روبه‌رو می‌شویم، بنابراین از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{t\to 0}\frac{b^{t+1}Lnb-a^{t+1}Lna-(b-a)}{(b-a)(2t+1)}=\frac{bLnb-aLna-(b-a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}(Lnb^b-Lna^a)-1=\frac{1}{b-a}Ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)-1$$

$$=\frac{1}{b-a}Ln(b^ba^{-a})-1=Ln(b^ba^{-a})^{\frac{1}{b-a}}-1$$

خُب، حالا عبارت فوق باید در توان e قرار گیرد، پس داریم: $\text{حاصل مقدار خواسته شده}=e^{Ln(b^ba^{-a})^{\frac{1}{b-a}}}\times e^{-1}=(b^ba^{-a})^{\frac{1}{b-a}}.e^{-1}$

روش غلطی که به جواب صحیح می‌رسد!

اگر حاصل حد را y بنامیم و از طرفین Ln بگیریم، داریم: $Lny=\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{t})Ln[\int_0^1(bx+a(1-x))^t dx]$

در اینجا می‌خواهم از یک روش کاملاً غلط استفاده کنم، یعنی Ln را بدون توجه به علامت $\int$، به داخل انتگرال ببرم!! لذا داریم:

$$Lny=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^1 Ln[bx+a(1-x)]^t dx \Rightarrow Lny=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^1 tLn[bx+a(1-x)]dx \Rightarrow Lny=\int_0^1 Ln[bx+a(1-x)]dx$$

خُب حالا با فرض $bx+a(1-x)=u$، حاصل انتگرال سمت راست را حساب می‌کنیم: $(b-a)x+a=u \Rightarrow (b-a)dx=du \Rightarrow dx=\frac{1}{b-a}du$

$x=0 \Rightarrow u=a \;,\; x=1 \Rightarrow u=b$

بنابراین داریم:

$$Lny=\frac{1}{b-a}\int_a^b Lnudu=\frac{1}{b-a}[uLnu-u]_a^b=\frac{1}{b-a}[bLnb-b-aLna+a] \Rightarrow Lny=\frac{1}{b-a}[Lnb^b+Lna^{-a}-(b-a)]$$

$$\Rightarrow Lny=\frac{1}{b-a}[Ln(b^b a^{-a})-(b-a)] \Rightarrow Lny=Ln(b^b a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}-1 \Rightarrow y=e^{Ln(b^b a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}}\times e^{-1}=(b^b a^{-a})^{\frac{1}{b-a}}.e^{-1}$$

به نظر شما چرا با وجود غلط علمی انجام شده به جواب صحیح رسیدیم!؟

مثال ۲۳: هرگاه x_1 و x_2، $(x_2>x_1)$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(\lfloor 2\sin^2 t\rfloor+\lfloor\frac{1-tg^2t}{1+tg^2t}\rfloor)x=1$ باشند، $(t\to 0)$ و حاصل انتگرال $\int_{x_1}^{x_2}(|x-a|-|x-b|)dx$، برابر با صفر باشد، آن‌گاه $a+b$ برابر با کدام گزینه است؟ ($\lfloor\;\rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) -1 ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال باید از روابط مثلثاتی کمک بگیریم: از قبل می‌دونیم؛ $2\sin^2 t=1-\cos 2t$ و $\cos 2t=\frac{1-tg^2t}{1+tg^2t}$، بنابراین

عبارت داده شده در معادله را ساده می‌کنیم: $\lfloor 2\sin^2 t\rfloor+\lfloor\frac{1-tg^2t}{1+tg^2t}\rfloor=\lfloor 1-\cos 2t\rfloor+\lfloor\cos 2t\rfloor=1+\lfloor-\cos 2t\rfloor+\lfloor\cos 2t\rfloor=1+(-1)=0$

چون t عددی صحیح نیست، لذا نتیجه می‌گیریم $\lfloor-\cos 2t\rfloor+\lfloor\cos 2t\rfloor=-1$.

بنابراین عبارت ضریب x در معادله‌ی داده شده صفر و لذا معادله به‌صورت $x^2=1$ می‌باشد و ریشه‌های آن $x_1=-1$ و $x_2=1$ می‌باشد، از طرفی طبق فرض دوم داریم: $\int_{-1}^{1}(|x-a|-|x-b|)dx=0$

مقدار انتگرال در یک بازه‌ی متقارن برابر با صفر شده، با توجه به ضابطه‌ی تابع تحت انتگرال باید تابع زیر انتگرال، تابعی فرد باشد و این در صورتی اتفاق می‌افتد که $a=-b$ و بنابراین $a+b=0$ است.

توضیح: البته اگر داوطلب به مفاهیم حد «توابع جزء صحیح» مسلط باشد، از همان ابتدا بدون استفاده از روابط مثلثاتی می‌تواند تعیین کند ضریب x در معادله صفر است. وقتی $t\to 0$، آن‌گاه $\sin^2 t\to 0^+$ و بنابراین $\lfloor\sin^2 t\rfloor=0$ از طرفی $\frac{1-tg^2t}{1+tg^2t}$، نیز برای $t\to 0$، برابر با صفر می‌شود (چون صورت کسر همواره از مخرج کسر کوچکتر است).

مثال ۲۴: حاصل $I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(\sin x)^{\cos x}}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» در این سؤال هم $a=0$ و $b=\pi$ می‌باشد، بنابراین می‌توانیم تساوی زیر را بنویسیم:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+[\sin(\pi-x)]^{\cos(\pi-x)}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(\sin x)^{-\cos x}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\frac{1}{\sin x^{\cos x}}}\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x}+1}dx \qquad (*)$$

حالا اگر طرفین تساوی $(*)$ را با طرفین تساوی داده شده در صورت سؤال جمع کنیم، داریم:

$$2I=\int_0^{\pi}\frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\sin x)^{\cos x}+1}dx+\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(\sin x)^{\cos x}}=\int_0^{\pi}(\frac{(\sin x)^{\cos x}+1}{(\sin x)^{\cos x}+1})dx=\int_0^{\pi}dx=[x]_0^{\pi}=\pi \Rightarrow \mathbf{I=\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۲۵(سخت): حاصل $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sqrt{tgx}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» وجود $\sqrt{tgx}$ در مخرج کسر و عدم وجود هیچ نسبتِ مثلثاتی دیگری در انتگرال، کاملاً سؤال را سخت به نظر می‌رساند! اما خوبی کار این است که انتگرال معین است و همیشه یادتان باشد در انتگرال‌های معین بعد از خدا، امیدتان به نکته‌ها باشد! خصوصاً این که وقتی نسبتی مثلثاتی داریم و جمع حد پایین و بالای انتگرال برابر با $\frac{\pi}{2}$است. ابتدا با توجه به نکته‌ی گفته شده، چون در این تست $a=\frac{\pi}{6}$ و $b=\frac{\pi}{3}$، لذا $a+b=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$. پس داریم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sqrt{tg(\frac{\pi}{2}-x)}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sqrt{\cot gx}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{tgx}}}dx \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{tgx}}{1+\sqrt{tgx}}dx$$

با توجه به انتگرال صورت سؤال و انتگرال به‌دست آمده، دو انتگرال داریم که سمت چپ آن‌ها، I و سمت راست آن‌ها از نظر ظاهری با هم فرق می‌کند، اگر طرفین این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، داریم:

$$I+I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sqrt{tgx}}dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{tgx}}{1+\sqrt{tgx}}dx\Rightarrow 2I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1+\sqrt{tgx}}{1+\sqrt{tgx}})dx\Rightarrow 2I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1)dx\Rightarrow 2I=[x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \mathbf{I=\frac{\pi}{12}}$$

مثال ۲۶: حاصل $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{1396}x}{\sin^{1396}x+\cos^{1396}x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1396}{1395}(\frac{\pi}{2})$ ۴) $\frac{1396}{1394}(\frac{\pi}{4})$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته‌ی گفته شده واضح است؛ جواب گزینه (۱) است (در این سؤال $n=1396$ است که البته تأثیری بر جواب ندارد!)

مثال ۲۷: حاصل $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» یک مثال جالب و البته با راه‌حلی تکنیکی و جالب‌تر! با استفاده از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ داریم:

$$x=0\Rightarrow\theta=\text{Arc}\sin(0)=0\ ,\ x=1\Rightarrow\theta=\text{Arc}\sin(1)=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

حالا با توجه به نکته‌ی گفته شده، به راحتی معلوم است حاصل انتگرال، نصف حد بالای انتگرال، یعنی برابر با $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$ می‌شود.

مثال ۲۸: حاصل کدام انتگرال زیر با بقیه فرق می‌کند؟

۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}dx$ ۲) $\int_{0}^{1}\text{Ln}(\frac{1+tghx}{1-tghx})dx$ ۳) $\int_{0}^{1}\text{Ln}(\frac{1}{x}-1)dx$ ۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\text{Ln}(tgx)dx$

پاسخ: گزینه «۲» حاصل هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ اگر به جای $\sin x$، $\cos x$ قرار دهیم و به جای $\cos x$، $\sin x$ قرار دهیم، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند، پس داریم:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\cos x\sin x}dx=-I\Rightarrow I=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$$

بررسی گزینه (۲): ابتدا با توجه به فرمول‌های مربوط به توابع هیپربولیک تابع را ساده می‌کنیم.

$$\frac{1+tghx}{1-tghx}=\frac{1+\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1-\frac{\sinh x}{\cosh x}}=\frac{\sin hx+\cosh x}{-\sinh x+\cosh x}=\frac{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}{-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})}=\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$$

بنابراین حاصل انتگرال به‌صورت مقابل است:

$$I=\int_{0}^{1}\text{Ln}(e^{2x})dx=\int_{0}^{1}2xdx=[x^2]_{0}^{1}=1$$

بررسی گزینه (۳): با تبدیل x به $1-x$ داریم:

$$I=\int_0^1 Ln(\frac{1}{x}-1)dx=\int_0^1 Ln(\frac{1}{1-x}-1)dx=\int_0^1 Ln(\frac{x}{1-x})dx=\int_0^1 Ln(\frac{1-x}{x})^{-1}dx$$

$$\Rightarrow I=-\int_0^1 Ln(\frac{1-x}{x})dx=-\underbrace{\int_0^1 Ln(\frac{1}{x}-1)dx}_{I}\Rightarrow I=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$$

در همین جا معلوم می‌شود؛ پاسخ تست، گزینه (۲) است، اما برای تمرین بیشتر، انتگرال گزینه (۴) را نیز حساب می‌کنیم:

بررسی گزینه (۴): در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ با تبدیل $\sin x$ و $\cos x$ به یکدیگر مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند؛ در روند محاسبه از تساوی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{\sin x}{\cos x})dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{\cos x}{\sin x})dx$ استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(tgx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{\sin x}{\cos x})dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{\cos x}{\sin x})dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\frac{1}{tgx})dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(tgx)dx=-I\Rightarrow I=-I\Rightarrow I=0$$

مثال ۲۹: اگر $I_1=\int_0^1 x\,dx$, $I_2=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ آن‌گاه کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $I_1>I_2$ ۲) $I_1<I_2$ ۳) $I_1=I_2$ ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» در بازه‌ی $[0,1]$ مقدار $\sqrt{1+x^2}$، همواره از x بزرگتر است و با توجه به نکته‌ی گفته شده، حاصل انتگرال $\sqrt{1+x^2}$ نیز از حاصل انتگرال x در این فاصله بزرگتر است.

مثال ۳۰: حاصل $\lim_{p\to\infty}(\int_0^1\frac{x^p}{1+x}dx)$، برابر کدام گزینه است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» واضح است، حاصل انتگرال مثبت است و از طرفی عبارت تحت انتگرال کوچکتر یا مساوی x^p است، پس داریم:

$$0\le\frac{x^p}{1+x}\le x^p\Rightarrow\int_0^1\frac{x^p}{1+x}dx\le\int_0^1 x^p dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}\xrightarrow{p\to\infty}\int_0^1\frac{x^p}{1+x}dx\le 0$$

بنابراین طبق قضیه‌ی ساندویچ، حاصل حد برابر با صفر است.

مثال ۳۱: اگر $A<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx<B$، آن‌گاه مقدار $\frac{B}{A}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا باید ببینیم که، تابع تحت انتگرال در بازه‌ی داده شده، اکیداً صعودی است، یا خیر؟

$$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\sin x}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}}\xrightarrow{0<x<\frac{\pi}{2}}f'(x)>0$$

$$m=\min f(x)=f(0)=1\quad,\quad M=\max f(x)=f(\frac{\pi}{2})=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

بنابراین داریم:

$$1\times(\frac{\pi}{2}-0)<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx<\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\pi}{2}-0)\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}\,,\,B=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{B}{A}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

مثال ۳۲: حاصل $I=\int_0^\pi\frac{xtgx}{\sec x+tgx}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ ۲) $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi(\pi+1)}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که انتگرال را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$\int_0^\pi\frac{xtgx}{\sec x+tgx}dx=\int_0^\pi\frac{x(\frac{\sin x}{\cos x})}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$$

حالا با استفاده از رابطه $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$، از دست x خلاص می‌شویم:

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\frac{1}{1+\sin x})dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\frac{1-\sin x}{\cos^2 x})\,dx=\frac{\pi}{2}(x-tgx+\frac{1}{\cos x})\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{2}[\lim_{x\to\pi}(x-tgx+\frac{1}{\cos x})-1]=\frac{\pi}{2}(\pi-2)$$

مثال ۳۳: حاصل $I=\int_0^{\pi} x\mathrm{Ln}(\sin x)dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ln}2$ ۲) $-\frac{\pi^2}{2}\mathrm{Ln}2$ ۳) $\mathrm{Ln}2\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}\mathrm{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با استفاده از نکته گفته شده از دست x، خلاص می‌شویم: بنابراین داریم:

$$I=\int_0^{\pi} x\mathrm{Ln}(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{Ln}(\sin x)dx$$

اما می‌دانیم $\int_0^{\pi}\mathrm{Ln}(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}(\sin x)dx$، پس داریم:

$$I=2\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Ln}(\sin x)dx$$

قبلاً حاصل انتگرال فوق را برابر با $-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ln}2$ به‌دست آوردیم، پس $I=\pi(-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ln}2)=-\frac{\pi^2}{2}\mathbf{Ln2}$.

مثال ۳۴: عدد حقیقی c در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال $I=\int_1^5\frac{x^2-1}{x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۴» یک سؤال بسیار ساده! که با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین به راحتی جواب تعیین می‌شود:

$$f(c)=\frac{\int_1^5(1-\frac{1}{x^2})dx}{5-1}=\frac{[x+\frac{1}{x}]_1^5}{4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}\Rightarrow f(c)=\frac{4}{5}\Rightarrow 1-\frac{1}{c^2}=\frac{4}{5}\Rightarrow \mathbf{c}=\sqrt{5}$$

مثال ۳۵: مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ در فاصله $[0,2]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{2e^2}{e^2+1}$ ۲) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{e^2}{e^2+1}$ ۳) $\mathrm{Ln}(\frac{e^2+1}{e^2})$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{2e^2}{e^2+1}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$f(c)=\frac{1}{2-0}\int_0^2\frac{dx}{e^x+1}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج سمت راست را در } e^{-x} \text{ ضرب می‌کنیم}}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}\Rightarrow 1+e^{-x}=u\Rightarrow -e^{-x}dx=du\Rightarrow\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=\int\frac{-du}{u}$$

$$=-\mathrm{Ln}|u|=\mathrm{Ln}|\frac{1}{u}|=\mathrm{Ln}\frac{1}{e^{-x}+1}\Rightarrow f(c)=\frac{1}{2}[\mathrm{Ln}(\frac{1}{e^{-x}+1})]_0^2\Rightarrow f(c)=\frac{1}{2}[\mathrm{Ln}(\frac{1}{e^{-2}+1})-\mathrm{Ln}(\frac{1}{e^0+1})]=\frac{1}{2}[\mathrm{Ln}(\frac{e^2}{e^2+1})+\mathrm{Ln}2]=\frac{1}{2}[\mathrm{Ln}(\frac{2e^2}{e^2+1})]$$

مثال ۳۶: حاصل $\int_0^1\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{e}{2}-1$ ۲) $2e-1$ ۳) $\frac{e}{2}+1$ ۴) $2e+1$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. برای حل این مسأله از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=xe^x & \Rightarrow du=e^x(x+1)dx\\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2} & \Rightarrow v=\frac{-1}{x+1}\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\frac{-xe^x}{x+1}\Big|_0^1+\int_0^1 e^xdx=\frac{-xe^x}{x+1}\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$$

مثال ۳۷: حاصل $\int_1^2\frac{dx}{2x^3+x}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید عبارت زیر انتگرال در بازه موردنظر مثبت است و بنابراین امکان ندارد جواب منفی شود، لذا گزینه‌های (۲) و (۴) از همان اول از بین گزینه‌ها خارج می‌شوند. ابتدا اقدام به تجزیه کردن کسر به‌صورت مقابل می‌نمائیم:

$$\frac{1}{x(2x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{2x^2+1}\Rightarrow\frac{1}{x(2x^2+1)}=\frac{2Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow(2A+B)x^2+Cx+A=1\Rightarrow\begin{cases}2A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow A=1,B=-2,C=0$$

حالا به حل انتگرال نامعین مقابل می‌پردازیم:

$$I=\int\frac{dx}{x(2x^2+1)}=\underbrace{\int\frac{dx}{x}}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{-2x}{2x^2+1}dx}_{I_2}\quad,\quad I_1=\int\frac{dx}{x}=Ln|x|+c$$

$$\left.\begin{array}{l}I_2=\int\frac{-2xdx}{2x^2+1}\\ 2x^2+1=u\Rightarrow 4xdx=du\Rightarrow xdx=\frac{du}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow I_2=\frac{-2}{4}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}Ln|u|+c=\frac{-1}{2}Ln|2x^2+1|+c$$

$$\Rightarrow\int_1^2\frac{dx}{x(2x^2+1)}=(Lnx-\frac{1}{2}Ln(2x^2+1))]_1^2=(Ln2-\frac{1}{2}Ln9)-(Ln1-\frac{1}{2}Ln3)=Ln2-Ln3+\frac{1}{2}Ln3$$

$$=Ln2-\frac{1}{2}Ln3=Ln2-Ln\sqrt{3}=Ln\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}Ln\frac{4}{3}$$

مثال ۳۸: اگر $f''(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)=f(b)=0$، حاصل $\int_a^b xf''(x)dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $af'(a)-bf'(b)$ ۲) $af'(b)-bf'(a)$ ۳) $bf'(b)-af'(a)$ ۴) $bf'(a)-af'(b)$

پاسخ: گزینه «۳» برای حل این مسئله باید از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده کنیم و داریم:

$(\int udv=uv-\int vdu)$

مشتق	انتگرال
$\oplus x$	$f''(x)$
$\ominus 1$	$f'(x)$
$\oplus 0$	$f(x)$

$$\Rightarrow\int_a^b xf''(x)dx=[xf'(x)-f(x)]_a^b=bf'(b)-af'(a)$$

مثال ۳۹: حاصل $\int_1^e xLnxdx$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ۳) $\frac{1}{4}(e^2-1)$ ۴) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

پاسخ: گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم: $(\int udv=uv-\int vdu)$

$$\left\{\begin{array}{l}u=Lnx\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\int_1^e xLndx=\frac{x^2}{2}Lnx\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-[\frac{x^2}{4}]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

مثال ۴۰: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم:

$$1+\sin x=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=(-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2})]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

مثال ۴۱: هرگاه $\int_1^2 f(x)dx=3$، آن‌گاه مقدار $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیر $u=\frac{1}{x}$، $du=\frac{-1}{x^2}dx$ داریم:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx=\int_2^1-f(u)du=\int_1^2 f(u)du=3$$

مثال ۴۲: اگر $I=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۲+x-x^{۲}}}$، آن‌گاه یک کران برای I کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۳}<I<\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}<I<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}<I<\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}<I<\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا لازم است مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲+x-x^{۲}}}$ را در فاصله $[۰,۱]$ به‌دست آوریم.

$$f'(x)=-\frac{۱-۲x}{۲\sqrt{(۲+x-x^{۲})^{۳}}}=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

نقطه بحرانی $\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۳}\ ,\ f(۰)=f(۱)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

بنابراین در فاصله $[۰,۱]$ داریم:

$$\frac{۲}{۳}\le f(x)\le\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\int_{۰}^{۱}\frac{۲}{۳}dx\le\int_{۰}^{۱}f(x)dx\le\int_{۰}^{۱}\frac{\sqrt{۲}}{۲}dx\Rightarrow\frac{۲}{۳}<I<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۴۳: اگر f تابعی پیوسته باشد، حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos x)dx$ برابر کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\sin x)dx$ ۲) $-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos x)dx$ ۳) $-\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos x)dx$ ۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\sin x)dx$

پاسخ : گزینه «۴» طبق فرمول گفته شده داریم:

$$\int_{۰}^{a}f(x)dx=\int_{۰}^{a}f(a-x)dx$$

پس داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos x)\,dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\cos(\frac{\pi}{۲}-x))\,dx\ \overset{\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x}{=\!=\!=\!=\!=}\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(\sin x)\,dx$$

مثال ۴۴: هرگاه $f(x)=\int_{۱}^{x}\frac{dt}{۱+t^{۲}}$، آن‌گاه $f(۴)-f(۲)<A$، عدد A کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا با توجه به انتگرال داده شده $f(۴)-f(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۴)-f(۲)=\int_{۱}^{۴}\frac{dt}{۱+t^{۲}}-\int_{۱}^{۲}\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\int_{۲}^{۱}\frac{dt}{۱+t^{۲}}+\int_{۱}^{۴}\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\int_{۲}^{۴}\frac{dt}{۱+t^{۲}}$$

چون مقدار min و max تابع $\frac{۱}{۱+t^{۲}}$ در بازهٔ $[۲,۴]$ به ترتیب به ازای $t=۴$ و $t=۲$ حاصل می‌شود، داریم:

$$\frac{۱}{۱+۴^{۲}}(۴-۲)\le\int_{۲}^{۴}\frac{dt}{۱+t^{۲}}\le\frac{۱}{۱+۲^{۲}}(۴-۲)\Rightarrow\frac{۲}{۱۷}\le\int_{۲}^{۴}\frac{dt}{۱+t^{۲}}\le\frac{۲}{۵}$$

تذکر: احتمالاً منظور طراح سؤال، کوچکترین مقدار A می‌باشد که در این صورت گزینه (۳) صحیح خواهد بود.

مثال ۴۵: حاصل $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\mathrm{Ln}(\sin x)\cot gx\,dx$ برابر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}۲)^{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۲$ ۳) $\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۲$

پاسخ : گزینه «۱» برای حل این انتگرال باید از تغییر متغیر $u=\mathrm{Ln}(\sin x)$ استفاده شود و داریم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\mathrm{Ln}(\sin x)\times\frac{\cos x}{\sin x}dx\ ,\ \mathrm{Ln}(\sin x)=u\Rightarrow\begin{cases}\frac{\cos x}{\sin x}dx=du\Rightarrow du=\cot gx\,dx\\ x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow u=\mathrm{Ln}۱=۰\ ,\ x=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow u=\mathrm{Ln}\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\mathrm{Ln}(\sin x)\times\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int_{\mathrm{Ln}\frac{۱}{۲}}^{۰}u.du=[\frac{u^{۲}}{۲}]_{\mathrm{Ln}\frac{۱}{۲}}^{۰}=-\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}\frac{۱}{۲})^{۲}=-\frac{۱}{۲}(-\mathrm{Ln}۲)^{۲}=-\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}۲)^{۲}$$

مثال ۴۶: مقدار $\int_0^1 (Lnx)^n dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $n!$　　۲) $(-1)^n(n-1)!$　　۳) $(n-1)!$　　۴) $(-1)^n n!$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

مقدار انتگرال موردنظر را I_n فرض می‌کنیم. برای محاسبه I_n از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u=(Lnx)^n \Rightarrow du = n(Lnx)^{n-1}\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases} \Rightarrow I_n = x(Lnx)^n\Big|_0^1 - \int n(Lnx)^{n-1}dx = -nI_{n-1}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود $I_n = (-1)^n n! I_0$ و با توجه به اینکه $I_0 = 1$، بنابراین داریم: $I_n = (-1)^n n! \times 1 = (-1)^n n!$

مثال ۴۷: مقدار انتگرال $\int_{-2}^{2} x(2^{x^2})dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) -1　　۲) 0　　۳) 4　　۴) $1+Ln2$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $y=2^{x^2}$ تابعی زوج و تابع $y=x$ تابعی فرد است و حاصل‌ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است پس چون تابع زیر انتگرال فرد است، لذا با توجه به متقارن بودن بازه انتگرال‌گیری مقدار انتگرال صفر است.

مثال ۴۸: مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{x+3x^2}{\sqrt{x^2+2x^3+5}}dx$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $2-\sqrt{2}$　　۲) $2-\sqrt{2}-1$　　۳) $3-\sqrt{2}$　　۴) $5-2\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u = x^2+2x^3+5$ به حل انتگرال می‌پردازیم:

$$\begin{cases} u = x^2+2x^3+5 \Rightarrow du = (2x+6x^2)dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = (x+3x^2)dx \\ x=1 \Rightarrow u=8\ ,\ x=2 \Rightarrow u=25 \end{cases} \Rightarrow I = \int_8^{25}\frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_8^{25}\frac{du}{\sqrt{u}} = [\sqrt{u}]_8^{25} = 5-2\sqrt{2}$$

مثال ۴۹: $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{\pi}{3}$　　۳) $\frac{2\pi}{3}$　　۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [Arc\sin(x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = 0+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

مثال ۵۰: اگر $A = \int_1^2 \frac{2^x}{x}dx$، مقدار $\int_1^2 \frac{2^x}{x^2}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $2+ALn2$　　۲) $1+LnA$　　۳) $ALn2$　　۴) $A+Ln2$

پاسخ : گزینه «۳» از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u = 2^x \Rightarrow du = 2^x Ln2dx \quad , \quad dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x}$$

بنابراین داریم:

$$\int_1^2 \frac{2^x}{x^2}dx = -\frac{2^x}{x}\Big|_1^2 + Ln2\int_1^2\frac{2^x}{x}dx = (-2+2)+Ln2\times A = ALn2$$

مثال ۵۱: حاصل $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{5}(\sqrt{2}+1)$　　۲) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$　　۳) $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$　　۴) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$

پاسخ : گزینه «۲» برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u=1+x$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$u = 1+x \Rightarrow \begin{cases} du = dx\ ,\ x = u-1 \\ x=0 \Rightarrow u=1\ ,\ x=1 \Rightarrow u=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx = \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}du = \int_1^2 (u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du = [\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_1^2 = (\frac{2}{5}(2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}})-(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}) = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$$

مثال ۵۲: حاصل انتگرال معین $\int_0^1 (3x+1)d(x^2-1)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳»

$$\int_0^1 (3x+1)d(x^2-1) = \int_0^1 (3x+1)2xdx = \int_0^1 (6x^2+2x)dx = (2x^3+x^2)\Big|_0^1 = 3$$

مثال ۵۳: حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^6 x dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۲) $3+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{11}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{9}{15}+\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به فرمول‌های ارائه شده برای انتگرال‌گیری از توابع tg و $\cot g$ با توان زوج داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^6 x dx = \left(\frac{1}{5}tg^5 x - \frac{1}{3}tg^3 x + tgx - x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$$

مثال ۵۴: حاصل $\int_0^2 \frac{x^2}{x^6+64}dx$ برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{96}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{32}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با توجه به اینکه مخرج نسبت به x^3 از درجهٔ ۲ می‌باشد (**توجه:** نسبت به x از درجهٔ ۶ می‌باشد)، لذا با استفاده از تغییر متغیر $u=x^3$ داریم:

$$u=x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2dx$$

$$\int \frac{x^2}{64+x^6}dx = \int \frac{x^2}{64+(x^3)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{3}du}{64+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{8^2+u^2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}Arctg\frac{u}{8}+c = \frac{1}{24}Arctg(\frac{x^3}{8})+c$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x^2}{64+x^6}dx = \frac{1}{24}Arctg(\frac{x^3}{8})\Big]_0^2 = \frac{1}{24}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{96}$$

مثال ۵۵: مقدار $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

از تغییر متغیر $x=u^2$ ، $dx = 2udu$ استفاده می‌کنیم و سپس از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u\sin u\,du = (-2u\cos u + 2\sin u)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

مثال ۵۶: مقدار انتگرال معین $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+x}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $Ln(\frac{5}{3})$ ۲) $Ln(\frac{4}{5})$ ۳) $Ln(\frac{3}{5})$ ۴) $Ln(\frac{5}{4})$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2+x} = \int_2^5 \frac{dx}{x(x+1)} = Ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_2^5 = Ln\frac{5}{6} - Ln\frac{2}{3} = Ln\frac{15}{12} = Ln\frac{5}{4}$$

مثال ۵۷: حاصل $\int_{-2}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه «۴» معمولاً هرگاه در تابعی که می‌خواهیم انتگرال بگیریم عبارت $\sqrt{x^2-1}$ باشد و برای انتگرال‌گیری به تغییر متغیر نیاز باشد از تغییر متغیر $x=\sec\theta$ یا $x=\operatorname{cosec}\theta$ استفاده می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} x=\sec\theta \Rightarrow dx=\sec\theta.\operatorname{tg}\theta d\theta \\ x=-2 \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}\ ,\ x=-1\Rightarrow\theta=\pi \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}(\sec\theta.\operatorname{tg}\theta.d\theta)=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}.\operatorname{tg}\theta.d\theta=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}|\operatorname{tg}\theta|.\operatorname{tg}\theta.d\theta$$

چون θ در ربع دوم قرار دارد، لذا $\operatorname{tg}\theta<0$ خواهد بود:

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-\operatorname{tg}^2\theta d\theta=(\theta-\operatorname{tg}\theta)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=(\pi-0)-(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

توجه : $\int\operatorname{tg}^2\theta d\theta=\int(1+\operatorname{tg}^2\theta-1)d\theta=\int(1+\operatorname{tg}^2\theta)d\theta-\int d\theta=\operatorname{tg}\theta-\theta+c$

مثال ۵۸: مقدار متوسط تابع $f(x)=(\sin^2x)(\cos x)$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{4}{9\pi}$ ۲) $\frac{4\sqrt{2}}{9\pi}$ ۳) $\frac{4-\sqrt{2}}{9\pi}$ ۴) $\frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$\text{مقدار متوسط}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-(\frac{-\pi}{4})}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos xdx=\frac{4}{3\pi}.\frac{\sin^3x}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{9\pi}$$

مثال ۵۹: مقدار میانگین تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی $[0,25]$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3}{50}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{50}{3}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\text{مقدار میانگین}=\frac{1}{25-0}\int_0^{25}\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{25}.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^{25}=\frac{10}{3}$$

مثال ۶۰: حاصل $I=\int_0^2\max(1+x,1+x^2)dx$ کدام است؟ (نفت ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{29}{6}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا باید مشخص کنیم، ماکزیمم دو عبارت $1+x$ و $1+x^2$ کدام یک است. دقت کنید؛ در دو بازه $[0,1]$ و $[1,2]$ ماکزیمم فرق می‌کند.

$$\max(1+x,1+x^2)=\begin{cases}1+x & ;\ 0\le x\le 1\\ 1+x^2 & ;\ 1<x\le 2\end{cases}$$

$$I=\int_0^1(1+x)dx+\int_1^2(1+x^2)dx=[x+\frac{x^2}{2}]_0^1+[x+\frac{x^3}{3}]_1^2=1+\frac{1}{2}+2+\frac{2^3}{3}-1-\frac{1}{3}=\frac{29}{6}$$

مثال ۶۱: مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3x}{\cos x}dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\operatorname{Ln}3-\frac{1}{4}$ ۲) $\operatorname{Ln}2-\frac{3}{8}$ ۳) $\operatorname{Ln}3+\frac{1}{4}$ ۴) $\operatorname{Ln}2+\frac{3}{8}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x(1-\cos^2x)}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos x\,dx$$

$$=-\operatorname{Ln}|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin 2xdx=-\operatorname{Ln}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\operatorname{Ln}2-\frac{3}{8}$$

مثال ۶۲: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+xtgx}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $Ln\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $e^{\frac{\pi}{2}}$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

برای حل انتگرال داده شده در این مسئله، ابتدا tgx را به‌صورت $\frac{\sin x}{\cos x}$ نوشته و با مخرج مشترک گرفتن داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+xtgx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+x\frac{\sin x}{\cos x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\frac{\cos x+x\sin x}{\cos x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos xdx}{\cos x+x\sin xdx}$$

حالا اگر مخرج را u در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که صورت همان مشتق مخرج یعنی u' می‌باشد و می‌دانیم $\int\frac{u'}{u}du=Lnu+c$. پس داریم:

$$I=Ln(\cos x+x\sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=Ln(\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2})-Ln(\cos 0+0)=Ln(\frac{\pi}{2})$$

مثال ۶۳: فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(1)=1$، $f(-1)=-1$ و روی تمام $\mathbb{R}$، $|f'(x)|\le 1$، در این صورت: (MBA ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(0)=0$ ۲) $f(0)=1$

۳) $f(0)=2$ ۴) با این اطلاعات نمی‌توان $f(0)$ را تعیین کرد.

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** از رابطه $|f'(x)|\le 1$ نتیجه می‌شود:

$$-1\le f'(x)\le 1 \Rightarrow \int_0^1 -1dx\le\int_0^1 f'(x)dx\le\int_0^1 1dx \Rightarrow -1\le f(1)-f(0)\le 1$$

$$-1\le f'(x)\le 1 \Rightarrow \int_{-1}^0 -1dx\le\int_{-1}^0 f'(x)dx\le\int_{-1}^0 1dx \Rightarrow -1\le f(0)-f(-1)\le 1$$

از دو رابطه فوق نتیجه می‌شود $0\le f(0)\le 2$ و $-2\le f(0)\le 0$، بنابراین $f(0)=0$.

مثال ۶۴: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\sin x}\cos xdx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}(\sqrt{27}+\sqrt{8})$ ۳) $\frac{3}{2}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$ ۴) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** برای محاسبه انتگرال داده شده از تغییر متغیر $u=2+\sin x$ استفاده می‌کنیم. پس داریم:

$$2+\sin x=u \Rightarrow \begin{cases}\cos xdx=du\\ x=0\Rightarrow u=2\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=3\end{cases} \Rightarrow I=\int_2^3\sqrt{u}.du=[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_2^3=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

مثال ۶۵: انتگرال $\int_0^1 Ln(1+x)dx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) -1 ۲) $2Ln2$ ۳) $2Ln2-1$ ۴) $2Ln2+1$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

قبل از حل لازم است یک فرمول مفید که بهتر است به خاطر سپرده شود (اثبات از طریق انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء امکان‌پذیر است) را یادآوری کنیم:

$$\boxed{\int Lnu\,du=uLnu-u+c}$$

در انتگرال داده شده با تغییر متغیر $u=1+x$ داریم:

$$u=1+x \Rightarrow du=dx\ \ ,\ \ x=0\Rightarrow u=1\ ,\ x=1\Rightarrow u=2$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 Ln(1+x)dx=\int_1^2 Lnu\,du=(uLnu-u)]_1^2=(2Ln2-2)-(Ln1-1)=2Ln2-1$$

مثال ۶۶: اگر $A=\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$، آن‌گاه A برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا انتگرال را به شکل روبرو می‌نویسیم:

$$A=\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{2^2-(2-x)^2}}$$

حالا از تغییر متغیر $u=2-x$, $dx=-du$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\int_1^{-1}\frac{(2-u)(-du)}{\sqrt{2^2-u^2}}=\int_{-1}^1\frac{2-u}{\sqrt{2^2-u^2}}du=\int_{-1}^1\frac{2du}{\sqrt{2^2-u^2}}+\int_{-1}^1\frac{-udu}{\sqrt{2^2-u^2}}$$

انتگرال دوم برابر صفر است، زیرا تابع $\frac{-u}{\sqrt{2^2-u^2}}$ فرد می‌باشد، بنابراین داریم:

$$A=\int_{-1}^1\frac{2du}{\sqrt{2^2-u^2}}=2\operatorname{Arcsin}\frac{u}{2}\Big|_{-1}^1=\frac{2\pi}{3}$$

مثال ۶۷: حاصل $\int_2^3\frac{dx}{x^2(1-x^2)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}3)$ ۲) $\frac{1}{6}+\operatorname{Ln}6$ ۳) $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\operatorname{Ln}2)$ ۴) $\frac{1}{6}(1+\operatorname{Ln}6)$

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\int_2^3\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int_2^3\frac{x^2+(1-x^2)}{x^2(1-x^2)}dx=\int_2^3(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2})dx=(-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{x})\Big]_2^3=-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

مثال ۶۸: تحت چه شرایطی رابطه $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nxdx=0$ برقرار است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) اگر m و n فقط اعداد صحیح باشند.
۲) اگر m و n فقط اعداد صحیح و نامساوی باشند.
۳) برای کلیه مقادیر m و n برقرار است.
۴) به ازای هیچ مقدار از m و n تساوی برقرار نیست.

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرمول $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$ عبارت روبروی انتگرال را از حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع تبدیل می‌کنیم و سپس انتگرال را حل می‌کنیم، داریم:

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x)dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x-\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x)]_0^{2\pi}$$

واضح است که اگر m و n اعداد صحیح و نامساوی باشند، حاصل عبارت فوق برابر صفر خواهد بود.

مثال ۶۹: مقدار متوسط تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ در بازهٔ $[1,4]$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $2(e^{-1}-e^{-2})$ ۲) $2(e^2-e^1)$ ۳) $\frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-2})$ ۴) $\frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-4})$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\text{مقدار متوسط}=\frac{1}{4-1}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx=\frac{-2}{3}e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^4=\frac{2}{3}(e^{-1}-e^{-2})$$

مثال ۷۰: حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin^3 x}dx$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int\frac{\sin 2x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^3 x}dx=2\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x}\Rightarrow \sin x=u\Rightarrow\cos xdx=du$$

$$I=2\int\frac{du}{u^2}=\frac{-2}{u}=-\frac{2}{\sin x}\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin^3 x}=-\frac{2}{\sin x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-2-(-4)=2$$

مثال ۷۱: اگر $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\sin^{-1}2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$، آن‌گاه $\lim\limits_{\alpha\to\frac{1}{2}}F(\alpha)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2}{16}$

پاسخ: گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر روبرو انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$u=\operatorname{Arcsin}2x \Rightarrow du=\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$\int[\operatorname{Arcsin}(2x)]\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\underbrace{\operatorname{Arcsin}2x}_{u}\underbrace{(\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}})}_{du}=\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2})=\frac{1}{4}u^2=\frac{1}{4}(\operatorname{Arcsin}2x)^2$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}[\frac{1}{4}(\operatorname{Arcsin}2x)^2]_0^{\alpha}=\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\times(\operatorname{Arcsin}2\alpha)^2=\frac{1}{4}\times[\operatorname{Arcsin}(2\times\frac{1}{2})]^2=\frac{1}{4}\times(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{16}$$

مثال ۷۲: حاصل $\int_1^e\frac{Lnx}{x(1+Lnx)}dx$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $1-Ln2$ ۲) $e-Ln2$ ۳) $2-Ln2$ ۴) $\frac{-1}{e}+Ln2$

پاسخ: گزینه «۱» با تغییر متغیر $u=1+Lnx$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$u=1+Lnx \Rightarrow \begin{cases}\frac{dx}{x}=du\ ,\ u-1=Lnx\\ x=1\Rightarrow u=1+Ln1=1\ ,\ x=e\Rightarrow u=2\end{cases}$$

$$I=\int_1^e\frac{Lnx}{x(1+Lnx)}dx=\int_1^2\frac{u-1}{u}(du)=\int_1^2(1-\frac{1}{u})du=[u]_1^2-[Lnu]_1^2=(2-1)-(Ln2-Ln1)=1-Ln2$$

مثال ۷۳: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2x+y^2\cos^2x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2y}$ ۲) $\frac{1}{y}tg^{-1}\frac{\pi}{2y}$ ۳) $\frac{1}{y}tg^{-1}\frac{2}{\pi y}$ ۴) $\frac{2}{\pi y}$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا صورت و مخرج عبارت مقابل انتگرال را بر $\cos^2x$ تقسیم می‌کنیم و سپس از تغییر متغیر $u=tgx$ استفاده می‌کنیم:

$$u=tgx \Rightarrow du=\frac{dx}{\cos^2x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2x+y^2\cos^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{tg^2x+y^2}=\frac{1}{y}\operatorname{Arctg}(\frac{tgx}{y})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2y}$$

مثال ۷۴: اگر تابع f و مشتق‌های آن تا مرتبه سوم پیوسته و $f(1)=f'(1)$ و $f''(1)=f(0)=-5$ باشند، حاصل انتگرال $\int_0^1x^2f'''(x)dx$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۵- ۴) ۱۵-

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این سؤال باید از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده نمود که البته در اینجا این کار را با استفاده از جدول انجام داده‌ایم:

مشتق	انتگرال
$\oplus\ x^2$	$f'''(x)$
$\ominus\ 2x$	$f''(x)$
$\oplus\ 2$	$f'(x)$
$\ominus\ 0$	$f(x)$

$$\int_0^1x^2f'''(x)dx=(x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x))\Big|_0^1=f''(1)-2f'(1)+2f(1)-2f(0)=5$$

مثال ۷۵: حاصل $\int_{۴}^{۹}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}dx$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $۷+\text{Ln}۲$ ۲) $۸+\text{Ln}۲$ ۳) $۷+۲\text{Ln}۲$ ۴) $۸+۲\text{Ln}۲$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

از تغییر متغیر $x=u^۲$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $dx=۲udu$، بنابراین داریم:

$$\int_{۴}^{۹}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-۱}=\int_{۲}^{۳}\frac{۲u^۲du}{u-۱}=\int_{۲}^{۳}(۲u+۲+\frac{۲}{u-۱})du=u^۲+۲u+۲\text{Ln}(u-۱)\Big|_{۲}^{۳}=۷+۲\text{Ln}۲$$

مثال ۷۶: مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱}\frac{x^۲\sin\frac{\pi x}{۲}}{۱+x^۲}dx$ در کدام محدوده است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۳)

۱) $[۰,\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $[\frac{۳}{۲},۲]$ ۴) $[۱,\frac{۳}{۲}]$

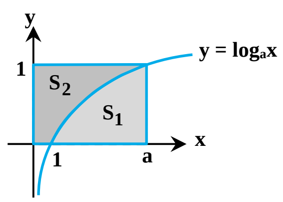
پاسخ : گزینه «۱» برای تعیین محدوده‌ی انتگرال ابتدا باید محدوده‌ی تابع تحت انتگرال را تعیین کنیم، حداکثر تابع به ازای $x=۱$ حاصل می‌شود $(\sin\frac{\pi x}{۲}=۱)$ و به ازای آن، مقدار تابع برابر با $\frac{۱}{۲}=\frac{(۱)^۲\times۱}{۱+۱^۲}$ می‌شود، پس گزینه (۱) صحیح است. دقت کنید می‌توانید مینیمم تابع را نیز در بازه $[۰,۱]$ مشخص کنید، که به ازای $x=۰$ برابر با صفر به‌دست می‌آید.

یادآوری: $m\le f(x)\le M \Rightarrow m(b-a)\le\int_{a}^{b}f(x)\le M(b-a)$.

مثال ۷۷: اگر $a>۱$ باشد، مقدار $\int_{۱}^{a}\log_a x dx+\int_{۰}^{۱}a^y dy$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) a ۲) $\frac{۱}{\text{Lna}}$ ۳) $a\text{Lna}$ ۴) $\frac{a}{a\text{Lna}}$

پاسخ : گزینه «۱»



روش اول: $I=\int_{۱}^{a}\log_a xdx+\int_{۰}^{۱}a^y dy=\frac{۱}{\text{Lna}}(x\text{Lnx}-x)\Big|_{۱}^{a}+\frac{۱}{\text{Lna}}a^y\Big|_{۰}^{۱}=a$

روش دوم: انتگرال‌های داده شده به ترتیب برابر $S_۱$ و $S_۲$ می‌باشند و چون $S_۱+S_۲=a$، پس $I=a$.

مثال ۷۸: حاصل $\int_{۱}^{۴}\frac{(y^۲+۱)dy}{\sqrt{y^۳+۳y+۵}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۴» از تغییر متغیر $u=y^۳+۳y+۵$، $du=۳(y^۲+۱)dy$ استفاده می‌کنیم: $y=۱\Rightarrow u=۹\,,\,y=۴\Rightarrow u=۸۱$

$$\int_{۱}^{۴}\frac{(y^۲+۱)dy}{\sqrt{y^۳+۳y+۵}}=\frac{۱}{۳}\int_{۹}^{۸۱}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{۲}{۳}\sqrt{u}\Big|_{۹}^{۸۱}=۴$$

مثال ۷۹: مقدار $\int_{۱}^{a}\frac{\log_a x^۲}{x}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲Lna ۲) ۱ ۳) Lna ۴) $\frac{۱}{\text{Lna}}$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم $\log_b^a=\frac{\text{Lna}}{\text{Lnb}}$ و $\text{Lnx}^a=a\text{Lnx}$، پس داریم:

$$I=\int_{۱}^{a}\frac{\log_a x^۲}{x}dx=\int_{۱}^{a}\frac{\frac{\text{Lnx}^۲}{\text{Lna}}}{x}dx=\int_{۱}^{a}\frac{۲\text{Lnx}}{x\text{Ln}\,a}dx=\frac{۲}{\text{Lna}}\int_{۱}^{a}\frac{\text{Lnx}}{x}dx$$

برای محاسبه انتگرال فوق با در نظر گرفتن $u=\text{Lnx}$ داریم: $u=\text{Lnx}\Rightarrow du=\frac{dx}{x}\,,\,x=۱\Rightarrow u=۰\,,\,x=a\Rightarrow u=\text{Lna}$

$$\Rightarrow I=\frac{۲}{\text{Lna}}\int_{۱}^{a}\frac{\text{Lnx}}{x}dx=\frac{۲}{\text{Lna}}\int_{۰}^{\text{Lna}}udu=\frac{۲}{\text{Lna}}(\frac{u^۲}{۲})\Big]_{۰}^{\text{Lna}}=\frac{۱}{\text{Lna}}\Big[(\text{Lna})^۲-۰\Big]=\text{Lna}$$

مثال ۸۰: حاصل $\int_1^e \cos(\ln x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}e(\cos 1+\sin 1)$ ۲) $\frac{1}{2}e(\cos 1-\sin 1)$ ۳) $2e(\cos 1+\sin 1)$ ۴) $2e(\cos 1-\sin 1)$

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با دو بار استفاده از روش جزء به جزء می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_1^e \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))\Big|_1^e = \frac{e}{2}(\sin 1+\cos 1)-\frac{1}{2}$$

مثال ۸۱: حاصل $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{16}$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $x=\sin t$ داریم:

$$x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t dt \quad , \quad x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2t)^2 dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi)=\frac{\pi}{16}$$

مثال ۸۲: حاصل انتگرال $I=\int_1^2\frac{dx}{x^2(1+x)}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 4$ ۲) $-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 4$ ۴) $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا کسر داده شده را با استفاده از تجزیهٔ کسرها، تجزیه می‌کنیم و سپس انتگرال می‌گیریم، پس داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1+x} \Rightarrow Ax(1+x)+B(1+x)+Cx^2=1$$

از رابطه فوق $A=-1$ ، $B=1$ و $C=1$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x})dx=(-\ln x-\frac{1}{x}+\ln(1+x))\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 4$$

مثال ۸۳: به ازای چه مقدار x، تساوی $\int_{\ln 2}^x\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$ برقرار است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln 3$ ۳) $\ln 4$ ۴) $\ln 6$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال موردنظر از تغییر متغیر $u^2=e^t-1$ ، $2udu=e^t dt$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\int\frac{\frac{2udu}{u^2+1}}{u}=2\int\frac{du}{u^2+1}=2\mathrm{Arctg}\,u+c=2\mathrm{Arctg}\sqrt{e^t-1}+c$$

و بنابراین داریم:

$$\int_{\ln 2}^x\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=2\mathrm{Arctg}\sqrt{e^t-1}\Big|_{\ln 2}^x=2\mathrm{Arctg}\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \mathrm{Arctg}\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sqrt{e^x-1}=\sqrt{3}\Rightarrow e^x=4\Rightarrow x=\ln 4$$

مثال ۸۴: حاصل انتگرال $\int_8^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۵)

۱) $3(\frac{7}{2}+\ln 2)$ ۲) $3(\frac{9}{2}+\ln 2)$ ۳) $3(\frac{7}{2}+\ln 3)$ ۴) $3(\frac{9}{2}+\ln 3)$

پاسخ : گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=t^3$ ، $dx=3t^2dt$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_8^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}=\int_2^3\frac{3t^2dt}{t-1}=3\int_2^3(t+1+\frac{1}{t-1})dt=3(\frac{t^2}{2}+t+\ln(t-1))\Big|_2^3=3(\frac{7}{2}+\ln 2)$$

مثال ۸۵: مقدار انتگرال $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با توجه به فرمول‌های ارائه شده در کتاب می‌دانیم:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{Arcsec}x+c$$

پس داریم:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{Arcsec}x\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=\operatorname{Arcsec}2-\operatorname{Arcsec}\sqrt{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

مثال ۸۶: حاصل $\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ ، $dx=\cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{(1+\sin^2\theta)(\sqrt{1-\sin^2\theta})}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\cot g^2\theta+2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{\cot g\theta}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

مثال ۸۷: به ازای بازه‌های مختلف $[a,b]$ ماکزیمم مقدار $\int_a^b(4x-x^2)dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{32}{3}$ ۳) $\frac{64}{3}$ ۴) ∞

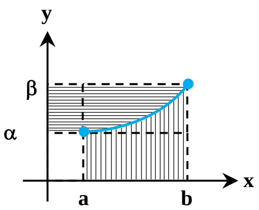
پاسخ : گزینه «۲» عبارت $4x-x^2$ در فاصله $[0,4]$، نامنفی و در سایر جاها منفی می‌باشد، بنابراین برای ماکزیمم شدن انتگرال داده شده، قرار می‌دهیم $a=0$ و $b=4$، در این صورت داریم:

$$\int_0^4(4x-x^2)dx=(2x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^4=\frac{32}{3}$$

مثال ۸۸: هرگاه f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$، آن‌گاه مقدار $\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $\alpha b-\beta a$ ۲) $b\beta-\alpha a$ ۳) $b\beta+\alpha a$ ۴) $ba-\alpha\beta$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به شکل مقابل، مساحت قسمتی که به طور عمودی هاشورخورده برابر $\int_a^b f(x)dx$ و مساحت قسمتی که به طور افقی هاشورخورده برابر $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ است، بنابراین مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده برابر $b\beta-a\alpha$ می‌باشد.



مثال ۸۹: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\pi-\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\text{انتگرال}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

توضیح: در محاسبات فوق از رابطه $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{\pi}{4}$ و همچنین فرمول $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$، استفاده کرده‌ایم.

مثال ۹۰: مقدار $I=\int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^4+1}dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۷۷، صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}(\text{Ln}2+\frac{\pi}{2})$ ۲) $\frac{1}{4}(\text{Ln}4+\frac{\pi}{2})$ ۳) $\frac{1}{4}(\text{Ln}4+\frac{\pi}{4})$ ۴) $\frac{1}{2}(\text{Ln}2+\frac{\pi}{4})$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا x را در پرانتز صورت ضرب کرده و سپس عبارت تحت انتگرال را به دو کسر تفکیک می‌کنیم:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx+\int_0^1\frac{x}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\overbrace{4x^3dx}^{du}}{\underbrace{x^4+1}_{u}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\overbrace{2xdx}^{du}}{1+(\underbrace{x^2}_{u})^2}=\frac{1}{4}[\text{Ln}|x^4+1|]_0^1+\frac{1}{2}[\text{Arctg}x^2]_0^1=\frac{1}{4}\text{Ln}2+\frac{1}{2}\text{Arctg}1=\frac{1}{4}\mathbf{Ln2}+\frac{\pi}{8}$$

مثال ۹۱: اگر f تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره متناوب c باشد، مقدار $\int_c^{a+c}f(x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\int_0^a f(x)dx$ ۲) $\int_0^c f(x)dx$ ۳) $\int_a^c f(x)dx$ ۴) $\int_0^c f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم که اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب c باشد، داریم: $\int_a^{a+c}f(x)dx=\int_0^c f(x)dx$

حالا داریم: $\int_c^{a+c}f(x)dx=\int_c^a f(x)dx+\int_a^{a+c}f(x)dx=\int_c^a f(x)dx+\int_0^c f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

مثال ۹۲: اگر $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx\ ,\ n=0,1,2,\dots$ چه رابطه‌ای بین I_n, I_{n-1} به ازای $n\ge1$ برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $I_n=\frac{2n}{4n-1}I_{n-1}$ ۲) $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ ۳) $I_n=\frac{2n}{4n+1}I_{n-1}$ ۴) $I_n=\frac{2n}{2n-1}I_{n-1}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1(1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx=I_{n-1}-\int_0^1\underbrace{x}_{u}.\underbrace{x(1-x^2)^{n-1}dx}_{dv}$$

$$\xrightarrow{\text{جزء‌به‌جزء}} I_n=I_{n-1}+\underbrace{\frac{x}{2n}(1-x^2)^n\Big|_0^1}_{\text{صفر}}-\frac{1}{2n}\int_0^1(1-x^2)^n dx\Rightarrow I_n(1+\frac{1}{2n})=I_{n-1}\Rightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

مثال ۹۳: اگر $a\ge0$ و $\int_{-a}^{1-a}y(y+a)^{1000}dy=0$، a کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) $\frac{1000}{999}$ ۳) $\frac{1000}{1001}$ ۴) $\frac{1001}{1002}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا به حل انتگرال نامعین $\int y(y+a)^{1000}dy$ می‌پردازیم. با تغییر متغیر $y+a=u$ داریم: $dy=du$

$$\Rightarrow \int y(y+a)^{1000}dy=\int(u-a)u^{1000}du=\int(u^{1001}-au^{1000})du=\frac{1}{1002}u^{1002}-\frac{a}{1001}u^{1001}+c=\frac{1}{1002}(y+a)^{1002}-\frac{a}{1001}(y+a)^{1001}+c$$

$$\Rightarrow\int_{-a}^{1-a}y(y+a)^{1000}dy=(\frac{1}{1002}(y+a)^{1002}-\frac{a}{1001}(y+a)^{1001})\Big]_{-a}^{1-a}=0\Rightarrow\frac{1}{1002}-\frac{a}{1001}=0\Rightarrow a=\frac{1001}{1002}$$

مثال ۹۴: میانگین تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ بر بازه $[0,100]$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) ۴۹/۵ ۲) ۵۰ ۳) ۵۰/۵ ۴) ۵۱

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم مقدار میانگین تابع f در بازه $[a,b]$ از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: مقدار میانگین $=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

پس داریم: مقدار میانگین $=\frac{1}{100-0}\int_0^{100}\lfloor x\rfloor dx=\frac{1}{100}\times\frac{100\times99}{2}=\frac{99}{2}=49/5$

یادآوری: $\int_0^n\lfloor x\rfloor dx=\frac{n(n-1)}{2};(n\in\mathbb{N})$

مثال ۹۵: مقدار انتگرال معین $\int_1^e e^{x^2 Lnx}(2Lnx+1)xdx$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) $e^e - 1$ ۲) $e^2 - 1$ ۳) $e^{\sqrt{e}} - 1$ ۴) $e^{e^2} - 1$

پاسخ : گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = x^2 Lnx$، $du = (2xLnx + x)dx$ استفاده می‌کنیم: در این‌صورت:

$$\int_1^e e^{x^2 Lnx}(2Lnx+1)xdx = \int e^u du = e^u = e^{x^2 Lnx}\Big|_1^e = e^{e^2} - 1$$

مثال ۹۶: اگر $F(\alpha) = \int_\alpha^e \frac{dx}{x\sqrt{Lnx}}$ حاصل $\lim_{\alpha\to 1} F(\alpha)$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۴» از تغییر متغیر $u = Lnx$، $du = \frac{dx}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{Lnx}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{Lnx} \Rightarrow \lim_{\alpha\to 1} F(\alpha) = 2\sqrt{Lnx}\Big|_1^e = 2$$

مثال ۹۷: اگر $A = \int_0^1 \frac{e^t}{t+1}dt$ مقدار انتگرال $\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t-4}dt$ بر حسب A برابر است با: (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^3 A$ ۲) $e^4 A$ ۳) $-e^{-2}A$ ۴) $-e^{-3}A$

پاسخ : گزینه «۴» برای حل چنین سؤالاتی باید در انتگرال دوم طوری تغییر متغیر انجام دهیم که حدود انتگرال اول ایجاد شود. اگر از تغییر متغیر $u = 3 - t$ استفاده کنیم، داریم:

$$du = -dt \quad , \quad t = 3 \Rightarrow u = 0 \ , \ t = 2 \ , \ u = 1$$

بنابراین داریم:

$$\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t-4}dt = \int_1^0 \frac{e^{-(3-u)}}{3-u-4}(-du) = \int_1^0 \frac{e^{-3}.e^u}{-(u+1)}(-du) = e^{-3}\int_1^0 \frac{e^u}{u+1}du = -e^{-3}\int_0^1 \frac{e^u}{u+1}du$$

همان‌طور که می‌بینید به انتگرال اول رسیدیم که مقدارش را داریم، لذا خواهیم داشت:

$$\int_2^3 \frac{e^{-t}}{t-4}dt = -e^{-3}A$$

مثال ۹۸: تابع Li که انتگرال لگاریتمی نامیده می‌شود به‌صورت $x \geq 2$, $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{Lnt}$ تعریف می‌شود به ازای چه مقداری از ثابت b، $\int_b^{Lnx} \frac{e^t}{t}dt = Li(x)$ می‌باشد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $b = 1$ ۲) $b = 2$ ۳) $b = Ln2$ ۴) $b = 2Ln2$

پاسخ : گزینه «۳» با تغییر متغیر $t = e^u$, $dt = e^u du$, $Ln2 < u < Lnx$ در انتگرال $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{Lnt}$ نتیجه می‌شود:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{Lnt} = \int_{Ln2}^{Lnx} \frac{e^u du}{u}$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه $Li(x) = \int_b^{Lnx} \frac{e^t}{t}dt$ نتیجه می‌شود $b = Ln2$.

مثال ۹۹: حاصل $\int_e^{e^2} xLnxdx$، کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^2(e^2+1)$ ۲) $e^2(e^2-1)$ ۳) $\frac{e^2}{3}(4e^2-1)$ ۴) $\frac{e^2}{4}(3e^2-1)$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

بطور کلی می‌دانیم $\int x^n Lnxdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}Lnx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$، بنابراین داریم:

$$\int_e^{e^2} xLnxdx = (\frac{x^2}{2}Lnx - \frac{x^2}{4})\Big|_e^{e^2} = (\frac{e^4}{2}Lne^2 - \frac{e^4}{4}) - (\frac{e^2}{2}Lne - \frac{e^2}{4}) = \frac{e^2}{4}(3e^2 - 1)$$

مثال ۱۰۰: حاصل $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) تعریف نشده

پاسخ : گزینه «۳»

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \operatorname{Arcsin}(x-1)\Big|_0^2 = \pi$$

مثال ۱۰۱: حاصل $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}\right)dx$، برابر با کدام گزینه است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$، لذا داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos[\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-x)]}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}\right)dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}\right)dx$$

اگر طرفین تساوی فوق را با تساوی داده شده در صورت سؤال جمع کنیم، داریم:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{Ln}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}\right) + \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}\right)\right]dx \xrightarrow{\operatorname{Ln}A+\operatorname{Ln}B=\operatorname{Ln}AB} 2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{Ln}1)dx = 0 \Rightarrow \mathbf{I=0}$$

روش دیگر: می‌توانیم از خاصیت لگاریتم استفاده کرده و بنویسیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Ln}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Ln}(\cos(\frac{\pi}{4}-x))\,dx - \int \operatorname{Ln}(\cos x)dx$$

و چون $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx = 0$، مقدار سمت راست صفر می‌شود.

مثال ۱۰۲: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\int f(t)dt$ متناوب با دوره تناوب T است.
۲) f' متناوب با دوره تناوب نابیشتر از T است.
۳) f' متناوب با دوره تناوب بیشتر از T است.
۴) $\int f(t)dt$ متناوب با دوره تناوب کمتر از T است.

پاسخ : گزینه «۲» چون تابع f متناوب با دوره تناوب T می‌باشد، پس $f(x+T)=f(x)$. با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه نتیجه می‌شود $f'(x+T)=f'(x)$ و این رابطه نشان می‌دهد f' نیز متناوب است و دورهٔ تناوب آن T یا کوچکتر از T می‌باشد.

برای رد کردن گزینه‌های (۱) و (۴)، توجه کنید که تابع $f(t)=\sin^2 t$ متناوب با دوره تناوب π می‌باشد ولی $\int \sin^2 tdt$ اصلاً متناوب نیست، زیرا:

$$\int \sin^2 dt = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+c \Rightarrow$$ متناوب نیست.

مثال ۱۰۳: فرض کنید تابع f بر $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر باشد و $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) f تابع فرد است.
۲) اگر f بر $[-a,a]$ نامنفی باشد، آن‌گاه f بر $[-a,a]$ تابع ثابت صفر است.
۳) تابع f نمی‌تواند تابعی صعودی باشد.
۴) اگر تابع f بر $[-a,a]$ پیوسته باشد، آن‌گاه نقطه‌ای مانند $c\in(-a,a)$ وجود دارد که $f(c)=0$.

پاسخ : گزینه «۴» طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = f(c)(a-(-a)) = 2af(c)=0 \Rightarrow f(c)=0$$

حالا نشان می‌دهیم چرا سایر گزینه‌ها نمی‌توانند درست باشند:

بررسی گزینه (۱): حاصل $\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx$ برابر صفر است، ولی $\cos x$ تابع فرد نیست (زوج است).

بررسی گزینه (۲): اگر $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$، آن‌گاه $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ است. ولی f تابع ثابت صفر نیست.

بررسی گزینه (۳): $\int_{-1}^1 xdx=0$ ولی تابع $f(x)=x$ تابعی صعودی است.

مثال ۱۰۴: با فرض $f(\pi)=2$ و $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=5$ ، مقدار $f(0)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶ و ۸۹)

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) هر مقدار می‌تواند باشد.

پاسخ : گزینه «۲»

$$I=\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin xdx=\underbrace{\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx}_{I_2}$$

برای محاسبه هر یک از انتگرال‌های فوق از روش جزء به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=f(x) & \Rightarrow du=f'(x)dx\\ dv=\sin xdx & \Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$$

$$I_1=\int_0^{\pi}f(x)\sin xdx=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx=-f(\pi)\cos\pi+f(0)\cos 0+\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx=2+f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$$

$$\begin{cases}dv=f''(x)dx & \Rightarrow v=f'(x)\\ u=\sin x & \Rightarrow du=\cos xdx\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx=\sin xf'(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx=-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$$

از جمع کردن حاصل انتگرال‌ها نتیجه می‌شود: $I_1+I_2=2+f(0)=5$ و بنابراین $f(0)=3$.

مثال ۱۰۵: مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tgx)dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $4Ln\frac{\pi}{2}$ ۲) $2Ln\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}Ln2$ ۴) $\frac{\pi}{4}Ln2$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم که $\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$ در نتیجه داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tgx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tg(\frac{\pi}{4}-x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+\frac{tg\frac{\pi}{4}-tgx}{1+tg\frac{\pi}{4}tgx})dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(\frac{2}{1+tgx})dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln2dx-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}Ln(1+tgx)dx}_{I}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}Ln2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}Ln2$$

مثال ۱۰۶: اگر $F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt\ ,\ x>0$ مقدار انتگرال $\int_1^x\frac{e^t}{t^2}dt$ بر حسب F کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹)

۱) $-F(x)-\frac{e^x}{x}-e$ ۲) $F(x)+e^x-\frac{e}{x}$ ۳) $F(x)-e^x+e$ ۴) $F(x)-\frac{e^x}{x}+e$

پاسخ : گزینه «۴» برای محاسبه انتگرال مورد نظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=e^t & \to du=e^tdt\\ dv=\frac{1}{t^2}dt & \to v=\frac{-1}{t}\end{cases}\Rightarrow I=\int_1^x\frac{e^t}{t^2}dt=\frac{-e^t}{t}\Big|_1^x+\int_1^x\frac{e^t}{t}dt=\frac{-e^x}{x}+e+F(x)$$

مثال ۱۰۷: حاصل انتگرال $\int_{-2}^{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})dx$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» تابع $f(x)=Ln\frac{1+x}{1-x}$ ، یک تابع فرد می‌باشد. بنابراین مقدار انتگرال مورد نظر برابر صفر است.

$$f(-x)=Ln\frac{1-x}{1+x}=Ln(\frac{1+x}{1-x})^{-1}=-Ln(\frac{1+x}{1-x})=-f(x)$$

مثال ۱۰۸: مقدار انتگرال $\int_0^1 Ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $Ln(\sqrt{2}+1)+1$ ۲) $Ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}$ ۳) $-(\sqrt{2}-1+Ln(\sqrt{2}-1))$ ۴) $Ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1$

پاسخ : گزینه «۳» روش اول: برای محاسبه انتگرال مورد نظر از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u=Ln(x+\sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

اکنون با استفاده از دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$I=\int_0^1 Ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = xLn(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=Ln(1+\sqrt{2})-\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

برای محاسبه انتگرال اخیر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^1 x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1=\sqrt{2}-1 \Rightarrow I=\int_0^1 Ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=Ln(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)+c$$

با توجه به گزینه‌ها، شکل دیگر مقدار فوق را می‌یابیم:

$$Ln(1+\sqrt{2})=Ln((1+\sqrt{2})\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}})=Ln(\frac{1}{\sqrt{2}-1})=-Ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\Rightarrow Ln(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=-Ln(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)=-[\sqrt{2}-1+Ln(\sqrt{2}-1)]$$

روش دوم: توجه کنید که داریم:

$$\int_0^1 Ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=\int_0^1 \sinh^{-1}xdx$$

طبق نکته گفته شده، روابط مقابل را داریم:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=b\beta-\alpha a \quad , \quad f(a)=\alpha \quad , \quad f(b)=\beta$$

$$\sinh(a)=\alpha=0 \Rightarrow a=0$$

$$\sinh(b)=\beta=1 \Rightarrow \frac{e^b-e^{-b}}{2}=1 \Rightarrow e^b-e^{-b}-2=0 \Rightarrow e^{2b}-2e^b-1=0 \Rightarrow e^b=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} \Rightarrow e^b=\begin{cases}1+\sqrt{2} & \Rightarrow b=Ln(1+\sqrt{2}) \\ 1-\sqrt{2}<0 \to \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{Ln(1+\sqrt{2})}\sinh xdx+\int_0^1\sinh^{-1}xdx=b\beta-a\alpha=Ln(1+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\sinh^{-1}xdx=Ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{Ln(1+\sqrt{2})}\sinh xdx=Ln(1+\sqrt{2})-\cosh(Ln(1+\sqrt{2}))+\cosh(0)$$

از محاسبات قبلی می‌دانیم که $\sinh(Ln(1+\sqrt{2}))=1$ همچنین می‌دانیم که $\cosh^2x-\sinh^2x=1$. بنابراین $\cosh(Ln(1+\sqrt{2}))=\sqrt{2}$ و با جایگذاری در I داریم:

$$\Rightarrow I=Ln(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=-(\sqrt{2}-1+Ln(\sqrt{2}-1))$$

مثال ۱۰۹: حاصل $\int_4^9\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{7}{12}$ ۲) $Ln\frac{4}{3}$ ۳) $Ln\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{5}{12}$

پاسخ : گزینه «۳» تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم. $u=\sqrt{x}\to du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx=2\overbrace{\sqrt{x}}^{u}du=2udu\,,\ x=4\to u=2, x=9\to u=3$

با جایگذاری روابط فوق در انتگرال مورد نظر خواهیم داشت: $\int_4^9\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\int_2^3\frac{2udu}{(1+u)u}=2\int_2^3\frac{du}{1+u}=2Ln|1+u|\Big|_2^3=2(Ln4-Ln3)=2Ln\frac{4}{3}=Ln\frac{16}{9}$

مثال ۱۱۰: حاصل $\int_{-1}^1\frac{x^3dx}{1+x^2}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{2}-1$ ۲) صفر ۳) $2-\frac{\pi}{2}$ ۴) $1-\frac{1}{e}$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به تقارن بازه انتگرال‌گیری و فرد بودن تابع تحت انتگرال حاصل انتگرال، برابر صفر می‌باشد.

$f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}\to f(-x)=\frac{(-x)^3}{1+(-x)^2}=\frac{-x^3}{1+x^2}=-f(x)\Rightarrow$ فرد است. $f(x)$

مثال ۱۱۱: مقدار $\int_0^{Ln2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) $2+\frac{\pi}{2}$ ۲) $2-\frac{\pi}{2}$ ۳) $1+\frac{\pi}{4}$ ۴) $1-\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم.

$$\sqrt{e^x-1}=u \rightarrow e^x=u^2+1\ ,\ \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx=du \rightarrow dx=\frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}du$$

$$\rightarrow dx=\frac{2u}{u^2+1}du\ ,\ x=0 \rightarrow u=0\ ,\ x=Ln2 \rightarrow u=1$$

با جایگذاری روابط فوق در انتگرال داده شده داریم:

$$I=\int_0^{Ln2}\sqrt{e^x-1}dx=\int_0^1\frac{2u^2}{1+u^2}du=2\int_0^1\frac{u^2}{1+u^2}du=2\int_0^1\frac{u^2+1-1}{u^2+1}du=2\int_0^1(1-\frac{1}{u^2+1})du=2(u-\operatorname{arctg}u)\Big|_0^1=2(1-\frac{\pi}{4})=2-\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۱۲: مقدار $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x Ln(\frac{1+x}{1-x})dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) قابل محاسبه نمی‌باشد.

پاسخ : گزینه «۱» فرض کنید $f(x)=\cos x\,Ln\frac{1+x}{1-x}$ در نتیجه: $f(-x)=\cos(-x)Ln\frac{1-x}{1+x}=\cos x Ln\frac{1-x}{1+x}=-\cos x Ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$

پس تابع مقابل انتگرال، فرد است و فاصله‌ی انتگرال‌گیری نیز متقارن است. لذا حاصل انتگرال مساوی با صفر است.

مثال ۱۱۳: حاصل $\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ ۲) $2-\frac{1}{e}$ ۳) $1-\frac{1}{e}$ ۴) $1-\frac{2}{e}$

پاسخ : گزینه «۱» برای انتگرال‌گیری از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$u=x^2 \Rightarrow du=2xdx\ ,\ dv=xe^{-x^2}dx \Rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\rightarrow \int_0^1 x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\Big|_0^1+\int_0^1 xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$

مثال ۱۱۴: مقدار میانگین تابع $f(t)=\sin\frac{\pi}{L}t$ و $0<t<L$ برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ : گزینه «۲» طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\int_0^l\sin\frac{\pi}{l}tdt=\frac{-l}{\pi}\cos\frac{\pi}{l}t\Big|_0^l=\frac{2l}{\pi}$$

در نتیجه مقدار متوسط برابر $\frac{\frac{2l}{\pi}}{l-0}=\frac{2}{\pi}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۱۵: یک کران بالا برای $|\int_0^1\frac{\cos nx}{x+1}dx|$، کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۹)

۱) $Ln3$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $Ln2$

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم $|\cos nx|\le 1$، بنابراین داریم:

$$\frac{|\cos nx|}{x+1}\le\frac{1}{x+1}\ ,\ |\int_0^1\frac{\cos nx}{x+1}dx|\le\int_0^1\frac{|\cos nx|}{x+1}dx\le\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=[Ln(x+1)]_0^1=Ln2$$

مثال ۱۱۶: حاصل $\int_{\circ}^{۱}\frac{dx}{۱-x^{۲}+\sqrt{۱-x^{۲}}}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم:

$$x=\sin\theta \Rightarrow dx=\cos\theta d\theta \ ,\ x\to\circ\Rightarrow\theta\to\circ \ ,\ x\to ۱\Rightarrow\theta\to\frac{\pi}{۲}$$

$$I=\int_{\circ}^{۱}\frac{dx}{۱-x^{۲}+\sqrt{۱-x^{۲}}}=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta d\theta}{(۱-\sin^{۲}\theta)+\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}}=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^{۲}\theta+|\cos\theta|}\ \underset{\cos\theta>\circ}{\overset{\text{بازه در ربع اول}}{=\!=\!=}}\ \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^{۲}\theta+\cos\theta}=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{d\theta}{۱+\cos\theta}$$

از طرفی با توجه به فرمول مقابل داریم:

$$\cos ۲\theta=\frac{۱-tg^{۲}\theta}{۱+tg^{۲}\theta}\xrightarrow{۲\theta\to\theta}\cos\theta=\frac{۱-tg^{۲}(\frac{\theta}{۲})}{۱+tg^{۲}(\frac{\theta}{۲})}$$

$$I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+tg^{۲}(\frac{\theta}{۲})}{۲}d\theta=tg(\frac{\theta}{۲})\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=tg\frac{\pi}{۴}-tg\circ=۱\Rightarrow I=۱$$

مثال ۱۱۷: فرض کنیم $f(x)$ تابعی باشد که روی $[a,b]$ پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد و بعلاوه، $\int_a^b f^{۲}(x)dx=۱, f(a)=f(b)=\circ$ در این صورت مقدار $\int_a^b (xf(x)f'(x))dx$ برابر کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** برای به‌دست آوردن $\int_a^b xf(x)f'(x)dx$ از روش جزء به جزء داریم: $u=x\ ,\ dv=f(x)f'(x)dx\Rightarrow du=dx\quad,\quad v=\frac{۱}{۲}f^{۲}(x)$

بنابراین داریم: $\int_a^b xf(x)f'(x)dx=\frac{۱}{۲}xf^{۲}(x)\Big|_a^b-\int_a^b\frac{۱}{۲}f^{۲}(x)dx=\circ-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ $\Leftarrow$ روش جزءبه‌جزء: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

مثال ۱۱۸: مقدار انتگرال $\int_{۱}^{\sqrt{۳}}(۱-x^{۲})Lnxdx$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{۱۰}{۹}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۹}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۱۹}{۹}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۹}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با استفاده از روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{cases}Lnx=u\to\frac{۱}{x}dx=du\\(۱-x^{۲})dx=dv\to v=x-\frac{x^{۳}}{۳}\end{cases}\quad,\quad(\text{یادآوری روش حل انتگرال جزء به جزء}:\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu)$$

$$\int_{۱}^{\sqrt{۳}}(۱-x^{۲})Lnxdx=(x-\frac{۱}{۳}x^{۳})Lnx\Big|_{۱}^{\sqrt{۳}}-\int_{۱}^{\sqrt{۳}}(۱-\frac{۱}{۳}x^{۲})dx=\circ-(x-\frac{۱}{۹}x^{۳})\Big|_{۱}^{\sqrt{۳}}=-\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۸}{۹}=\frac{۸}{۹}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۱۱۹: مقدار $\int_{۱}^{۴}\frac{dx}{\sqrt{x}(۱-e^{-\sqrt{x}})}$ برابر است با: (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $Ln(e-۱)$ ۲) $۲Ln(e-۱)$ ۳) $Ln(e+۱)$ ۴) $۲Ln(e+۱)$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم. $u=\sqrt{x}\to du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx\quad,\quad(x=۱\to u=۱)\ ,\ (x=۴\to u=۲)$

$$\int_{۱}^{۲}\frac{۲du}{۱-e^{-u}}=\int_{۱}^{۲}\frac{۲e^{u}}{e^{u}-۱}du=۲Ln(e^{u}-۱)\Big|_{۱}^{۲}=۲[Ln(e^{۲}-۱)-Ln(e-۱)]=۲Ln\frac{e^{۲}-۱}{e-۱}=۲Ln(e+۱)$$

مثال ۱۲۰: حاصل $\int_{0}^{1}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}+1$ ۲) $\frac{\pi+1}{2}$ ۳) $\frac{\pi-1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}-1$

پاسخ : گزینه «۴» تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم. $x=\cos t \rightarrow dx=-\sin t dt$

$$x=0 \rightarrow t=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=1 \rightarrow t=0 \Rightarrow \int_{0}^{1}\frac{1-x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos t}{\sqrt{1-\cos^{2}t}}(-\sin t dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)dt=[t-\sin t]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

مثال ۱۲۱: مقدار انتگرال $I=\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{1}{x\sqrt{1-Ln^{2}x}}dx$ چقدر است؟ (معدن ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

از تغییر متغیر برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$I=\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{1}{x\sqrt{1-(Lnx)^{2}}}dx$$

با اعمال تغییر متغیر کران‌های انتگرال نیز به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$Lnx=u \Rightarrow \frac{dx}{x}=du\ ,\ \begin{cases}x=\sqrt{e} \rightarrow u=\frac{1}{2}\\ x=1 \rightarrow u=0\end{cases} \Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\sin^{-1}u\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۱۲۲: مقدار انتگرال معین $\int_{1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})^{2}}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $Ln\frac{3}{2}-1$ ۲) $Ln\frac{3}{2}$ ۳) $3Ln\frac{3}{2}$ ۴) $3(Ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6})$

پاسخ : گزینه «۴» تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم. $u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow u^{3}=x \Rightarrow 3u^{2}du=dx \quad , \quad x\rightarrow 1 \Rightarrow u\rightarrow 1\ ,\ x\rightarrow 8 \Rightarrow u\rightarrow 2$

$$\int_{1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})^{2}}=\int_{1}^{2}\frac{3u^{2}du}{u(1+u)^{2}}=\int_{1}^{2}\frac{3udu}{(1+u)^{2}}=3\int_{1}^{2}\frac{(1+u-1)du}{(1+u)^{2}}=3\int_{1}^{2}\frac{(1+u)}{(1+u)^{2}}du-3\int_{1}^{2}\frac{du}{(1+u)^{2}}=3\int_{1}^{2}\frac{du}{1+u}-3\int_{1}^{2}\frac{du}{(1+u)^{2}}$$

$$I=3Ln(1+u)\Big|_{1}^{2}+\frac{3}{1+u}\Big|_{1}^{2}=3Ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=3(Ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6})$$

مثال ۱۲۳: مقدار انتگرال معین $\int_{1}^{e}e^{x}(Lnx+\frac{1}{x})dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) 1 ۳) e ۴) e^{e}

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا انتگرال داده شده را به دو انتگرال مقابل تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{1}^{e}e^{x}(Lnx+\frac{1}{x})dx=\int_{1}^{e}e^{x}Lnx\,dx+\int_{1}^{e}\frac{e^{x}}{x}dx \qquad (1)$$

حالا انتگرال اول در طرف دوم تساوی را با استفاده از روش جزء به جزء حل می‌کنیم، لذا داریم:

$$\begin{cases}u=Lnx\\ dv=e^{x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=e^{x}\end{cases}\ ,\ \int udv=uv-\int vdu \Rightarrow \int_{1}^{e}e^{x}Lnxdx=e^{x}Lnx\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{e^{x}}{x}dx$$

با جایگذاری در رابطه (۱) داریم:

$$\int_{1}^{e}e^{x}(Lnx+\frac{1}{x})dx=e^{x}Lnx\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{e^{x}}{x}dx+\int_{1}^{e}\frac{e^{x}}{x}dx=e^{x}Lnx\Big|_{1}^{e}=e^{e}$$

البته طبق نکته‌ی متن کتاب می‌توانیم سریع‌تر به جواب برسیم:

$$\int e^{x}(f(x)+f'(x))dx=e^{x}f(x)+c$$

در این سؤال $f(x)=Lnx$ و $f'(x)=\frac{1}{x}$، لذا داریم:

$$\int_{1}^{e}e^{x}(Lnx+\frac{1}{x})dx=\left[e^{x}Lnx\right]_{1}^{e}=e^{e}$$

مثال ۱۲۴: مقدار $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۲) $\text{Ln}\frac{5}{4}$ ۳) $2\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۴) $2\text{Ln}\frac{5}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

روش اول: با روش تجزیه کردن کسرها خواهیم داشت:

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} \Rightarrow Ax^2+A+Bx^2+Cx=x^2-1 \Rightarrow (A+B)x^2+Cx+A=x^2-1 \Rightarrow A=-1, B=2, C=0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=[-\text{Ln}x+\text{Ln}(x^2+1)]\Big|_1^2=\text{Ln}\frac{x^2+1}{x}\Big|_1^2=\text{Ln}\frac{5}{2}-\text{Ln}2=\text{Ln}\frac{5}{2}+\text{Ln}\frac{1}{2}=\text{Ln}\frac{5}{4}$$

روش دوم: با تقسیم صورت و مخرج بر x^2 داریم:

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}dx=\left[\text{Ln}(x+\frac{1}{x})\right]_1^2=\text{Ln}(\frac{5}{2})-\text{Ln}2=\text{Ln}\frac{5}{4}$$

مثال ۱۲۵: مقدار $\int_0^\pi xf(\sin x)dx$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$ ۲) $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\cos x)dx$ ۳) $\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx$ ۴) $\pi\int_0^\pi f(\cos x)dx$

پاسخ : گزینه «۱» هرگاه تابع $f(x)$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد، رابطه‌ی مقابل برقرار است. $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

مثال ۱۲۶: اگر $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ (n یک عدد صحیح) حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{T_r(x)T_s(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ وقتی $r=s\neq 0$ برابر است با:

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ : گزینه «۳» به ازای $r=s=1$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{-1}^1\frac{T_1(x)T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^1\frac{(\cos(\cos^{-1}x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم:

$$x=\sin t \to dx=\cos t dt\ ,\ x=-1\to t=-\frac{\pi}{2}\ ,\ x=1\to t=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t dt}{\cos t}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۲۷: مقدار $I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin^2\theta\cos^3\theta)d\theta$ برابر با کدام گزینه است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\frac{2}{15}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{2}{15}$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $x=\sin\theta$، داریم:

$$x=\sin\theta \Rightarrow dx=(\cos\theta)d\theta\ ,\ \theta=0 \Rightarrow x=\sin(0)=0\ ,\ \theta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin^2\theta)\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=\int_0^{-1}x^2.\cos\theta(1-x^2)\frac{dx}{\cos\theta}=\int_0^{-1}x^2(1-x^2)dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{-1}x^2(1-x^2)dx=\int_0^{-1}(x^2-x^4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=-\frac{2}{15}$$

مثال ۱۲۸: فرض کنید $F'(x)=\cos x^2$ و $F(\sqrt{\pi})=1$، مقدار $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}F(x)dx$ کدام است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sqrt{\pi}-1$ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) $1+\sqrt{\pi}$ ۴) $2\sqrt{\pi}$

پاسخ : گزینه «۲» برای پاسخ به این سؤال از روش «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم: $u=F(x) \Rightarrow du=F'(x)dx\ ,\ dv=dx \Rightarrow v=x$

$$I=\int_0^{\sqrt{\pi}}F(x)dx=[xF(x)]_0^{\sqrt{\pi}}-\int_0^{\sqrt{\pi}}xF'(x)dx=\sqrt{\pi}F(\sqrt{\pi})-\int_0^{\sqrt{\pi}}x\cos x^2dx=\sqrt{\pi}F(\sqrt{\pi})-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}(2x)\cos x^2dx$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{\pi}F(\sqrt{\pi})-\frac{1}{2}[\sin x^2]_0^{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\pi}F(\sqrt{\pi})-\frac{1}{2}[\sin\pi-\sin(0)]=\sqrt{\pi}F(\sqrt{\pi})\xrightarrow{F(\sqrt{\pi})=1} I=\sqrt{\pi}$$

درسنامه۷: محاسبه انتگرال‌های شامل جزء صحیح و قدرمطلق

مثال۱: حاصل انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\lfloor tgx\rfloor dx$، کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{24}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۳» در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{3}]$، tgx دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند، یعنی اگر $0\le x<\frac{\pi}{4}$، آن‌گاه $tg(0)\le tgx<tg\frac{\pi}{4}$ و به عبارت دیگر $0\le tgx<1$ و اگر $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$، آن‌گاه $tg\frac{\pi}{4}\le tgx\le tg\frac{\pi}{3}$ و به عبارت دیگر $1\le tgx\le\sqrt{3}$ بنابراین بازه‌ی انتگرال باید به دو قسمت تقسیم شود:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\lfloor tgx\rfloor dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(0)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}1\times dx=0+[x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

مثال۲: حاصل $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\frac{dx}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» در بازه‌ی $[\frac{1}{2},1]$، فقط به ازای $x=1$، مقدار $\frac{1}{x}$، عددی صحیح می‌شود، بنابراین همان یک بازه‌ی داده شده کافی است و نیاز به تفکیک نیست.

$$\frac{1}{2}<x<1\Rightarrow 1<\frac{1}{x}<2\Rightarrow\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=1\Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}1\times\frac{dx}{x^3}=[-\frac{1}{2x^2}]_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{2\times\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

مثال۳: حاصل $I=\int_0^{1394}\lfloor x\rfloor dx$ کدام است؟

۱) 697×1394 ۲) 1394×1393 ۳) 1394×1395 ۴) 697×1393

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به نکته گفته شده در این سؤال $n=1394$ است. بنابراین داریم:

$$I=\frac{1394(1394-1)}{2}=697\times1393$$

مثال۴: حاصل $I=\int_0^{2}(|x-1|+1)dx$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۱» در این انتگرال، عبارت داخل قدرمطلق « $x-1$ » است و می‌دانیم به ازای $x<1$، مقدارش منفی و به ازای $x\ge1$، مقدارش مثبت است.
بنابراین کاندیدای نقطه‌ی شکست، ریشه‌ی $x-1=0$ و به عبارت دیگر همان $x=1$ است.

$$I=\int_0^{1}(-x+1+1)dx+\int_1^{2}(x-1+1)dx=[-\frac{x^2}{2}+2x]_0^1+[\frac{x^2}{2}]_1^2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

مثال۵: حاصل $I=\int_{-1}^{1}\big|x+|x|\big|dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۲» در این انتگرال هم روش حل یکسان است، ابتدا وضعیت $|x|$ را در بازه معلوم کرده و سپس سراغ قدرمطلق بعدی می‌رویم:

$$I=\int_{-1}^{1}\big|x+|x|\big|dx=\int_{-1}^{0}|x-x|dx+\int_0^{1}|x+x|dx=\int_0^{1}2xdx=[x^2]_0^1=1$$

مثال ۶: مقدار $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} d(x|x|)$ کدام است؟

۱) 0　　۲) 2　　۳) $2(1+e^{-1})$　　۴) $2(1-e^{-1})$

پاسخ : گزینه «۴» این سؤال در نگاه اول، کمی غیرمتعارف و ناآشنا به نظر می‌رسد (به خاطر وجود $d(x|x|)$ به جای dx که قبلاً می‌دیدیم!) اما روش حل ساده است: با توجه به وجود $|x|$، باید $x=0$، نقطه‌ی شکستن بازه باشد، بنابراین داریم:

$$I=\int_{-1}^{1} e^{-x^2} d(x|x|)=\int_{-1}^{0} e^{-x^2} d[x(-x)]+\int_{0}^{1} e^{-x^2} d[x(x)]=\int_{-1}^{0} \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u} \underbrace{d(-x^2)}_{du}+\int_{0}^{1} \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u} \underbrace{d(x^2)}_{d(-u)}$$

$$I=[e^{-x^2}]_{-1}^{0}+[-e^{-x^2}]_{0}^{1}=e^0-e^{-1}-e^{-1}+e^0=2-2e^{-1}=\mathbf{2(1-e^{-1})}$$

سؤال دانشجو: مگر تابع زیر انتگرال فرد نیست، پس چرا حاصل انتگرال صفر نشد؟

پاسخ: هنگامی می‌توانیم در مورد زوج یا فرد بودن تابع زیر انتگرال نظر بدهیم که انتگرال را به‌صورت $\int f(x)dx$ یا $\int f(u)du$ در آورده باشیم. اما در صورت سؤال انتگرال به‌صورت $d(x|x|)$ است. در این مثال وقتی انتگرال را به شکل $\int f(u)du$ نوشتیم متوجه شدیم که $f(u)=e^u$ یا $f(u)=e^{-u}$ است که این دو تابع نه زوج هستند و نه فرد هستند. برای مثال در انتگرال $\int_{-1}^{1} x^3 d(x^2)$ در نگاه اول شاید تابع زیر انتگرال، فرد به نظر برسد در حالی که با نوشتن انتگرال برحسب dx داریم: $\int_{-1}^{1} x^3 d(x^2)=\int_{-1}^{1} x^3 2xdx=\int_{-1}^{1} 2x^4 dx$ پس تابع زیر انتگرال زوج است.

مثال ۷: مطلوبست محاسبه انتگرال $y=\int_{-1}^{2}\sqrt{|1-x|}\,|x|dx$.　　(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $y=3/00676$　　۲) $y=3/507$　　۳) $y=4/004$　　۴) $y=5/3$

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$I=\int_{-1}^{2}\sqrt{|1-x|}.|x|dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x}.(-x)dx+\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}.xdx+\int_{1}^{2}\sqrt{x-1}.xdx$$

$$1-x=u \Rightarrow -dx=du\ ,\ -x=u-1\ ,\ x=-1 \Rightarrow u=2\ ,\ x=0 \Rightarrow u=1$$

$$1-x=u \Rightarrow -dx=du\ ,\ x=1-u\ ,\ x=0 \Rightarrow u=1\ ,\ x=1 \Rightarrow u=0$$

$$\Rightarrow I=\int_{2}^{1}\sqrt{u}(1-u)du-\int_{1}^{0}\sqrt{u}(1-u)du+\int_{0}^{1}\sqrt{u}(u+1)du=[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}]_{2}^{1}-[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}]_{1}^{0}+[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_{0}^{1}$$

$$=[(\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{5}\times1)-(\frac{2}{3}\times2\sqrt{2}-\frac{2}{5}\times4\sqrt{2})]+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=3\times\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{30-6}{15}+(\frac{8}{5}-\frac{4}{3})\sqrt{2}=\frac{24}{15}+\frac{4}{15}\sqrt{2}\simeq1/97$$

مثال ۸: مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\lfloor x\rfloor\cos xdx$ برابر است با:　　(MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $1-\frac{1}{2}\sin1$　　۲) $1-\sin1$　　۳) $1+\sin1$　　۴) $1+\frac{1}{2}\sin1$

پاسخ : **گزینه «۲»** با توجه به این‌که در تابعی که می‌خواهیم انتگرال بگیریم از جزء صحیح استفاده شده لذا باید بازهٔ انتگرال‌گیری را به‌گونه‌ای بشکنیم که موجب حذف جزء صحیح شود، لذا داریم:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\lfloor x\rfloor\cos xdx=\int_{0}^{1}0dx+\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x]_{1}^{\frac{\pi}{2}}=1-\sin1$$

مثال ۹: حاصل $\int_{-1}^{2}(x+|x|)dx$ کدام است؟　　(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) 3　　۲) 4　　۳) 5　　۴) 6

پاسخ : **گزینه «۲»** ابتدا باید با شکستن بازهٔ انتگرال‌گیری قدرمطلق را برداریم و بعد انتگرال را محاسبه کنیم:

$$\int_{-1}^{2}(x+|x|)dx=\int_{-1}^{0}(x-x)dx+\int_{0}^{2}(x+x)dx=\int_{0}^{2}2xdx=x^2]_{0}^{2}=4$$

مثال ۱۰: مقدار انتگرال $\int_0^2 \lfloor t^2 \rfloor dt$ که در آن $\lfloor t^2 \rfloor$ جزء صحیح t^2 می‌باشد برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۲) $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۳) $5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ۴) $4-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این‌که تابعی که می‌خواهیم انتگرال بگیریم از نوع جزء صحیح است با شکستن بازهٔ انتگرال‌گیری اقدام به برداشتن جزء صحیح می‌کنیم، پس داریم:

$$\int_0^2 \lfloor t^2 \rfloor dt = \int_0^1 \lfloor t^2 \rfloor dt + \int_1^{\sqrt{2}} \lfloor t^2 \rfloor dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \lfloor t^2 \rfloor dt + \int_{\sqrt{3}}^{2} \lfloor t^2 \rfloor dt$$

$$= \int_0^1 0\,dt + \int_1^{\sqrt{2}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2dt + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3dt = (\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3(2-\sqrt{3}) = 5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

مثال ۱۱: حاصل $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{2}+\mathrm{Ln}(2-\sqrt{3})$ ۲) $\frac{\pi}{2}+\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})$ ۳) $\pi+\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$ ۴) $\pi+\mathrm{Ln}(\sqrt{2}-1)$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به این که ریشه قدرمطلق در بازه‌ی ۰ تا ۲، برابر با $x=1$ است، پس بازه‌ها باید به‌صورت ۰ تا ۱ و ۱ تا ۲ شکسته شوند.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Arcsin}\,x \Big|_0^1 + \mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-1}) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}+\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})$$

مثال ۱۲: مقدار انتگرال $\int_{-1}^2 \sqrt{|x|-x}\,dx$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» باید بازه‌های انتگرال را طوری بشکنیم تا قدرمطلق از بین برود، چون ریشه‌ی عبارت درون قدرمطلق برابر با صفر است، لذا بازه‌ها به‌صورت $\int_{-1}^{0}$ و $\int_0^2$، شکسته می‌شود.

$$\int_{-1}^2 \sqrt{|x|-x}\,dx = \int_{-1}^0 \sqrt{-x-x}\,dx + \int_0^2 \sqrt{x-x}\,dx = \int_{-1}^0 \sqrt{-2x}\,dx = \sqrt{2}\int_{-1}^0 \sqrt{-x}\,dx = -\sqrt{2}\times\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

درسنامه ۷: انتگرال‌های غیرعادی (ناسره)

مثال ۱: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) انتگرال واگراست.

پاسخ: گزینه «۲» کران بالای انتگرال $+\infty$ است، لذا داریم: $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}(\operatorname{Arctg}b-\operatorname{Arctg}0)=\operatorname{Arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$

مثال ۲: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» حدود انتگرال $+\infty$ و $-\infty$ هستند، مخرج کسر ریشه‌ی حقیقی ندارد؛ زیرا دلتای عبارت درجه دوم منفی است. بنابراین داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-3)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}\frac{dx}{(x-3)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b}\frac{dx}{(x-3)^2+1}$$

می‌توانیم c را هر نقطه‌ای در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ انتخاب کنیم، برای راحتی در محاسبات $c=3$ انتخاب می‌کنیم.

$$I=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{Arctg}(x-3)]_a^3+\lim_{b\to+\infty}[\operatorname{Arctg}(x-3)]_3^b\Rightarrow I=-\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{Arctg}(a-3)]+\lim_{b\to+\infty}[\operatorname{Arctg}(b-3)]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

مثال ۳: حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^2+1}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) انتگرال واگراست.

پاسخ: گزینه «۴» وقتی $x\to\infty$، عبارت زیر انتگرال هم‌ارز $\frac{1}{x}$ است و چون $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست، $(p=1)$ پس انتگرال موردنظر نیز واگراست.

مثال ۴: بین n و m کدام رابطه برقرار باشد تا $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{x^n}dx$، همگرا گردد؟

۱) $n<m$ ۲) $m<n$ ۳) $n<m+1$ ۴) $m<n+1$

پاسخ: گزینه «۳» انتگرال داده شده در $x=0$ ناسره می‌باشد. وقتی $x\to0$، هم‌ارزی $\sin^m x\sim x^m$، را داریم. بنابراین انتگرال به‌صورت $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{n-m}}$ در می‌آید، و بنابراین برای همگرایی لازم است؛ $n-m<1$ یا $n<m+1$.

مثال ۵: به ازای چه مقادیری از n، انتگرال $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt[n]{\cos x}}$ همگراست؟

۱) $0<n<1$ ۲) $n>0$ ۳) $n\ge1$ ۴) $n>1$

پاسخ: گزینه «۴» انتگرال در $x=\frac{\pi}{2}$ ناسرگی دارد، می‌توانیم از تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-u$ استفاده کرده و انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-du}{\sqrt[n]{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt[n]{\cos(\frac{\pi}{2}-u)}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt[n]{\sin u}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(\sin u)^{\frac{1}{n}}}$$

حالا به یک انتگرال رسیده‌ایم که در $u=0$ ناسره است و چون در $u=0$، هم‌ارزی $\sin u\sim u$ را داریم، پس انتگرال هم‌ارز با $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{u^{\frac{1}{n}}}$ است و این انتگرال به ازای $\frac{1}{n}<1$، و به عبارت دیگر به ازای $n>1$ همگراست.

مثال ۶: به ازای چه مقادیری از k، انتگرال $\int_1^\infty x^k(\frac{x+\sin x}{x-\sin x})dx$ ، همگراست؟

۱) $k<-1$ ۲) $k\le -1$ ۳) $k>-1$ ۴) $k\ge -1$

پاسخ: گزینه «۱» هم‌ارز تابع مقابل انتگرال را وقتی $x\to\infty$، به‌دست می‌آوریم: $x^k(\frac{x+\sin x}{x-\sin x}) \overset{\text{قانون رشد}}{\sim} x^k.\frac{x}{x}=x^k$

پس انتگرال مورد نظر هم‌رفتار با $\int_1^\infty x^k dx$ است و می‌دانیم این انتگرال با شرط $k<-1$ همگرا می‌باشد.

مثال ۷: مقدار ثابت C که به ازای آن انتگرال ناسره $I=\int_0^\infty(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{C}{x+2})dx$ همگراست، چقدر است و به ازای این مقدار C، حاصل انتگرال کدام است؟

۱) $C=2$ و $I=-\text{Ln}2$ ۲) $C=1$ و $I=\text{Ln}2$ ۳) $C=1$ و $I=2\text{Ln}2$ ۴) $C=2$ و $I=-2\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲» خُب، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم: (توجه کنید که انتگرال فقط در بی‌نهایت ناسره است.)

$$I=\int_0^\infty(\frac{x+2-C\sqrt{x^2+4}}{(x+2)\sqrt{x^2+4}})dx \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \int_0^\infty(\frac{x-Cx}{x^2})dx=\int_0^\infty\frac{x(1-C)}{x^2}dx=\int_0^\infty(\frac{1-C}{x})dx$$

با توجه به این که توان x در مخرج کسر یک است، پس انتگرال ناسره می‌شود، مگر این که صورت کسر صفر شود، پس $1-C=0$ و لذا $C=1$ خواهد شد. حالا باید سراغ حل انتگرال برویم:

$$I=\int_0^\infty(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{x+2})dx=[\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+4})-\text{Ln}(x+2)]_0^\infty=[\text{Ln}(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{x+2})]_0^\infty$$

$$=\text{Ln}[\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{x+2})]-\text{Ln}(\frac{2}{2})\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} I=\text{Ln}\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+x}{x})=\text{Ln}2$$

مثال ۸: به ازای چه مقادیری از α، انتگرال $I=\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$ همگراست؟

۱) $\alpha\ge 0$ ۲) $\alpha>0$ ۳) $\alpha>1$ ۴) $\alpha\ge 1$

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال دو نوع ناسرگی دارد، یکی در صفر و دیگری در بی‌نهایت، بنابراین آن را به شکل زیر به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$I=\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sinh x}dx+\int_1^\infty\frac{x^\alpha}{\sinh x}dx=I_1+I_2$$

حالا هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم. در انتگرال I_1، نقطه‌ی $x=0$، برای انتگرال ناسرگی ایجاد می‌کند، با استفاده از هم‌ارزی در $x\to 0$، می‌توان نوشت: $\sinh x\sim x$ و لذا انتگرال هم‌ارز با $\int_0^1\frac{x^\alpha}{x}dx$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$ است و می‌دانیم برای همگرایی این انتگرال، باید $1-\alpha<1$ و به عبارت دیگر، باید $\alpha>0$ باشد.

حالا سراغ انتگرال دوم می‌رویم، ابتدا معادل $\sinh x$ را می‌نویسیم:

$$\int_1^\infty\frac{x^\alpha}{\sinh x}dx=\int_1^\infty\frac{x^\alpha}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}dx=2\int_1^\infty(\frac{x^\alpha}{e^x-e^{-x}})dx$$

خُب، هم‌ارز تابع زیر انتگرال در بی‌نهایت، $\frac{x^\alpha}{e^x}$ است و لذا باید وضعیت همگرایی انتگرال $\int_1^\infty\frac{x^\alpha}{e^x}dx$ بررسی شود. با استفاده از قضیه‌ی اول داریم:

$$\lim_{x\to\infty}x^2(\frac{x^\alpha}{e^x})=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^{\alpha+2}}{e^x})\overset{\text{قانون رشد}}{=\!=}0$$

چون $p=2>1$ و حاصل حد نیز متناهی شد، لذا انتگرال I_2 همواره همگراست. پس برای همگرایی انتگرال I، فقط کافی است انتگرال I_1 همگرا باشد و گفتیم شرط همگرایی I_1 این است که $\alpha>0$ باشد.

مثال ۹: به ازای چه مقادیری از α انتگرال $I=\int_0^{\infty}(\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}})e^{-t}dt$ همگراست؟

۱) $\alpha<2$ ۲) $\alpha\le 2$ ۳) $\alpha<3$ ۴) $\alpha\le 3$

پاسخ: گزینه «۳» انتگرال در صفر و بی‌نهایت ناسرگی دارد. بنابراین باید انتگرال را به دو بخش که یکی از آن‌ها شامل صفر و دیگری شامل ∞ است، تفکیک کنیم:

$$I=\int_0^{\infty}(\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}})e^{-t}dt=\int_0^{1}(\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}})e^{-t}dt+\int_1^{\infty}(\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}})e^{-t}dt=I_1+I_2$$

ابتدا شرط همگرایی انتگرال I_2 را بررسی می‌کنیم، برای این منظور از قضیه‌ی گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to+\infty} t^2(\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}})e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1-\cos t)t^2}{e^t t^{\alpha}}\overset{\text{قانون‌رشد}}{=\!=\!=}0$$

چون $p=2>1$ و حاصل حد نیز صفر شد، بنابراین انتگرال I_2 به ازای تمام مقادیر α همگراست.

حالا سراغ I_1 می‌رویم؛ هر محدودیتی که برای همگرایی I_1 برای α ایجاد شود جواب سؤال است (چون I_2 به ازای هر مقدار α همگراست). چون $t=0$ نقطه‌ی ناسرگی I_1 است، بنابراین باید از هم‌ارزی در صفر استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\frac{1-\cos t}{t^{\alpha}}(e)^{-t}\sim\frac{\frac{t^2}{2}}{t^{\alpha}}(e^0)\sim\frac{1}{2t^{\alpha-2}}$$

بنابراین کافی است شرایط همگرایی انتگرال $I_2=\int_0^1 2\frac{dt}{t^{\alpha-2}}$ را بررسی کنیم و می‌دانیم این انتگرال با شرط $\alpha-2<1$ همگراست، پس $\boldsymbol{\alpha<3}$، شرط همگرایی I_1 و در نتیجه شرط همگرایی I است.

مثال ۱۰: کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) اگر f تابعی پیوسته و مثبت در بازه‌ی $(0,+\infty)$ باشد و انتگرال $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ همگرا باشد، ممکن است؛ $I=\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ واگرا باشد.

۲) اگر f تابعی پیوسته و مثبت در بازه‌ی $(0,+\infty)$ باشد و انتگرال $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ واگرا باشد، آن‌گاه ممکن است $I=\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ ؛ همگرا باشد.

۳) انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ همواره واگراست.

۴) انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\cosh x}dx$ همواره همگراست.

پاسخ: گزینه «۳» یک سؤال ترکیبی برایتان طرح کرده‌ام! که البته هر کدام از گزینه‌ها ممکن است به عنوان یک تست مجزا مطرح شوند! برای تمرین بیشتر تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): برای تأیید این گزینه، فرض کنید $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}$، می‌دانیم این انتگرال همگراست برای این که داریم:

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}=\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}$$

واضح است هر دو انتگرال فوق همگرا هستند، چون داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x\to 0)\qquad,\qquad\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}\sim\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\quad(x\to\infty)$$

اما انتگرال $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$ واگراست، چون داریم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_0^{1}\frac{dx}{x(x^2+1)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

که به راحتی معلوم است، مثلاً انتگرال اول واگراست، چون هم‌ارزی زیر را در $x=0$ داریم:

$$\frac{1}{x(x^2+1)}\sim\frac{1}{x}\quad(x\to 0)\Rightarrow I=\int_0^1\frac{1}{x}dx\Rightarrow \text{واگراست}$$

بررسی گزینه (۲): برای تأیید این گزینه فرض کنید: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$، می‌دانیم این انتگرال واگراست، برای این که داریم:

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

انتگرال دوم را می‌توان هم‌ارز با $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ در نظر گرفت و لذا واگراست. اما انتگرال $I=\int_0^{\infty}f^2(x)dx$ همگراست، چون داریم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}dx=[\text{Arctg}x]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

بررسی گزینه (۳): ابتدا چون تابع تحت انتگرال زوج و بازه‌ی انتگرال‌گیری متقارن است، انتگرال را به‌صورت $I=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ می‌نویسیم، حالا دقت کنید انتگرال در بی‌نهایت ناسرگی دارد و چون تابع e^{-x^2} همواره مثبت است، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x^2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}\overset{\text{قانون رشد}}{=\!=\!=}0$$

بررسی گزینه (۴): ابتدا انتگرال را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\cosh x}dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{x}{\cosh x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{\cosh x}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{x}{\cosh x}dx=\int_{-\infty}^{-1}(\frac{x}{\cosh x})dx+\int_{1}^{+\infty}(\frac{x}{\cosh x})dx$$

توضیح: انتگرال وسط به خاطر این صفر شد که تابع زیر آن فرد و بازه‌ی انتگرال‌گیری متقارن است (البته دقت کنید این انتگرال در بازه $[-1,1]$ هم پیوسته است) پس حاصل صفر می‌شود. خب حالا سراغ ادامه‌ی حل سؤال می‌رویم. ابتدا وضعیت همگرایی انتگرال دوم را به شکل زیر بررسی می‌کنیم:

$$\int_1^{+\infty}(\frac{x}{\cosh x})dx=\int_1^{+\infty}(\frac{x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}})dx=\int_1^{+\infty}(\frac{2x}{e^x+e^{-x}})dx\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2(2x)}{e^x+e^{-x}})\sim\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x^3}{e^x})\overset{\text{قانون رشد}}{=\!=\!=}0$$

انتگرال اول هم با تغییر متغیر به انتگرال دوم تبدیل می‌شود و بنابراین این انتگرال و در نتیجه انتگرال داده شده در گزینه (۴) هم همگراست.

مثال ۱۱: به ازای چه مقدار c، انتگرال $\int_0^{\infty}(\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1})dx$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۷۸ و ۸۰)

۱) $c=-\frac{1}{2}$ ۲) $c=\frac{1}{2}$ ۳) $c=0$ ۴) $c=1$

پاسخ : گزینه «۲» انتگرال داده شده یک انتگرال ناسره در ∞ می‌باشد، توجه کنید که وقتی $x\to\infty$، تابع مقابل انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{x}{2x^2+2c}-\frac{c}{x+1}\underset{\text{قانون رشد}}{\sim}\frac{x}{2x^2}-\frac{c}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{c}{x}=\frac{\frac{1}{2}-c}{x}$$

حال توجه کنید که $\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-c}{x}dx$ واگراست مگر این‌که $\frac{1}{2}-c=0$ و در نتیجه $c=\frac{1}{2}$ باشد.

مثال ۱۲: حاصل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ : گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: از تغییر متغیر $x=\sec t$, $dx=\sec t.\operatorname{tg}t\,dt$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\to1\Rightarrow t\to0\\ x\to+\infty\Rightarrow t\to\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t.\operatorname{tg}t\,dt}{\sec t\sqrt{\sec^2t-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}t\,dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2t}{\cos^2t}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}(x)\Big]_1^{+\infty}=\operatorname{Arcsec}(+\infty)-\operatorname{Arcsec}(1)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۳: با فرض $p<q$، انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$ به ازای چه مقادیری از p و q همگراست؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $|p|\le1$ ۲) $q\le1$ ۳) $|q|<2$ ۴) $p\le1<q$

پاسخ : گزینه «۲» انتگرال داده شده در $x=0$ ناسره می‌باشد. چون طبق فرض $p<q$، بنابراین در همسایگی نقطه $x=0$ داریم $\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^p}$ از طرفی شرط همگرایی $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ این است که $p<1$. با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۱۴: حاصل $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 0

پاسخ : گزینه «۳» صورت و مخرج کسر زیر انتگرال را در e^x ضرب می‌کنیم:

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int_0^\infty \frac{\overbrace{e^x dx}^{du}}{1+\underbrace{(e^x)}_{u}{}^2}=\text{Arctg}\,e^x\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۵: به ازای چه مقدار a، انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x(Lnx)^a}$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $|a|=1$ ۲) $a>1$ ۳) $a<1$ ۴) هر مقدار a

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$u=Lnx \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ \begin{cases} x\to 1 \Rightarrow u\to 0 \\ x\to 2 \Rightarrow u\to Ln2 \end{cases}\end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x(Lnx)^a}=\int_0^{Ln2}\frac{du}{u^a}$$

با توجه به مطالب کتاب برای این‌که انتگرال فوق همگرا باشد باید $a<1$ باشد.

مثال ۱۶: در مورد انتگرال نامتعارف (غیرعادی) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) این انتگرال واگراست.
۲) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی صفر است.
۳) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی یک است.
۴) این انتگرال همگراست و مقدار همگرایی $\frac{1}{2}$ است.

پاسخ : گزینه «۳» برای حل انتگرال داده شده باید از روش جزء به جزء استفاده کنیم داریم: $(\int udv=uv-\int vdu)$

$$\begin{cases} x=u \Rightarrow dx=du \\ e^{-x}dx=dv \Rightarrow -e^{-x}=v \end{cases} \Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx=[-xe^{-x}]_0^{+\infty}+[-e^{-x}]_0^{+\infty}=0-(-1)=1$$

توجه: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{e^x}\right)=\frac{-\infty}{\infty}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x}=\frac{-1}{\infty}=0$

مثال ۱۷: اگر $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$، که در آن انتگرال به ازای m و n طبیعی همگراست. آن‌گاه کدام رابطه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $n>m+1$ ۲) $m>n+1$ ۳) $m>n+\frac{1}{2}$ ۴) $n>m+\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴» در بی‌نهایت می‌توان عبارت درون انتگرال را به شکل مقابل نوشت:

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\sim\frac{x^{2m}}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-2m}}$$

برای همگرایی، باید $2n-2m>1$ و لذا باید $\mathbf{n>m+\frac{1}{2}}$ باشد.

مثال ۱۸: مقدار انتگرال $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{16}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$dv=xe^{-x^2}dx\ ,\ v=\frac{-1}{2}e^{-x^2}$$

$$u=x \Rightarrow du=dx$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx=\frac{-x}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=0+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

توجه: بهتر است دو انتگرال $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ و $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ را به خاطر بسپاریم، چرا که در مباحث دیگر هم با این دو انتگرال سروکار خواهیم داشت.

مثال ۱۹: مقدار انتگرال $I=\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x^2-2x\cos x^2)dx$ ، کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۱)

۱) 0
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) انتگرال واگراست.

پاسخ: گزینه «۱» طبق فرمول کتاب داریم:

$$\int e^x(f(x)+f'(x))dx=e^x f(x)+c$$

اگر توان e منفی باشد، فرمول به صورت مقابل است:

$$\int e^{-x}(f(x)-f'(x))dx=-e^{-x}f(x)+c$$

در این سؤال با فرض $f(x)=\sin x^2$ ، داریم: $f'(x)=2x\cos x$ در نتیجه:

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x}(\sin x^2-2x\cos x^2)dx=-e^{-x}\sin x^2\Big|_0^{\infty}=0-0=0$$

مثال ۲۰: مقدار انتگرال معین $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) 1
۲) $Ln2-1$
۳) $Ln2$
۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\int_1^{\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=[Lnx-Ln(x+1)]_1^{\infty}=Ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{\infty}=Ln\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x})-Ln\frac{1}{2}=Ln1-(-Ln2)=Ln2$$

مثال ۲۱: مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-xt}\cos t dt$ ، برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{x}{x+1}$
۲) $\frac{1}{x^2+1}$
۳) $\frac{x^2}{x^2+1}$
۴) $\frac{x}{x^2+1}$

پاسخ: گزینه «۴» انتگرال داده شده برابر تبدیل لاپلاس کسینوس می‌باشد، و بنابراین حاصل انتگرال موردنظر برابر $\frac{x}{x^2+1}$ خواهد بود.

یادآوری: انتگرال‌های زیر را که به ترتیب تبدیل لاپلاس توابع سینوس و کسینوس می‌باشند به خاطر بسپارید:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin xdx=\frac{1}{s^2+1} \quad \text{و} \quad \int_0^{\infty} e^{-sx}\cos xdx=\frac{s}{s^2+1}$$

مثال ۲۲: مقدار $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) 1
۲) 2
۳) $Ln2$
۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» برای محاسبه انتگرال داده شده صورت و مخرج را در e^{-x} ضرب می‌کنیم و سپس با در نظر گرفتن مخرج به عنوان u به راحتی از روش تغییر متغیر به حل مساله می‌پردازیم پس داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-Ln(e^{-x}+1)\Big|_0^{\infty}=Ln2$$

مثال ۲۳: کدام گزینه در مورد $I=\int_1^2\frac{dx}{\log x}$ صحیح است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) I واگراست.
۲) I همگرا به صفر است.
۳) I همگرا به ۱ است.
۴) I همگرا به $\frac{1}{2}$ است.

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=10^t$ ، $dx=10^t Ln10 dt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت انتگرال به فرم زیر در می‌آید:

$$\int_1^2\frac{dx}{\log x}=\int_0^{\log_{10}^2}\frac{10^t Ln10 dt}{t}\geq\int_0^{\log_{10}^2}\frac{dt}{t}=Lnt\Big|_0^{\log_{10}^2}\Rightarrow \text{واگرا.}$$

مثال ۲۴: حاصل $\frac{d^4}{dx^4}\int_0^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) 3π
۲) 6π
۳) $\frac{6\pi}{5}$
۴) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}Arctg(\frac{y}{x})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{x}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\times 0=\frac{\pi}{2x}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow\frac{d^4}{dx^4}(\frac{\pi}{2x})=\frac{\pi}{2}\frac{d^4}{dx^4}(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}\times\frac{(-1)^4\times 4!}{x^5}=\frac{12\pi}{x^5}\Big|_{x=\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

مثال ۲۵: کدام گزینه در مورد انتگرال نامتعارف (غیرعادی) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ صحیح می‌باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) واگراست. ۲) همگراست. ۳) همگرا به یک است. ۴) همگرا به ۲ است.

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}<\frac{1}{x^2}$، و چون $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}$، بنابراین طبق آزمون مقایسه انتگرال موردنظر همگراست و مقدارش از $\frac{1}{2}$ کمتر است، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۲۶: اگر $p,q>0$، کدام گزینه در مورد انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) هرگاه $0<q<1<p$ همگراست.
۲) هرگاه $0<p<1$ و $0<q<1$ همگراست.
۳) هرگاه $p>1$ و $q>1$ همگراست.
۴) به ازای هر p,q واگراست.

پاسخ : گزینه «۱» انتگرال داده شده در $x=0$ و بی‌نهایت ناسره می‌باشد. برای این‌که انتگرال در $x=0$ همگرا باشد لازم است یکی از توان‌های p یا q از ۱ کوچکتر باشد و برای همگرایی انتگرال در بی‌نهایت کافی است یکی از توان‌های p یا q از ۱ بزرگتر باشند.

مثال ۲۷: به ازای چه مقدار ثابت C، انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{x-C}{Lnx}dx$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $C=-1$ ۲) $C=1$ ۳) $C=0$ ۴) $C=2$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به این‌که انتگرال داده شده در $x=1$ ناسره است $(Ln1=0)$، لازم است مقدار C طوری انتخاب شود که صورت کسر نیز در $x=1$ بر ابر صفر شود، یعنی: $1-C=0\Rightarrow C=1$

مثال ۲۸: فرض کنید که برای $n\ge 1$، $I_n=\int_{0}^{\infty}x^n e^{-x^2}dx$ و $I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. کدامیک از روابط برگشتی داده شده صحیح است؟ (معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) $I_n=\frac{n-1}{2}I_{n-1}$ ۲) $I_n=\frac{n-1}{2}I_{n+1}$ ۳) $I_n=-\frac{n-1}{2}I_{n-2}$ ۴) $I_n=\frac{n-1}{2}I_{n-2}$

پاسخ : گزینه «۴» برای یافتن رابطه بازگشتی مورد نظر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}dv=xe^{-x^2}dx\Rightarrow v=\frac{-1}{2}e^{-x^2}\\ u=x^{n-1}\Rightarrow du=(n-1)x^{n-2}dx\end{cases}$$

$$I_n=\int_{0}^{\infty}x^n e^{-x^2}dx=\underbrace{-\frac{x^{n-1}}{2}e^{-x^2}\Big|_{0}^{\infty}}_{\text{صفر}}-\int_{0}^{\infty}\frac{-1}{2}(n-1)x^{n-2}e^{-x^2}dx\Rightarrow I_n=\frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}$$

مثال ۲۹: کدام انتگرال واگراست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$ ۲) $\int_{0}^{1}Ln\,xdx$ ۳) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ ۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sec xdx$

پاسخ : گزینه «۳و۴» برای حل این سؤال تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم $a>0$ $\int_{0}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4a}}$ پس $\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ همگراست.

بررسی گزینه (۲): $\int_{0}^{1}Lnxdx=(xLnx-x)]_{0}^{1}=-1\Rightarrow$ همگراست.

بررسی گزینه (۳): $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=2\sqrt{x-2}]_{2}^{\infty}=2(\infty-0)=\infty$ واگراست.

بررسی گزینه (۴): $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sec xdx=Ln|\sec x+tgx|]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=Ln(\infty)-Ln(1)=Ln(\infty)=\infty$ واگراست.

مثال ۳۰: حاصل $I=\int_{0}^{+\infty}\frac{Lnx}{1+x^2}dx$، کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵، مکاترونیک ـ سراسری ۸۷)

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) 1 ۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$، استفاده می‌کنیم، بنابراین $dx=(-\frac{1}{t^2})dt$ و حدود جدید به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$x=0^+ \Rightarrow t=+\infty \;,\; x=+\infty \Rightarrow t=0$$

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{Lnx}{1+x^2}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{Ln(\frac{1}{t})}{1+(\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_{+\infty}^{0}\frac{-Lnt}{1+t^2}(-dt)=\int_{+\infty}^{0}\frac{(Lnt)dt}{1+t^2}=-\underbrace{\int_{0}^{+\infty}\frac{Lnt}{1+t^2}dt}_{I}\Rightarrow I=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow \mathbf{I=0}$$

توضیح تکمیلی: انتگرال در $x=0$ و $x=\infty$ ناسره است. در همسایگی $x=0$، $\frac{Lnx}{1+x^2}$، هم‌ارز با Lnx است $(\frac{Lnx}{1+0}=Lnx)$ و می‌دانیم انتگرال $I=\int_{0}^{1}Lnxdx$ همگراست، همچنین انتگرال در $x=+\infty$، نیز ناسره است و در $x=+\infty$، $\frac{Lnx}{1+x^2}$، هم‌ارز با $\frac{Lnx}{x^2}$ می‌باشد و می‌دانیم انتگرال $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{Lnx}{x^2}dx$ نیز همگراست. بنابراین قطعاً حاصل انتگرال $+\infty$ یا $-\infty$ نمی‌شود.

مثال ۳۱: به ازای چه مقدار ثابت C، انتگرال $\int_{2}^{\infty}(\frac{cx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1})dx$ همگراست؟ (عمران ـ سراسری ۸۱ و عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $C=0$ ۲) $C=1$ ۳) $C=\frac{1}{2}$ ۴) $C=-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» انتگرال مورد نظر در ∞ ناسره است، لذا تابع مقابل انتگرال را در ∞ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{cx}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2cx^2+cx-x^2-1}{(x^2+1)(2x+1)}\sim\frac{(2c-1)x^2}{2x^3}=\frac{2c-1}{2x}$$

می‌دانیم انتگرال $\int_{2}^{\infty}\frac{2c-1}{2x}dx$ واگراست، برای همگرایی لازم است $2c-1=0$ شود یعنی $c=\frac{1}{2}$.

مثال ۳۲: مقدار $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از تغییر متغیر $x=tgt$ استفاده می‌کنیم، در اینصورت $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$ و بازه انتگرال بـه‌صـورت $\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}$ در می‌آید.

$$\Rightarrow\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{tgt\sqrt{tg^2t+1}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}=Lntg\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-Lntg\frac{\pi}{8}$$

مثال ۳۳: مقدار $\int_{x}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(1+\frac{1}{t^2})dt$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) 1 ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) ∞ ۴) $\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$

پاسخ: گزینه «۴» واضح است که حاصل انتگرال داده شده تابع x است و با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۴) می‌تواند پاسخ صحیح باشد. البته این موضوع با علم بر این که انتگرال همگراست، قابل نتیجه‌گیری است. حالا سراغ حل تشریحی می‌رویم:

$$\int_{x}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(1+\frac{1}{t^2})dt=\int_{x}^{\infty}(e^{-\frac{t^2}{2}}+\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}})dt=\int_{x}^{\infty}(\frac{-1}{t}\frac{d}{dt}(e^{-\frac{t^2}{2}})+e^{-\frac{t^2}{2}}.\frac{d}{dt}(\frac{-1}{t}))dt=\int_{x}^{\infty}(\frac{d}{dt}(\frac{-1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}))dt=\frac{-1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{x}^{\infty}=\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

مثال ۳۴: هر یک از دو انتگرال $A=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$ و $B=\int_0^1\frac{dx}{x-\sin x}$، چگونه‌اند؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۸)

۱) A همگرا ـ B همگرا ۲) A واگرا ـ B همگرا ۳) A واگرا ـ B واگرا ۴) A همگرا ـ B واگرا

پاسخ : گزینه «۴» هر دو انتگرال ناسرگی نوع دوم را دارند و در یکی از حدود خود ناسره می‌شوند (A در $x=1$ و B در $x=0$ ناسره است) برای A می‌توانیم عبارت زیر رادیکال را تجزیه کرده و عبارت زیر انتگرال را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}=\sqrt{\frac{x}{(1-x^2)(1+x^2)}}=\sqrt{\frac{x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}\xrightarrow{x\to1^-}\sim\sqrt{\frac{1}{4(1-x)}}=\frac{1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

بنابراین انتگرال A هم‌ارز با $A=\int_0^1\frac{dx}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ می‌باشد، چون $p=\frac{1}{2}<1$، پس انتگرال همگراست.

اما برای انتگرال B، نقطه‌ی $x=0$ ناسرگی ایجاد کرده است و به راحتی با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\int_0^1\frac{dx}{x-\sin x}\sim\int_0^1(\frac{6}{x^3})dx$$

چون $p=3>1$، انتگرال واگراست، بنابراین A همگرا و B واگراست.

مثال ۳۵: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}$، برابر با کدام گزینه است؟ (مواد ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۳» تابع تحت انتگرال زوج است و بنابراین می‌تونیم به جای $\int_{-\infty}^{+\infty}$، بنویسیم؛ $2\int_0^{+\infty}$، بنابراین با قاعده‌ی تفکیک کسرها داریم:

$$I=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}[\frac{5}{x^2+4}-\frac{2}{x^2+1}]dx=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}(\frac{5}{x^2+4}-\frac{2}{x^2+1})dx$$

$$=\frac{2}{3}[5\text{Arctg}(+\infty)]-\frac{2}{3}[2\text{Arctg}(+\infty)]=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\times2\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{3}(\frac{\pi}{2})-\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{6}$$

مثال ۳۶: مقدار $\int_0^{\infty}\frac{\text{Lnx}}{1+x^2}$: (معدن سراسری ۸۵ و ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) برابر ۰ است. ۲) برابر Ln۲ است. ۳) برابر ۲Ln۲ است. ۴) واگرا به ∞ است.

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا انتگرال را به‌صورت روبرو می‌نویسیم:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\text{Lnx}}{1+x^2}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{\text{Lnx}}{1+x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{\infty}\frac{\text{Lnx}}{1+x^2}dx}_{I_2}$$

حال در انتگرال دوم، از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$، $dx=\frac{-1}{t^2}dt$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بـه ازای $x=1$، مقـدار $t=1$، و وقـتی $x\to\infty$، مقـدار $t\to0$ میـل می‌کند، بنابراین داریم:

$$I_2=\int_1^0\frac{\text{Ln}(\frac{1}{t})}{1+\frac{1}{t^2}}.(\frac{-1}{t^2})dt=-\int_0^1\frac{\text{Lnt}}{1+t^2}dt$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌شود مقدار I_2، قرینه I_1 می‌باشد و در نتیجه $I=0$.

مثال ۳۷: کدام گزینه برای $\int_0^2\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ درست است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) انتگرال به ازای هر m همگراست. ۲) انتگرال به ازای هر m واگراست.

۳) انتگرال به ازای $m\geq3$ همگرا و $m<3$ واگراست. ۴) انتگرال به ازای $m<3$ همگرا و $m\geq3$ واگراست.

پاسخ : گزینه «۴» انتگرال مورد‌نظر در نقطه $x=0$، ناسره است. وقتی $x\to0$ میل کند، هم‌ارزی $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\frac{1-\cos x}{x^m}\sim\frac{\frac{x^2}{2}}{x^m}=\frac{1}{2x^{m-2}}$$

پس برای این‌که انتگرال $\int_0^2\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ همگرا باشد کافی است $\int_0^2\frac{1}{2x^{m-2}}dx$ همگرا باشد، و ایـن انتـگرال وقتـی همگراسـت کـه $m-2<1$ و در نتیجـه $m<3$ باشد.

مثال ۳۸: می‌دانیم که $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، در این صورت اگر $a>0$، حاصل عبارت $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$، کدام است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}(\sqrt{a}+2a)$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}(-\sqrt{a}+a)$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{a}(\sqrt{a}+\frac{a}{2})$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{a}(\frac{\sqrt{a}}{2}-a)$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا مقدار انتگرال اول را حساب می‌کنیم، با کمی تغییر در توان e داریم:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}dx$$

حالا از تغییر متغیر مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u=\sqrt{a}x \Rightarrow du=\sqrt{a}dx \quad , \quad x=0 \Rightarrow u=0 \quad , \quad x=+\infty \Rightarrow u=+\infty$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \xrightarrow{\text{با توجه به فرض داده شده}} I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

حالا سراغ انتگرال دوم می‌رویم:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx \xrightarrow{\text{تعریف تابع گاما}} I_2 = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

بنابراین داریم:

$$\text{حاصل عبارت خواسته شده} = I_1+I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}+\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}(\sqrt{a}+2a)$$

مثال ۳۹: حاصل $I=\int_0^{+\infty}(\frac{1-\cos\alpha x}{x^2})dx$، کدام است؟ $(\alpha>0)$ (ریاضی ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$ ۲) $\frac{\pi}{3}|\alpha|$ ۳) $\pi|\alpha|$ ۴) $2\pi|\alpha|$

پاسخ : گزینه «۱» انتگرال را با استفاده از جزء به جزء پاسخ می‌دهیم:

$$u=1-\cos\alpha x \Rightarrow du=\alpha(\sin\alpha x)dx \quad , \quad dv=\frac{dx}{x^2} \Rightarrow v=-\frac{1}{x}$$

$$I=[-\frac{(1-\cos\alpha x)}{x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\frac{1}{x})(\alpha\sin\alpha x)dx = [\frac{\cos\alpha x-1}{x}]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

می‌دانیم $\lim_{x\to 0}(\frac{\cos\alpha x-1}{x})=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\cos\alpha x-1}{x})=0$، بنابراین حاصل قسمت اول برابر با صفر است و چون $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$، بنابراین $I=\alpha\times\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha\pi}{2}=\frac{\pi}{2}|\alpha|$.

مثال ۴۰: کدام‌یک از انتگرال‌های زیر همگراست؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۹)

۱) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ ۲) $\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$ ۳) $\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{(Lnx)^3}$ ۴) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^3}dx$

پاسخ : گزینه «۱» انتگرال گزینه (۱) فقط در بی‌نهایت ناسره است، هم‌ارز تابع تحت انتگرال در بی‌نهایت به‌صورت $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ و به عبارت دیگر به‌صورت $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ است و بنابراین باید وضعیت همگرایی انتگرال $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ بررسی شود که می‌دانیم این انتگرال همگراست.

بررسی گزینه (۲): این انتگرال در $x=1$ ناسره است و چون نقطه‌ی $x=1$ بین حدود انتگرال قرار دارد و $p=3>1$، لذا انتگرال واگراست.

بررسی گزینه (۳): برای این انتگرال نقطه‌ی $x=1$ و $x=+\infty$ ناسرگی ایجاد کرده‌اند، بنابراین باید انتگرال را به دو قسمت تفکیک کنیم:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{(Lnx)^3} = \int_1^{2}\frac{xdx}{(Lnx)^3} + \int_2^{\infty}\frac{xdx}{(Lnx)^3} = I_1+I_2$$

انتگرال اول در $x=1$ ناسره است و این انتگرال در همسایگی این نقطه هم‌ارز با $I_1=\int_1^2\frac{dx}{(Lnx)^3}$ است، اما مخرج کسر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Lnx = Ln[1+(x-1)] \overset{x\to 1}{\sim} (x-1) \Rightarrow (Lnx)^3 \sim (x-1)^3$$

پس انتگرال I_1 هم‌ارز با $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^3}$، می‌باشد که می‌دانیم واگراست. هر چند نیاز به بررسی وضعیت همگرایی انتگرال I_2 نیست (چون همین که I_1 واگرا باشد، می‌توان نتیجه گرفت I نیز واگراست.) اما برای تمرین بیشتر وضعیت همگرایی انتگرال I_2 را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\frac{x}{(Lnx)^3}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(Lnx)^3} = +\infty$$

بنابر قضیه‌ی اول، چون $p=1$ و حاصل انتگرال نامتناهی شد، لذا انتگرال واگراست.

بررسی گزینه (۴): این انتگرال فقط در $x=0$ ناسرگی دارد که در این نقطه عبارت زیر انتگرال هم‌ارز $\frac{x}{x^3}$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\frac{1}{x^2}$ است و چون می‌دانیم انتگرال $\int_0^{\pi}\frac{dx}{x^2}$، واگراست، بنابراین انتگرال گزینه (۴) هم واگراست.

مثال ۴۱: کدام‌یک از انتگرال‌های زیر همگرا هستند؟ (ریاضی محض ـ آزاد ۸۹)

۱) $\int_{2}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^3-1}}$ ۲) $\int_{1}^{\infty}\frac{Lnx}{x+e^{-x}}dx$ ۳) $\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x^3}dx$ ۴) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$

پاسخ : گزینه «۴» به راحتی واضح است، انتگرال داده شده در گزینه (۴) همگراست،

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}\sim 2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

چون $p=2>1$ انتگرال همگراست، برای تمرین بیشتر سایر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): انتگرال داده شده در این گزینه، در بی‌نهایت ناسرگی دارد و در بی‌نهایت تابع زیر انتگرال هم‌ارز با $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}$ و به عبارت دیگر هم ارز با $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ است و چون $p=\frac{1}{2}<1$، لذا انتگرال $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$، واگراست.

بررسی گزینه (۲): انتگرال داده شده در این گزینه در بی‌نهایت ناسره است و چون در بی‌نهایت $e^{-x}\to 0$، لذا تابع تحت انتگرال هم ارز با $\frac{Lnx}{x}$ است و برای $x\geq e$، داریم: $\frac{1}{x}>\frac{Lnx}{x}$ و چون انتگرال $\int_{e}^{\infty}\frac{1}{x}dx$ واگراست، بنابراین انتگرال بزرگتر هم واگراست.

بررسی گزینه (۳): انتگرال داده شده در گزینه (۳) در $x=0$ ناسره است و تابع تحت انتگرال در $x=0$ هم‌ارز با $\frac{x}{x^3}$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\frac{1}{x^2}$ است و می‌دانیم انتگرال $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{x^2}$، واگراست.

مثال ۴۲: کدام گزینه در مورد انتگرال ناسره (توسعی) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) همگرا با مقدار همگرایی $\frac{1}{\pi}$ می‌باشد.   ۲) واگراست.

۳) همگرا با مقدار همگرایی π می‌باشد.   ۴) همگرا با مقدار همگرایی یک می‌باشد.

پاسخ : گزینه «۳» تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ را اعمال می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{0}^{\lambda}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{0}^{\lambda}\frac{2dt}{1+t^2}=2\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda}\frac{dt}{1+t^2}=2\lim_{\lambda\to+\infty}(tg^{-1}(t)\big|_{0}^{\lambda})=2\lim_{\lambda\to+\infty}(tg^{-1}(\lambda)-0)=2(\frac{\pi}{2})=\pi$$

که این نشان می‌دهد؛ انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ همگرا و دارای مقدار همگرایی π است.

درسنامه ۸: مشتق‌گیری از انتگرال

مثال ۱: اگر $S(t)=\int_{-t}^{t}\frac{dx}{1+x^{10}}$ در این صورت $S'(0)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۴» به راحتی با استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$S'(t)=1\times\frac{1}{1+(t)^{10}}-(-1)\times\frac{1}{1+(-t)^{10}}=\frac{2}{1+t^{10}}\Rightarrow S'(0)=2$$

مثال ۲: اگر $f(x)=\int_{0}^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ و $g(x)=\int_{0}^{\cos x}(1+\sin^2 t)dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sin 2$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مشتق $f(x)$ را حساب می‌کنیم، و چون در ضابطه‌ی $f'(x)$، عبارت $g'(x)$ بوجود می‌آید، لذا باید $g'(x)$ را نیز حساب کنیم؛

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g(x))^2}}\quad,\quad g'(x)=[1+\sin^2(\cos x)]\times(-\sin x)\Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=-1\ ,\ g(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=-1$$

مثال ۳: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲» خُب، همیشه نباید با تست‌هایی روبه‌رو شویم که قرار باشد، فقط از یک تابع مشتق بگیریم تا لازم باشد از قاعده‌ی «مشتق‌گیری از انتگرال» استفاده کنیم. با توجه به این‌که حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم است، از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}\xrightarrow{Hop}A=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

مثال ۴: حاصل $A=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x}^{x^2}\sin 2t\,dt}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که در محاسبه حد به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم، از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x^2-\sin 2x}{\sin x+x\cos x}\xrightarrow{Hop}A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x^2+(4x\cos 2x^2)(2x)-2\cos 2x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\frac{2}{2}=-1$$

مثال ۵: با فرض $F(x)=\frac{1}{x}\int_{2}^{x}[2t+F'(t)]dt$، آن‌گاه مقدار $F'(2)$ چقدر است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه MIT)

۱) 2 ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) 4 ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» اصلاً سؤال سختی نیست! فقط باید از قاعده‌ی مشتق از انتگرال استفاده کنیم:

$$F'(x)=(-\frac{1}{x^2})\int_{2}^{x}[2t+F'(t)]dt+[2x+F'(x)]\frac{1}{x}\Rightarrow F'(2)=-\frac{1}{2^2}\int_{2}^{2}[2\times 2+F'(2)]dt+[2\times 2+F'(2)]\frac{1}{2}$$

حاصل انتگرال اول با توجه به این که حدود بالا و پایین آن یکی هستند، صفر است، بنابراین داریم:

$$F'(2)=2+\frac{1}{2}F'(2)\Rightarrow\frac{1}{2}F'(2)=2\Rightarrow F'(2)=4$$

مثال ۶: حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^7}\right)$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{28}$ ۲) $\frac{1}{42}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{1}{14}$

پاسخ: گزینه «۴» حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است، از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد} \underset{=}{\text{HOP}} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3\sin x^2}{7x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-3(x^2-\frac{(x^2)^3}{3!})}{7x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{2}}{7x^6}=\frac{1}{14}$$

توضیح: در بالا از هم‌ارزی $\sin x\sim x-\frac{x^3}{6}$ و در نتیجه $\sin x^2\sim(x^2-\frac{(x^2)^3}{3!})$ استفاده کرده‌ایم.

مثال ۷: در تابع منحنی با ضابطه $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int_0^y \cos t\,dt=0$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$ ۳) $\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\sin y}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3-2\cos^2 x}}{\sin y}$

پاسخ: گزینه «۲» یک سؤال جالب و البته آسان! با توجه به قاعده مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\begin{cases} f'_x=\sqrt{3-2\sin^2 x}\\ f'_y=\cos y\end{cases}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-f'_x}{f'_y}=-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$$

توضیح: توجه شود که وقتی f'_x را محاسبه می‌کنیم باید y را عدد ثابت فرض کنیم که مشتق آن صفر است لذا نیازی به محاسبه مشتق انتگرال دوم نیست به همین صورت در مورد محاسبه f'_y دیگر نیازی به محاسبه مشتق انتگرال اول نیست.

مثال ۸: در تابع منحنی $x=\int_0^{\sin t}\arcsin z\,dz\ ,\ y=\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\sin z^2}{z}dz$، y'_x کدام است؟

۱) $\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ ۲) $\frac{\operatorname{tg} t}{t^2}$ ۳) $\frac{\operatorname{tg} t}{2t^2}$ ۴) $\frac{\cos t}{t\sqrt{t}}$

پاسخ: گزینه «۳» با یک مشتق‌گیری پارامتری زیر هستیم:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{\sin t}{\sqrt{t}}}{\cos t\,.\underbrace{\operatorname{Arcsin}(\sin t)}_{t}}=\frac{\operatorname{tg} t}{2t^2}$$

مثال ۹: اگر $f(x)=\int_1^x\left(\frac{\operatorname{Ln} t}{t+1}\right)dt$ در این صورت حاصل $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$، برابر کدام گزینه است؟ $(x>0)$

۱) $\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}x)^3+C$ ۲) $2(\operatorname{Ln}x)^2+C$ ۳) $\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}x)^2+C$ ۴) $2(\operatorname{Ln}x)^3+C$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این که $f(x)$ بر حسب یک انتگرال داده شده است، بنابراین لازم است از طرفین ضابطه‌ی $g(x)$ مشتق بگیریم:

$$g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})\qquad (*)$$

از طرفی $f'(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x+1}$ که در نتیجه $f'(\frac{1}{x})=\frac{\operatorname{Ln}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x(-\operatorname{Ln}x)}{1+x}$ می‌باشد، پس با قرار دادن این مقادیر در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$g'(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x+1}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{-x\operatorname{Ln}x}{1+x}\right)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x+1}+\frac{\operatorname{Ln}x}{x(1+x)}=\frac{x\operatorname{Ln}x+\operatorname{Ln}x}{x(1+x)}=\frac{(x+1)\operatorname{Ln}x}{x(1+x)}=\frac{\operatorname{Ln}x}{x}$$

با توجه به این که ضابطه‌ی $g'(x)$ را داریم، بنابراین به راحتی با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$g'(x)=\frac{\operatorname{Ln}x}{x}\Rightarrow g(x)=\int\frac{1}{x}\operatorname{Ln}x\,dx=\frac{1}{2}(\operatorname{Ln}x)^2+C$$

مثال ۱۰: فرض کنید $g(x)=xe^{x^2}$ و $f(x)=\int_1^x g(t)(t+\frac{1}{t})dt$ باشد، حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)[x+\frac{1}{x}]}{e^{x^2}+(2xe^{x^2})x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}(x+\frac{1}{x})}{e^{x^2}(1+2x^2)}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{1+2x^2})=\frac{1}{2}$$

می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را می‌توان برابر با $\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ نیز دانست، پس حاصل خواسته شده برابر با $\frac{1}{2}$ است.

توضیح: در صورتی که راه حل فوق به ذهنتان نرسیده باشد، می‌توانید $f''(x)$ و $g''(x)$ را از روی ضابطه‌ی آن‌ها حساب کرده و در نهایت حاصل حد را حساب کنید. به عنوان روش دوم سؤال، این حالت را تمرین کنید.

مثال ۱۱: تابع پیوسته $f(x)$ که همواره صفر نیست و $f'(x)\neq 0$ در تساوی $[f(x)]^2=\int_0^x f(t)\frac{e^t}{1+e^{-t}}dt$ صدق می‌کند، مقدار تابع f به ازای $x=\text{Ln}2$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}+\text{Ln}\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}-\text{Ln}\frac{\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» واضح است، باید از طرفین مشتق بگیریم:

$$[f(x)]^2=\int_0^x f(t)\frac{e^t}{1+e^{-t}}dt$$

$$\Rightarrow 2f(x)f'(x)=f(x)\frac{e^x}{1+e^{-x}}\xrightarrow{\text{از طرفین ساده می‌شود } f(x)}2f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{-x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(\frac{e^x}{1+e^{-x}})$$

حال می‌خواهیم تابع f را به‌دست آوریم، از طرفین انتگرال می‌گیریم:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2}(\frac{e^x}{1+e^{-x}})dx$$

با تغییر متغیر $u=e^x$، آن‌گاه $du=e^x dx$ و لذا داریم:

$$f(x)=\int\frac{1}{2}(\frac{u}{1+\frac{1}{u}})\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int\frac{u}{u+1}du=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{u+1})du=\frac{1}{2}[u-\text{Ln}(u+1)]+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[e^x-\text{Ln}(e^x+1)]+C$$

از طرفی با توجه به‌صورت سؤال، اگر در طرفین به جای x، صفر قرار دهیم $f(0)=0$ می‌شود:

$$f(0)=\frac{1}{2}[e^0-\text{Ln}(e^0+1)]+C=\frac{1}{2}(1-\text{Ln}2)+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}(1-\text{Ln}2)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(e^x-\text{Ln}(e^x+1))-\frac{1}{2}(1-\text{Ln}2)$$

$$x=\text{Ln}2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[e^{\text{Ln}2}-\text{Ln}(e^{\text{Ln}2}+1)]-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{Ln}2=\frac{1}{2}(2-\text{Ln}3)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{Ln}2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{Ln}3+\frac{1}{2}\text{Ln}2=\mathbf{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{2}{3}}$$

مثال ۱۲: اگر $f(x)=\int_1^{1+x^2}\frac{\sin tx}{t}dt$، آن‌گاه مقدار $f'(-1)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-2\sin 2-\sin 1$ ۲) $-2\sin 2+\sin 1$ ۳) $2\sin 2+\sin 1$ ۴) $2\sin 2-\sin 1$

پاسخ: گزینه «۴» صرفاً مشتق‌گیری از انتگرال، خواسته‌ی سؤال است؛ دقت داشته باشید که تابع تحت انتگرال تابعی از x و t است، پس باید از فرمول تعمیم مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنیم:

$$f'(x)=(2x)\frac{\sin x(1+x^2)}{1+x^2}+\int_1^{1+x^2}\frac{t\cos tx}{t}dt\Rightarrow f'(x)=2x\frac{\sin x(1+x^2)}{1+x^2}+[\frac{1}{x}\sin tx]_1^{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(2x)\frac{\sin x(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{1}{x}\sin(1+x^2)x-\frac{1}{x}\sin x\xrightarrow{x=-1}f'(-1)=2(-1)\frac{\sin(-2)}{2}+(-1)\sin(-2)-(-1)\sin(-1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{f'(-1)=2\sin 2-\sin 1}$$

مثال ۱۳: حد تابع $y=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}.dt}{\sin(x)}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $y=1$ ۲) $y=2$ ۳) $y=3$ ۴) $y=4$

پاسخ: گزینه «۱» با قرار دادن $x=0$، حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم می‌شود با توجه به قضیه هوپیتال و فرمول‌های گفته شده در رابطه بـا مشـتق‌گیـری از انتگـرال داریم:

$$y=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}.dt}{\sin x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\equiv}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{\cos x}=\frac{e^0}{1}=1$$

مثال ۱۴: اگر $f(x)=\int_0^x \sqrt{1+\sin^{17} t}\,dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۸)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) 1

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** از رابطه $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین برای محاسبه $(f^{-1})'(0)$، ابتدا به جای $f(x)$، مقدار 0 را قرار می‌دهیم.

$$0=\int_0^x \sqrt{1+\sin^{17} t}\,dt \Rightarrow x=0$$

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{1+\sin^{17} t}\,dt \Rightarrow f'(x)=\sqrt{1+\sin^{17} x} \Rightarrow f'(0)=1 \Rightarrow (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=1$$

مثال ۱۵: تابع f با رابطه $f(x)=\int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{2}}dt\ ,\ x\geq 0$ تعریف شده است (لازم نیست این انتگرال را محاسبه کنید) و تابع g، معکوس f می‌باشد.کدام گزینه برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $g''(x)=g^2(x)$ ۲) $g''(x)=\frac{1}{2}g^2(x)$ ۳) $g''(x)=\frac{3}{2}g^2(x)$ ۴) $g''(x)=\frac{2}{3}g^2(x)$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** تابع g معکوس تابع f می‌باشد، بنابراین داریم:

$$f(g(x))=x \Rightarrow g'(x)f'(g(x))=1 \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))} \Rightarrow g''(x)=\frac{-g'(x)f''(g(x))}{(f'(g(x)))^2}=-\frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

حال مقادیر f' و f'' را از رابطه داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\quad,\quad f''(x)=\frac{-3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

با جایگزینی روابط فوق در g'' خواهیم داشت:

$$g''(x)=-\frac{\frac{-3}{2}g^2(x)(1+g^3(x))^{\frac{-3}{2}}}{(1+g^3(x))^{\frac{-3}{2}}}=\frac{3}{2}g^2(x)$$

مثال ۱۶: $f(x)=\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+9t^4}\,dt$ ، $g(x)=x^n e^{2x}$، اگر $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right|=3$ ، آن‌گاه n برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☑ **پاسخ : گزینه «۲»**

$$f(x)=\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+9t^4}\,dt \Rightarrow f'(x)=e^{2x}\sqrt{1+9x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{e^{2x}\sqrt{1+9x^4}}{x^n e^{2x}}\right|=\frac{\infty}{\infty}\ \underset{\text{قانون رشد}}{=}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^n}=\lim_{x\to\infty}3x^{2-n}$$

برای این‌که حد فوق برابر ۳ باشد، لازم است $2-n=0$، و یا $n=2$.

مثال ۱۷: اگر $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t\cos t\,dt$ آن‌گاه $\lim_{x\to 0}F(x)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم می‌باشد، با استفاده از قضیه هوپیتال و فرمول مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\cos t\,dt}{x}=\frac{0}{0}\ \underset{HOP}{=}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{1}=0$$

مثال ۱۸: اگر $m>0$، مقدار $\frac{d}{dm}\int_0^{+\infty}e^{-mx}dx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{m^2}$ ۲) $-\frac{1}{m}$ ۳) $\frac{1}{m^2}$ ۴) $\frac{1}{m}$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»**

$$\int_0^{+\infty}e^{-mx}dx=\frac{-1}{m}e^{-mx}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{m}\Rightarrow \frac{d}{dm}\int_0^{+\infty}e^{-mx}dx=\frac{d}{dm}\left(\frac{1}{m}\right)=-\frac{1}{m^2}$$

مثال ۱۹: مقدار $\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^2}\sin(tx^2)dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\int_{0}^{t^2}x^2\cos(tx^2)dx+2t\sin t^5$ ۲) $\int_{0}^{t^2}x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^5$ ۳) $\int_{0}^{t^2}x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^3$ ۴) $\int_{0}^{t^2}x\cos(tx^2)dx+2t\sin t^3$

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** از رابطه‌ی تعمیم فرمول مشتق‌گیری از انتگرال کمک می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^2}\sin(tx^2)\,dx=\sin t^5\times 2t+\int_{0}^{t^2}\frac{\partial}{\partial t}(\sin tx^2)\,dx=2t\sin t^5+\int_{0}^{t^2}x^2\cos(tx^2)\,dx$$

مثال ۲۰: فرض کنید g تابعی همه جا پیوسته باشد، و $\int_{0}^{1}g(t)dt=1$، $f(x)=\int_{0}^{x}(x-t)^2g(t)dt$ مقدار $f''(1)$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $f''(1)=-1$ ۲) $f''(1)=-2$ ۳) $f''(1)=1$ ۴) $f''(1)=2$

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** با توجه به مطالب کتاب در مورد تعمیم فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$f(x)=\int_{0}^{x}(x-t)^2g(t)\,dt\Rightarrow f'(x)=(x-x)^2g(x)+\int_{0}^{x}2(x-t)\,g(t)\,dt=\int_{0}^{x}2(x-t)\,g(t)\,dt$$

$$f''(x)=2(x-x)g(x)+\int_{0}^{x}2g(t)\,dt=2\int_{0}^{x}g(t)\,dt\Rightarrow f''(1)=2\int_{0}^{1}g(t)\,dt=2$$

مثال ۲۱: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\int_{x}^{0}\sqrt{1+t^2}dt$ در نقطه‌ای به طول صفر برابر است با: (MBA ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=x+1$ ۲) $y+x=1$ ۳) $y=x$ ۴) $y+x=0$

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** با توجه به تابع داده شده در $x=0$ داریم: $f(0)=0$ و چون معادله خط مماس خواسته شده داریم:

$$f(x)=\int_{x}^{0}\sqrt{1+t^2}\,dt\Rightarrow f'(x)=-\sqrt{1+x^2}\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=m=-\sqrt{1+0}=-1$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط مماس}: y-0=-1(x-0)\Rightarrow y=-x\Rightarrow y+x=0$$

مثال ۲۲: مقدار مشتق عبارت $\int_{3x}^{2x^2+3}\sqrt{\cos t}dt$ در $x=0$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۰ ۴) ۳

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** با توجه به مطالب کتاب در رابطه با مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

$$f(x)=\int_{3x}^{2x^2+3}\sqrt{\cos t}\,dt\Rightarrow f'(x)=4x\sqrt{\cos(2x^2+3)}-3\sqrt{\cos 3x}\Rightarrow f'(0)=-3$$

مثال ۲۳: اگر $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{2+e^{-t}}{1+\tan^2 t}dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $(f^{-1})'(0)$ وجود ندارد.

☑ **پاسخ: گزینه «۲»**

$$f(x)=0\Rightarrow\int_{0}^{x}\frac{2+e^{-t}}{1+tg^2t}dt=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}\quad;\quad f'(x)=\frac{2+e^{-x}}{1+tg^2x}\Rightarrow f'(0)=3\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{1}{3}$$

مثال ۲۴: در مورد تابع $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{2+t^2}$، کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) f تابعی است اکیداً صعودی ۲) f تابعی است اکیداً نزولی

۳) تابع f دارای یک نقطه ماکزیمم مطلق است. ۴) تابع f دارای یک نقطه‌ی می‌نیمم مطلق است.

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** با توجه به گزینه‌ها چون بحث حول نقاط اکسترمم می‌باشد، لذا کافی است $f'(x)$ را مشخص کنیم، پس داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2+x^2}\times1-\frac{1}{2+(-x)^2}\times(-1)=\frac{2}{2+x^2}>0\Rightarrow \text{اکیداً صعودی است } f$$

مثال ۲۵: به ازای چه مقادیری از ثابت‌های b,a، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=1$. (عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $a=2$ ، $b=4$ ۲) $a=4$ ، $b=1$ ۳) $a=0$ ، $b=4$ ۴) $a=2$ ، $b=1$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم می‌باشد لذا با توجه به قضیه‌ی هوپیتال و مطالب مربوط به مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$$

اگر $b\neq 1$ باشد حاصل حد برابر صفر خواهد بود که خلاف فرض است. بنابراین $b=1$.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a}}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

پس $\frac{2}{\sqrt{a}}=1$ ، و در نتیجه $a=4$.

مثال ۲۶: مقدار $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b}\int_0^b e^{x^2-b^2}(x^2+1)dx$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $+\infty$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** حد داده شده از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است لذا با توجه به قضیه‌ی هوپیتال و فرمول مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\int_0^b e^{x^2-b^2}(x^2+1)dx}{b}=\lim_{b\to\infty}\frac{\int_0^b e^{x^2}(x^2+1)dx}{be^{b^2}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{b\to\infty}\frac{e^{b^2}(b^2+1)}{e^{b^2}(1+2b^2)}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۷: اگر $f(t)=\int_0^t\frac{\sin tx}{x}dx$ باشد، آن‌گاه $\frac{df}{dt}$ برابر کدام است؟ (عمران ـ سراسری و آزاد ۸۳)

۱) $t\sin t$ ۲) $\frac{\sin tx}{x}$ ۳) $\frac{2\sin t^2}{t}$ ۴) $\int_0^t\cos txdx$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»** با توجه به مطالب تعمیم مشتق‌گیری انتگرال داریم:

$$f(t)=\int_0^t\frac{\sin tx}{x}dx\Rightarrow\frac{df}{dt}=\frac{\sin t^2}{t}+\int_0^t\cos txdx=\frac{\sin t^2}{t}+\frac{\sin tx}{t}\Big|_0^t=\frac{2\sin t^2}{t}$$

مثال ۲۸: اگر $f(x)=x.\int_4^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}}$، خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ محور y ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

☑ **پاسخ : گزینه «۴»** ابتدا عرض نقطه‌ی تماس را به‌دست می‌آوریم و سپس با مشتق‌گیری از $F(x)$ ، شیب خط مماس را حساب می‌کنیم.

$$F(x)=x\int_4^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}}\Rightarrow F(2)=0\quad,\quad F'(x)=\int_4^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^3-7t}}+x\times\frac{2x}{\sqrt{x^6-7x^2}}\Rightarrow F'(2)=\frac{4}{3}$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه $x=2$ به‌صورت روبه‌رو در می‌آید:

$$y-0=\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$$

در محل تقاطع با محور y ها داریم $x=0$ ، و در نتیجه $y=\frac{-8}{3}$.

مثال ۲۹: اگر $g(b)=\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ آن‌گاه $\lim\limits_{b\to 1^-} g(b)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» صورت و مخرج کسر درون انتگرال را در $\sqrt{1+x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{\text{تابع زوج}}+\overbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}^{\text{تابع فرد}})dx=2\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{Arcsin}x\Big]_0^1=\pi$$

مثال ۳۰: اگر $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt[3]{1+t^2}dt$، آن‌گاه مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که از رابطه $\int_{1}^{x}\sqrt[3]{1+t^2}dt=0$ نتیجه می‌شود $x=1$، بنابراین داریم:

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

مثال ۳۱: مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_{1}^{x+h}e^{-t^2}dt-\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt}{h}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $-2xe^{-x^2}$ ۲) e^{-x^2} ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» چون حد از نوع $\frac{0}{0}$ مبهم است. لذا با استفاده از قضیه هوپیتال و مطالب کتاب در رابطه با مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

روش اول:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{1}^{x+h}e^{-t^2}dt-\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(x+h)^2}-0}{1}=e^{-x^2}$$

روش دوم: فرض کنید $F(x)=\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt$، در این صورت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_{1}^{x+h}e^{-t^2}dt-\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

حد اخیر همان $F'(x)$ می‌باشد.

$$F(x)=\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt\Rightarrow F'(x)=e^{-x^2}$$

مثال ۳۲: اگر g تابعی پیوسته و $f(x)=\int_{0}^{x}(x-t)g(t)dt$، آن‌گاه $f'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $xg(x)$ ۳) $2xg(x)$ ۴) $\int_{0}^{x}g(t)dt$

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از فرمول تعمیم یافته مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$f(x)=\int_{0}^{x}(x-t)g(t)dt\Rightarrow f'(x)=(x-x)g(x)+\int_{0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}(x-t)g(t)dt=\int_{0}^{x}g(t)dt$$

مثال ۳۳: تابع $F(x)=\int_{x}^{2x}e^{-t^2}dt$ به ازای کدام مقدار x بیشترین مقدار را دارد؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sqrt{\ln 8}$ ۲) $\sqrt{\ln 9}$ ۳) $\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$ ۴) $\sqrt{\frac{1}{2}\ln 3}$

پاسخ : گزینه «۳» چون می‌خواهیم اکسترمم تابع را به‌دست آوریم کافی است از تابع مشتق بگیریم و سپس مشتق را مساوی صفر قرار دهیم پس داریم:

$$F'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}\ ,\ F'(x)=0\Rightarrow 2e^{-4x^2}=e^{-x^2}\xrightarrow[\text{طرفین ضرب در}]{e^{+4x^2}}2=e^{3x^2}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\ln 2=3x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$$

با توجه به گزینه‌ها می‌توان گفت جواب باید $x=\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$ باشد، اما برای بررسی دقیق‌تر می‌توانید $f''(x)$ را تشکیل داده و ملاحظه کنید $f''<0$ و از ماکزیمم بودن نقطه‌ی $x=\sqrt{\frac{1}{3}\ln 2}$ مطمئن شوید.

مثال ۳۴: فرض کنیم $f(x)=\int_1^{Lnx}\sqrt{1+e^t}dt$. مقدار $(f^{-1})''(0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $e(1+e)^{-2}$ ۲) $e(1+e)^{-1}$ ۳) $e(1-e)^{-2}$ ۴) $e(1-e)^{-1}$

☑ **پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.** اگر فرمول مشتق دوم تابع معکوس یعنی $(f^{-1})''(y)=-\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$ را به خاطر داشته باشید، کمی راحت‌تر مسأله را حل می‌کنید با این حال فرض می‌کنیم این فرمول را به یاد ندارید. ابتدا دقت کنید که به ازای $x=e$، کران‌های بالا و پایین با هم برابر می‌شوند و خواهیم داشت $f(e)=0$ در نتیجه $f^{-1}(0)=e$ است. می‌دانیم که $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ است. در واقع می‌توان نوشت: $(f^{-1})'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$، که در سمت چپ، عمل ترکیب توابع مورد نظر است نه عمل ضرب آن‌ها، از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)(f^{-1})''(f(x))=\frac{0-f''(x)}{(f'(x))^2}\Rightarrow(f^{-1})''(f(x))=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$$

با جایگذاری $x=e$ داریم $f(e)=0$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$(f^{-1})''(0)=\frac{-f''(e)}{(f'(e))^3}$$

حالا کافی است $f'(e)$ و $f''(e)$ را حساب کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1+e^{Lnx}}=\frac{1}{x}\sqrt{1+x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}\sqrt{1+x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\times\frac{1}{x}$$

به ازای $x=e$ داریم $f''(e)=-\dfrac{\sqrt{1+e}}{e^2}+\dfrac{1}{2e\sqrt{1+e}}$ ، $f'(e)=\dfrac{1}{e}\sqrt{1+e}$ و با جایگذاری در فرمول $(f^{-1})''(0)$ خواهیم داشت:

$$(f^{-1})''(0)=-\frac{f''(e)}{(f'(e))^3}=-\frac{-\dfrac{\sqrt{1+e}}{e^2}+\dfrac{1}{2e\sqrt{1+e}}}{(\dfrac{1}{e}\sqrt{1+e})^3}$$

برای ساده‌تر کردن این کسر، صورت و مخرج را در $2e^3\sqrt{1+e}$ ضرب می‌کنیم:

$$(f^{-1})''(0)=-\frac{-2e(1+e)+e^2}{2(1+e)^2}=\frac{e(e+2)}{2(e+1)^2}$$

مثال ۳۵: مقدار $\lim\limits_{x\to0}x^{-3}\int_0^{x^2}e^{t^3}\sin t\,dt$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** چون حد از نوع $\dfrac{0}{0}$ مبهم است لذا با توجه به قضیه هوپیتال و مطالب ارائه شده در رابطه با مشتق گرفتن از انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{t^3}\sin t\,dt}{x^3}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^6}\sin x^2\times2x}{3x^2}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^6}\times2x^3}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}xe^{x^6}=0$$

مثال ۳۶: در صورتی‌که تابع f مخالف صفر و $x\neq0$، $f^2(x^3+1)=\int_0^{x^3+1}\dfrac{f(t)}{(t+1)^2}dt$، ضابطه $f(x)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\dfrac{1}{2(x+1)}+c$ ۲) $\dfrac{2}{x+1}+c$ ۳) $-\dfrac{1}{2(x+1)}+c$ ۴) $\dfrac{1}{2(x+1)^2}+c$

☑ **پاسخ: گزینه «۳»** سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده به‌دست می‌آید:

$$6x^2f(x^3+1)f'(x^3+1)=\frac{f(x^3+1)}{(x^3+2)^2}\times3x^2\Rightarrow f'(x^3+1)=\frac{1}{2(x^3+2)^2}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه اخیر در $3x^2$ خواهیم داشت:

$$3x^2f'(x^3+1)=\frac{3x^2}{2(x^3+2)^2}\Rightarrow\int3x^2f'(x^3+1)dx=\int\frac{3x^2}{2(x^3+2)^2}dx\Rightarrow f(x^3+1)=\frac{-1}{2(x^3+2)}+c$$

$$\Rightarrow f(x^3+1)=\frac{-1}{2((x^3+1)+1)}+c\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

روش دوم: در رابطه داده شده قرار می‌دهیم $u=x^3+1$، و سپس از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$f^2(u)=\int_0^u\frac{f(t)}{(t+1)^2}dt\Rightarrow2f(u)f'(u)=\frac{f(u)}{(u+1)^2}\Rightarrow f'(u)=\frac{1}{2(u+1)^2}\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

مثال ۳۷: اگر $\int_{\circ}^{x^{۲}} f(t)dt = x^{۲}(۱+x)$، مقدار $f(۲)$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $۱+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** مطابق فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم: $(\int_{\circ}^{g(x)} f(t)dt)' = g'(x).f(g(x))$

پس با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود: $۲xf(x^{۲}) = ۲x+۳x^{۲} \Rightarrow f(x^{۲}) = ۱+\frac{۳}{۲}x \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} f(۲) = ۱+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

مثال ۳۸: مقدار مشتق انتگرال $\frac{d}{dt}\int_{\circ}^{t} e^{(t-\tau)^{۲}}d\tau$ را محاسبه کنید. (مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $e^{t^{۲}}$ ۳) $e^{t^{۲}}-۱$ ۴) $e^{(t-\tau)^{۲}}$

☑ **پاسخ: گزینه «۲»**

$$\frac{d}{dt}\int_{\circ}^{t} e^{(t-\tau)^{۲}}d\tau = e^{(t-t)^{۲}}\times ۱+\int_{\circ}^{t} -۲(t-\tau)e^{(t-\tau)^{۲}}d\tau = ۱-(e^{(t-\tau)^{۲}})\Big|_{\circ}^{t} = ۱+(-۱+e^{t^{۲}}) = e^{t^{۲}}$$

مثال ۳۹: هرگاه $۵ \le x^{۲} \le ۱۹$، مقدار $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x^{۲}} f(t)dt$ به ازای $x=۴$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(۴)$ ۲) $۲f(۸)$ ۳) $۸f(۲)$ ۴) $۸f(۱۶)$

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** می‌دانیم: $\frac{d}{dx}(\int_{\circ}^{g(x)} f(t)dt) = g'(x).f(g(x))$

پس داریم: $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x^{۲}} f(t)dt = ۲xf(x^{۲}) \xlongequal{x=۴} ۸f(۱۶)$

مثال ۴۰: فرض کنید $f(x) = \int_{۱}^{x^{۲}}\frac{۱}{t}dt$ و $g(x) = ۲\int_{۱}^{x}\frac{۱}{t}dt$ رابطه بین $f(x)$ و $g(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(x)=g(x)$ ۲) $g(x)=۲f(x)$ ۳) $f(x)=۲g(x)$ ۴) $f(x)=(g(x))^{۲}$

☑ **پاسخ: گزینه «۱»** $g(x) = ۲\int_{۱}^{x}\frac{۱}{t}dt = ۲Lnt\Big|_{۱}^{x} = ۲Lnx-۲Ln۱ = ۲Lnx$ و $f(x) = \int_{۱}^{x^{۲}}\frac{۱}{t}dt = Lnt\Big|_{۱}^{x^{۲}} = Lnx^{۲}-Ln۱ = ۲Lnx$

مثال ۴۱: مقدار $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^{۳}}\int_{\circ}^{x^{۲}} \sin\sqrt{t}dt$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ: گزینه «۴»** با توجه به این‌که حد از نوع $\frac{\circ}{\circ}$ مبهم است لذا از قضیه‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم و ضمن حل از فرمول $(\int_{\circ}^{g(x)} f(t)dt)' = g'(x).f(g(x))$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\int_{\circ}^{x^{۲}}\sin\sqrt{t}dt}{x^{۳}} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\circ}\frac{۲x\sin\sqrt{x^{۲}}}{۳x^{۲}} = \lim_{x\to\circ}\frac{۲|x|}{۳x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\circ^{+}}\frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳} \\ \lim\limits_{x\to\circ^{-}}\frac{-۲x}{۳x} = \frac{-۲}{۳} \end{cases}$$

چون حد چپ و راست در $x=\circ$ با هم برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

مثال ۴۲: فرض کنید $f(x) = \int_{۱}^{x}(۱+t+t^{۲})^{n}dt$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است و تابع g طوری است که $g[f(x)] = x$، در این صورت $g'(\circ)$ برابر با کدام گزینه است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\circ$ ۲) ۱ ۳) ۳^{-n} ۴) ۳^{n}

☑ **پاسخ: گزینه «۳»** با توجه به فرض $g[f(x)] = x$، واضح است؛ g، وارون f است. بنابراین برای به‌دست آوردن $g'(\circ)$ از دستور مشتق وارون استفاده می‌کنیم:

$$g'(\circ) = (f^{-۱})'(\circ) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{(۱+x+x^{۲})^{n}\Big|_{x=۱}} = \frac{۱}{۳^{n}} = ۳^{-n}$$

مثال ۴۳: در صورتی که $f^{2}(x^{3}+1)=\int_{0}^{x^{3}+1}\frac{f(t)}{t^{2}+2t+1}dt$ و $f(0)=0$، $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{-1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2(x+1)^{2}}+\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2(x+1)^{2}}-\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ : گزینه «۱»** از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$2\times 3x^{2}f(x^{3}+1)f'(x^{3}+1)=\frac{f(x^{3}+1)}{(x^{3}+2)^{2}}\times 3x^{2}\Rightarrow f'(x^{3}+1)=\frac{1}{2(x^{3}+2)^{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x^{3}+1)=\frac{1}{2((x^{3}+1)+1)^{2}}\Rightarrow f'(u)=\frac{1}{2(u+1)^{2}}\Rightarrow f(u)=\frac{-1}{2(u+1)}+c$$

با توجه به این‌که $f(0)=0$ است، مقدار $c=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۴۴: اگر تابع f همه جا ناصفر و پیوسته باشد، $f^{3}(x)=2\int_{0}^{x}f^{3}(t)\frac{2t+4}{t^{2}+4t+27}dt$، $f(x)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $x^{2}+4x+27$ ۲) $Ln(x^{2}+4x+27)$ ۳) $\frac{2x+4}{x^{2}+4x+27}$ ۴) $\frac{x^{2}+4x+27}{2x+4}$

☑ **پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.** از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$3f^{2}(x)f'(x)=2f^{3}(x)\times\frac{2x+4}{x^{2}+4x+27}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x+4}{x^{2}+4x+27}$$

حال از طرفین رابطه اخیر انتگرال می‌گیریم، داریم:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{2x+4}{x^{2}+4x+27}dx\Rightarrow Ln(f(x))=Ln(x^{2}+4x+27)+c\Rightarrow f(x)=k(x^{2}+4x+27)$$

از طرفی با جایگذاری $x=0$ در رابطه داده شده در صورت سئوال نتیجه می‌شود $f(0)=0$ و بنابراین $k=0$ به‌دست می‌آید و این با صورت سئوال تناقض دارد، پس چنین تابعی که مقدارش غیرصفر باشد و در معادله‌ی مسأله صدق کند، وجود ندارد.

مثال ۴۵: با توجه به معادله $u=\int_{2}^{v}\frac{ds}{\sqrt{1+2s^{2}}}, v\geq 2$ مقدار $\frac{d^{3}v}{du^{3}}$ به ازای $v=3$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{\sqrt{19}}$ ۳) $2\sqrt{19}$ ۴) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

☑ **پاسخ : گزینه «۳»**

$$\frac{du}{dv}=\frac{1}{\sqrt{1+2v^{2}}}\Rightarrow\frac{dv}{du}=\sqrt{1+2v^{2}}\Rightarrow\frac{d}{du}(\sqrt{1+2v^{2}})=\frac{d}{dv}(\sqrt{1+2v^{2}}).\frac{dv}{du}=\frac{2v}{\sqrt{1+2v^{2}}}.\sqrt{1+2v^{2}}=2v$$

$$\frac{d^{3}v}{du^{3}}=\frac{d}{du}(2v)=\frac{d}{dv}(2v).\frac{dv}{du}=2\sqrt{1+2v^{2}}\xrightarrow{v=3}\frac{d^{3}v}{du^{3}}=2\sqrt{19}$$

مثال ۴۶: اگر به ازای $y>0$ تعریف کنیم $F(y)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin xy}{x(x^{2}+1)}dx$، آنگاه کدام گزینه غلط است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۶)

۱) $F''(y)-F(y)+\frac{\pi}{2}=0$ ۲) $F''(y)-F'(y)+F(y)=\frac{\pi}{2}$

۳) $F(y)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-y})$ ۴) $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin xy}{x^{2}+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-y}$

☑ **پاسخ : گزینه «۲»** هر چند هیچ‌کدام از گزینه‌ها به واگرا بودن $F(y)$ اشاره نکرده‌اند و طبق آن‌ها معلوم است که $F(y)$ همگراست اما برای رعایت دقت، همگرایی آن را نشان می‌دهیم. این‌کار به این دلیل انجام می‌شود که از انتگرال‌های ناسره‌ی واگرا نمی‌توانیم مشتق بگیریم. در $x=0$ فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد و با استفاده از هم‌ارزی سینوس داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x(x^{2}+1)}\sim\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x(x^{2}+1)}=y$$

پس در این نقطه، انتگرال ناسره نیست. همچنین وقتی $x\to+\infty$ داریم:

$$\left|\frac{\sin xy}{x(x^{2}+1)}\right|\leq\frac{1}{x^{3}+x}\leq\frac{1}{x^{3}}$$

درجه‌ی x^{3} بزرگتر از یک است، پس انتگرال $F(y)$ همگراست و حال می‌توانیم از آن مشتق بگیریم.

$$F'(y)=\int_0^\infty \frac{x\cos y}{x(x^2+1)}dx=\int_0^\infty \frac{\cos xy}{x^2+1}dx \Rightarrow F''(y)=\int_0^\infty \frac{-x\sin xy}{x^2+1}dx$$

$F''(y)$ و $F(y)$ هر دو شامل $\sin xy$ هستند. تفاضل آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$F''(y)-F(y)=\int_0^\infty \left(\frac{-x\sin xy}{x^2+1}-\frac{\sin xy}{x(x^2+1)}\right)dx=\int_0^\infty -\frac{\sin xy}{x^2+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^\infty -\frac{\sin xy}{x^2+1}\times\frac{x^2+1}{x}dx=-\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx$ انتگرال معروفی است که مقدار آن $\frac{\pi}{2}$ می‌شود. پس داریم:

$$F''(y)-F(y)=-\frac{\pi}{2}$$

پس گزینه (۱) صحیح است. در ضمن با حل معادله‌ی دیفرانسیل $F''(y)-F(y)=-\frac{\pi}{2}$ می‌توانیم تابع $F(y)$ را پیدا کنیم. چندجمله‌ای مشخصه‌ی معادله‌ی همگن به صورت $r^2-1=0$ است که ریشه‌هایش $r=\pm 1$ هستند، پس جواب عمومی معادله‌ی همگن به‌صورت $c_1e^{-y}+c_2e^{y}$ است و با توجه به وجود جمله‌ی ثابت $-\frac{\pi}{2}$ در سمت راست معادله‌ی ناهمگن، جواب ویژه‌ی آن هم $F_p(y)=A_0$ است. با جایگذاری این جواب در معادله دیفرانسیل ناهمگن داریم:

$F_p''(y)-F_p(y)=-\frac{\pi}{2}$، پس $0-A_0=-\frac{\pi}{2}$ در نتیجه $A_0=\frac{\pi}{2}$ است. در نهایت از مجموع جواب معادله همگن و جواب ویژه‌ی ناهمگن داریم:

$$F(y)=c_1e^{-y}+c_2e^{y}+\frac{\pi}{2}$$

از طرفی به ازای $y=0$ در نمایش انتگرالی $F(y)$ و $F'(y)$ داریم:

$$F(0)=\int_0^\infty (0)dx=0\ ,\quad F'(0)=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{tg}^{-1}x\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

با این جایگذاری‌ها در ضابطه‌ی $F(y)$ و $F'(y)$ ضرایب $c_1=0$ و $c_2=-\frac{\pi}{2}$ معلوم می‌شوند. در نتیجه داریم:

$$F(y)=-\frac{\pi}{2}e^{-y}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-y})$$

پس گزینه‌ی (۳) صحیح است. حالا می‌توانیم صحت گزینه‌ی (۴) را هم نشان دهیم:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin xy}{x^2+1}dx=-F''(y)=\frac{\pi}{2}-F(y)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(1-e^{-y})=\frac{\pi}{2}e^{-y}$$

حالا که گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) را ثابت کردیم، پس گزینه (۲) باید نادرست باشد.

مثال ۴۷: اگر تابع f چنان باشد که $x^2\cos \pi x=\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$ آن‌گاه $f(2)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) -16π ۲) -8 ۳) 8 ۴) 32

پاسخ: گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$2x\cos \pi x-\pi x^2\sin \pi x=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\xrightarrow{x=4} 8=\frac{1}{4}f(2)\Rightarrow f(2)=32$$

مثال ۴۸: اگر $f\left(\int_0^x \frac{e^t}{t^2+1}dt\right)=x$ و برای $f(0)=a, a\in\mathbb{R}$، $f'(0)$ بر حسب a برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{a^2+1}{e^a}$ ۲) $\frac{e^a}{a^2-1}$ ۳) $\frac{e^a}{a^2+1}$ ۴) $\frac{a^2-1}{e^a}$

پاسخ: گزینه «۱و۳» ابتدا توجه کنید به ازای $x=0$ در رابطه داده شده نتیجه می‌شود $f(0)=0$، بنابراین $a=0$ می‌باشد. لذا با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{e^x}{x^2+1}f'\left(\int_0^x \frac{e^t}{t^2+1}dt\right)=1\xrightarrow{x=0}\frac{e^0}{0+1}f'\left(\int_0^0 \frac{e^t}{t^2+1}dt\right)=1\Rightarrow f'(0)=1$$

در بین گزینه‌ها، گزینه (۱) و (۳) به ازای $a=0$ برابر ۱ می‌باشند، پس این دو گزینه می‌توانند جواب صحیح باشند.

مثال ۴۹: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این‌که حد داده شده از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است لذا با استفاده از قضیه هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{2xe^{x^2}}\right)+\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال ۵۰: اگر $f(x)=\int_{۲}^{۲x}\frac{dt}{t^{۳}-۷}$، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $y=x-۱$ ۲) $y=۲x-۲$ ۳) $y=x+۱$ ۴) $y=۲x+۱$

پاسخ : گزینه «۲» به ازای $x=۱$، مقدار $y=f(۱)=۰$ حاصل می‌شود.

$$f'(x)=\frac{۱}{(۲x)^{۳}-۷}\times ۲\Rightarrow f'(۱)=۲\Rightarrow y-۰=۲(x-۱)$$

مثال ۵۱: اگر $۲f(x)+۱=۳\int_{x}^{۱}f(t)dt$، آن‌گاه $f(-۱)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{۱}{۳}e^{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}e^{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}e^{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^{۳}$

پاسخ : گزینه «۳» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داده شده نتیجه می‌شود:

$$۲f'(x)=-۳f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow Lnf(x)=\frac{-۳}{۲}x+c'\Rightarrow f(x)=e^{-\frac{۳}{۲}x+c'}=ce^{-\frac{۳}{۲}x}$$

هرگاه در رابطه داده شده به جای x ها، یک قرار دهیم $f(۱)=\frac{-۱}{۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$ce^{\frac{-۳}{۲}}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow c=\frac{-۱}{۲}e^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{۲}e^{\frac{-۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۱}{۲}e^{۳}$$

مثال ۵۲: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و کران‌دار و $g(x)=\int_{x}^{۱}tf(t)dt$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}g(x)}{\sin x}$ کدام است؟ (ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to۰$ آن‌گاه $\sin x$ هم‌ارز با x است، لذا داریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}g(x)}{\sin x}\simeq\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}g(x)}{x}=\lim_{x\to۰}x\times g(x)$$

از طرفی، به دلیل پیوسته و کران‌دار بودن $f(x)$، حاصل $\lim_{x\to۰}g(x)=\int_{۰}^{۱}tf(t)dt$ یک عدد است و بنابراین پاسخ حد فوق برابر با $۰=$ عدد $\times ۰$ می‌شود.

مثال ۵۳: اگر $f:[۰,\frac{\pi}{۲}]\to\mathbb{R}$ پیوسته و در خارج از مبدأ صفر نشده و در $(f(x))^{۲}=\int_{۰}^{x}f(t)\frac{\sin t}{۳-\cos t}dt$ صدق کند در این‌صورت ضابطه‌ای f کدام گزینه است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $f(x)=\frac{۱}{۲}Ln(۳-\cos x)$ ۲) $f(x)=\frac{۱}{۲}Ln|\sin x-۳|$

۳) $f(x)=-\frac{۱}{۲}Ln(۳-\sin x)+\frac{۱}{۲}Ln۲$ ۴) $f(x)=\frac{۱}{۲}Ln(۳-\cos x)-\frac{۱}{۲}Ln۲$

پاسخ : گزینه «۴» از طرفین رابطه داده شده در صورت سؤال مشتق می‌گیریم، در این‌صورت داریم:

$$۲f(x)f'(x)=f(x).\frac{\sin x}{۳-\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sin x}{۳-\cos x}\xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}}f(x)=\frac{۱}{۲}Ln(۳-\cos x)+C$$

برای محاسبه مقدار مجهول C در معادله داده شده در صورت سوال $x=۰$ قرار می‌دهیم که نتیجه می‌شود $f(۰)=۰$، بنابراین داریم:

$$f(۰)=\frac{۱}{۲}Ln(۳-\cos ۰)+c=۰\Rightarrow c=\frac{-۱}{۲}Ln۲$$

مثال ۵۴ : به ازای چه مقادیری از ثابت‌های a و b مقدار حد $\lim_{x\to۰}\frac{۱}{bx-\sin x}\int_{۰}^{x}\frac{t^{۲}dt}{\sqrt{a+t}}=۱$ می‌باشد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) $a=۰,b=۱$ ۲) $a=۲,b=۱$ ۳) $a=۴,b=۱$ ۴) $a=۴,b=-۱$

پاسخ : گزینه «۳» حد داده شده به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است، از قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱}{bx-\sin x}\int_{۰}^{x}\frac{t^{۲}dt}{\sqrt{a+t}}=۱\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x^{۲}}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=۱$$

در حد اخیر وقتی $x\to۰$، صورت کسر برابر صفر است، پس باید مخرج کسر نیز وقتی $x\to۰$ برابر صفر باشد یعنی $b-\cos۰=۰$ و در نتیجه $b=۱$. که در اینصورت حد فوق به‌صورت مقابل در می‌آید.

$$\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x^{۲}}{\sqrt{a+x}}}{۱-\cos x}=۱\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x^{۲}}{\sqrt{a+x}}}{\frac{x^{۲}}{۲}}=۱\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{a}}=۱\Rightarrow a=۴$$

مثال ۵۵: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}\int_1^x \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{t}dt$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{2}}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to 1$، داریم $\dfrac{x^2}{x-1}\sim\dfrac{1}{x-1}$، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}\int_1^{x^2}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{t}dt=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}t)}{t}dt}{x-1}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin(\frac{\pi}{4}x^2)}{x^2}\times 2x}{1}=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

مثال ۵۶: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\text{Ln}x}\int_1^{x^2}\sqrt{t+3}\,dt$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2}\sqrt{t+3}dt}{\text{Ln}x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}\times 2x}{\frac{1}{x}}=4$$

مثال ۵۷: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\int_2^x\dfrac{\sqrt{2t}}{t^3-4}dt$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $2y+x-2=0$ ۲) $2y-x+2=0$ ۳) $2y-x+1=0$ ۴) $2y-2x+4=0$

پاسخ : گزینه «۲» واضح است که به ازای $x=2$ مقدار $y=0$ به‌دست می‌آید.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x}}{x^3-4}\Rightarrow f'(2)=\frac{\sqrt{4}}{8-4}=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

معادله خط مماس : $y=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow 2y-x+2=0$

مثال ۵۸: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}\sin t\,dt)$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t\,dt}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

مثال ۵۹: اگر $f(x)=(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ و $g(x)=\int_0^1\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$، آن‌گاه مقدار $f(x)+g(x)$، کدام است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به نوع انتگرال و سؤال، به نظر می‌رسد باید از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنیم، از هر یک از انتگرال‌ها مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$g'(x)=0+\int_0^1\frac{-2x(1+t^2)e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt=-2\int_0^1 xe^{-x^2-x^2t^2}dt=-2\int_0^1 xe^{-x^2}.e^{-x^2t^2}dt=-2\int_0^1 xe^{-x^2}.e^{-(xt)^2}dt$$

با تغییر متغیر $xt=u$، آن‌گاه $xdt=du$، از طرفی به ازای $t=0$، آن‌گاه $u=0$ و به ازای $t=1$، آن‌گاه $u=x$ و لذا داریم:

$$g'(x)=-2\int_0^x e^{-x^2}.e^{-u^2}.du=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}.du$$

چون می‌توان نوشت: $\int_0^x e^{-u^2}du=\int_0^x e^{-t^2}dt$، پس داریم:

$$f'(x)+g'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=0$$

بنابراین $f(x)+g(x)$، به ازای هر x همواره برابر با عددی ثابت است. مثلاً x می‌تواند برابر با صفر باشد و لذا داریم:

$$f(0)+g(0)=(\int_0^0 e^{-t^2})^2+\int_0^1\frac{e^0}{1+t^2}dt=0+\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=[\text{Arctgt}]_0^1=\text{Arctg}1=\frac{\pi}{4}\qquad (*)$$

نکته تستی: از همان ابتدا هم می‌توانستیم، مقدار $f(۰)+g(۰)$ را حساب کرده و به راحتی به جواب برسیم! چون گزینه‌ها به x بستگی نداشتند و برای هر x برقرار هستند. بنابراین از ابتدا می‌شد، مرحله (*) را نوشت و به گزینه (۱) رسید!

مثال ۶۰: اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و کران‌دار باشد و $g(x)=\int_x^{۱} tf(t)dt$، آن‌گاه $\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}g(x)}{\sin x}$، برابر با کدام گزینه است؟ (ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» در $x\to ۰$، هم‌ارزی $x\sim \sin x$ را داریم، بنابراین حد خواسته شده به‌صورت $\lim_{x\to ۰} xg(x)$ می‌شود. از طرفی $\lim_{x\to ۰} g(x)=\int_۰^{۱} tf(t)dt$، برابر یک عدد ثابت است، بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر با **صفر** است.

مثال ۶۱: حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۳}}\int_۰^{x^{۲}} tg\sqrt{t}dt$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) ∞

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^{x^{۲}} tg\sqrt{t}dt}{x^{۳}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{tg\sqrt{x^{۲}}.۲x}{۳x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲tg|x|}{۳x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to ۰}\frac{۲|x|}{۳x}=\begin{cases}\frac{۲}{۳} & ; x\to ۰^{+}\\ \frac{-۲}{۳} & ; x\to ۰^{-}\end{cases}$$

پس حد مورد نظر وجود ندارد. اگر طراح سؤال فقط حد راست را می‌خواست $\frac{۲}{۳}$ جواب حد بود.

مثال ۶۲: فرض کنید $F(x)=\int_x^{x^{۲}}\frac{dt}{te^{tx}}$ در این صورت $F'(x)$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{x}(۲e^{-x^{۳}}-۲e^{-x^{۲}})$
۲) $\frac{۱}{x^{۲}}(۲e^{-x^{۳}}-e^{-x^{۲}})$
۳) $\frac{۱}{x^{۲}}(e^{-x^{۳}}-xe^{-x^{۲}})$
۴) $\frac{۱}{x}(۲e^{-x^{۳}}-e^{-x^{۲}})$

پاسخ : گزینه «۱»

$$F'(x)=\frac{۲x}{x^{۲}e^{x^{۳}}}-\frac{۱}{xe^{x^{۲}}}+\int_x^{x^{۲}}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{۱}{te^{tx}})dt=\frac{۲}{xe^{x^{۳}}}-\frac{۱}{xe^{x^{۲}}}+\int_x^{x^{۲}}\frac{-۱}{e^{tx}}dt=\frac{۲}{xe^{x^{۳}}}-\frac{۱}{xe^{x^{۲}}}+\int_x^{x^{۲}}(-e^{-tx})dt$$

$$=\frac{۲}{xe^{x^{۳}}}-\frac{۱}{xe^{x^{۲}}}+\frac{۱}{x}e^{-tx}\Big|_x^{x^{۲}}=\frac{۲}{xe^{x^{۳}}}-\frac{۱}{xe^{x^{۲}}}+\frac{۱}{x}e^{-x^{۳}}-\frac{۱}{x}e^{-x^{۲}}=\frac{۱}{x}(۲e^{-x^{۳}}-۲e^{-x^{۲}})$$

مثال ۶۳: شیب خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\int_۱^{x^{۲}}\frac{dt}{۱+Lnt}$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱-
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴» شیب خط قائم (m') بر نمودار تابع f برابر است با $m'=-\frac{۱}{m}$ (که m شیب خط مماس بر نمودار تابع f می‌باشد). برای محاسبه‌ی m باید از قاعده‌ی مشتق از انتگرال استفاده کنیم:

$$m=f'(x)=۲x\times\frac{۱}{۱+Lnx^{۲}}\overset{x=۱}{=\!=}\frac{۲}{۱+Ln۱}=۲\Rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

مثال ۶۴: حاصل $\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x})^{۲۰}\int_{x^{۵}}^{۰}(\sin t^{۳})dt$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) ۰
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_{x^{۵}}^{۰}\sin(t^{۳})dt}{x^{۲۰}}\to\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-۵x^{۴}\sin x^{۱۵}}{۲۰x^{۱۹}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(-۵x^{۴})(x^{۱۵})}{۲۰x^{۱۹}}=-\frac{۱}{۴}$$

مثال ۶۵: اگر $y = x^{\int_1^x e^{-t^2}dt}$، آن‌گاه مشتق y در $x=1$ برابر است با: (صنایع سیستم ـ سراسری ۷۳، ژئوفیزیک و هواشناسی ـ آزاد ۸۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) مشتق ندارد.

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این که؛ x به توانِ یک عبارت بر حسب x رسیده است، لذا لازم است؛ از طرفین Ln بگیریم:

$$\mathrm{Ln}y = \mathrm{Ln}(x^{\int_1^x e^{-t^2}dt}) \Rightarrow \mathrm{Ln}y = (\int_1^x e^{-t^2}dt)\mathrm{Ln}x \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = (1\times e^{-x^2} - 0)\mathrm{Ln}x + \frac{1}{x}(\int_1^x e^{-t^2}dt)$$

$$\Rightarrow y' = y[(e^{-x^2})(\mathrm{Ln}x) + \frac{1}{x}(\int_1^x e^{-t^2}dt)] \Rightarrow y'(1) = y(1)[e^{-1}\times \mathrm{Ln}1 + \frac{1}{1}(\int_1^1 e^{-t^2}dt)] = 0 + 0 = 0$$

مثال ۶۶: اگر $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\mathrm{Ln}t}{xt^2+4x}dt$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۸۹)

۱) $f'(2) = \frac{\mathrm{Ln}2}{10}$ ۲) $f'(2) = \frac{2\mathrm{Ln}2}{5}$ ۳) $10f'(2) + 5f(2) = 2\mathrm{Ln}2$ ۴) $f'(2) + 10f(2) = 2\mathrm{Ln}2$

پاسخ : گزینه «۳» باید از قاعده‌ی تعمیم مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنیم، برای این منظور داریم:

$$f'(x) = \frac{2x\mathrm{Ln}x^2}{x(x^2)^2+4x} + \int_1^{x^2}\frac{-(\mathrm{Ln}t)(t^2+4)}{x^2(t^2+4)^2}dt = \frac{4x\mathrm{Ln}x}{x(x^4+4)} - \int_1^{x^2}\frac{\mathrm{Ln}t}{x^2(t^2+4)}dt = \frac{4\mathrm{Ln}x}{x^4+4} - \frac{1}{x}\underbrace{\int_1^{x^2}\frac{\mathrm{Ln}t}{x(t^2+4)}}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4\mathrm{Ln}x}{x^4+4} - \frac{1}{x}f(x) \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها باید x=2 قرار دهیم}} f'(2) = \frac{4\mathrm{Ln}2}{2^4+4} - \frac{1}{2}f(2) \Rightarrow \mathbf{f'(2) = \frac{\mathrm{Ln}2}{5} - \frac{1}{2}f(2)}$$

مثال ۶۷: حاصل $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{20}\int_{x^5}^{0}\sin(t^2)dt$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۹)

۱) 0 ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^5}^{0}\sin(t^3)dt}{x^{20}} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to 0}\frac{-5x^4\sin x^{15}}{20x^{19}} = \lim_{x\to 0}\frac{(-5x^4)(x^{15})}{20x^{19}} = -\frac{1}{4}$$

مثال ۶۸: اگر $f(x) = \int_0^{\sin x} xe^{-t^2}dt$، آن‌گاه $f'(\pi)$ چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸ و معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) $e-\pi$ ۴) $e+\pi$

پاسخ : گزینه «۲»

$$f'(x) = xe^{-\sin^2 x}\cos x + \int_0^{\sin x}\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-t^2})dt = xe^{-\sin^2 x}\cos x + \int_0^{\sin x}e^{-t^2}dt \Rightarrow f'(\pi) = \pi e^{-\sin^2\pi}\cos\pi + \underbrace{\int_0^{\sin\pi}e^{-t^2}dt}_{\text{صفر}} = -\pi$$

مثال ۶۹: مقدار $\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x\frac{\sin t}{t}dt$ برابر است با: (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{\sin 3}{3}$ ۳) $\sin 3$ ۴) موجود نیست

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا تغییر متغیر مقابل را در نظر می‌گیریم: $x-3=u \to x=u+3 \ ,\ x\to 3 \Rightarrow u\to 0$

با جایگذاری تغییر متغیر فوق در عبارت حد داریم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{u\to 0}\frac{u+3}{u}\int_3^{u+3}\frac{\sin t}{t}dt = \cancel{\lim_{u\to 0}\int_3^{u+3}\frac{\sin t}{t}}^{\,0}dt + \lim_{u\to 0}\frac{3}{u}\int_3^{u+3}\frac{\sin t}{t}dt = 0 + \frac{0}{0}$$

حد دوم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است لذا با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{u\to 0}\frac{3}{u}\int_3^{u+3}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{u\to 0}\frac{3\times\frac{\sin(u+3)}{u+3}}{1} = \frac{3\sin 3}{3} = \sin 3$$

مثال۷۰: فرض کنیم $f(x)=\int_0^x e^{x-t^2}dt$، در صورتی که $g=f^{-1}$، مقدار $g''(0)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ : گزینه «۱» هرگاه تابع f در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر و $f(x)=b$ باشد آن‌گاه مشتق تابع f^{-1} در b برابر است با: $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$

بنابراین داریم:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{e^{x-x^2}+\int_0^x e^{x-t^2}dt}=\frac{1}{e^{x-x^2}+f(x)}\Rightarrow g'(f(x))=\frac{1}{e^{x-x^2}+f(x)} \qquad (1)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$f'(x)g''(f(x))=-\frac{(e^{x-x^2})(1-2x)+f'(x)}{(e^{x-x^2}+f(x))^2} \qquad (2)$$

می‌دانیم:

$$f'(0)=e^{0+0}+\int_0^0 e^{x-t^2}dt=1 \quad \text{و} \quad f(0)=\int_0^0 e^{x-t^2}dt=0$$

بنابراین به ازای $x=0$ رابطه (۲) به‌صورت مقابل می‌باشد.

$$1\times g''(f(0))=-\frac{e^0(1-0)+f'(0)}{(e^0+f(0))^2}=-\frac{1+1}{(1+0)^2}=-2$$

مثال۷۱: اگر $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+h}5\cos(t^2)dt+\int_x^1 5\cos(t^2)dt}{h}$ آن‌گاه $f(\sqrt{\pi})$ برابر است با: (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\infty$ ۲) -5 ۳) 5 ۴) $+\infty$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{x+h}5\cos(t^2)dt+\int_x^1 5\cos(t^2)dt}{h}=\frac{\int_1^x 5\cos(t^2)dt-\int_1^x 5\cos(t^2)dt}{0}=\frac{0}{0}$$

لذا با استفاده از هوپیتال و مشتق‌گیری از صورت و مخرج نسبت به متغیر h داریم:

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1\times 5\cos(x+h)^2+0}{1}=5\cos x^2 \Rightarrow f(\sqrt{\pi})=5\cos(\sqrt{\pi})^2=-5$$

توجه شود که مشتق عبارت دوم در صورت کسر، نسبت به متغیر h برابر صفر است و برای عبارت اول داریم: $(x+h)'5\cos(x+h)^2=1\times 5\cos(x+h)^2$

مثال۷۲: مفروض بر این‌که $S(x)=\int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt$ دارای دو نقطه‌ی بحرانی در بازه $[1,2/4]$ باشد و یکی از نقاط بحرانی کمینه‌ی نسبی بوده، دیگری بیشینه‌ی نسبی باشد، کمینه‌ی نسبی در کدام x اتفاق می‌افتد؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۰)

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2

پاسخ : گزینه «۴» برای یافتن نقاط اکسترمم، مشتق تابع $S(x)$ را محاسبه و برابر صفر قرار می‌دهیم، لذا داریم:

$$S'(x)=\sin\frac{\pi x^2}{2}=0 \Rightarrow \frac{\pi x^2}{2}=k\pi \Rightarrow x^2=2k \Rightarrow x=\sqrt{2k}$$

فقط ریشه‌های $x=\sqrt{2}$ و $x=2$ در بازه‌ی $[1,2/4]$ عددی مثبت دارند. از طرفی مقدار $S''(x)$ به ازای $x=2$ عددی مثبت خواهد شد و لذا در نقطه‌ی $x=2$ کمینه نسبی اتفاق می‌افتد.

مثال۷۳: اگر $f(x)=\int_1^x\frac{dt}{1+t^3}$، خط قائم برنمودار تابع f در نقطه $x=1$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا شیب خط قائم بر نمودار تابع f را در نقطه $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\left(\int_1^x\frac{dt}{1+t^3}\right)'=\frac{1}{1+x^3} \quad , \quad y'(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \to m_{\text{قائم}}=-\frac{1}{y'(1)}=-2$$

$$x=1 \to f(1)=\int_1^1\frac{dt}{1+t^3}=0$$

لذا معادله خط قائم به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$y-y_0=m_{\text{قائم}}(x-x_0) \Rightarrow y-0=-2(x-1) \to y=-2x+2 \xrightarrow[\text{تلاقی با محور }y\text{ ها}]{x=0} y=2$$

مثال ۷۴: مقدار حد عبارت زیر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام از هوپیتال استفاده می‌کنیم، در هنگام استفاده از هوپیتال برای مشتق‌گیری از صورت کسر از تعریف مشتق انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^3}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^4+1}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

مثال ۷۵: اگر $y=\frac{1}{3x}\int_1^{x^3}\cos(t^2)dt$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $xy'+y=x^2\sin(x^6)$ ۲) $xy'+y=x^2\cos(x^6)$ ۳) $xy'-y=3x^2\cos(x^6)$ ۴) $xy'-y=3x^2\sin(x^6)$

پاسخ : گزینه «۲»

$$y=\frac{1}{3x}\int_1^{x^3}\cos(t^2)dt\Rightarrow 3xy=\int_1^{x^3}\cos(t^2)dt$$

از طرفین رابطه بالا مشتق می‌گیریم، لذا داریم:

$$3y+3xy'=\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\cos(t^2)dt\Rightarrow 3(y+xy')=(x^3)'\cos((x^3)^2)-(1)'\cos(1^2)\Rightarrow 3(y+xy')=3x^2\cos(x^6)\Rightarrow y+xy'=x^2\cos(x^6)$$

مثال ۷۶: اگر $f(x)=\int_{e^x}^{x^2}(x+t)dt$ آن‌گاه: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $f'(0)=-e$ ۲) $f'(0)=-2$ ۳) $f'(0)=2$ ۴) $f'(0)=e$

پاسخ : گزینه «۲» سؤال بسیار ساده‌ای است! برای تابع داده شده داریم:

$$f'(x)=(2x)(x+x^2)-e^x(x+e^x)+(x^2-e^x)$$

برای مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ داریم:

$$f'(0)=0-e^0(0+e^0)+(0-e^0)=-1-1=-2$$

درسنامه ۹: معرفی توابع گاما و بتا

مثال ۱: حاصل $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2k^2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{k^2}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2k}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{k}$

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که می‌بینید تابع زیر انتگرال خیلی به تعریف تابع گاما شبیه نیست. بیایید به فکر نزدیک کردن آن به فرم مطلوب باشیم! اولین مشکل که در حدود بالا و پایین انتگرال وجود دارد به راحتی حل می‌شود؛ چون تابع زیر انتگرال زوج است، پس می‌توان گفت $I=2\int_0^{\infty} e^{-k^2x^2}dx$. اما هنوز در توان e، به جای $-x$ عبارت $-k^2x^2$ وجود دارد و این مشکل را هم باید حل کنیم. واضح است تغییر متغیر $k^2x^2=t$ اولین انتخاب برای رهایی از این مخمصه است!

$$k^2x^2=t \Rightarrow x=\frac{1}{k}\sqrt{t} \Rightarrow dx=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\right)=\frac{1}{2k}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

با جایگزینی در انتگرال داریم:

$$I=2\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{2k}t^{-\frac{1}{2}}dt\right)=\frac{1}{k}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{k}\int_0^{\infty} t^{(\frac{1}{2}-1)}e^{-t}dt$$

خب به راحتی معلومه $\alpha=\frac{1}{2}$ و این یعنی حاصل انتگرال فوق برابر با $\frac{1}{k}\Gamma(\frac{1}{2})$ می‌شود و قطعاً شما بهتر از من می‌دانید $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و بنابراین $I=\frac{\sqrt{\pi}}{k}$.

مثال ۲: حاصل $\int_0^{\infty} t^2 2^{-t}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{2!}{\ln 2}$ ۲) $\frac{2!}{(\ln 2)^2}$ ۳) $\frac{2!}{(\ln 2)^3}$ ۴) $\frac{2!}{(2\ln 2)^2}$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از خاصیت فوق، در این سؤال $\alpha=3$ و $p=2$، پس داریم:

$$\int_0^{\infty} t^2 2^{-t}dt=\frac{\Gamma(3)}{(\ln 2)^3}=\frac{\Gamma(2+1)}{(\ln 2)^3}=\frac{\mathbf{2!}}{\mathbf{(\ln 2)^3}}$$

مثال ۳: حاصل $\int_0^{\infty} x^3e^{-x}dx$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) ۲۴ ۴) $2\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» انتگرال فوق تابع گاما به ازای $n=4$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

مثال ۴: مقدار $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\pi^3 \ln x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$ ۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۴) $\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت زیر انتگرال را به صورت $\int_0^1 \frac{dx}{\pi\times\sqrt{\pi}\times\sqrt{-\ln x}}$ می‌نویسیم؛ برای استفاده از خاصیت فوق، توجه کنید در این سؤال، $s=0$ و $n=\frac{-1}{2}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}=\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{(0+1)^{\frac{-1}{2}+1}}=\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\pi}$$

مثال ۵ (سخت): با توجه به این که $\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^p}dt = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2})}$ و $0 < p < 1$، مقدار $I = \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \cos\sqrt{x^3}dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2\Gamma(\frac{1}{3})}$ ۲) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$ ۴) $\frac{-\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مقدار خواسته شده، به نظر می‌رسد باید $\cos\sqrt{x^3}$ را به فرم $\cos t$ تبدیل کنیم. برای این کار از تغییر متغیر $\sqrt{x^3} = t$ و یا $x^3 = t^2$ استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt \Rightarrow dx = (\frac{2t}{3}dt)\times\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x=\sqrt[3]{t^2}} dx = (\frac{2t}{3}dt)[\frac{1}{(\sqrt[3]{t^2})^2}] = (\frac{2}{3}t)(\frac{1}{t^{\frac{4}{3}}})dt \Rightarrow dx = \frac{2}{3}(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}})dt$$

با جایگذاری متغیرهای جدید در انتگرال I داریم:

$$I = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \cos\sqrt{x^3}dx = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \cos t(\frac{2}{3}\times\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}})dt = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}}}dt$$

با توجه به تساوی داده شده در انتگرال اخیر، $p = \frac{1}{3}$ و لذا داریم:

$$I = \frac{\pi}{2\Gamma(\frac{1}{3})\cos(\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2})} = \frac{\pi}{2\Gamma(\frac{1}{3})\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

مثال ۶: می‌دانیم تابع بتا به‌صورت $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$، تعریف شده است. حاصل $I = \int_0^2 u^{\frac{1}{2}}(2-u)^{\frac{5}{2}}du$ بر حسب تابع بتا کدام است؟

۱) $2\beta(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ ۲) $2^3\beta(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$ ۳) $2^4\beta(\frac{3}{2},\frac{7}{2})$ ۴) $2^4\beta(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$

پاسخ: گزینه «۳» این تست را با استفاده از فرمول مقابل پاسخ می‌دهیم:

$$\int_a^b (u-a)^{x-1}(b-u)^{y-1}du = (b-a)^{x+y-1}\beta(x,y)$$

در این سؤال $a = 0$، $b = 2$، $x = \frac{3}{2}$ و $y = \frac{7}{2}$، بنابراین داریم:

$$\int_0^2 u^{\frac{1}{2}}(2-u)^{\frac{5}{2}}du = (2-0)^{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}-1}\beta(\frac{3}{2},\frac{7}{2}) = \mathbf{2^4\beta(\frac{3}{2},\frac{7}{2})}$$

توضیح: البته حفظ کردن فرمول ابتدایی ممکن است برای داوطلبان کمی سخت باشد، اما توجه کنید با همان تعریف تابع بتا نیز می‌توان انتگرال خواسته شده را حساب کرد. برای این منظور اگر در انتگرال از تغییر $u = 2t$، استفاده کنیم، داریم:

$$I = \int_0^1 (2t)^{\frac{1}{2}}(2-2t)^{\frac{5}{2}}(2dt) = \int_0^1 (2^{\frac{1}{2}})(t^{\frac{1}{2}})2^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{5}{2}}(2dt) = (2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1})\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}})(1-t)^{\frac{5}{2}}dt = 2^4\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}})(1-t)^{\frac{5}{2}}dt$$

با توجه به تعریف تابع بتا در این سؤال $m-1 = \frac{1}{2}$ و لذا $m = \frac{3}{2}$ و همچنین $n-1 = \frac{5}{2}$ و لذا $n = \frac{7}{2}$، بنابراین حاصل انتگرال برابر است با: $\mathbf{I = 2^4\beta(\frac{3}{2},\frac{7}{2})}$.

مثال ۷: مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos^5 t\,dt$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) ۶۰ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) ۳۶۰ ۴) $\frac{1}{360}$

پاسخ: **گزینه «۲»** برای حل این انتگرال از خواص تابع بتا استفاده می‌کنیم:

یادآوری: $\Gamma(m) = (m-1)!$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}t\cos^{2n-1}tdt = \frac{1}{2}\beta(m,n) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos^5 tdt = \frac{1}{2}\beta(3,3) = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2}\frac{2!\times 2!}{5!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

مثال ۸: با توجه به حاصل $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$ مقدار $\int_0^{\infty} x^6.e^{-x}dx$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۷۲۰

پاسخ: **گزینه «۴»** با توجه به تعریف تابع گاما، انتگرال مورد نظر برابر $\Gamma(7)$ می‌باشد و داریم:

$$\Gamma(7) = 6! = 720$$

مثال ۹: اگر $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}}e^{-x}dx$، مقدار آن چقدر است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) ∞ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب ارائه شده در رابطه با تابع گاما می‌دانیم $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ است.

مثال ۱۰: انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\pi$ ۲) صفر ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به مطالب مربوط به تابع گاما داریم:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

مثال ۱۱: مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹ و نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\sqrt{2\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۴) $2\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل ابتدا باید از تغییر متغیر $u=-Lnx$ استفاده کنیم و سپس با توجه به رابطه تابع گاما به ادامهٔ حل می‌پردازیم:

$$-Lnx=u \Rightarrow -\frac{dx}{x}=du \Rightarrow dx=-xdu \quad , \quad -Lnx=u \Rightarrow x=e^{-u}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}=\int_{+\infty}^0 \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

مثال ۱۲: حاصل $\int_0^\infty e^{-t}\cos^2 t\,dt$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $0/4$ ۲) $0/6$ ۳) $0/7$ ۴) $0/8$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos^2 tdt=\int_0^\infty e^{-t}\times\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}(\int_0^\infty e^{-t}dt+\int_0^\infty e^{-t}\cos 2tdt)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{1+2^2})=0/6$$

در محاسبه انتگرال دوم از فرمول $\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt=\frac{s}{s^2+a^2}$ استفاده کرده‌ایم. (تبدیل لاپلاس تابع کسینوس)

مثال ۱۳: می‌دانیم $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$، مقدار انتگرال $\int_0^1 x^2(Ln\frac{1}{x})^3dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{3^3}\Gamma(3)$ ۲) $\frac{1}{3^3}\Gamma(4)$ ۳) $\frac{1}{3^4}\Gamma(3)$ ۴) $\frac{1}{3^4}\Gamma(4)$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\int_0^1 x^2(Ln\frac{1}{x})^3dx=\int_0^1 x^2(-Lnx)^3dx=\frac{\Gamma(4)}{3^4}$$

یادآوری: در محاسبه انتگرال فوق از فرمول روبرو استفاده کرده‌ایم.

$$\int_0^1 x^s(-Lnx)^n dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(s+1)^{n+1}}$$

مثال ۱۴: کدام گزینه در مورد $I_n=\int_0^1 Ln^n xdx$ درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) I_n واگراست. ۲) I_n همگرا به $(-1)^n n!$ است. ۳) I_n همگرا به $(-1)^n n$ است. ۴) I_n همگرا به $(-1)^n$ است.

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\int_0^1(-Lnx)^n dx=\Gamma(n+1)$ پس داریم:

$$\int_0^1(Lnx)^n dx=(-1)^n\Gamma(n+1)=(-1)^n n!$$

مثال ۱۵: مقدار انتگرال $\frac{2}{3}\int_0^9 \sqrt{\frac{9-x}{x}}$ کدام است؟ (نساجی ـ آزاد ۸۶)

۱) 2π ۲) π ۳) 3π ۴) 6π

پاسخ: گزینه «۳» سؤال را به دو روش جواب می‌دهیم:

روش اول: ابتدا از تغییر متغیر $x = 9\sin^2 t$ و $t \ge 0$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx = 18\sin t\cos t dt$ است.

$$I = \frac{2}{3}\int_0^9 \sqrt{\frac{9-x}{x}}dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9-9\sin^2 t}{9\sin^2 t}}(18\sin t\cos t)dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 3\pi$$

روش دوم: از خواص تابع گاما استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{2}{3}\int_0^1 (9-x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(9-0)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1} \times \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} = 6\times\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}}{1!} = 3\pi$$

مثال ۱۶: تابع f به‌صورت $f(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ تعریف شده است، اگر بدانیم مقدار $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-2Lnx}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ ۴) $\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» بطور کلی می‌دانیم $\int_0^1 (-Lnx)^n dx = \Gamma(n+1)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$، بنابراین داریم:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-2Lnx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (-Lnx)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(\frac{-1}{2}+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

مثال ۱۷: حاصل $I = \int_0^1 x^{n-1}(Lnx)^\alpha dx$، برابر کدام گزینه است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) $(-1)^\alpha \frac{\alpha!}{n^{\alpha+1}}$ ۲) $\frac{\alpha!}{n^{\alpha+1}}$ ۳) $(-1)^\alpha \frac{\alpha!}{n^\alpha}$ ۴) $\frac{\alpha!}{n^\alpha}$

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $t = -Lnx$، داریم:

$$t = -Lnx \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}dt \quad , \quad x = 0 \Rightarrow t = -Ln0^+ = +\infty \ , \ x = 1 \Rightarrow t = -Ln1 = 0$$

بنابراین انتگرال اخیر به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I = \int_{+\infty}^0 (e^{-t})^{n-1}(-t)^\alpha(-e^{-t}dt) = \int_{+\infty}^0 (e^{-t})^{n-1}.e^{-t}(-1)(-1)^\alpha (t)^\alpha dt$$

$$= \int_0^{+\infty}(e^{-tn+t-t})(-1)^\alpha(t^\alpha)dt = \int_0^{+\infty}e^{-tn}.(-1)^\alpha t^\alpha dt = (-1)^\alpha\int_0^{+\infty}e^{-tn}t^\alpha dt = (-1)^\alpha\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}} = (-1)^\alpha\frac{\alpha!}{n^{\alpha+1}}$$

مثال ۱۸: حاصل $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$، کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{2^n\times n!}(\frac{\pi}{2})$ ۲) $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n-1}\times n!}(\frac{\pi}{2})$ ۳) $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n(n+1)!}(\frac{\pi}{2})$ ۴) $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}(\frac{\pi}{2})$

پاسخ: گزینه «۴» از تغییر متغیر $x = tg\theta$، استفاده می‌کنیم و داریم:

$$x = tg\theta \Rightarrow dx = (1+tg^2\theta)d\theta \quad , \quad x = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \ , \ x = +\infty \Rightarrow tg\theta = +\infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+tg^2\theta)d\theta}{(tg^2\theta+1)^{n+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+tg^2\theta)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\frac{1}{\cos^2\theta})^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta d\theta$$

اگر انتگرال فوق را با تابع بتا مقایسه کنیم، داریم:

$$2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ , \ 2y-1 = 2n \Rightarrow y = \frac{2n+1}{2} = n+\frac{1}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$I = \frac{1}{2}\beta(x,y) = \frac{1}{2}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+n+\frac{1}{2})}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2\Gamma(1+n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n!}[\Gamma(n+\frac{1}{2})]$$

اما برای محاسبه‌ی $\Gamma(n+\frac{1}{2})$، داریم:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \Gamma(n-\frac{1}{2}+1) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2}+1) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})$$

به همین ترتیب اگر ادامه دهیم $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}(\sqrt{\pi})$$

ممکن است برای شما این سؤال پیش بیاید که جملات تا انتها، یعنی؛ $\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ چگونه نوشته شدند، جواب این است:

این جملات در واقع $[n-(n-\frac{1}{2})]\Gamma[n-(n-\frac{1}{2})][n-(n-\frac{3}{2})]\times\cdots$ هستند.

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}}{2n!}[(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}]=\frac{\pi}{2n!}[(\frac{2n-1}{2})(\frac{2n-3}{2})\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}]=\frac{\pi}{2n!}[\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n}]\Rightarrow \mathbf{I=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n\times n!}(\frac{\pi}{2})}$$

نکته تستی: راه حل فوق بسیار سخت و زمان‌بر است، یک روش جالب و البته زیبا، قرار دادن $n=1$، در انتگرال و گزینه‌ها است. به ازای $n=1$، انتگرال $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$، را داریم. اگر I_2 را حساب کنیم، می‌توانیم حاصل گزینه‌ها را هم به ازای $n=2$ نیز حساب کرده و بعد ببینیم کدام گزینه حاصلش برابر با I_2 است. محاسبه‌ی این انتگرال با تغییر متغیر $x=tg\theta$، آن‌گاه $dx=(1+tg^2\theta)d\theta$ و لذا داریم:

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+tg^2\theta)}{(1+tg^2\theta)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+tg^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}]=\frac{\pi}{4}$$

در گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که به ازای $n=1$، حاصلش برابر با $\frac{\pi}{4}$ می‌شود، گزینه (۴) است.

مثال ۱۹: مقدار $I=\int_0^{16}\sqrt{\frac{9}{x}(16-x)^2}dx$ برابر با کدام گزینه است؟ (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) ۶۴　　۲) ۱۲۸　　۳) ۳۲　　۴) ۲۵۶

پاسخ: گزینه «۴» انتگرال را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$I=\int_0^{16}\sqrt{\frac{9}{x}}.\sqrt{(16-x)^2}dx=\int_0^{16}3(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}.(16-x)dx=3\int_0^{16}x^{-\frac{1}{2}}(16-x)dx$$

با توجه به رابطه‌ی گفته شده در مورد تابع بتا، در این تست $a=0$، $b=16$، $m=\frac{1}{2}$ و $n=2$ است و لذا داریم:

$$I=3(b-a)^{m+n-1}\beta(m,n)=3(16-0)^{\frac{1}{2}+2-1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+2)}\xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}I=3\times\sqrt{16^3}\times\frac{\sqrt{\pi}\times\Gamma(1+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1+1)}$$

$$\Rightarrow I=3\times64\times\frac{\sqrt{\pi}\times1}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}=\frac{3\times64\times\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{3\times64\times\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}=\mathbf{256}$$

مثال ۲۰: حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$　　۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　۳) $\sqrt{\pi}$　　۴) $2\sqrt{\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» رابطه $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ را انتگرال گاما می‌گوییم و می‌دانیم

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\quad,\quad\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x^2=t\to2xdx=dt\to dx=\frac{dt}{2x}\Rightarrow\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

فصل پنجم

« کاربرد انتگرال »

مثال۱: تفاضل مجموع بالایی و مجموع پایینی ریمان برای تابع $f(x)=۳x^۲+۲$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ وقتی آن را به $n=۶$ قطعه‌ی مساوی تقسیم کرده باشیم. کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینه «۲» در بازه‌ی $[۰,۱]$ داریم $f'(x)=۶x\geq ۰$، پس f در این بازه صعودی است. طبق فرمول داریم:

$$U_n(f)-L_n(f)=\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|=\frac{۱-۰}{n}|f(۱)-f(۰)|=\frac{۱}{n}|۵-۲|=\frac{۳}{n}$$

که به ازای $n=۶$ داریم:

$$U_۶(f)-L_۶(f)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۲: اگر تابع f، با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۲ & , \ x\in\mathbb{Q}\\ -۲ & , \ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ داده شده باشد، مقدار $U_n(f)-L_n(f)$ در بازه‌ی $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

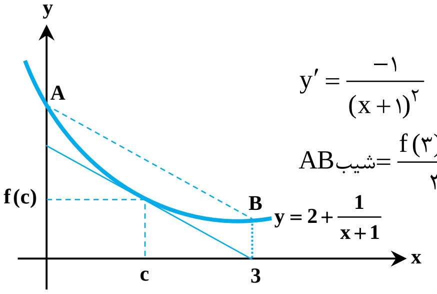
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به آن که $M=۲$ و $m=-۲$ به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)$ در هر زیر بازه هستند، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}U_n(f)&=M(b-a)=۲\times۳=۶\\ L_n(f)&=m(b-a)=-۲\times۳=-۶\end{aligned}\right\}\Rightarrow U_n(f)-L_n(f)=۱۲$$

مثال۳: مطابق شکل، نمودار $y=۲+\frac{۱}{x+۱}$ را در بازه‌ی $[۰,۳]$ در نظر بگیرید. نقطه‌ی c را چنان بیابید که خط مماس بر منحنی در این نقطه با خط AB موازی باشد. از مقایسه‌ی مساحت زیر نمودار و مساحت زیر خط مماس، کدام نامساوی به‌دست می‌آید؟

۱) $Ln۲<\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}<Ln۲$ ۳) $Ln۲<\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۸}<Ln۲$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین، نقطه‌ی c را پیدا می‌کنیم:



$$\left.\begin{aligned}y'&=\frac{-۱}{(x+۱)^۲}\\ \text{شیب}\ AB&=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}\Rightarrow\frac{(۲+\frac{۱}{۴})-(۲+۱)}{۳}=-\frac{۱}{(c+۱)^۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{(c+۱)^۲}\Rightarrow c=۱$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی تماس $(c,f(c))=(۱,\frac{۵}{۲})$ است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی c را می‌نویسیم:

$$y-f(c)=f'(c)(x-c)\Rightarrow y-\frac{۵}{۲}=-\frac{۱}{۴}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۴}(۱۱-x)$$

مطابق شکل از آنجا که خط مماس بر منحنی، پایین‌تر از خود منحنی قرار دارد، مساحت زیر آن کمتر از مساحت زیر منحنی است:

$$\int_۰^۳\frac{۱}{۴}(۱۱-x)dx<\int_۰^۳(۲+\frac{۱}{۱+x})dx\Rightarrow[\frac{۱}{۴}(۱۱x-\frac{x^۲}{۲})]_۰^۳<[۲x+Ln(۱+x)]_۰^۳\Rightarrow\frac{۱}{۴}(۳۳-\frac{۹}{۲})<۶+۲Ln۲\Rightarrow\frac{۹}{۱۶}<Ln۲$$

مثال ۴: فرض کنیم $I=\int_1^n Lnxdx$ باشد، در این صورت کدام نامساوی برقرار است؟

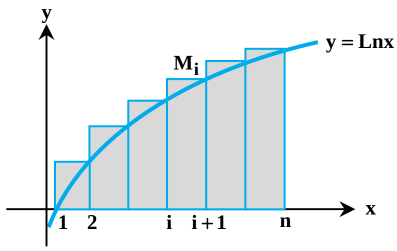
۱) $Ln(n)\le I\le Ln(n+1)$ ۲) $Ln(n!)\le I\le Ln(n+1)!$ ۳) $Ln(n)\le I\le nLn(n+1)$ ۴) $Ln(n-1)!\le I\le Ln(n!)$

پاسخ : گزینه «۴» نمودار $y=Lnx$ را در بازه‌ی $1\le x\le n$ در نظر بگیرید. این بازه را به قطعاتی با طول $\Delta x_i=1$ تقسیم می‌کنیم. تعداد این قطعات $n-1$ خواهد بود. در قطعه‌ی $i\le x\le i+1$ به علت صعودی بودن Lnx بیشترین مقدار در انتهای بازه و کمترین مقدار در ابتدای بازه به‌دست می‌آید؛ پس خواهیم داشت: $M_i=\max(Lnx)=Ln(i+1)$ و $m_i=\min(Lnx)=Ln(i)$

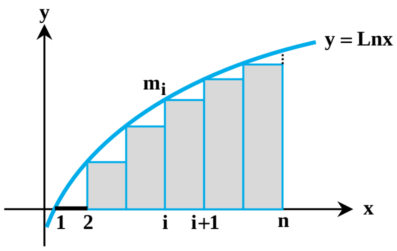
می‌دانیم که مساحت زیر منحنیِ Lnx بین مجموع بالایی و مجموع پایینی ریمان قرار دارد. به عبارتی داریم:
$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i\Delta x_i\le\int_1^n Lnxdx\le\sum_{i=1}^{n-1}M_i\Delta x_i$$

می‌دانیم $\Delta x_i=1$ است و با جایگذاری $M_i=Ln(i+1)$ و $m_i=Ln(i)$ داریم: $\sum_{i=1}^{n-1}Ln(i)\le I\le\sum_{i=1}^{n-1}Ln(i+1)$. به عبارتی داریم:
$$Ln1+Ln2+\cdots+Ln(n-1)\le I\le Ln2+Ln3+\cdots+Lnn \Rightarrow Ln(1\times 2\times\cdots\times(n-1))\le I\le Ln(2\times 3\times\cdots\times n)$$

در نتیجه خواهیم داشت:
$$\mathbf{Ln(n-1)!\le I\le Ln(n!)}$$



(مستطیل‌هایی به ارتفاع $M_i=Ln(i+1)$)



(مستطیل‌هایی به ارتفاع $m_i=Ln(i)$)

درسنامه: محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

مثال ۱: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(\frac{i\pi}{2n})$ ، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ $f(\frac{i}{n})=\cos(\frac{\pi}{2}.\frac{i}{n})$ و بنابراین $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x)$، پس بـه جـای محاسـبه‌ی حـد، حاصل انتگـرال $\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)dx=[\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x)]_0^1=\frac{2}{\pi}[1-0]=\frac{2}{\pi}$$

مثال ۲: مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به اینکه فرجه رادیکال‌ها در صورت و مخرج کسر ۳ است، پس می‌توانیم تمام جملات صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم و بـا فرجه یکسان بنویسیم، پس از این مرحله باید $\frac{1}{n}$ را پشت عبارت ایجاد کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n^4}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n^4}})\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}\times\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}\times\frac{n}{n}})$$

$$\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\sqrt[3]{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})$$

حالا باید تشخیص دهیم تابع $f(\frac{i}{n})$ چیست؟ با کمی دقت معلوم است کـه $f(\frac{i}{n})=\sqrt[3]{\frac{i}{n}}$ است. بنـابراین بـا جـایگزینی $\frac{i}{n}=x$، مـی‌تـوان گفـت: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ می‌شود. حالا به راحتی انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$A=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}]_0^1=\frac{3}{4}$$

مثال ۳: مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}]$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» طبق روش سه گام ابتدا باید $\frac{1}{n}$ را پشت کروشه ایجاد کنیم و این کار را با تقسیم صورت و مخرج بر n^2 انجام می‌دهیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(2n)^2}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(n+1)^2}{n^2}}+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(n+2)^2}{n^2}}+\cdots+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{(n+n)^2}{n^2}}]$$

دقت کنید که جمله‌ی آخر در مخرج، یعنی $(2n)^2$، در واقع به‌صورت $(n+n)^2$ بوده و این یعنی i، از ۱ تا n تغییر کرده است.

حالا به راحتی $f(\frac{i}{n})$ و $f(x)$ مشخص است:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow A=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=[-\frac{1}{x+1}]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

مثال ۴: حاصل $A=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}}(1+\frac{3}{n})^{\frac{1}{3}}\cdots(1+\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}]$ به‌صورت e^k می‌باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots)$ ۲) $(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-+\cdots)$ ۳) $(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots)$ ۴) $(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-+\cdots)$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به ضرب چند عبارت در یکدیگر، دانشجوی باهوش، سریع به فکر کمک گرفتن از خواص Ln می‌افتد. ابتدا از طرفین تساوی داده شده Ln می‌گیریم (دقت کنید پس از Ln گرفتن از سمت راست از خواص $Lnxy=Lnx+Lny$ و $Lnx^y=yLnx$، استفاده می‌کنیم):

$$LnA=\lim_{n\to\infty}[Ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n}Ln(1+\frac{n}{n})]\Rightarrow LnA=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}Ln(1+\frac{i}{n})$$

برای ایجاد فرم $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$، رابطه را به‌صورت مقابل می‌نویسیم که عبارت فوق در $\frac{1}{n}$ ضرب و تقسیم شده است:

$$LnA=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}}Ln(1+\frac{i}{n})]$$

با قرار دادن $x=\frac{i}{n}$، طبق فرمول به انتگرال مقابل می‌رسیم:

$$\Rightarrow LnA=\int_0^1\frac{1}{x}Ln(1+x)dx$$

برای حل این انتگرال به فکر استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء نباشید؛ چون در گزینه‌ها مقدار یک سری عددی داده شده، پس می‌توان حدس زد با بسط یک تابع روبه‌رو هستیم؛ با نوشتن بسط $Ln(1+x)$ و ضرب آن در $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\frac{1}{x}Ln(1+x)=\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots$$

$$\Rightarrow LnA=\int_0^1(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots)dx=[x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+-\cdots]_0^1\Rightarrow LnA=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots\Rightarrow A=e^{(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots)}$$

مثال ۵: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{4}{e}$ ۲) $\frac{e}{4}$ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) $\frac{e}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» چون فرم ضرب عبارت‌ها را داریم با در نظر گرفتن $A=\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$ و Ln گرفتن از طرفین، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\lim_{n\to\infty}LnA=\lim_{n\to\infty}Ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$$

با استفاده از خاصیت $Ln\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}Lnx$ خود به خود، $\frac{1}{n}$ پشت پرانتز ایجاد می‌شود:

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}LnA=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]$$

حالا به راحتی $f(\frac{i}{n})$ و در نتیجه $f(x)$ معلوم می‌شود:

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}LnA=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[Ln(1+\frac{1}{n})+Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+Ln(1+\frac{n}{n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1Ln(1+x)dx$$

برای محاسبه‌ی انتگرال اخیر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم ($\int udv=uv-\int vdu$).

$$\left.\begin{array}{l}u=Ln(1+x)\Rightarrow du=\frac{1}{1+x}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow I=\int_0^1Ln(1+x)dx=[xLn(x+1)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=Ln2-\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx\\ \Rightarrow I=Ln2-\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=Ln2-(x-Ln|x+1|)\Big]_0^1=Ln2-(1-Ln2)=Ln4-1\end{array}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}LnA=Ln4-1\Rightarrow Ln(\lim_{n\to\infty}A)=Ln4-Lne=Ln\frac{4}{e}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A=\frac{4}{e}$$

مثال ۶: مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» جمله‌ی $\frac{1}{n}$ پشت کروشه وجود دارد، پس سراغ تعیین $f(\frac{i}{n})$ می‌رویم:

$$A=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}]$$

$$\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\cos\frac{0\times\pi}{n}+\cos\frac{1\times\pi}{2n}+\cos\frac{2\times\pi}{2n}+\cos\frac{3\times\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\cos\frac{i\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2}(\frac{i}{n})$$

دقت کنید در این سؤال i از ۰ تا $n-1$ تغییر می‌کند و می‌توانیم با توجه به نکته گفته شده، باز هم انتگرال را از صفر تا ۱ بنویسیم:

$$\Rightarrow f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x\ \Rightarrow A=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)\,dx=\frac{\pi}{2}[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x]_0^1=1$$

مثال ۷: مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\sqrt{\frac{n}{n+9}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» عبارت $\frac{1}{n}$ پشت کروشه وجود دارد، پس باید سراغ تعیین تابع $f(\frac{i}{n})$ برویم، عبارت داخل کروشه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}]$$

لذا $f(\frac{i}{n})=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3i}{n}}}$ که $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+3x}}$ را نتیجه می‌دهد. دقت کنید در این سؤال i از ۰ تا $n-1$ تغییر می‌کند و بنابراین داریم:

$$A=3\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1+3x}}dx=3\int_0^1(1+3x)^{-\frac{1}{2}}dx=3[\frac{2}{3}\sqrt{1+3x}]_0^1=3(\frac{4}{3}-\frac{2}{3})=2$$

مثال ۸: حاصل حد مقابل به‌صورت $ke^{-\frac{7}{9}}$ است، مقدار k کدام است؟ $\lim\limits_{n\to+\infty}[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^2}\times(1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{n}(1+\frac{2}{n})^2}\times\cdots\cdots\times(1+\frac{n-1}{n})^{\frac{1}{n}(1+\frac{n-1}{n})^2}]$

۱) $\sqrt[3]{2^{11}}$ ۲) $\sqrt[3]{2^{10}}$ ۳) $\sqrt[3]{2^{7}}$ ۴) $\sqrt[3]{2^{8}}$

پاسخ: گزینه «۴» حاصل حد فوق را A می‌نامیم و از طرفین Ln می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$LnA=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}((1+\frac{1}{n})^2Ln(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})^2Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})^2Ln(1+\frac{n-1}{n}))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(1+\frac{i}{n})^2Ln(1+\frac{i}{n})$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$LnA=\int_0^1(1+x)^2Ln(1+x)dx\xrightarrow{\text{تغییر متغیر } t=x+1}LnA=\int_1^2t^2Lnt\,dt$$

این انتگرال را به روش «جزء به جزء» حل می‌کنیم:

$$(u=Lnt\ \Rightarrow du=\frac{dt}{t})\ ,\ (dv=t^2dt\ \Rightarrow v=\frac{t^3}{3})$$

$$LnA=\int_1^2t^2Lntdt=\left[\frac{t^3}{3}Lnt\right]_1^2-\int_1^2\frac{t^3}{3}(\frac{dt}{t})=\frac{8}{3}Ln2-\int_1^2(\frac{t^2}{3})dt=\frac{8}{3}Ln2-\left[\frac{t^3}{9}\right]_1^2=\frac{8}{3}Ln2-\frac{7}{9}$$

در نتیجه $LnA=\frac{8}{3}Ln2-\frac{7}{9}$، و بنابراین $A=e^{\frac{8}{3}Ln2-\frac{7}{9}}=2^{\frac{8}{3}}e^{\frac{-7}{9}}$ که مقدار $k=2^{\frac{8}{3}}$ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۹: حاصل $\lim_{n\to+\infty}[\sin(\frac{n}{n^2+1^2})+\sin(\frac{n}{n^2+2^2})+\cdots+\sin(\frac{n}{n^2+n^2})]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ‏ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ‏ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ‏ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» قبل از هر چیزی ابتدا توجه کنید که چون $n\to\infty$، پس $\frac{n}{n^2+i^2}\to 0$ و لذا $\sin(\frac{n}{n^2+i^2})\sim\frac{n}{n^2+i^2}$، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\frac{n}{n^2+1^2})+\sin(\frac{n}{n^2+2^2})+\cdots+\sin(\frac{n}{n^2+n^2})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}]$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد}=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]=\int_0^1 f(x)\,dx$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[tg^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۰: حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i-1}}{n\sqrt{n}}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ‏ ۲) $\frac{3}{2}$ ‏ ۳) $\frac{2}{3}$ ‏ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» عبارت داده شده را به این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}-\frac{1}{n}}$$

وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ است و بنابراین می‌توانیم $\frac{1}{n}$ را از عبارت زیر رادیکال کنار بگذاریم. دقت کنید که نمی‌توانیم همین حرف را در مورد $\frac{i}{n}$ بزنیم! زیرا مقدار i در فاصله‌ی $1\le i\le n$ تغییر می‌کند و مثلاً به ازای $i=n$ داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{i}{n}=\frac{n}{n}=1$. پس نمی‌توانیم $\frac{i}{n}$ را هم مانند $\frac{1}{n}$ کنار بگذاریم!!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

مثال ۱۱: حاصل $\lim_{n\to\infty}n[\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^2+i^2}}+1-\sqrt{2}]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ‏ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ‏ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ‏ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌خواهیم از فرمول $\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})-\int_0^1 f(x)dx]=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$ استفاده کنیم. اولین قدم برای نزدیک شدن به این فرمول آن است که $\frac{1}{n}$ را پشت سری ایجاد کنیم. پس با فاکتورگیری از $\sqrt{n^2}=n$ در مخرج کسر داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^2+i^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{n^2(1+\frac{i^2}{n^2})}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$$

بنابراین صورت سؤال به شکل مقابل در می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}n[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}-(\sqrt{2}-1)]$$

حد به وجود آمده را با فرمول بالا مقایسه کنید؛ متوجه می‌شویم که $f(\frac{i}{n})=\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$ است پس داریم $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. حالا باید مطمئن شویم که عدد $(\sqrt{2}-1)$ با $\int_0^1 f(x)dx$ برابر است:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=[\sqrt{1+x^2}]_0^1=\sqrt{2}-1$$

حالا اطمینان داریم که حد موردنظر ما با فرمول بالا قابل حل است و جواب آن برابر است با:

$$\text{حاصل حد}=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2}}-0]=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۱۲: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-3})$ برابر با کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}Ln2$ ۲) $\frac{3}{2}Ln2$ ۳) $Ln2$ ۴) $2Ln3$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا لازم است از $\frac{1}{n}$ فاکتور بگیریم؛ ملاحظه می‌شود پس از این مرحله حد به‌صورت دلخواه در خواهد آمد، پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-3})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+3\times\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+3(\frac{n-1}{n})})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+3x}=\frac{1}{3}Ln(1+3x)\Big|_0^1=\frac{1}{3}Ln4=\frac{2Ln2}{3}$$

مثال ۱۳: اگر $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})$ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $-1+Ln3$ ۲) $-1+Ln4$ ۳) $1+Ln2$ ۴) $1+Ln4$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}S_n=\int_0^1 Ln(1+x)dx=[(1+x)Ln(1+x)-x]_0^1=2Ln2-1$$

مثال ۱۴: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا سیگمای داده شده را به‌صورت $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\frac{i}{n})^3$ می‌نویسیم، سپس با استفاده از رابطهٔ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ به حل می‌پردازیم:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۵: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) 1 ۲) $Ln2$ ۳) $Ln3$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۲» برای حل، باید تغییراتی در Σ انجام بدهیم؛ ابتدا از $\frac{1}{n}$ فاکتور می‌گیریم و از Σ خارج می‌کنیم و سپس به ادامه‌ی حل به‌صورت زیر می‌پردازیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+(\frac{i}{n})})\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=Ln(1+x)\Big]_0^1=Ln2$$

مثال ۱۶: حد عبارت $\frac{e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}}{n}$ را وقتی که $n\to\infty$ چقدر است؟
(عمران ـ آزاد ۸۱، آمار ـ سراسری ۷۸ و علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) e ۲) 1 ۳) $e-1$ ۴) $\frac{1}{e}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\frac{1}{n}$ را به پشت پرانتز می‌بریم و سپس با نوشتن ضابطه‌ی $f(x)$ حاصل حد را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}+e^{\frac{n}{n}}}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\xlongequal{f(x)=e^x}\int_0^1 e^xdx=e^x\Big]_0^1=e-1$$

مثال ۱۷: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Ln}\sqrt[n]{(۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})...(۱+\frac{n}{n})}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) $\text{Ln}۳-۱$ ۲) $\text{Ln}۳+۱$ ۳) $\text{Ln}۴-۱$ ۴) $\text{Ln}۴+۱$

پاسخ: گزینه «۳» با Ln گرفتن، $\frac{۱}{n}$ پشت پرانتز ایجاد می‌شود و بنابراین کافی است $f(\frac{i}{n})$ را بسازیم و سپس به راحتی به حل حد بپردازیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Ln}\sqrt[n]{(۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})\cdots(۱+\frac{n}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\text{Ln}(۱+\frac{۱}{n})+\text{Ln}(۱+\frac{۲}{n})+\cdots+\text{Ln}(۱+\frac{n}{n}))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\text{Ln}(۱+\frac{i}{n}) = \int_{۰}^{۱}\text{Ln}(۱+x)\,dx = ((۱+x)\text{Ln}(۱+x)-x)\Big|_{۰}^{۱} = ۲\text{Ln}۲-۱$$

مثال ۱۸: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۴}{۳}[\sqrt[۳]{\frac{n+۱}{n^۴}}+\sqrt[۳]{\frac{n+۲}{n^۴}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{n+n}{n^۴}}]$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[۳]{۴}-۱$ ۴) $۲\sqrt[۳]{۲}-۱$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با خارج کردن $\frac{۱}{n^۳}$ از زیر رادیکال، $\frac{۱}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{۳}(\sqrt[۳]{\frac{n+۱}{n^۴}}+\sqrt[۳]{\frac{n+۲}{n^۴}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{n+n}{n^۴}}) = \frac{۴}{۳}\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{n})(\sqrt[۳]{\frac{n+۱}{n}}+\sqrt[۳]{\frac{n+۲}{n}}+\cdots+\sqrt[۳]{\frac{n+n}{n}})$$

$$=\frac{۴}{۳}\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{n}(\sqrt[۳]{۱+\frac{۱}{n}}+\sqrt[۳]{۱+\frac{۲}{n}}+\cdots+\sqrt[۳]{۱+\frac{n}{n}})) = \frac{۴}{۳}\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{n}\sqrt[۳]{۱+\frac{i}{n}}) \xlongequal{f(x)=\sqrt[۳]{۱+x}} \frac{۴}{۳}\int_{۰}^{۱}\sqrt[۳]{۱+x}\,dx = \frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۴}(۲\sqrt[۳]{۲}-۱)) = ۲\sqrt[۳]{۲}-۱$$

راهنمایی: برای حل انتگرال فوق از تغییر متغیر $u=۱+x$ استفاده کردیم:

$$u=۱+x \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ x=۰ \Rightarrow u=۱\ ,\ x=۱ \Rightarrow u=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۱}\sqrt[۳]{۱+x}\,dx = \int_{۱}^{۲}\sqrt[۳]{u}\,du = \int_{۱}^{۲}u^{\frac{۱}{۳}}du = (\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۳}}u^{۱+\frac{۱}{۳}})\Big]_{۱}^{۲} = \frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}\Big]_{۱}^{۲} = \frac{۳}{۴}(۲^{\frac{۴}{۳}}-۱) = \frac{۳}{۴}(۲\sqrt[۳]{۲}-۱)$$

مثال ۱۹: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\{۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}\}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\frac{۱}{\sqrt{n}}$ در تمام جملات پرانتز ضرب کرده و سپس با ضرب n در صورت و مخرج $\frac{۱}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\{۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}\} = \lim_{n\to\infty}\{\frac{۱}{\sqrt{n}}+\frac{۱}{\sqrt{۲n}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲}}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\{\frac{n}{\sqrt{n}}+\frac{n}{\sqrt{۲n}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^۲}}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\frac{\sqrt{n^۲}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n^۲}}{\sqrt{۲n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n^۲}}{\sqrt{n^۲}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{۲}}+\sqrt{\frac{n}{۳}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{n}}}+\sqrt{\frac{۱}{\frac{۲}{n}}}+\sqrt{\frac{۱}{\frac{۳}{n}}}+\cdots+\sqrt{\frac{۱}{\frac{n}{n}}}) = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{۱}{\frac{i}{n}}} \xlongequal{f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x}}} \int_{۰}^{۱}\sqrt{\frac{۱}{x}}dx = ۲\sqrt{x}\Big]_{۰}^{۱} = ۲$$

مثال ۲۰: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^{۱۵}}{n^{۱۶}}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۱۲۵ ۳) ۰/۰۶۲۵ ۴) ۰/۳۲۵

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i^{۱۵}}{n^{۱۶}} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{i}{n})^{۱۵} = \int_{۰}^{۱}x^{۱۵}dx = \frac{۱}{۱۶} = ۰/۰۶۲۵$$

مثال ۲۱: مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵ و آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ ۲) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ ۳) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ ۴) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید $\frac{1}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد کنیم، برای این منظور ابتدا از مخرج، n^2 را فاکتور می‌گیریم و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{i}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\xlongequal{f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

انتگرال فوق با تغییر متغیر $u=1+x$، به‌صورت مقابل در می‌آید:

$$u=1+x\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ x=0\Rightarrow u=1\ ,\ x=1\Rightarrow u=2\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\int_1^2\frac{du}{u^2}$$

مثال ۲۲: حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(0)+\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{n}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) حد ندارد.

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از فرمول $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin 0+\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n}\xlongequal{f(x)=\sin\pi x}\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\Big]_0^1=\frac{-1}{\pi}[\cos\pi-\cos 0]=\frac{+2}{\pi}$$

مثال ۲۳: حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n+i)^2}{n^3}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{19}{3}$ ۲) $\frac{17}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $\frac{1}{n}$ را پشت پرانتز ایجاد می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n+i)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{2n+i}{n})^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})^2\xlongequal{f(x)=(2+x)^2}$$

$$\int_0^1(2+x)^2dx=\int_0^1(4+x^2+4x)dx=(4x+\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2)\Big]_0^1=(4+\frac{1}{3}+2)=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$

مثال ۲۴: مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{2i-1}{2n})$ برابر است با: (هسته‌ای ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{4}-Ln2$ ۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln2$ ۳) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}Ln2$ ۴) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}-Ln2$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که وقتی $n\to\infty$، آن‌گاه $tg^{-1}(\frac{2i-1}{2n})\sim tg^{-1}(\frac{2i}{2n})=tg^{-1}(\frac{i}{n})$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{i}{n})\xlongequal{f(x)=tg^{-1}(x)}\int_0^1 tg^{-1}(x)dx=\left[xtg^{-1}(x)-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln2$$

توجه: حل انتگرال $\int tg^{-1}udu$ با استفاده از روش جزء به جزء امکان‌پذیر است. با انتخاب $u=tg^{-1}x$ و $dv=dx$ داریم: $du=\frac{dx}{1+x^2}$ و $v=x$. بنابراین داریم:

$$\int tg^{-1}xdx=uv-\int vdu=xtg^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=xtg^{-1}x-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+c$$

مثال ۲۵: مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۴}+\frac{n}{n^۲+۹}+\cdots+\frac{n}{۲n^۲}\}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n\to+\infty}\{\frac{n}{n^۲+۱}+\frac{n}{n^۲+۴}+\cdots+\frac{n}{n^۲+n^۲}\}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\{\frac{۱}{۱+(\frac{۱}{n})^۲}+\frac{۱}{۱+(\frac{۲}{n})^۲}+\cdots+\frac{۱}{۱+(\frac{n}{n})^۲}\}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}=\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x^۲}=\text{Arctg}x\Big|_۰^۱=\frac{\pi}{۴}$$

مثال ۲۶: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) یک
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) صفر

پاسخ: گزینه «۲» باید فرم $f(\frac{i}{n})$ را ایجاد کنیم و قبل از آن لازم است $\frac{۱}{n}$ را پشت پرانتز داشته باشیم:

پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{\frac{۳}{۲}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\sqrt{\frac{۱}{n}}+\sqrt{\frac{۲}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_۰^۱\sqrt{x}dx=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲۷: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+i^۲}$ ، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» باید فرم $f(\frac{i}{n})$ را ایجاد کنیم و قبل از آن لازم است $\frac{۱}{n}$ را پشت پرانتز داشته باشیم:

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+i^۲}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}.\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+(\frac{i}{n})^۲}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲+i^۲}=\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x^۲}=\text{Arctg}x\Big|_۰^۱=\frac{\pi}{۴}$$

مثال ۲۸: هرگاه $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=۱}^{n}\frac{x}{n}\sin\frac{jx^۲}{n}$ ، $F'(\sqrt{\frac{\pi}{۲}})$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$
۲) ۰
۳) ۱
۴) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. حد مجموع موردنظر برابر انتگرال زیر است:

$$F(x)=\int_۰^۱x\sin(tx^۲)dt=\frac{-۱}{x}\cos(tx^۲)\Big|_۰^۱=\frac{۱-\cos x^۲}{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{(۲x\sin x^۲)x-(۱-\cos x^۲)}{x^۲}\Rightarrow F'(\sqrt{\frac{\pi}{۲}})=۲-\frac{۲}{\pi}$$

توجه کنید که در این مسأله، هنگام محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=۱}^{n}\frac{x}{n}\sin\frac{jx^۲}{n}$ و انتگرال $\int_۰^۱x\sin(x^۲t)dt$ ، مقدار x ثابت است و می‌تواند از سیگما و از انتگرال خارج شود.

مثال ۲۹: مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})...(1+\frac{n}{n})\right\}^{\frac{1}{n}}$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{4}{e}$ ۲) $\frac{e}{4}$ ۳) ۱ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» اگر از طرفین رابطه $A=((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}))^{\frac{1}{n}}$، Ln بگیریم، داریم:

$$LnA=\frac{1}{n}Ln((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}))=\frac{1}{n}(Ln(1+\frac{1}{n})+Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+Ln(1+\frac{n}{n}))\Rightarrow LnA=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})$$

می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty}LnA=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1 Ln(1+x)dx$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}LnA=[(1+x)Ln(1+x)-x]_0^1=(2Ln2-2)-(-1)=2Ln2-1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}A=e^{2Ln2-1}=\frac{e^{Ln4}}{e}=\frac{4}{e}$$

توضیح: در حل انتگرال $\int Ln(x+1)dx$ اگر از روش جزء به جزء با انتخاب $u=Ln(x+1)$ و $dv=dx$ استفاده کنیم، جواب آن برابر می‌شود با $(x+1)Ln(x+1)-x$ اما اگر ابتدا از تغییر متغیر $u=x+1$ استفاده کنیم خواهیم داشت $du=dx$ و $\int Ln(x+1)dx=\int Lnudu$. حالا این انتگرال را با جزء به جزء حل می‌کنیم و جواب نهایی $uLnu-u$ خواهد بود، یعنی در نهایت به جواب $(x+1)Ln(x+1)-(x+1)$ می‌رسیم. این‌که یک انتگرال نامعین دارای دو جواب ظاهراً متفاوت باشد ایرادی ندارد به شرط آن‌که این جواب‌ها فقط در یک عدد ثابت با هم فرق داشته باشند. این عدد ثابت تأثیری روی مقدار انتگرالِ معین ندارد. به این محاسبات دقت کنید:

$$\begin{cases}\int_0^1 Ln(x+1)dx=[(x+1)Ln(x+1)-(x+1)]_0^1=2Ln2-1\\ \int_0^1 Ln(x+1)dx=[(x+1)Ln(x+1)-x]_0^1=2Ln2-1\end{cases}$$

مثال ۳۰: مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{n}Ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n}Ln2]$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) صفر ۲) $Ln2$ ۳) $2Ln2-1$ ۴) e

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرمول داریم:

$$I=\int_0^1 Ln(1+x)dx=((1+x)Ln(1+x)-x)\Big|_0^1=2Ln2-1$$

مثال ۳۱: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-i^2}}{n^2}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» حد مجموع مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\frac{i^2}{n^2}}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

نیازی به محاسبه انتگرال فوق نیست، انتگرال فوق برابر ربع مساحت دایره به شعاع یک می‌باشد و بنابراین مقدار انتگرال فوق $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

مثال ۳۲: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{2i-1}{2n})$، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{4}-Ln2$ ۲) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}Ln2$ ۳) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}Ln2$ ۴) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln2$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که چون $n\to\infty$، پس $\frac{i}{n}=\frac{2i}{2n}\sim\frac{2i-1}{2n}$، و بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{2i-1}{2n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}tg^{-1}(\frac{i}{n})=\int_0^1 tg^{-1}xdx$$

حال کافی است $\int_0^1 Arctgxdx$ را به‌دست آوریم، بدین منظور به کمک روش جزء به جزء $(\int udv=uv-\int vdu)$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix}u=Arctgx\Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{vmatrix}\Rightarrow\int Arctgxdx=xArctgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=xArctgx-\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+C$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^1 Arctgxdx=(xArctgx-\frac{1}{2}Ln(1+x^2))\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln2$$

مثال ۳۳: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{n-i}{n^2})$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{n-i}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}(1-\frac{i}{n})=\int_0^1(1-x)dx=(x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال ۳۴: حاصل $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cosh(\frac{i\pi}{2n}\sqrt{-1})$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید $\frac{1}{n}$ را به پشت سیگما منتقل کرده و سپس به دنبال ایجاد تابعی برحسب $\frac{i}{n}$ باشیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cosh(\frac{\pi}{2}\times\frac{i}{n}\sqrt{-1})\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\cosh(\frac{\pi}{2}(\frac{i}{n})\sqrt{-1})\Rightarrow f(x)=\cosh(\frac{\pi}{2}x\sqrt{-1})$$

حالا کافیست انتگرال $\int_0^1 f(x)dx$ را حساب کنیم:

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\cosh(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}x)dx\xrightarrow{j=\sqrt{-1}}A=\int_0^1\cosh(\frac{\pi}{2}jx)dx$$

از طرفی می‌دانیم $\cosh(jz)=\cos z$ است، لذا داریم:

$$A=\int_0^1\cos(\frac{\pi}{2}x)dx=\frac{2}{\pi}[\sin(\frac{\pi}{2}x)]_0^1=\frac{2}{\pi}\times\sin(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$$

مثال ۳۵: حاصل سری $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^{17}}{n^{18}}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{19}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{17}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه «۲» از تعریف حد حاصل جمع ریمانی داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n}))\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{17}}{n^{17}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^{17}=\int_0^1 x^{17}dx=\frac{x^{18}}{18}\Big|_0^1=\frac{1}{18}$$

درسنامه۲: محاسبه‌ی سطح محصور

مثال۱: مساحت ناحیه‌ی واقع در زیر نمودار $y=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$، بالای محور x ها و سمت راست محور yها، چقدر است؟

۱) $1-e^{-1}$ ۲) $1+e^{-1}$ ۳) e^{-2} ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه‌ی مساحت محصور بین نمودار y، بالای محور x هـا و سـمت راسـت محـور y هـا، بایـد از نمـودار داده شـده از ۰ تـا $+\infty$ انتگرال بگیریم و بنابراین داریم:

$$\text{مساحت}=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=[e^{-\frac{1}{x}}]_0^{\infty}=e^0-e^{-\frac{1}{0}}=1-e^{-\infty}=1-0=1$$

مثال۲: مساحت محصور توسط منحنی $y^2=(1-x^2)^3$، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» چون در معادله‌ی $y^2=(1-x^2)^3$، با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله عوض نمی‌شود، پس منحنی نسبت به محور x ها و همچنین محور y ها تقارن دارد. پس مساحت منحنی را در ربع اول به‌دست آورده و آن را چهار برابر می‌کنیم. ناحیه‌ای که در ربع اول قـرار مـی‌گیـرد، بـین ایـن منحنـی و محورهای مختصات (یعنی $x=0$ و $y=0$) قرار دارد. پس $x=0$ کران پایین انتگرال است و کران بالا را نیز از برخورد دادن ایـن منحنـی بـا محـور x هـا، یعنـی $y=0$، به‌دست می‌آوریم:

$$y=0\Rightarrow(1-x^2)^3=0\xrightarrow{x\geq0}x=1$$

پس در ربع اول از این ناحیه $0\leq x\leq1$ است.

$$y^2=(1-x^2)^3\xrightarrow{y\geq0}y=\sqrt{(1-x^2)^3}$$

$$S=4\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=4\times\frac{3\pi}{16}=\frac{3\pi}{4}$$

توضیح: برای محاسبه‌ی انتگرال بالا از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ و جایگزینی $dx=\cos\theta d\theta$ استفاده کرده‌ایـم و حاصـل انتگـرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$ را هـم قـبلاً در فصل انتگرال حساب کرده بودیم، توصیه می‌شود حاصل این انتگرال را همواره حفظ باشید.

مثال۳: مساحت ناحیه محدود به کاردیوئید به معادله‌ی $\begin{cases}x=2\cos t-\cos 2t\\ y=2\sin t-\sin 2t\end{cases}$ کدام است؟

۱) 3π ۲) 4π ۳) 5π ۴) 6π

پاسخ: گزینه «۴» دوره‌ی تناوب اصلی $\sin t$ و $\cos t$ برابر با 2π و دوره تناوب اصلی $\sin 2t$ و $\cos 2t$ برابر با π است، بنابراین کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها یعنی 2π نشان می‌دهد که یک دور کامل از این منحنی در فاصله‌ی $0\leq t\leq 2\pi$ طی می‌شود.

پس با انتگرال‌گیری روی این فاصله می‌توانیم مساحت ناحیه را به‌دست آوریم: $S=|\int_0^{2\pi}yx'dt|$ ابتدا به محاسبه‌ی انتگرال می‌پردازیم:

$$\int_0^{2\pi}yx'dt=\int_0^{2\pi}(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt=\int_0^{2\pi}(2\sin t-2\sin t\cos t)(-2\sin t+4\sin t\cos t)dt$$

با محاسبه‌ی حاصل‌ضرب‌ها و استفاده از فرمول $\sin 2t=2\sin t\cos t$ خواهیم داشت:

$$\text{تابع زیر انتگرال}=(2\sin t-2\sin t\cos t)(-2\sin t+4\sin t\cos t)=-4\sin^2t+8\sin^2t\cos t+4\sin^2t\cos t-8\sin^2t\cos^2t$$

$$=-\frac{4}{2}(1-\cos 2t)+12\sin^2t\cos t-2\sin^2 2t=-2(1-\cos 2t)+12\sin^2t\cos t-\frac{2}{2}(1-\cos 4t)$$

حالا می‌توانیم از این عبارت به سادگی انتگرال بگیریم. جواب انتگرال برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}yx'dt=[-2(t-\frac{\sin 2t}{2})+12\frac{\sin^3t}{3}-\frac{2}{2}(t-\frac{\sin 4t}{4})]_0^{2\pi}=(-4\pi-2\pi)=-6\pi$$

بنابراین داریم: $S=|-6\pi|=6\pi$

مثال۴: اندازه سطح محدود به دو منحنی $y = x^{۲} - ۱$ و $y = x^{۲} - x^{۳}$ و محور y ها کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱» حد پایین انتگرال $x = ۰$ می‌باشد (چون محور y ها در صورت سؤال قید شده است) اما برای به‌دست آوردن حد بالای انتگرال باید نقطه‌ی تلاقی دو منحنی را حساب کنیم:

$$\begin{cases} y = x^{۲} - ۱ \\ y = x^{۲} - x^{۳} \end{cases} \Rightarrow x^{۲} - ۱ - x^{۲} + x^{۳} = ۰ \Rightarrow x^{۳} = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

$$S = \left|\int_{۰}^{۱} [(x^{۲} - ۱) - (x^{۲} - x^{۳})]dx\right| = \left|\int_{۰}^{۱} (x^{۳} - ۱)dx\right| = \left|\left[\frac{x^{۴}}{۴} - x\right]_{۰}^{۱}\right| = \frac{۳}{۴}$$

مثال۵: مساحت بین منحنی‌های $y = ۱۶ - x^{۲}$ و $y = (x - ۴)^{۲}$ و محور x ها کدام است؟

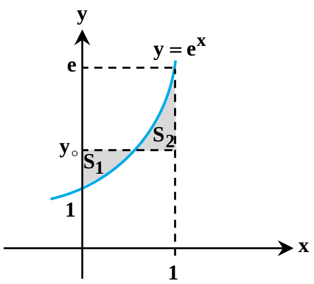
۱) $\frac{۳۲}{۳}$　　۲) $\frac{۶۴}{۳}$　　۳) $\frac{۱۶}{۳}$　　۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ : گزینه «۲» هیچکدام از حدود بالا و پایین انتگرال معلوم نیست و به نظر می‌رسد این حدود همـان نقـاط تلاقـی دو منحنـی باشـد. در واقـع ایـن دو منحنی احتمالاً در دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؛ برای اطمینان از این حدس اولیه، دو معادله را با هم تلاقی می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix} y_{۱} = x^{۲} - ۸x + ۱۶ \\ y_{۲} = ۱۶ - x^{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۶ + x^{۲} - ۱۶ = ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۸x = ۰ \Rightarrow x = ۰,\ x = ۴$$

$$S = \left|\int_{۰}^{۴} (y_{۱} - y_{۲})\,dx\right| = \left|\int_{۰}^{۴} (۲x^{۲} - ۸x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{۲x^{۳}}{۳} - ۴x^{۲}\right]_{۰}^{۴}\right| = \frac{۶۴}{۳}$$

مثال۶: در شکل زیر، مساحت‌های دو ناحیه $S_{۱}$ و $S_{۲}$ با هم برابر است. مقدار $y_{۰}$ کدام است؟



۱) $\frac{e}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}(e - ۱)$

۳) $(e - ۱)$

۴) $\frac{۱}{۲}(e - ۱)$

پاسخ: گزینه «۳» در واقع در این سؤال باید مساحت بـین نمـودار $y = e^{x}$ و خطـوط $y = y_{۰}$ و $x = ۱$ (ناحیـه‌ی $S_{۲}$) و همچنـین مسـاحت بـین نمـودار $y = e^{x}$ و خطوط $y = y_{۰}$ و $x = ۰$ (ناحیه‌ی $S_{۱}$) را حساب کنیم که در ناحیه‌ی $(S_{۱})$ نمودار $y = y_{۰}$ بـالای منحنـی $y = e^{x}$ و در ناحیـه‌ی $S_{۲}$ نمـودار $y = e^{x}$ بالای خط $y = y_{۰}$ $(S_{۲})$ قرار دارد. برای محاسبه‌ی مساحت فرض کنید نقطه‌ی برخورد خط $y = y_{۰}$ با منحنی $y = e^{x}$ به‌صورت $(x_{۰}, y_{۰})$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{matrix} S_{۱} = \int_{۰}^{x_{۰}} (y_{۰} - e^{x})dx = [y_{۰}x]_{۰}^{x_{۰}} + [-e^{x}]_{۰}^{x_{۰}} = y_{۰}x_{۰} - e^{x_{۰}} + ۱ \\ S_{۲} = \int_{x_{۰}}^{۱} (e^{x} - y_{۰})dx = [e^{x}]_{x_{۰}}^{۱} - [y_{۰}x]_{x_{۰}}^{۱} = e^{۱} - e^{x_{۰}} - y_{۰} + y_{۰}x_{۰} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{S_{۱} = S_{۲}} y_{۰}x_{۰} - e^{x_{۰}} + ۱ = e - e^{x_{۰}} - y_{۰} + y_{۰}x_{۰} \Rightarrow y_{۰} = e - ۱$$

مثال ۷ (سخت): مساحت بالای هذلولی $xy = ۱۲$ و داخل دایره $x^{۲} + y^{۲} = ۲۵$، در ربع اول برابر کدام گزینه است؟

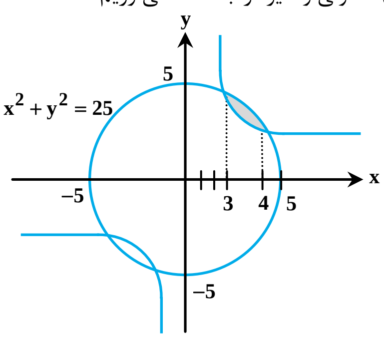
۱) $۲۵(\sin^{-۱}\frac{۴}{۵} + \sin^{-۱}\frac{۴}{۳}) - ۶Ln\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۲۵}{۲}(\sin^{-۱}\frac{۴}{۵} + \sin^{-۱}\frac{۳}{۵}) - ۱۲Ln\frac{۴}{۳}$

۳) $۲۵(\sin^{-۱}\frac{۴}{۵} - \sin^{-۱}\frac{۳}{۵}) + ۶Ln\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۲۵}{۲}(\sin^{-۱}\frac{۴}{۵} - \sin^{-۱}\frac{۳}{۵}) - ۱۲Ln\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل، مساحت ناحیه هاشورخورده را به‌دست می‌آوریم. ابتدا محل تلاقی قسمت بالای هذلولی و دایره را به‌دست می‌آوریم:



$$xy = ۱۲ \Rightarrow y = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow y^{۲} = \frac{۱۴۴}{x^{۲}}$$

حالا در معادله‌ی دایره جایگزین می‌کنیم:

$$x^{۲} + \frac{۱۴۴}{x^{۲}} = ۲۵ \Rightarrow x^{۴} - ۲۵x^{۲} + ۱۴۴ = ۰ \to (x^{۲} - ۹)(x^{۲} - ۱۶) = ۰$$

با توجه به مثبت بـودن x در ربـع اول، $x = ۳$ و $x = ۴$ بـه‌دسـت مـی‌آینـد. از صـورت سـؤال توابـع $y = \frac{۱۲}{x}$ و $y = \sqrt{۲۵ - x^{۲}}$ مشخص می‌شوند و داریم:

$$\text{مساحت} = \int_{۳}^{۴}(\sqrt{۲۵-x^{۲}}-\frac{۱۲}{x})dx = \int_{۳}^{۴}\sqrt{۲۵-x^{۲}}dx-[۱۲Lnx]_{۳}^{۴} = \underbrace{\int_{۳}^{۴}\sqrt{۲۵-x^{۲}}dx}_{I}-۱۲Ln\frac{۴}{۳}$$

برای محاسبه انتگرال I از تغییر متغیر $x = ۵\sin\theta$ استفاده می‌کنیم، در نتیجه $dx = ۵\cos\theta d\theta$ است. انتگرال نامعین به این ترتیب حل می‌شود و در پایان جواب را برحسب x نوشته و حدود x را قرار می‌دهیم.

$$I = \int\sqrt{۲۵-۲۵\sin^{۲}\theta}\,۵\cos\theta d\theta = ۲۵\int\cos^{۲}\theta d\theta = \frac{۲۵}{۲}\int(۱+\cos ۲\theta)d\theta$$

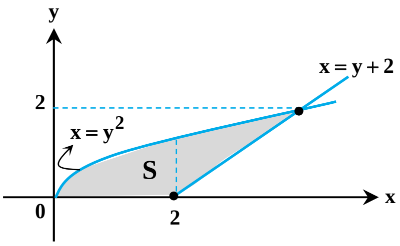
$$= \frac{۲۵}{۲}[\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta] = \frac{۲۵}{۲}[\theta+\sin\theta\cos\theta] = \frac{۲۵}{۲}\left[\sin^{-۱}(\frac{x}{۵})+\frac{x}{۵}\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۲۵}}\right]_{۳}^{۴} = \frac{۲۵}{۲}[\sin^{-۱}\frac{۴}{۵}-\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}]$$

در محاسبات فوق $x = ۵\sin\theta$ است پس $\sin\theta = \frac{x}{۵}$ و $\cos\theta = \sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۲۵}}$ خواهد بود. به این ترتیب با جایگذاری I داریم:

$$\text{مساحت} = I-۱۲Ln\frac{۴}{۳} = \frac{۲۵}{۲}(\sin^{-۱}\frac{۴}{۵}-\sin^{-۱}\frac{۳}{۵})-۱۲Ln\frac{۴}{۳}$$

مثال ۸: **مساحت ناحیه محصور در ربع اول از بالا به نمودار $y=\sqrt{x}$ و از پایین به محور x ها و خط $y = x-۲$ کدام است؟**

۱) $\frac{۲۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این سؤال را در چند صفحه‌ی قبل حل کرده بودیم، اما این‌جا می‌خواهیم x را برحسب y بنویسیم و از فرمول $S = \left|\int_{a}^{b}[f(y)-g(y)]dy\right|$ حل کنیم. از صورت سؤال داریم $x = y^{۲}$ و $x = y+۲$. پس ناحیه‌ی موردنظر به دو منحنی $f(y) = y^{۲}$ و $g(y) = y+۲$ محدود شده است. حال باید کران‌های y را پیدا کنیم. از آن‌جا که محور x ها یعنی $y = ۰$ یکی از مرزها است پس یکی از حدود y را می‌دانیم. برای یافتن کران بالا، منحنی‌ها را برخورد می‌دهیم:

$$f(y) = g(y) \Rightarrow y^{۲} = y+۲ \Rightarrow y^{۲}-y-۲ = ۰$$

$\Delta = ۹$ است و ریشه‌ها $y = \frac{۱\pm ۳}{۲} = -۱,۲$ هستند. اما طبق صورت سؤال، این ناحیه در ربع اول قرار دارد، پس $y = -۱$ قابل قبول نیست. به این ترتیب $y = ۰$ و $y = ۲$ حدود y در این ناحیه هستند.

$$S = \left|\int_{۰}^{۲}(y^{۲}-y-۲)dy\right| = \left|[\frac{y^{۳}}{۳}-\frac{y^{۲}}{۲}-۲y]_{۰}^{۲}\right| = \frac{۱۰}{۳}$$

مثال ۹: **اگر مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y^{۲} = ax$ و $x^{۲} = by$ برابر ۶ باشد، آن‌گاه $|ab|$ کدام است؟**

۱) ۲۷ ۲) ۳ ۳) ۱۸ ۴) ۹

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به نکته گفته شده داریم:

$$S = \frac{|ab|}{۳} \Rightarrow ۶ = \frac{|ab|}{۳} \Rightarrow |ab| = ۱۸$$

مثال ۱۰: **سطح محصور به وسیله $y^{۲} = ۴x^{۲}-x^{۴}$ چقدر است؟** (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷}{۳}$ ۴) $\frac{۳۲}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» محل تلاقی منحنی با محور x ها، نقاط ± ۲ و $x = ۰$ می‌باشد و با توجه به اینکه نمودار منحنی نسبت به محور x ها و y ها متقارن است، کافی است سطح محصور مابین $y = \sqrt{۴x^{۲}-x^{۴}}$ و محور x ها را در ربع اول به‌دست آورده و حاصل را در ۴ ضرب کنیم. حدود x در ربع اول به‌صورت $۰ \le x \le ۲$ هستند.

$$S = ۴\int_{۰}^{۲}\sqrt{۴x^{۲}-x^{۴}}dx = ۴\int_{۰}^{۲}x\sqrt{۴-x^{۲}}dx = \frac{-۴}{۳}(۴-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۳۲}{۳}$$

مثال ۱۱: مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x = y^۲$ و $y = x^۲$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه «۴» به وضوح محل تلاقی دو منحنی $x = ۰$ و $x = ۱$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$S = \int_۰^۱ (\sqrt{x} - x^۲)\,dx = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x} - \frac{x^۳}{۳}\Big]_۰^۱ = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۲: سطح محصور بین نمودار تابع $f(x) = \frac{x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$ و خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ و محور xها کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{۲} - ۱$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi - ۲}{۸}$ ۴) $\frac{\pi - ۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$S = \int_۰^۱ \frac{x^۲}{(x^۲+۱)^۲}dx$$

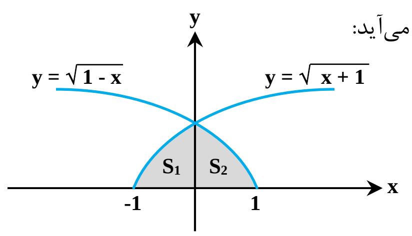
برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $x = tgu$، $dx = \frac{du}{\cos^۲ u}$ استفاده می‌کنیم:

$$S = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{tg^۲u}{(۱+tg^۲u)^۲}\left(\frac{du}{\cos^۲ u}\right) = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{tg^۲u}{\left(\frac{۱}{\cos^۲ u}\right)^۲}.\frac{du}{\cos^۲ u} = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \sin^۲ u\,du = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \left(\frac{۱-\cos ۲u}{۲}\right)du = \left(\frac{۱}{۲}u - \frac{۱}{۴}\sin ۲u\right)\Big]_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۴} = \frac{\pi - ۲}{۸}$$

مثال ۱۳: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار توابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{۱-x}$ و $y = \sqrt{۱+x}$ و محور xها کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۸}{۳}(\sqrt{۲} - ۱)$ ۲) $\frac{۴}{۳}(۲\sqrt{۲} - ۱)$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}(۲\sqrt{۲} - ۳)$ ۴) $\frac{۳۲}{۳}(۲\sqrt{۲} - ۱)$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با توجه به شکل مساحت ناحیه موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

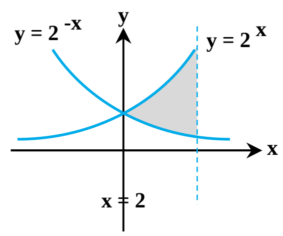


$$S = S_۱ + S_۲ = \int_{-۱}^{۰} \sqrt{x+۱}dx + \int_۰^۱ \sqrt{۱-x}\,dx = \frac{۲}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{-۱}^{۰} - \frac{۲}{۳}(۱-x)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱ = \frac{۴}{۳}$$

مثال ۱۴: مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = ۲^x$ و $y = ۲^{-x}$ و خط $x = ۲$ کدام است؟ $(Ln۲ = ۰/۶۹۳)$ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۴)

۱) ۳   ۲) ۲/۷۵   ۳) ۲/۵   ۴) ۳/۲۵

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل، مساحت موردنظر برابر است با:

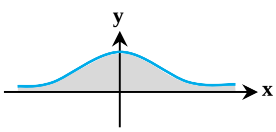


$$S = \int_۰^۲ (۲^x - ۲^{-x})dx = \left(\frac{۲^x}{Ln۲} + \frac{۲^{-x}}{Ln۲}\right)\Big|_۰^۲ = \frac{۹}{۴Ln۲} \cong ۳/۲۵$$

مثال ۱۵: مساحت بین خم $y = e^{-|x|}$ و محور xها کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) ∞ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به تقارن شکل مساحت ناحیه سمت راست را به‌دست آورده و آن را ۲ برابر می‌کنیم.



$$S = ۲\int_۰^{\infty} e^{-x}dx = -۲e^{-x}\Big|_۰^{\infty} = ۲$$

مثال ۱۶: مساحت ناحیه محدود منحنی $y = x\sin x$ و محور xها از نقطه $x = 0$ تا نقطه $x = \pi$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\pi - 1$ ۴) $\pi + 1$

پاسخ: گزینه «۱»

$$S = \int_0^{\pi} x\sin x dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

مثال ۱۷: سطح محدود به نمودار تابع $y = xe^{-x}$ و محورxها در بازه $[0,1]$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $2 - \frac{1}{e}$ ۲) $2 - \frac{2}{e}$ ۳) $1 - \frac{2}{e}$ ۴) $1 - \frac{1}{e}$

پاسخ: گزینه «۳» مساحت سطح محصور زیر نمودار تابع $y = f(x)$ در بازه $[a,b]$ به‌صورت روبرو بیان می‌شود. $S = \int_a^b |f(x)| dx$

$$S = \int_0^1 xe^{-x}dx \xrightarrow{\text{روش جزء به جزء}} -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\begin{vmatrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{vmatrix}$$

مثال ۱۸: مساحت محدود به نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ و محور xها و دو خط $x = 3$ و $x = 5$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\text{Ln}\frac{5}{3}$ ۲) $\text{Ln}3$ ۳) $\text{Ln}6$ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»

یادآوری: مساحت بین محور xها و تابع نامنفی $y = f(x)$ روی بازه $[a,b]$ برابر است با: $\text{مساحت} = \int_a^b f(x)dx$

بنابراین:
$$\text{مساحت} = \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}dx = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 9})\Big|_3^5 = \text{Ln}9 - \text{Ln}3 = \text{Ln}3$$

در محاسبه انتگرال فوق از فرمول روبرو استفاده کرده‌ایم:
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{Ln}(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + c$$

مثال ۱۹: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ و محور xها و خط $x = 3$ کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» مساحت ناحیه مذکور برابر است با: $s = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

برای محاسبه انتگرال فوق، تغییر متغیر مقابل را اعمال می‌کنیم.

$$1 + x = u \quad \to dx = du \;,\; x = u - 1 \quad , \quad x = 0 \Rightarrow u = 1 \;,\; x = 3 \Rightarrow u = 4$$

$$\Rightarrow s = \int_1^4 \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int_1^4 (u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{-1}{2}})du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{8}{3}$$

درسنامه۳: محاسبه‌ی حجم حاصل از دوران

مثال۱: ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$، حول محور x ها دوران می‌کند. حجم حاصل از دوران کدام است؟

۱) π^2 ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}[x - \frac{\sin 2x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال۲: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به نمودار $xy = 1$، خطوط $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 3$، حول محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) π ۴) $\frac{4\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» سؤال بسیار ساده است، با استفاده از فرمول داریم:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow V = \pi\int_1^3 (\frac{1}{x})^2 dx = \pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3 = \frac{2\pi}{3}$$

مثال۳: یک جسم دوّار با چرخش نمودار تابع پیوسته $y = f(x)$ در بازه $[0,a]$ حول محور x ها، بوجود آمده است. اگر به ازای هر $a > 0$، حجم این جسم برابر با « $a^2 + a$ » باشد، آن‌گاه مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ ۴) $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرمول محاسبه حجم حاصل از دوران داریم:

$$V = \int_0^a \pi f^2(x)\,dx = a^2 + a$$

از طرفین نسبت به a مشتق می‌گیریم. در سمت چپ تساوی از فرمولِ «مشتق از انتگرال» استفاده می‌کنیم:

$$\pi(f(a))^2 = 2a + 1 \Rightarrow (f(a))^2 = \frac{2a+1}{\pi} \Rightarrow f(a) = \sqrt{\frac{2a+1}{\pi}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

مثال۴: اندازه حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{2\pi}{15}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0\,,\ x = 1 \quad , \quad V = \pi\int_0^1 (y_1^2 - y_2^2)dx \Rightarrow V = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{2\pi}{15}$$

مثال۵: ناحیه‌ی محدود به تابع $y = \sqrt{x^2 + 2}$ و محور x ها در بازه‌ی $[\sqrt{2},\sqrt{7}]$ را حول محور y ها دوران داده‌ایم، حجم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{54\pi}{3}$ ۲) $\frac{38\pi}{3}$ ۳) $\frac{46\pi}{3}$ ۴) $\frac{70\pi}{3}$

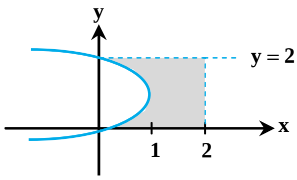
پاسخ: گزینه «۲» چون تابع به‌صورت $y = f(x)$ است و محور دوران، محور y ها می‌باشد، می‌توانیم برای محاسبه حجم از روش پوسته استوانه‌ای استفاده کنیم. در این صورت داریم:

$$V = 2\pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} x\sqrt{x^2+2}\,dx = 2\pi\times[\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} = \frac{2\pi}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{54\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} = \frac{38\pi}{3}$$

مثال۶: سطح محصور به منحنی $x = 2y - y^2$ و خطوط $x = 2$ ، $y = 0$ و $y = 2$ ، حول محور x ها دوران می‌کند، حجم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{32\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{16\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» ناحیه موردنظر در شکل مقابل هاشورخورده است. برای محاسبه حجم موردنظر می‌توانیم حجم حاصل از دوران خط $y = 2$ را حول محور x ها به‌دست آورده و سپس حجم حاصل از دوران منحنی $x = 2y - y^2$ حول محور x ها را از آن کم کنیم.



برای محاسبه حجم حاصل از دوران $y = 2$ حول محور xها در فاصله $0 \le x \le 2$ از روش دیسک استفاده می‌کنیم.

$$V_2 = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 2^2\,dx = \pi(4x)\Big|_0^2 = 8\pi$$

برای محاسبه حجم حاصل از دوران $x = 2y - y^2$ حول محور xها از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$V_1 = 2\pi\int_a^b yf(y)dy = 2\pi\int_0^2 y(2y - y^2)dy = 2\pi\int_0^2 (2y^2 - y^3)dy = 2\pi(\frac{2}{3}y^3 - \frac{y^4}{4})\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

بنابراین حجم موردنظر برابر $V = 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$ است.

مثال ۷: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=\frac{۱}{\sqrt{xLnx}}$ درفاصلهٔ $[e,e^۲]$ حول محور x ها برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) π ۲) $\pi(Ln۲-۱)$ ۳) $\pi Ln۲$ ۴) ۲π

پاسخ : گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده که بنا بر فرمول داریم:

$$V=\pi\int_e^{e^۲}y^۲dx=\pi\int_e^{e^۲}\frac{dx}{xLnx}=\pi(Ln(Lnx))\Big|_e^{e^۲}=\pi Ln۲$$

مثال ۸: ناحیه‌ی بین نمودار $y=Ln(\frac{۱}{x})$، محور x ها و محور y ها به دور محور x ها دوران کرده است. حجم جسمی را که تولید می‌گردد به‌دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) π

پاسخ : گزینه «۳» تابع داده شده را می‌توان به‌صورت $y=Ln(\frac{۱}{x})=-Lnx$ نوشت؛ این تابع محور x ها را در $x=۱$ قطع می‌کند $(y=\circ)$ که می‌دانیم حجم موردنظر را می‌توان از رابطهٔ $V=\pi\int_a^b(f(x))^۲dx$ به‌دست آورد. چون در صورت مسأله محور y ها ذکر شده، پس کران دیگر انتگرال‌گیری، $x=\circ$ می‌باشد و داریم:

$$V=\pi\int_\circ^۱(-Lnx)^۲dx$$

با توجه به مطالب فصل قبل به یاد می‌آوریم که $\int_\circ^۱x^s(-Lnx)^n dx=\frac{\Gamma(n+۱)}{(s+۱)^{n+۱}}$ پس برای انتگرال فوق داریم:

$$\Rightarrow V=\pi.\frac{\Gamma(۲+۱)}{(\circ+۱)^{۲+۱}}=\pi\Gamma(۳)=\pi\times۲!=۲\pi$$

مثال ۹: ناحیه‌ی A محصور به منحنی $y=\sin x$ و $y=۱$ و $x=\circ$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۸}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$V=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}(۱^۲-\sin^۲x)dx=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲x\,dx=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos۲x}{۲}dx=\pi(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۴}\sin۲x)\Big|_\circ^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi^۲}{۴}$$

مثال ۱۰: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به نمودار $(x\geq\circ)$، $y=x^۳$، خط $y=۱$ و محور y، حول محور y کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۷}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه «۱» برای محاسبه حجم، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$V=۲\pi\int_\circ^۱x(f(x)-g(x))dx=۲\pi\int_\circ^۱x(۱-x^۳)dx=۲\pi(\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۵}{۵})\Big|_\circ^۱=\frac{۳\pi}{۵}$$

مثال ۱۱: ناحیه‌ی R واقع بین نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+e^{-x}}}$ و خطوط $x=\circ$ و $x=۱$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\pi Ln۲$ ۲) $\frac{\pi}{۲}Ln(e+۱)$ ۳) $۲\pi Ln(e+۱)$ ۴) $\pi Ln(\frac{e+۱}{۲})$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال نسبتاً ساده‌ای که بیشتر باید به انتگرال‌گیری مسلط باشید:

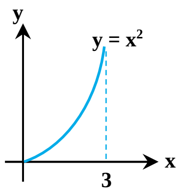
$$V=\pi\int_\circ^۱(f(x))^۲dx=\pi\int_\circ^۱\frac{۱}{۱+e^{-x}}dx\xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } e^{+x}}V=\pi\int_\circ^۱\frac{e^xdx}{e^x+۱}=\pi Ln(e^x+۱)\Big|_\circ^۱=\pi Ln(\frac{e+۱}{۲})$$

مثال ۱۲: حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به خطوط $x=۳$، $y=\circ$ و سهمی $y=x^۲$ حول محور y ها برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) ۹π ۲) $\frac{۲۷\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۵۴\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۸۱\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V=۲\pi\int_\circ^۳x.(x^۲-\circ)dx=۲\pi\int_\circ^۳x^۳dx=\frac{۸۱\pi}{۲}$$

روش دوم: حجم حاصل از دوران سهمی به اندازه‌ی نصف حجم استوانه‌ی در برگیرنده‌ی سهمی‌است با توجه به اینکه حجم استوانه‌ی در برگیرنـده‌ی سـهمی داده شده برابر با $v = (3\times 3\times \pi)\times 9 = 81\pi$ می‌باشد، پس حجم حاصل از دوران سهمی‌در ناحیه‌ی داده شده برابر $\frac{81\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال ۱۳: **ناحیه محصور بین دو سهمی $x = y - y^2$ و $x = y^2 - 3$، حول خط $x = -4$ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل کدام است؟**

(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۶)

۱) $\frac{875}{32}\pi^2$ ۲) 875π ۳) $\frac{875}{32}\pi$ ۴) $875\pi^2$

پاسخ : گزینه «۳» در این سؤال، محور دوران خط $x = -4$ است و ناحیه‌ی مورد نظر به سهمی‌های $f(y) = y - y^2$ و $g(y) = y^2 - 3$ محدود شده اسـت.

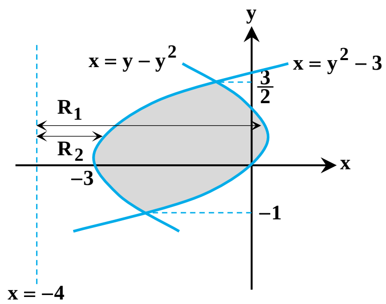
بنابراین از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:
$$V = \pi\int_a^b (|f(y) - k|^2 - |g(y) - k|^2)dy$$

برای تعیین حدود y، نقاط تلاقی دو سهمی را به دست می‌آوریم:
$$y - y^2 = y^2 - 3 \Rightarrow 2y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = -1, \frac{3}{2}$$

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{3}{2}} ((y - y^2 + 4)^2 - (y^2 + 1)^2)dy = \pi\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)dy = \frac{875\pi}{32}$$

توضیح: برای حل این مسأله نیازی به رسم شکل نداریم اما برای آن‌که بـه فهـم هندسـی آن نزدیک شویم به نمودار مقابل توجه کنید.

محور دوران خط $x = -4$ است. وقتی $f(y) = y - y^2$ حـول ایـن خـط دوران مـی‌کنـد، شـعاع دوران $R_1 = |f(y) - (-4)|$ اسـت و وقـتی $g(y) = y^2 - 3$ حـول آن دوران می‌کند؛ شعاع دوران $R_2 = |g(y) - (-4)|$ است. حجم حاصل از دوران $f(y)$ را منهای حجم حاصل از دوران $g(y)$ می‌کنیم.

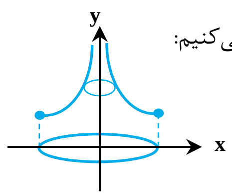


مثال ۱۴: **ناحیه‌ای بی‌کران تحت منحنی $y = f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ حول محور y دوران کرده است. حجم V جسمِ دوّارِ بـی‌کـران حاصـل را بیابید؟**

(معدن ـ سراسری ۸۷)

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 8π

پاسخ : گزینه «۳» از آن‌جا که تابع داده شده برحسب x است، اما محور دوران محور y است، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:



$$V = 2\pi\int_0^1 x(x^{\frac{-3}{2}})dx = 2\pi\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\pi(2\sqrt{x})\Big|_0^1 = 4\pi$$

مثال ۱۵: **سطح محدود به منحنی $y = \sqrt{8x - x^2}$ و محور xها از نقطه $x = 0$ تا $x = 3$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟**

(صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) 18π ۲) 21π ۳) 24π ۴) 27π

پاسخ : گزینه «۴»
$$V = \pi\int y^2dx = \pi\int_0^3 (8x - x^2)dx = \pi(4x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = 27\pi$$

مثال ۱۶: **هرگاه ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^3$ و $y = 1$ بین $x = 0$ و $x = 1$ را حول محور x دوران دهیم، مقدار حجم حاصل کدام است؟**

(عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{5}{4}\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{6}{7}\pi$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال بسیار ساده‌ای که برای حل آن کافیست فرمول حجم بین دو منحنی را بلد باشید:
$$V = \pi\int_0^1 (1^2 - (x^3)^2)dx = \pi(x - \frac{x^7}{7})\Big|_0^1 = \frac{6\pi}{7}$$

مثال ۱۷: حجم جسم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را حول محور xها به‌دست آورید؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{3\pi}{10}$
۲) $\frac{2\pi}{5}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) $\frac{3\pi}{5}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی منحنی‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x=0,1$$

$$V=\pi\int_0^1\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx=\pi\int_0^1\left|x^4-x\right|dx=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

مثال ۱۸: یکی از نواحی محدود به منحنی $y=\sin x$ و محور xها را حول محور xها دوران می‌دهیم. اندازه‌ی حجم حاصل کدام است؟

(صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) π^2-1
۲) $\frac{1}{2}\pi^2$
۳) 2π
۴) $\frac{1}{2}\pi^2-1$

پاسخ : گزینه «۲» مهمترین قسمت حل، تعیین حدود انتگرال است. چون تابع $y=\sin x$ در نقاط 0 و π محور xها را قطع می‌کند (دارای دور تناوب 2π است و در بازه‌های $[0,\pi]$ و $[\pi,2\pi]$ یکسان هستند) خواهیم داشت:

$$V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi=\pi\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi^2$$

مثال ۱۹: سطح محدود بین خط $2x+2-y=0$ و خطوط $y=4$ و $y=8$ و محور yها را حول محور y دوران می‌دهیم. مقدار حجم حاصل کدام است؟

(آمار ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{52\pi}{3}$
۲) $\frac{29\pi}{4}$
۳) $\frac{49\pi}{4}$
۴) $\frac{21\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$V=\pi\int_4^8 x^2dy=\pi\int_4^8\left(\frac{y-2}{2}\right)^2dy=\frac{\pi}{4}\int_4^8(y-2)^2dy=\frac{\pi}{4}\times\left[\frac{(y-2)^3}{3}\right]_4^8=\frac{52\pi}{3}$$

مثال ۲۰: ناحیه‌ی محصور بین خط $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و محور yها را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{4}(\pi-1)$
۲) $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$
۳) $\frac{\pi}{2}(\pi-1)$
۴) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا محل تقاطع را می‌یابیم.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm 1$$

چون گفته شده محصور به محور y، پس ناحیه‌ای که در ربع اول است، مدنظر می‌باشد، یعنی $0\le x\le 1$ انتخاب می‌شود. (البته این سؤال کمی ابهام دارد زیرا ممکن است منظور طراح سؤال سمت چپ محور yها یعنی $-1\le x\le 0$ باشد، با این حال به علت زوج بودن تابع زیر انتگرال، فرقی ندارد که $0\le x\le 1$ باشد یا $-1\le x\le 0$) برای محاسبه حجم حاصل از دوران ناحیه بین y_1 و y_2 حول محور xها داریم:

$$\text{حجم حاصل از دوران حول محور x ها}=\pi\int_0^1(y_2^2-y_1^2)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\right)dx=\pi\left(\mathrm{Arctg}\,x-\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}(\pi-2)$$

درسنامه۴: محاسبه‌ی طول قوس منحنی

مثال۱: طول قوس منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ از نقطه‌ی $x=0$ تا $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 0 ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا y' را حساب و سپس آن را در فرمول جایگزین می‌کنیم:

$$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\,dx$$

$$\Rightarrow L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\operatorname{Arcsin}x\right]_0^1=\operatorname{Arcsin}(1)-\operatorname{Arcsin}(0)=\frac{\pi}{2}$$

مثال۲: طول قوس منحنی $y=\operatorname{Ln}(1-x^2)$ از $x=0$ تا $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}+2\operatorname{Ln}3$ ۲) $-\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}3$ ۳) $-\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}+2\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $1+y'^2$ را حساب می‌کنیم:

$$y=\operatorname{Ln}(1-x^2)\Rightarrow y'=\frac{-2x}{1-x^2}\Rightarrow y'^2=\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}\Rightarrow 1+y'^2=1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^4+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

بنابراین المان طول قوس به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{(\frac{1+x^2}{1-x^2})^2}\,dx=\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|dx$$

با توجه به بازه تغییرات x علامت عبارت درون قدرمطلق تعیین می‌شود؛ چون $0<x<\frac{1}{2}$، لذا عبارت همواره مثبت است، بنابراین داریم:

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1+x^2}{1-x^2})\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(-1+\frac{2}{1-x^2})\,dx=\left[-x+(\frac{2}{2\times1})\operatorname{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=-\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}3$$

توضیح: در حل انتگرال $I=\int\frac{2}{1-x^2}dx$، از فرمول $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\operatorname{Ln}\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$ استفاده کردیم.

مثال۳: طول منحنی $y=\operatorname{Ln}(\frac{e^x-1}{e^x+1})$، از $x=2$ تا $x=4$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Ln}(\frac{e^4-1}{e^2})$ ۲) $\operatorname{Ln}(\frac{e^4+1}{e^2})$ ۳) $\operatorname{Ln}(\frac{e^2}{e^4+1})$ ۴) $\operatorname{Ln}(\frac{e^4+1}{e^2+1})$

پاسخ: گزینه «۲» برای به‌دست آوردن طول منحنی باید حاصل $\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ را بیابیم:

$$y=\operatorname{Ln}(\frac{e^x-1}{e^x+1})=\operatorname{Ln}(e^x-1)-\operatorname{Ln}(e^x+1)$$

$$y'=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}\Rightarrow y'^2=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}\Rightarrow 1+y'^2=\frac{(e^{2x}-1)^2+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}=(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1})^2$$

برای محاسبه‌ی طول منحنی موردنظر باید $\int_{x=2}^{x=4}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$ را به‌دست آوریم. با ضرب e^{-x} در صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

اکنون دقت کنید که صورتِ کسر، مشتقِ مخرج است:

$$u=e^x-e^{-x}\Rightarrow du=(e^x+e^{-x})dx$$

پس داریم:

$$\text{طول قوس}=\int_2^4\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\operatorname{Ln}(e^x-e^{-x})\Big|_2^4=\operatorname{Ln}(e^4-e^{-4})-\operatorname{Ln}(e^2-e^{-2})=\operatorname{Ln}\frac{e^4-e^{-4}}{e^2-e^{-2}}$$

حالا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم: $e^4-e^{-4}=(e^2-e^{-2})(e^2+e^{-2})$، سپس با ساده کردن (e^2-e^{-2}) از صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$\text{طول قوس}=\operatorname{Ln}(e^2+e^{-2})=\operatorname{Ln}(e^2+\frac{1}{e^2})=\operatorname{Ln}(\frac{e^4+1}{e^2})$$

توضیح: البته در حل انتگرال، ممکن است راه‌حل ابتکاری (ضرب e^{-x} در صورت و مخرج) به ذهن برخی نرسد. در این صورت، می‌توان از تغییر متغیر $e^{2x}-1=u$ برای حل انتگرال استفاده کرد. سعی کنید با این روش نیز به جواب برسید.

مثال ۴: طول قوس منحنی $x=\int_0^y \sqrt{\cosh t}\,dt$، $(0\le y\le \mathrm{Ln}2)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» در این مثال با منحنی $x=f(y)$ سروکار داریم، که در آن $0\le y\le \mathrm{Ln}2$ است. در نتیجه از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$L=\int_0^{\mathrm{Ln}2}\sqrt{1+x_y'^2}\,dy$$

مشتقِ x نسبت به y با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال به‌دست می‌آید: $x'_y=\sqrt{\cosh y}\Rightarrow 1+(x'_y)^2=1+\cosh y$

همان‌طور که در توابع مثلثاتی فرمول $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ را داریم، در توابع هایپربولیک هم فرمول $1+\cosh y=2\cosh^2(\frac{y}{2})$ برقرار است.

به این ترتیب با جایگذاری در انتگرال داریم:

$$L=\int_0^{\mathrm{Ln}2}\sqrt{2\cosh^2(\frac{y}{2})}\,dy=\int_0^{\mathrm{Ln}2}\sqrt{2}\cosh(\frac{y}{2})dy=2\sqrt{2}\left[\sinh(\frac{y}{2})\right]_0^{\mathrm{Ln}2}=2\sqrt{2}[\sinh(\frac{\mathrm{Ln}2}{2})-\sinh(0)]=2\sqrt{2}\sinh(\frac{\mathrm{Ln}2}{2})$$

$$L=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}(e^{\frac{\mathrm{Ln}2}{2}}-e^{-\frac{\mathrm{Ln}2}{2}})=\sqrt{2}(e^{\mathrm{Ln}\sqrt{2}}-e^{-\mathrm{Ln}\sqrt{2}})\xrightarrow{e^{\mathrm{Ln}a}=a}L=\sqrt{2}(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})=2-1=1$$

مثال ۵: طول یکی از قوس‌های سیکلوئید به معادله‌ی پارامتری $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ از نقطه‌ی $t=0$ تا $t=2\pi$ کدام است؟

۱) 4π　　۲) ۸　　۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{2}+1}{2\pi}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases}x'(t)=1-\cos t\\ y'(t)=\sin t\end{cases}\Rightarrow L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t-2\cos t+\sin^2 t}\,dt$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4\cos\pi+4\cos(0)=4+4=8$$

دقت کنید که $\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=|\sin\frac{t}{2}|$ است، اما چون $0\le t\le 2\pi$ است؛ داریم $0\le\frac{t}{2}\le\pi$ و به همین خاطر $\sin\frac{t}{2}\ge 0$ است و قدرمطلق لازم نیست.

مثال ۶: مکان متحرکی در لحظه‌ی t با معادلات $y=8(\sin t-t\cos t)$ و $x=8(\cos t+t\sin t)$ مشخص شده است. مسافتی کـه متحـرک از لحظـه‌ی $t=\frac{\pi}{3}$ تا $t=\frac{\pi}{2}$ پیموده، کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{9}$　　۲) $\frac{5\pi}{9}$　　۳) $\frac{4\pi^2}{9}$　　۴) $\frac{5\pi^2}{9}$

پاسخ: گزینه «۴» نوع بیان سؤال کمی فرق کرده است؛ در واقع مسافت طی شده توسط متحرک، همان طول قوس منحنی پارامتری مورد نظر است:

$$L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}8\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}8t\,dt=8\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=4[\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{9}]=\pi^2-\frac{4\pi^2}{9}=\frac{5\pi^2}{9}$$

مثال ۷: طول قوسی از منحنی به معادله‌ی $\begin{cases}x=\mathrm{Ln}\sqrt{1+t^2}\\ y=\mathrm{Arctg}\end{cases}$ از نقطه‌ی نظیر $t=0$ تا $t=1$ چقدر است؟

۱) $\mathrm{Ln}(2-\sqrt{2})$　　۲) $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$　　۳) $\mathrm{Ln}\sqrt{2}$　　۴) $\frac{\pi}{4}-\mathrm{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲» طول قوس توابع پارامتری برابر است با: $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$

$$\begin{cases}x=\mathrm{Ln}\sqrt{1+t^2}=\mathrm{Ln}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+t^2)\Rightarrow x_t'=\frac{1}{2}\times\frac{2t}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}\\ y=\mathrm{Arctg}\Rightarrow y_t'=\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{(\frac{t}{1+t^2})^2+(\frac{1}{1+t^2})^2}dt=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}}dt=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2+1}{(1+t^2)^2}}dt$$

$$\Rightarrow L=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=[\mathrm{Ln}(t+\sqrt{1+t^2})]_0^1=\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})-\mathrm{Ln}(1)=\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$$

مثال ۸: محیط آسترویئد به معادله‌ی پارامتری $x = a\cos^3 t\ ,\ y = a\sin^3 t$ کدام است؟

۱) $6a$ ۲) a ۳) $3a$ ۴) $8a$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\begin{cases} x'_t = -3a\cos^2 t\sin t \\ y'_t = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a|\sin t\cos t| = \frac{3a}{2}|\sin 2t|$$

می‌دانیم که دوره‌ی تناوب $\sin kt$ برابر است با $\frac{2\pi}{k}$. بنابراین دوره‌ی تناوب $\sin 2t$ برابر است با $\frac{2\pi}{2} = \pi$. از طرفی وقتی از توابع $\sin kt$ و $\cos kt$ قدرمطلق گرفته شود، دوره‌ی تناوب آن‌ها نصف می‌شود. پس دوره‌ی تناوب $|\sin 2t|$ برابر است با $\frac{\pi}{2}$. به همین دلیل، انتگرال این تابع در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ و $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ با هم برابر است، بنابراین می‌توانیم انتگرال روی بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ را گرفته و چهار برابر کنیم. در این بازه $\sin 2t \ge 0$ است و نیازی به قدرمطلق نداریم.

$$L = \int_0^{2\pi}\frac{3a}{2}|\sin 2t|dt \Rightarrow L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = -3a[\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

مثال ۹ (سخت): طول خم $x + y = 2e^{\frac{x-y}{2}}$، از $x = 1$ تا $x = e + 1$ برابر با کدام گزینه است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۱) دانشگاه‌های روسیه)

۱) $\sqrt{2}[\sqrt{1+e^2} - Ln(\sqrt{1+e^2}+1) + Ln(\sqrt{2}+1) + 1 + \sqrt{2}]$

۲) $\sqrt{2}[\sqrt{1+e^2} - Ln(\sqrt{1+e^2}+1) + Ln(\sqrt{2}-1) + 1 - \sqrt{2}]$

۳) $2[\sqrt{1+e^2} - Ln(\sqrt{1+e^2}+1) + Ln(\sqrt{2}+1) + 1 - \sqrt{2}]$

۴) $\sqrt{2}[\sqrt{1+e^2} - Ln(\sqrt{1+e^2}+1) + Ln(\sqrt{2}+1) + 1 - \sqrt{2}]$

پاسخ: گزینه «۴» توجه کنید که پیدا کردن y برحسب x، یا x برحسب y به طور صریح کار نسبتاً مشکلی است و به نظر می‌رسد بهتر باشد از روش پارامتری کمک بگیریم. با توجه به آن که ضابطه‌ی این تابع به‌صورت یک رابطه‌ی ضمنی بین $x + y$ و $\frac{x-y}{2}$ داده شده است، می‌توانیم یکی از آن‌ها را t گرفته و دیگری را برحسب t به‌دست آوریم.

$$\frac{x-y}{2} = t \Rightarrow x + y = 2e^t$$

اکنون داریم: $\begin{cases} x + y = 2e^t \\ x - y = 2t \end{cases}$، با حل این دستگاه به معادلات پارامتری $x = e^t + t$ و $y = e^t - t$ می‌رسیم. در $x = 1$ داریم $t = 0$ و در $x = e + 1$ داریم $t = 1$. بنابراین $0 \le t \le 1$ است. المان طول قوس را محاسبه می‌کنیم:

$$dL = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt = \sqrt{(e^t+1)^2 + (e^t-1)^2}dt = \sqrt{2e^{2t}+2}dt = \sqrt{2}\times\sqrt{1+e^{2t}}dt \Rightarrow L = \sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1+e^{2t}}\,dt$$

با تغییر متغیر $e^t = tg\theta$ انتگرال را حل می‌کنیم. در این صورت داریم: $e^t dt = (1+tg^2\theta)d\theta$، پس $dt = \frac{1+tg^2\theta}{tg\theta}d\theta$ است. به ازای $t = 0$ داریم $tg\theta = 1$، پس $\theta = \frac{\pi}{4}$ و به ازای $t = 1$ داریم: $tg(\theta) = e$، یعنی $\theta = tg^{-1}(e)$. در ضمن می‌دانیم که $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$ است.

$$L = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}(e)}\sqrt{1+tg^2\theta}\,\frac{(1+tg^2\theta)}{tg\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}(e)}\frac{\sec^3\theta}{tg\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}(e)}\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}d\theta$$

ابتدا حل انتگرالِ نامعین را توضیح می‌دهیم. برای حل این انتگرال در صورت کسر به جای یک، عبارت $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ را قرار می‌دهیم:

$$\int\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin\theta}d\theta = \int(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta})d\theta = \int(\csc\theta + \sec\theta tg\theta)d\theta = -Ln|\csc\theta + cotg\theta| + \sec\theta$$

حال دقت کنید که $\sec\theta = \sqrt{1+tg^2\theta}$ و $cotg\theta = \frac{1}{tg\theta}$ و $\csc\theta = \sqrt{1+cotg^2\theta}$ است. بنابراین جواب را برحسب $tg\theta$ نوشته و حدود انتگرال را در آن قرار می‌دهیم.

$$L = \sqrt{2}[-Ln|\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\theta}} + \frac{1}{tg\theta}| + \sqrt{1+tg^2\theta}]_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}e} = \sqrt{2}[-Ln(\sqrt{1+\frac{1}{e^2}} + \frac{1}{e}) + \sqrt{1+e^2} + Ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}]$$

$$= \sqrt{2}[-Ln(\sqrt{\frac{e^2+1}{e^2}} + \frac{1}{e}) + \sqrt{1+e^2} + Ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}] = \sqrt{2}[-Ln(\frac{1}{e}(\sqrt{e^2+1}+1)) + \sqrt{1+e^2} + Ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}]$$

مثال ۱۰: طول منحنی زنجیری به معادله‌ی $y=\cosh x$ از نقطه $x=-1$ تا $x=1$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $e-\frac{1}{2e}$ ۲) $e-\frac{1}{e}$ ۳) $e+\frac{1}{2e}$ ۴) $e+\frac{1}{e}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا $1+y'^2$ را حساب می‌کنیم:

$$y'=\sinh x \to 1+y'^2=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x \Rightarrow L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\cosh^2 x}\,dx=\int_{-1}^{1}\cosh x dx=\sinh x\Big|_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

مثال ۱۱: طول قوس منحنی $x=\cos^3 t$ و $y=\sin^3 t$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{28}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{cases}x(t)=\cos^3 t \Rightarrow x'(t)=-3\cos^2 t\sin t\\ y(t)=\sin^3 t \Rightarrow y'(t)=3\sin^2 t\cos t\end{cases}\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=9\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{2\pi}|3\sin t\cos t|dt=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin(2t)\,dt\right)=6$$

مثال ۱۲: طول قوس منحنی $9x^2=4y^3$ را از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2\sqrt{3},3)$ محاسبه کنید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) ۵ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$9x^2=4y^3 \Rightarrow x^2=\frac{4}{9}y^3 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\pm y^{\frac{1}{2}}$$

طول قوس در فاصله‌ی $0\le x\le 2\sqrt{3}$ خواسته شده است در $x=0$ داریم: $y=0$ و در $x=2\sqrt{3}$ داریم: $y=3$، پس $0\le y\le 3$ است. در نتیجه $y\ge 0$ است و $\frac{dx}{dy}=\sqrt{y}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$L=\int_0^3\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy=\int_0^3\sqrt{1+y}\,dy=\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{14}{3}$$

مثال ۱۳: طول قوس منحنی به معادله‌ی $0\le t\le 1$ $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $e\sqrt{2}$ ۲) $e-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}(e-1)$ ۴) $\sqrt{2}(e-2)$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\begin{cases}x'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t\\ y'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t\end{cases}\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2=2e^{2t}$$

بنابراین طول قوس منحنی برابر است با:

$$L=\int_0^1\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^1\sqrt{2}\,e^t dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^1=\sqrt{2}(e-1)$$

مثال ۱۴: طول منحنی پارامتری c به معادلهٔ $x=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3t}$, $y=\sqrt{2}\,\mathrm{Lnt}$ وقتی $1\le t\le 2$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{31}{12}$ ۴) π

پاسخ : هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$x(t)=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3t}\Rightarrow x'(t)=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3t^2}\ ,\ y(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Lnt}\Rightarrow y'(t)=\frac{\sqrt{2}}{t}$$

$$\Rightarrow L=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{2}{3}t-\frac{1}{3t^2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2}dt=\int_1^2\sqrt{\frac{4}{9}t^2+\frac{1}{9t^4}-\frac{4}{9t}+\frac{2}{t^2}}\,dt=\int_1^2\sqrt{\frac{4t^6+1-4t^3+18t^2}{9t^4}}\,dt$$

حل انتگرال فوق مشکل است اما از آنجایی که در محدودهٔ $1\le t\le 2$، نامساوی زیر برقرار است داریم:

$$\sqrt{\frac{4t^6+1-4t^3+18t^2}{9t^4}}<\sqrt{\frac{4t^6}{9t^4}}=\frac{2}{3}t\Rightarrow\int_1^2\sqrt{\frac{4t^6+1-4t^3+18t^2}{9t^4}}\,dt<\int_1^2\frac{2}{3}tdt\ ,\quad \int_1^2\frac{2}{3}tdt=\frac{1}{3}t^2\Big]_1^2=\frac{1}{3}(4-1)=1$$

$$\int_1^2\sqrt{\frac{4t^6+1-4t^3+18t^2}{9t^4}}\,dt<1$$

مثال ۱۵: طول منحنی پارامتری C به معادلهٔ $x=\sin^2 t$ ، $y=\cos^2 t$ وقتی $0\le t\le\pi$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) ۰ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به اینکه منحنی پارامتری است، لذا داریم:

$$\begin{cases}x(t)=\sin^2 t\Rightarrow x'(t)=2\sin t\cos t\\ y(t)=\cos^2 t\Rightarrow y'(t)=-2\sin t\cos t\end{cases}\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=8\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L=\int_0^\pi\sqrt{8\sin^2 t\cos^2 t}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{2\sin^2 2t}\,dt=\sqrt{2}\int_0^\pi|\sin 2t|dt=2\sqrt{2}$$

مثال ۱۶: طول قوسی از منحنی به معادلهٔ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ : گزینه «۲» منحنی داده شده را می‌توان به شکل پارامتری $\begin{cases}x=\sin^3 t\\ y=\cos^3 t\end{cases}$ ، $0\le t\le 2\pi$ نوشت. در این صورت داریم:

$$x'(t)=3\sin^2 t\cos t\ \text{و}\ y'(t)=-3\cos^2 t\sin t\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=9\sin^2 t\cos^2 t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{9}{4}\sin^2 2t}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}|\sin 2t|dt=3\int_0^{\pi}|\sin 2t|dt=6$$

مثال ۱۷: طول منحنی به معادلهٔ پارامتری $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t^2\ ;\ 0\le t\le 1\\ y=t\cosh t-\sinh t\end{cases}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $e-1$ ۲) $1-\frac{1}{e}$ ۳) $e+1$ ۴) $1+\frac{1}{e}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\begin{cases}x(t)=1+\frac{1}{2}t^2\\ y(t)=t\cosh t-\sinh t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=t\\ y'(t)=t\sinh t\end{cases}\Rightarrow (x'(t))^2+(y'(t))^2=t^2+t^2\sinh^2 t=t^2\cosh^2 t$$

$$L=\int_0^1\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^1 t\cosh tdt=(t\sinh t-\cosh t)\Big|_0^1=\sinh 1-\cosh 1+1=1-\frac{1}{e}$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\int t\cosh tdt$ باید از روش جزء به جزء به‌صورت زیر عمل نمود:

$$\left.\begin{array}{l}t=u\Rightarrow dt=du\\ \cosh tdt=dv\Rightarrow\sinh t=v\end{array}\right\}\Rightarrow\int t\cosh tdt=t\sinh t-\int\sinh tdt=t\sinh t-\cosh t+C$$

مثال۱۸: طول منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=x^{\frac{3}{2}}$ از نقطه $x=0$ تا نقطه $x=1$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ ۲) $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-2)$ ۳) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-8)$ ۴) $\frac{1}{18}(11\sqrt{11}-2)$

پاسخ : گزینه «۱» سؤالی ساده که به راحتی داریم:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$$

مثال۱۹: طول قوس منحنی $1\le x\le 3$ و $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۴ و مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}+\mathrm{Ln}3$ ۳) $2+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}3$ ۴) $1+\frac{3}{2}\mathrm{Ln}3$

پاسخ : گزینه «۳»

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x})^2}\,dx=\int_1^3(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})dx=(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}x)\Big|_1^3=2+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}3$$

مثال۲۰: طول منحنی $3y-2x^{\frac{3}{2}}=0$ از $x=0$ تا $x=1$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{3}{2}(2\sqrt{2}+1)$ ۲) $\frac{3}{2}(2\sqrt{2}-1)$ ۳) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

پاسخ : گزینه «۴» منحنی داده شده را به‌صورت $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ می‌نویسیم، در این صورت طول منحنی برابر است با:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

مثال۲۱: طول قوسی از منحنی $y=4e^{\frac{1}{2}t}$ و $x=e^t-t$ از نقطه $t=0$ تا $t=2$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) e^2+2 ۲) e^2+1 ۳) e^2-1 ۴) e^2-2

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم، طول قوس منحنی پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$ در فاصله $a\le t\le b$ از رابطه $L=\int_a^b\sqrt{f'^2+g'^2}\,dt$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$L=\int_0^2\sqrt{(e^t-1)^2+(2e^{\frac{1}{2}t})^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{(e^t+1)^2}\,dt=\int_0^2(e^t+1)dt=(e^t+t)\Big|_0^2=e^2+1$$

مثال۲۲: طول منحنی $y=a\cosh(\frac{x}{a})$ از نقطه $(0,a)$ تا نقطه $(2a,a\cosh 2)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) a ۲) ae^{2a} ۳) $a\sinh 2$ ۴) $a\cosh 2$

پاسخ : گزینه «۳» به راحتی با استفاده از فرمول داریم:

$$y=a\cosh(\frac{x}{a})\Rightarrow y'=\sinh(\frac{x}{a})\Rightarrow 1+y'^2=1+\sinh^2(\frac{x}{a})=\cosh^2(\frac{x}{a})\Rightarrow L=\int_0^{2a}\sqrt{\cosh^2(\frac{x}{a})}dx=a\sinh(\frac{x}{a})\Big|_0^{2a}=a\sinh 2$$

درسنامه۵: محاسبه‌ی مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی

مثال۱: فرض کنید تابع $y = x^{2}$ را حول محورyها در بازه‌ی $[0,\sqrt{6}]$ دوران دهیم، در این صورت مساحت سطح حاصل از دوران، کدام است؟

۱) $\frac{31\pi}{3}$ ۲) $\frac{55\pi}{3}$ ۳) $\frac{62\pi}{3}$ ۴) $\frac{74\pi}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به فرمول، چون $f'(x) = 2x$ لذا داریم:

$$S = 2\pi\int_{0}^{\sqrt{6}} x\sqrt{1+(2x)^{2}}\, dx = 2\pi\int_{0}^{\sqrt{6}} x\sqrt{1+4x^{2}}\, dx$$

برای محاسبه انتگرال فوق از تغییر متغیر $u = 1+4x^{2}$، $du = 8x dx$ استفاده می‌کنیم، (فعلاً فقط انتگرال را بدون توجه به بازه‌ها حساب می‌کنیم) در این صورت داریم:

$$\int x\sqrt{1+4x^{2}}\, dx = \int \frac{1}{8}\sqrt{u}\, du = \frac{1}{8}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{8}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{12}(1+4x^{2})^{\frac{3}{2}} + c$$

بنابراین داریم:

$$S = 2\pi\int_{0}^{\sqrt{6}} x\sqrt{1+4x^{2}}\, dx = 2\pi\times\left[\frac{1}{12}(1+4x^{2})^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{\sqrt{6}} = \frac{125\pi}{6}-\frac{\pi}{6} = \frac{124\pi}{6} = \frac{62\pi}{3}$$

مثال۲: مساحت رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y^{2} + 4x = 2\mathrm{Ln}y$ از نقطه‌ی $y = 1$ تا $y = 3$ حول محور xها، چند برابر $\frac{\pi}{3}$ است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه «۴» چون منحنی به‌صورت $x = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}y - \frac{y^{2}}{4}$ داده شده، لذا داریم:

$$S = 2\pi\int_{1}^{3} y\sqrt{1+(x'_{y})^{2}}\, dy$$

ابتدا $1+(x'_{y})^{2}$ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x'_{y} = \frac{1}{2}(\frac{1}{y}-y) \Rightarrow (x'_{y})^{2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{y}-y)^{2} \Rightarrow 1+(x'_{y})^{2} = 1+\frac{1}{4}(\frac{1}{y}-y)^{2} = \frac{1}{4}(y+\frac{1}{y})^{2}$$

حالا به راحتی داریم:

$$S = 2\pi\int_{1}^{3} y\sqrt{\frac{1}{4}(y+\frac{1}{y})^{2}}\, dy = \frac{2\pi}{2}\int_{1}^{3} y(y+\frac{1}{y})dy = \pi[\frac{y^{3}}{3}+y]_{1}^{3} = \pi[(\frac{3^{3}}{3}+3)-(\frac{1}{3}+1)] = \pi[9+3-\frac{4}{3}] = \frac{32\pi}{3}$$

مثال۳: منحنی به معادله‌ی $0 \le x \le 1$ ؛ $y = \cosh x$ را حول محور yها دوران می‌دهیم. مساحت سطح دوّار کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $2\pi(e-1)$ ۲) $\pi(e-1)$ ۳) $2\pi(1-\frac{1}{e})$ ۴) $\pi(1-\frac{1}{e})$

پاسخ: گزینه «۳» چون سطح حاصل از دوران منحنی $y = \cosh x$ حول محور yها خواسته شده است، لذا از فرمول $S = 2\pi\int_{a}^{b} x\sqrt{1+y'^{2}}dx$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x \Rightarrow \sqrt{1+y'^{2}} = \sqrt{1+\sinh^{2} x} = \cosh x$$

$$S = 2\pi\int_{0}^{1} x\sqrt{1+y'^{2}}dx = 2\pi\int_{0}^{1} x\cosh x dx = 2\pi(x\sinh x - \cosh x)]_{0}^{1} = 2\pi(1-\frac{1}{e})$$

مثال۴: سطح حاصل از دوران منحنی $y = e^{x}$ حول محور xها $(0 \le x \le 1)$ برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\pi\int_{0}^{1} e^{x}\sqrt{1+e^{x}}dx$ ۲) $2\pi\int_{0}^{1} e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}dx$ ۳) $\pi\int_{0}^{1} e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}$ ۴) $2\pi\int_{0}^{1} e^{x}\sqrt{1+e^{x}}dx$

پاسخ: گزینه «۲» چون سطح حاصل از دوران $y = f(x)$ حول محور xها خواسته شده از رابطه‌ی $S = 2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1+y'^{2}}dx$ استفاده می‌کنیم:

$$S = 2\pi\int_{0}^{1} y\sqrt{1+y'^{2}}dx = 2\pi\int_{0}^{1} e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}dx$$

مثال ۵: مساحت رویه‌ی حاصل از دوران خط $\Delta:\begin{cases} x+y=1 \\ 0\le x\le 1\end{cases}$ حول محور y ها برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

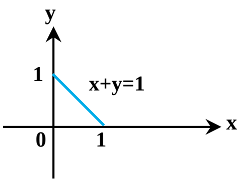
۱) $2\sqrt{\pi}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) $2\pi\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{2\pi}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌دانیم مساحت رویه‌ی به وجود آمده از دوران تابع $y=f(x)$ حول محور y ها از $x=a$ تا $x=b$ از رابطه‌ی روبرو حاصل می‌شود:

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

پس برای این سؤال داریم:

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+1}\,dx=2\sqrt{2}\pi\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1=\sqrt{2}\pi$$



مثال ۶: خم (منحنی) بسته با معادله‌ی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ حول محور x دوران کرده است. مساحت رویه (سطح) دوّار حاصل چقدر است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{6\pi}{5}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{24\pi}{5}$ ۴) $\frac{12\pi}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای به‌دست آوردن مساحت رویه‌ی حاصل حول محور x باید از فرمول $S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ استفاده شود و برای یافتن کران‌ها چون منحنی بسته است، پس باید با خط $y=0$ تقاطع دهیم و به‌دست خواهیم آورد $x=\pm 1$ داریم:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow y'=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow 1+y'^2=1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int_{-1}^{1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.\left|\frac{1}{x^{1/3}}\right|dx=4\pi\int_0^1(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=\frac{-12\pi}{5}(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{12\pi}{5}$$

مثال ۷: منحنی با معادله‌ی $y=f(x)=\sin x$ ، $0\le x\le\pi$ حول محور x دوران کرده است. مساحت A رویه‌ی دوّار حاصل کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $4\pi\left[\sqrt{2}+\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})\right]$ ۲) $\pi\left[2\sqrt{2}+2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})\right]$ ۳) $\pi\left[\sqrt{2}+\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})\right]$ ۴) $\pi\left[2\sqrt{2}-2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})\right]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$S=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $u=\cos x$, $du=-\sin x\,dx$ انتگرال فوق به‌صورت مقابل در می‌آید:

$$S=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}\,du=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,du$$

حالا از تغییر متغیر $u=\mathrm{tg}\theta$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $du=(1+\mathrm{tg}^2\theta)d\theta$ و به ازای $u=\pm 1$ داریم $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$:

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}(1+\mathrm{tg}^2\theta)d\theta=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta$$

دقت کنید که از زوج بودن تابع زیر انتگرال استفاده کرده‌ایم، در ضمن $1+\mathrm{tg}^2\theta=\sec^2\theta$ است. برای حل انتگرال $\int\sec^3\theta\,d\theta$ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$I=\int\sec^3\theta\,d\theta=\int[\sec^3\theta-\sec\theta+\sec\theta]d\theta=\int\sec\theta[\sec^2\theta-1]d\theta+\int\sec\theta\,d\theta=\int\sec\theta\,\mathrm{tg}^2\theta\,d\theta+\int\sec\theta\,d\theta$$

حالا از جزء به جزء برای حل انتگرال $\int\sec\theta\,\mathrm{tg}^2\theta\,d\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$u=\mathrm{tg}\theta\Rightarrow du=(1+\mathrm{tg}^2\theta)d\theta=\sec^2\theta\,d\theta$$

$$dv=\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta\Rightarrow v=\sec\theta$$

$$I=\mathrm{tg}\theta\sec\theta-\int\sec^3\theta\,d\theta+\int\sec\theta\,d\theta\Rightarrow I=\mathrm{tg}\theta\sec\theta-I+\mathrm{Ln}|\sec\theta+\mathrm{tg}\theta|$$

با آوردن $-I$ به سمت چپ، $2I$ به‌دست می‌آید. در نتیجه داریم:

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\sec\theta+\mathrm{tg}\theta|$$

$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta=4\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{tg}\theta\sec\theta+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\sec\theta+\mathrm{tg}\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi(2\sqrt{2}+2\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2}))$$

مثال ۸: منحنی $y=\cosh x$ و $0\le x\le Ln2$ حول محور x دوران می‌کند. مساحت رویه‌ی به‌دست آمده کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $\pi(Ln2+1)$ ۲) $\pi(Ln2+\frac{5}{4})$ ۳) $\pi(Ln2+\frac{11}{12})$ ۴) $\pi(Ln2+\frac{15}{16})$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه $f(x)=\cosh x$، پس $f'(x)=\sinh x$ در نتیجه مساحت رویه مورد نظر برابر است با:

$$S=2\pi\int_0^{Ln2}\cosh x\sqrt{1+\sinh^2 x}dx$$

اما می‌دانیم که $1+\sinh^2 x=\cosh^2 x$ در نتیجه داریم:

$$S=2\pi\int_0^{Ln2}\cosh x\sqrt{1+\sinh^2 x}dx=2\pi\int_0^{Ln2}\cosh^2 xdx$$

از طرفی می‌دانیم $\cosh^2 x=\frac{\cosh(2x)+1}{2}$، بنابراین خواهیم داشت:

$$S=2\pi\int_0^{Ln2}\cosh^2 xdx=2\pi\int_0^{Ln2}(\frac{\cosh(2x)+1}{2})dx=\pi\int_0^{Ln2}\cosh(2x)dx+\pi\int_0^{Ln2}dx=\frac{\pi}{2}(\sinh(2x))\Big|_0^{Ln2}+\pi Ln2$$

$$=\frac{\pi}{2}\sinh(2Ln2)+\pi Ln2=\frac{\pi}{2}\sinh(Ln4)+\pi Ln2=\frac{\pi}{2}(\frac{e^{Ln4}-e^{-Ln4}}{2})+\pi Ln2=\frac{\pi}{2}(\frac{4-\frac{1}{4}}{2})+\pi Ln2=\pi(\frac{15}{16}+Ln2)$$

مثال ۹: نمودار تابع $F(x)=\int_0^x\sqrt{3^{t^2}-1}\,dt$ را بر بازه‌ی $[0,1]$ حول محور y دوران می‌دهیم. مساحت جانبی جسم حاصل از دوران کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{2}{Ln3}$ ۲) $\frac{3}{Ln3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}+1}{Ln3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}-1}{Ln3}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$F(x)=\int_0^x\sqrt{3^{t^2}-1}dt\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=F'(x)=\sqrt{3^{x^2}-1}\ \Rightarrow$$

$$\text{مساحت}=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+3^{x^2}-1}dx=2\pi\int_0^1 x3^{\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2\pi}{Ln3}\int_0^1 xLn3\times 3^{\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2\pi}{Ln3}\times 3^{\frac{x^2}{2}}\Big|_0^1=2\pi(\frac{\sqrt{3}-1}{Ln3})$$

درسنامه۷: محاسبه‌ی مختصات مرکز ثقل و گشتاورها

مثال۱: گشتاور استاتیک مثلث محدود به خط‌های $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ، $x=0$ و $y=0$ نسبت به محور ox کدام است؟

۱) $\frac{a^2b}{6}$ ۲) $\frac{ab^2}{3}$ ۳) $\frac{ab^2}{6}$ ۴) $\frac{a^2b}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» در اینجا ناحیه مسطح است و ضابطه تابع $y=b(1-\frac{x}{a})$ می‌باشد.

$$M_x=\frac{b^2}{2}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^2dx=\frac{b^2}{2}[\frac{-a}{3}(1-\frac{x}{a})^3]_0^a=\frac{ab^2}{6}$$

مثال۲: فاصله‌ی مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ از محور x ها کدام است؟ $(0\le t\le 2\pi)$

۱) $\frac{2}{3}a$ ۲) $\frac{4}{3}a$ ۳) $2a$ ۴) $4a$

پاسخ: گزینه «۲» مختصات مرکز ثقل منحنی‌های پارامتری از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\bar{y}=\frac{1}{L}\int_a^b y\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

البته فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور x ها برابر است با $\bar{y}$، در نتیجه فقط عرض مرکز ثقل را محاسبه می‌کنیم. در فرمول‌های فوق $L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt$ طول منحنی موردنظر است. ابتدا $\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}$ را محاسبه می‌کنیم. سپس با انتگرال‌گیری از آن، L طول منحنی را به‌دست می‌آوریم و در پایان $\bar{y}$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t-2\cos t+1}$$

$$=a\sqrt{2-2\cos t}=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}=\sqrt{2}\,a\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2})}=2a\left|\sin(\frac{t}{2})\right|$$

وقتی $0\le t\le 2\pi$ باشد، $0\le\frac{t}{2}\le\pi$ و لذا $\sin\frac{t}{2}\ge 0$ و از قدر مطلق خارج می‌شود. حالا با محاسبه‌ی طول قوس منحنی، حل را ادامه می‌دهیم.

$$L=\int_0^{2\pi}2a\sin(\frac{t}{2})dt=-4a\cos(\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}=8a$$

اکنون می‌توانیم عرض مرکز ثقل را به‌دست آوریم.

$$\bar{y}=\frac{1}{L}\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin(\frac{t}{2})dt=\frac{1}{8a}\times 2a^2\int_0^{2\pi}2\sin^2(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2})dt=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2(\frac{t}{2}))\sin(\frac{t}{2})dt=\frac{a}{2}\left[-2\cos(\frac{t}{2})+\frac{2}{3}\cos^3(\frac{t}{2})\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}a$$

مثال۳: عرض مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ و محور x ها کدام است؟

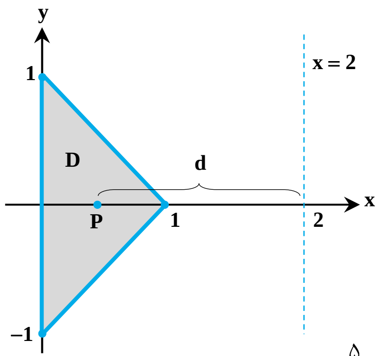
۱) $\frac{1}{3\pi}$ ۲) $\frac{2}{3\pi}$ ۳) $\frac{1}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{3\pi}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر ناحیه داده شده را حول محور x ها دوران دهیم، کره‌ای به شعاع ۱ به‌دست می‌آید که حجم آن $\frac{4\pi}{3}$ می‌باشد. همچنین توجه کنید که مساحت ناحیه محدود به منحنی داده شده و محور x ها برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد (تابع داده شده نیم دایره به شعاع ۱ می‌باشد)، حال اگر $\bar{y}$ را عرض مرکز ثقل فرض کنیم، طبق قضیه پاپوس داریم:

$$\frac{4\pi}{3}=2\pi\bar{y}\times\frac{\pi}{2}\Rightarrow\bar{y}=\frac{4}{3\pi}$$

مثال ۴: ناحیه‌ی محدود به مثلثی با رئوس $(۰,-۱)$، $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ را حول خط $x=۲$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چند برابر $\frac{\pi}{۳}$ است؟

۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۸



پاسخ: گزینه «۳» محور دوران، ناحیه‌ی درون این مثلث را قطع نکرده است، بنابراین از قضیه‌ی گلدن پاپوس استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که مساحت ناحیه‌ی D برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱=۱$

حالا باید مرکز ثقل این مثلث یعنی نقطه‌ی $P(\bar{x},\bar{y})$ را پیدا کنیم. مرکز ثقل هر مثلثی که چگالی یکنواخت داشته باشد، برابر با میانگین طول‌ها و عرض‌های رئوس آن است.

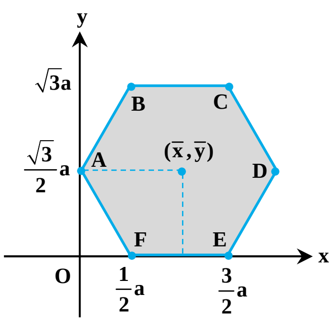
$$P:(\bar{x},\bar{y})=\frac{۱}{۳}[(۰,-۱)+(۰,۱)+(۱,۰)]=\frac{۱}{۳}(۰+۰+۱,-۱+۱+۰)=(\frac{۱}{۳},۰)$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی P تا محور دوران یعنی خط $x=۲$ برابر با $d=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}$ است. نقطه‌ی P دایره‌ای به شعاع d را می‌پیماید که محیط این دایره برابر با $۲\pi d$ است. طبق قضیه‌ی پاپوس داریم: $V=۲\pi d\times S=۲\pi\times\frac{۵}{۳}\times۱=\frac{۱۰\pi}{۳}$

مثال ۵ (سخت): یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a حول یکی از اضلاعش دوران می‌کند. مساحت سطح جسم حاصل از این دوران، چند برابر $\pi a^۲$ است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» برای تمرین بیشتر، این سؤال را به دو طریق حل می‌کنیم:



روش اول: یک شش ضلعی منتظم به ضلع a را طوری در نظر می‌گیریم که یکی از اضلاع آن بر محور xها منطبق باشد، سپس مساحت حاصل از دوران حول محور xها را محاسبه می‌کنیم.

مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی منتظم برابر است با $(n-۲)\pi$، پس اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی آن برابر با $\frac{n-۲}{n}\pi$ خواهد بود. در شش‌ضلعی منتظم به ازای $n=۶$، هر زاویه‌ی داخلی برابر با $\frac{۶-۲}{۶}\pi=\frac{۲\pi}{۳}$ به‌دست می‌آید. پس در شکل مقابل زاویه‌ی AFE برابر با $\frac{۲\pi}{۳}$ است. در نتیجه در مثلث AFO اندازه‌ی زاویه‌ها $\hat{F}=\frac{\pi}{۳}$ و $\hat{A}=\frac{\pi}{۶}$ خواهد بود.

ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه برابر با نصف وتر است، از اینجا داریم $OF=\frac{۱}{۲}a$ و با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث، ضلع OA نیز به‌دست می‌آید:

$$OA=\sqrt{a^۲-\frac{a^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

حالا با استفاده از منتظم بودنِ شکل می‌توانیم مختصات سایر رئوس را نیز مشخص کنیم. مساحت جانبی ایجاد شده از دورانِ ضلع AB با مساحت جانبی ایجاد شده از دورانِ CD برابر است، همچنین مساحت ایجاد شده از دورانِ ضلع AF با مساحت ایجاد شده از دورانِ DE برابر است. معادله‌ی AB و AF را نوشته و المانِ طول قوس را برای آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$AB:\ y=\sqrt{۳}(x+\frac{a}{۲})\ \ ;\ \ ۰\le x\le\frac{۱}{۲}a \qquad \text{و} \qquad AF:\ y=\sqrt{۳}(\frac{a}{۲}-x)\ \ ;\ \ ۰\le x\le\frac{۱}{۲}a$$

با توجه به معادله‌ی خطوط، برای هر دوی آن‌ها داریم:

$$\sqrt{۱+y'^۲}\,dx=\sqrt{۱+۳}\,dx=۲\,dx$$

سطح حاصل از دوران هر کدام از آن‌ها حول محور xها را حساب می‌کنیم:

$$S_{AB}=۲\pi\int_۰^{\frac{۱}{۲}a}y\sqrt{۱+y'^۲}\,dx=۲\pi\int_۰^{\frac{۱}{۲}a}\sqrt{۳}(x+\frac{۱}{۲}a)\times۲\,dx=۴\sqrt{۳}\pi(\frac{x^۲}{۲}+\frac{ax}{۲})\Big|_۰^{\frac{۱}{۲}a}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\pi a^۲$$

$$S_{AF}=۲\pi\int_۰^{\frac{۱}{۲}a}y\sqrt{۱+y'^۲}\,dx=۲\pi\int_۰^{\frac{۱}{۲}a}\sqrt{۳}(\frac{۱}{۲}a-x)\sqrt{۴}\,dx=۴\sqrt{۳}\pi(\frac{ax}{۲}-\frac{x^۲}{۲})\Big|_۰^{\frac{۱}{۲}a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi a^۲$$

به این ترتیب داریم:

$$S_{CD}=S_{AB}=\pi\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲\quad,\quad S_{DE}=S_{AF}=\pi\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

از دورانِ BC حول محور xها یک استوانه به شعاع $R=\sqrt{۳}a$ و ارتفاع $H=a$ به‌دست می‌آید که سطح جانبی آن برابر است با:

$$S_{BC}=۲\pi RH=۲\pi\sqrt{۳}\,a\times a=۲\pi\sqrt{۳}\,a^۲$$

و حتماً می‌دانید که از دوران EF حول محور xها سطح جدیدی به‌دست نمی‌آید، زیرا EF منطبق بر محور دوران است. اگر هم بخواهید با انتگرال‌گیری، مساحت حاصل از دوران آن را حساب کنید، معادله‌ی آن $y=۰$ است، بنابراین داریم:

$$S_{EF}=\int_{\frac{۱}{۲}a}^{\frac{۳}{۲}a}y\sqrt{۱+y'^۲}\,dx=\int_{\frac{۱}{۲}a}^{\frac{۳}{۲}a}(۰)\,dx=۰$$

در نتیجه با جمع کردن مساحت‌های جانبی به‌دست آمده خواهیم داشت:

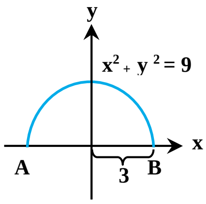
$$S=S_{AB}+S_{BC}+S_{CD}+S_{DE}+S_{EF}+S_{FA}=۶\pi\sqrt{۳}\,a^۲$$

روش دوم: (استفاده از قضیه‌ی گلدن ـ پاپوس) محیط این شش ضلعی منتظم یعنی طولِ قوس آن به‌وضوح برابر است با $L=6a$. از آنجا که این شکل منتظم است، مرکز ثقل آن دقیقاً در وسط شکل یعنی جایی که وسط قطر AD است، قرار دارد. به‌وضوح $\bar{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ و $\bar{x}$ میانگین $\frac{1}{2}a$ و $\frac{3}{2}a$ است. پس $\bar{x}=\frac{\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a}{2}=a$ و مرکز ثقل این شکل در نقطه‌ی $(\bar{x},\bar{y})=(a,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ قرار دارد. البته نیازی به محاسبه‌ی $\bar{x}$ نداریم چون فاصله‌ی مرکز ثقل از محور دوران (محور x) همان $\bar{y}$ است، بنابراین $d=\bar{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ یعنی این نقطه دایره‌ای به شعاع d را طی خواهد کرد. محیط این دایره $2\pi d$ است. طبق فرمول گلدن ـ پاپوس داریم:

$$S=2\pi d\times L=2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times 6a=6\sqrt{3}\,\pi a^2$$

مثال ۶: در سطح نیم‌دایره‌ی همگن به قطر $AB=6$ فاصله‌ی مرکز ثقل سطح نیم‌دایره تا قطر AB کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$



☑ **پاسخ :** گزینه «۴» چون نیم‌دایره نسبت به محور y ها متقارن است، لذا مرکز ثقل روی محور y ها قرار دارد. پس کافی است عرض نقطه موردنظر را به‌دست آوریم.

$$\bar{y}=\frac{M_x}{\text{مساحت نیم دایره}}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx}{\frac{1}{2}\times 9\pi}=\frac{36}{9\pi}=\frac{4}{\pi}$$

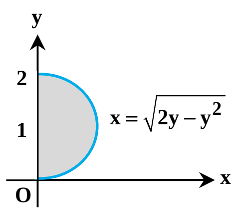
مثال ۷: $\bar{x}$ مؤلفه‌ی x مرکز ثقل ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $y=x^2$، و خطوط $x=0$ و $x=1$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{5}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به رابطه‌ی $\bar{x}=\frac{\int_a^b xydx}{S}$ داریم:

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}=\frac{\int_0^1 x^3dx}{\int_0^1 x^2dx}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

مثال ۸: حجم حادث از دوران سطح هاشورخورده در شکل داده شده حول محور ox چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)



۱) $\frac{\pi^2}{2}$

۲) π^2

۳) $2\pi^2$

۴) $\frac{2}{3}\pi^2$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

روش اول:

$$x=\sqrt{2y-y^2}\Rightarrow y^2-2y+x^2=0\Rightarrow y_1=1+\sqrt{1-x^2}\ ,\ y_2=1-\sqrt{1-x^2}$$

توجه کنید که y_1 قسمت بالایی نیم‌دایره و y_2 قسمت پایینی نیم‌دایره را تشکیل می‌دهد. بنابراین حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور مابین y_1 و y_2 حول محور x ها از فرمول مقابل به‌دست می‌آید:

$$V=\pi\int_0^1(y_1^2-y_2^2)dx=\pi\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx=4\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

انتگرال اخیر مساحت ربع دایره‌ای به شعاع ۱ می‌باشد، بنابراین برابر $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود و در نتیجه $V=\pi^2$.

روش دوم: از قضیه پاپوس استفاده می‌کنیم. مساحت ناحیه مزبور برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. مرکز هندسی ناحیه، روی خط $y=1$ واقع است، پس فاصله‌ی مرکز ثقل سطح تا محور دوران برابر ۱ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{حجم}=2\pi\times\text{فاصله مرکز ثقل سطح تا محور دوران}\times\text{مساحت ناحیه}=2\pi\times1\times\frac{\pi}{2}=\pi^2$$

مدرسان شریف

فصل ششم

« دنباله و سری »

درسنامه: تعریف دنباله، بررسی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها

مثال ۱: اگر $a_{2n-1}=\dfrac{4n+1}{n-1}$، آن‌گاه جمله « $(2n+1)$ ام» این دنباله کدام است؟

۱) $\dfrac{4n+5}{n+2}$ ۲) $\dfrac{5n}{n+1}$ ۳) $\dfrac{4n+5}{n}$ ۴) $\dfrac{4n+4}{n+2}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر در دنباله a_{2n-1}، n را به $n+1$ تبدیل کنیم، به a_{2n+1} می‌رسیم، لذا داریم:

$$a_{2n-1}=\frac{4n+1}{n-1}\Rightarrow a_{2n+1}=\frac{4(n+1)+1}{(n+1)-1}=\frac{4n+5}{n}$$

مثال ۲: دنباله $a_n=\{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n}\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه «۴»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}[\sqrt{1}\,|\,n+\frac{1}{1\times 2}|-\sqrt{1}\,|\,n-\frac{3}{1\times 2}|]=\lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{2}-n+\frac{3}{2})=\frac{4}{2}=2$$

مثال ۳: حاصل حد $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+\cdots+n^{15})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{14}$ ۲) $\dfrac{1}{15}$ ۳) $\dfrac{1}{13}$ ۴) $\dfrac{1}{16}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به فرمول، در این تست $P=15$، لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+\cdots+n^{15})\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{16}}(\frac{n^{16}}{16})=\frac{1}{16}$$

مثال ۴: حاصل $A=\lim_{n\to\infty}(\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2\cdots+(2n)^2})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{8}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{16}$

پاسخ : گزینه «۱» صورت و مخرج را می‌توان با استفاده از هم‌ارزی گفته شده ساده کرد:

$$\lim_{n\to\infty}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\sim\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3}\quad،\quad\lim_{n\to\infty}(1^2+2^2+\cdots+(2n)^2)\sim\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3}{3}\Rightarrow A=\lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{n^3}{3}}{\frac{8n^3}{3}})=\frac{1}{8}$$

مثال ۵: دنباله $a_n=\dfrac{3n^n+n!}{3n^n+4n!}$ به سمت کدام عدد همگراست؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\dfrac{3}{7}$ ۴) 4

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به قدرت رشد، می‌دانیم قدرت رشد n^n از $n!$ بیشتر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3n^n}{3n^n}=1$$

مثال ۶: دنباله $\{\cos(\frac{\log n}{n})\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) π ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{n\to+\infty}\cos(\frac{\log n}{n})=\cos(\lim_{n\to+\infty}(\frac{\log n}{n}))=\cos(0)=1$$

توجه شود در محاسبه حد عبارت $\frac{\log n}{n}$ چون سرعت رشد مخرج (یعنی n) از صورت کسر (یعنی **$\log n$**) بیش‌تر بود، حاصل حد برابر صفر شد.

مثال ۷: جمله‌ی عمومی دنباله a_n در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\cos(\frac{\pi}{n})<a_n^3-2a_n^2+a_n-1<\frac{n^2+n}{n^2+3}$$

در مورد این دنباله کدام گزینه صحیح است؟

۱) همگرا به ۲ است. ۲) همگرا به یک است. ۳) واگراست. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نامساوی داده شده، استفاده از قضیه ساندویچ به ذهن می‌رسد. لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{+\infty}=\cos(0)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^2+n}{n^2+3})\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ، حد عبارت داده شده برابر با ۱ است:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n^3-2a_n^2+a_n-1)=1\Rightarrow a_n^3-2a_n^2+a_n-2=0\Rightarrow a_n^2(a_n-2)+(a_n-2)\Rightarrow(a_n^2+1)(a_n-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_n^2+1=0\Rightarrow a_n^2=-1\Rightarrow \text{امکان ندارد}\\ a_n-2=0\Rightarrow a_n=2\end{cases}$$

بنابراین دنباله به عدد **۲** همگراست.

مثال ۸: حاصل $A=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times4\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از روابطی که در مثال قبل پیدا کردیم، خواهیم داشت:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{\frac{(2n)!}{2^n n!}}\times\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=1$$

مثال ۹: اگر $a_n=\frac{\Gamma(n-1396)}{n^{-1396}\Gamma(n)}$ آن‌گاه حاصل $L=\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟ (n عددی طبیعی است)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $1397\times1396!$ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا براساس رابطه‌ی $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$ سعی می‌کنیم عبارت را ساده‌تر کنیم:

$$a_n=\frac{\Gamma((n-1397)+1)}{n^{-1396}\Gamma((n-1)+1)}=\frac{(n-1397)!}{n^{-1396}(n-1)!}$$

طبق حالت کلی هم‌ارزی استرلینگ در این سؤال، در صورت و مخرج کسر $a=1$ است؛ اما در صورت کسر $b=-1397$ و در مخرج کسر $b=-1$ است، لذا داریم:

$$L=\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\,n^{\frac{1}{2}-1397}(\frac{n}{e})^n}{n^{-1396}\times\sqrt{2\pi}n^{\frac{1}{2}-1}.(\frac{n}{e})^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}.n^{-1397}}{n^{-1396}.n^{-\frac{1}{2}}\times n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^{-1397}}{n^{-1397}})=1$$

مثال ۱۰: چند جمله دنباله $a_n=\{\left\lfloor\frac{2n+1}{3n-2}\right\rfloor\}$ مخالف صفر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۲» چون دنباله شامل جزء صحیح است، لذا در حالتی که صورت بزرگ‌تر یا مساوی مخرج باشد، آن‌گاه حاصل جزء صحیح مخالف صفر می‌شود:

$$2n+1\ge3n-2\Rightarrow n\le3$$

پس به ازای $n=1$، $n=2$ و $n=3$ جملات دنباله مخالف صفر خواهند شد.

مثال ۱۱: دنباله $a_n=\{\frac{(\sin x)^n+(\sin x)^{-n}}{(\sin x)^n-(\sin x)^{-n}}\}$ با شرط $x\neq\frac{k\pi}{۲}$ به کدام عدد همگراست؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) دنباله واگراست.

پاسخ : گزینه «۳» چون گفته شده $x\neq\frac{k\pi}{۲}$، یعنی $x\neq ۰$ و $x\neq\frac{\pi}{۲}$ یعنی به عبارت دیگر $\sin x\neq ۰$ و $\sin x\neq\pm ۱$، پس $-۱<\sin x<۱$ و با فرض $A=\sin x$ برای راحتی کار داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{A^n+A^{-n}}{A^n-A^{-n}}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } A^n \text{ ضرب می‌کنیم}}\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{A^{۲n}+۱}{A^{۲n}-۱}$$

چون $-۱<A<۱$ است، پس $\lim_{n\to+\infty}A^{۲n}=۰$ خواهد بود.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A^{۲n}+۱}{A^{۲n}-۱}=\frac{۰+۱}{۰-۱}=-۱$$

مثال ۱۲: کدام دنباله همگراست؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است) (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۷۸)

۱) $a_n=(-۱)^n\frac{n^۲}{n^۲+۱}$ ۲) $a_n=\left\lfloor ۱+\frac{(-۱)^n}{n}\right\rfloor$ ۳) $a_n=\left\lfloor\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}\right\rfloor$ ۴) $a_n=(-۱)^n\frac{n}{n^۲+۱}$

پاسخ: گزینه «۴» به راحتی واضح است؛ حد دنباله‌ی داده شده در گزینه (۴) برابر با صفر است. چون حد $\frac{n}{n^۲+۱}$ در بی‌نهایت صفر است و چون $(-۱)^n$ کراندار است، می‌دانیم حاصل‌ضرب عبارتی که حدش صفر است، در یک مقدار کراندار، همواره صفر می‌شود:

بررسی گزینه (۱): در این گزینه باید دو حالت را در نظر بگیریم: اگر n زوج باشد، حد دنباله برابر با (۱) و اگر n فرد باشد، حد دنباله برابر با ۱- می‌شود و چون دنباله یک عدد مشخص و واحد همگرا نمی‌شود، واگراست.

بررسی گزینه (۲): ابتدا حد عبارت درون جزء صحیح را حساب می‌کنیم: اگر n فرد باشد، حد عبارت در بی‌نهایت برابر با ۱^- و اگر n زوج باشد، حد عبارت در بی‌نهایت برابر با ۱^+ می‌شود، پس داریم:

n های فرد: $\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor ۱+\frac{(-۱)^n}{n}\right\rfloor=\lfloor ۱^-\rfloor=۰$ ، n های زوج: $\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor ۱+\frac{(-۱)^n}{n}\right\rfloor=\lfloor ۱^+\rfloor=۱$

پس دنباله داده شده در این گزینه هم واگراست.

بررسی گزینه (۳): دو حالت مختلف برای n در نظر بگیریم:

n های زوج؛ $\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}\right\rfloor=\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor ۱+\frac{(-۱)^n}{n^۲}\right\rfloor=\lfloor ۱^+\rfloor=۱$

n های فرد؛ $\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}\right\rfloor=\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor ۱+\frac{(-۱)^n}{n^۲}\right\rfloor=\lfloor ۱^-\rfloor=۰$

مثال ۱۳: حد دنباله $\lim_{n\to+\infty}(\frac{|x|^n}{n!})$ ، به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، برابر است با: (معدن ـ سراسری ۷۹)

۱) صفر، اگر $|x|<۱$ و ∞ اگر $|x|>۱$
۲) صفر اگر $|x|\le ۱$ و e اگر $|x|>۱$
۳) صفر، اگر $|x|\le ۱$ و e اگر $۱<|x|\le e$ و ∞ اگر $|x|>e$
۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» یک سؤال بسیار ساده! می‌دانیم رشد $n!$ همواره از $|x|^n$ بیشتر است، بنابراین حاصل حد صفر است.

مثال ۱۴: کدام گزاره درست است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) $\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n}=۱$ ۲) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=۱$ ۳) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۲}=۰$ ۴) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$ می‌باشد، اما در زیر سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم.

$$\text{گزینه (۱)}: A=\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{۱}=۰$$

$$\text{گزینه (۲)}: A=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}A=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{۱}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$\text{گزینه (۳)}: A=\lim_{n\to\infty}۲^{\frac{۱}{n}}=۲^۰=۱$$

مثال ۱۵: کدام گزاره در مورد دنبالهٔ $x_n=\frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$، صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) همگرا با حد صفر است.
۲) واگراست.
۳) همگرا با حد یک است.
۴) $\frac{x_n}{n}$ همگرا به یک است.

پاسخ: گزینه «۳» قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt[n]{n}$ در این صورت داریم:

$$x_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

همان‌طور که می‌بینید؛ x_n میانگین حسابی a_n می‌باشد و چون $a_n\to 1$ پس $x_n\to 1$.

مثال ۱۶: دنباله اعداد $(\frac{1}{3})^1,(\frac{2}{4})^2,(\frac{3}{5})^3,(\frac{4}{6})^4,\ldots$ به کدام عدد همگراست؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۲)

۱) e
۲) e^2
۳) e^{-1}
۴) e^{-2}

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم در این گونه دنباله‌ها، ابتدا باید ضابطه‌ی جمله‌ی عمومی را پیدا کنیم، با کمی دقت مشخص است؛ صورت و مخرج کسر در هر مرحله یک واحد اضافه می‌شود و تفاوت آن‌ها در این است که شروع صورت کسر از $\underline{1}$ و شروع مخرج کسر از عدد $\underline{3}$ است. پس $a_n=(\frac{n}{n+2})^n$، باید حد این دنباله حساب شود که می‌دانیم با حالت ابهام 1^∞ روبه‌رو هستیم، برای رفع ابهام از فرمول $u^v\sim e^{v(u-1)}$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{حاصل حد}=e^{\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+2}-1)n}=e^{\lim_{n\to+\infty}(\frac{-2}{n+2})n}=e^{-2}$$

مثال ۱۷: حد دنباله $a_n=\frac{1}{n^2+2n}+\cdots+\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2+n}$ ، وقتی $n\to\infty$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید نامساوی مقابل را داریم:

$$\frac{1}{n^2+2n}\le\frac{1}{n^2+n+k}\le\frac{1}{n^2+n}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{n}{n^2+2n}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2+n+k}\le\frac{n}{n^2+n}$$

و چون $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2n}=0$، بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

مثال ۱۸: فرض کنیم $a_n=\cos(n\alpha)$ که در آن α یک عدد حقیقی مثبت است. در این صورت حد a_n وقتی $n\to+\infty$، چقدر است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ آزاد ۸۴)

۱) به ازای هر α، حد وجود دارد و در فاصله‌ی $[-1,1]$ قرار دارد.
۲) به ازای هر α حد وجود دارد.
۳) حد این دنباله بی‌معنی است.
۴) به ازای برخی αها موجود و به ازای برخی وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» اگر $\alpha=2\pi$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ و اگر $\alpha=1$ آن‌گاه $a_n=\cos n$ و حد a_n برابر با مقدار مشخصی نیست و لذا دنباله در این حالت حد ندارد. چون به ازای مقادیر مختلف α، شرایط دنباله متفاوت است. عبارت گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۱۹: حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+2)!-n!}{(n+3)!-(n+1)!}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا صورت و مخرج کسر را براساس خواص فاکتوریل ساده می‌کنیم:

$$(n+2)!-n!=(n+2)(n+1)n!-n!$$
$$(n+3)!-(n+1)!=(n+3)(n+2)(n+1)(n!)-(n+1)n!$$

صورت در بی‌نهایت هم‌ارز $n^2n!$ و مخرج در بی‌نهایت هم‌ارز $n^3n!$ است، پس حاصل حد به صورت $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2n!}{n^3n!}$ است که برابر با صفر می‌شود.

مثال ۲۰: کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن فاصله دنباله $\{\frac{1-n}{2n+1}\}$ از نقطه‌ی همگرایی دنباله کمتر از $\frac{1}{11}$ باشد، کدام است؟ (عمران ـ آزاد ۸۵)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه «۲» نقطه‌ی همگرایی دنباله‌ی داده شده برابر با $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1-n}{2n+1})=-\frac{1}{2}$ است. از طرفی فاصله‌ی جملات دنباله از نقطـه‌ی همگرایـی برابـر بـا $|\frac{1-n}{2n+1}-(-\frac{1}{2})|$ می‌باشد که سؤال گفته؛ این فاصله باید کوچکتر از $\frac{1}{11}$ باشد:

$$|\frac{2(1-n)+(2n+1)}{2(2n+1)}|<\frac{1}{11}\Rightarrow\frac{3}{2(2n+1)}<\frac{1}{11}\Rightarrow 33<4n+2\Rightarrow 4n>31\Rightarrow n>\frac{31}{4}\Rightarrow n\geq 8$$

مثال ۲۱: کدام گزینه در مورد دنباله $(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})^{\frac{1}{n}}$، $0<a<b<c$ صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) واگراست. ۲) همگراست به $\frac{1}{a}$ ۳) همگراست به $\frac{1}{b}$ ۴) همگراست به $\frac{1}{c}$

پاسخ: گزینه «۲» از رابطه $0<a<b<c$، نتیجه می‌شود $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$، بنابراین داریم:

$$(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n})^{\frac{1}{n}}\sim(\frac{1}{a^n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$$

مثال ۲۲: حد دنباله $\{n\sin\frac{\pi}{n}\}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۳»

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}n\times\frac{\pi}{n}=\pi$$

مثال ۲۳: حد دنباله $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)Ln(n)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» برای $\sqrt[n]{n}$ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}Lnn}\sim 1+\frac{Lnn}{n}$$

بنابراین با استفاده از این هم‌ارزی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)Lnn=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{Ln}{n}-1)Lnn=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln^2n}{n}=0$$

از قاعده‌ی سرعت رشد معلوم است که این حد صفر می‌شود، زیرا n از Ln^kn هم سریع‌تر رشد می‌کند اما با استفاده از قاعـده‌ی هوپیتـال هـم مـی‌توانیـد حـد را محاسبه کنید.

مثال ۲۴: دنباله با جمله عمومی $u_n=\cos\frac{n\pi}{2}$ چگونه است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه «۴» دنباله موردنظر به‌صورت $a_n=\{0,-1,0,1,\dots\}$ می‌باشد، که واضح است به هیچ عددی میل نمی‌کند و بنابراین دنباله واگرا می‌باشد.

مثال ۲۵: چند تا از دنباله‌های زیر همگراست؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است) (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

الف) $\{n^3\lfloor\frac{1}{n}\rfloor\}$ ب) $\{\lfloor\frac{2\sin n+1}{n}\rfloor\}$ ج) $\{\frac{tgn}{n}\}$ د) $\{(2n^2+1)\sin\frac{\pi}{n^4}\}$

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» هر چهار دنباله را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): اگر $n\geq 2$، آن‌گاه $0<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}$ و بنابراین $\lfloor\frac{1}{n}\rfloor=0$ و در نتیجه $\lim_{n\to+\infty}n^3\lfloor\frac{1}{n}\rfloor=0$. پس این دنباله همگراست.

بررسی گزینه (۲): می‌دانیم $-1\leq\sin n\leq 1$، بنابراین $-2\leq 2\sin n\leq 2$ و لذا $-1\leq 2\sin n+1\leq 3$، بنابراین حد $\lfloor\frac{2\sin n+1}{n}\rfloor$ می‌تواند صفر و یا ۱- شود، و چون حد عدد ثابت نشده، دنباله واگراست.

بررسی گزینه (۳): اگر نمودارهای $y = x$ و $y = \operatorname{tg}x$ و $y = -x$ را با هم مقایسه کنید، متوجه می‌شوید که برای بسیاری از مقادیر n، $\operatorname{tg}n > n$ است و برای بسیاری از مقادیر n هم $\operatorname{tg}n < -n$ است. بنابراین حد دنباله‌ی $\frac{\operatorname{tg}(n)}{n}$ به جواب‌های $\pm\infty$ می‌رسد. در واقع می‌توان ثابت کرد که $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}n}{n}$ جواب‌های متفاوت زیادی دارد. اما بررسی دقیق‌تر، نیاز به محاسبات پیچیده دارد.

بررسی گزینه (۴): وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{\pi}{n^۴} \to ۰$ و لذا $\sin\frac{\pi}{n^۴} \sim \frac{\pi}{n^۴}$، پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(۲n^۲+۱)\sin\frac{\pi}{n^۴} \sim \lim_{n\to+\infty}(۲n^۲+۱)\frac{\pi}{n^۴} = ۰$$

مثال ۲۶: چه تعداد از دنباله‌های $a_n = \sin\frac{۱}{n}+\cos\frac{۱}{n}$ ، $b_n = \sin^۲ n+\cos^۲ n$ ، $c_n = \sin^۲ n-\cos^۲ n$ ، $d_n = \frac{۱}{n}\sin n$ و $f_n = n\sin\frac{۱}{n}$ همگرا هستند؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ آزاد ۸۷)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳» وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{۱}{n} \to ۰$، بنابراین حد دنباله a_n برابر است با:

$$\lim_{n\to+\infty} = \sin(۰)+\cos(۰) = ۱$$

در دنباله b_n، داریم: $\sin^۲ n+\cos^۲ n = ۱$، پس b_n نیز همگراست.

$$c_n = \sin^۲ n-\cos^۲ n = ۱-\cos^۲ n-\cos^۲ n = ۱-۲\cos^۲ n = -\cos ۲n$$

واضح است حد دنباله c_n، عدد مشخصی نیست، پس این دنباله واگراست.

دنباله d_n نیز همگراست، چون حد $\sin n$، عددی کراندار است و حد $\frac{۱}{n}$ برابر با صفر است، پس این دنباله به صفر همگراست و بالاخره دنباله $f_n = n\sin\frac{۱}{n}$ نیز به دلیل این که $\frac{۱}{n} \to ۰$، هم‌ارز با $n\times\frac{۱}{n} = ۱$ می‌شود و لذا این دنباله همگرا به یک است.

مثال ۲۷: حد دنباله $a_n = (۱-\frac{x}{n})^n$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۸)

۱) e^{-x} ۲) $-e^x$ ۳) ۰   ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۱» حد داده شده به‌صورت مبهم ۱^∞ است، برای رفع ابهام از فرمول $u^v \sim e^{v(u-۱)}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e^{n(۱-\frac{x}{n}-۱)} = e^{-x}$$

مثال ۲۸: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{۲n^۳}{۲n^۲+۳}+\frac{۱-۵n^۲}{۵n+۱})$ کدام است؟

(معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) ۰   ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) ۱   ۴) ∞

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۲n^۳}{۲n^۲+۳}+\frac{۱-۵n^۲}{۵n+۱}) = \infty-\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳(۵n+۱)+(۲n^۲+۳)(۱-۵n^۲)}{(۲n^۲+۳)(۵n+۱)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{۱۰n^۴+۲n^۳+۲n^۲-۱۰n^۴+۳-۱۵n^۲}{(۲n^۲+۳)(۵n+۱)} = \lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳-۱۳n^۲+۳}{۱۰n^۳+۲n^۲+۱۵n+۳} \overset{\text{قانون رشد}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳}{۱۰n^۳} = \frac{۱}{۵}$$

مثال ۲۹: فرض کنید $\{a_n+b_n\}$ همگرا به L و $\{a_n-b_n\}$ همگرا به M است. دنباله $\{a_nb_n\}$:

(ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) واگراست.   ۲) همگرا به $L^۲-۴M^۲$ است.   ۳) همگرا به $\frac{L^۲-M^۲}{۴}$ است.   ۴) گاهی همگراست و گاهی واگراست.

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد $(a+b)^۲-(a-b)^۲ = ۴ab$، نتیجه می‌شود:

$$a_nb_n = \frac{۱}{۴}((a_n+b_n)^۲-(a_n-b_n)^۲)$$

با حد گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می‌شود دنباله $\{a_nb_n\}$ همگرا به $\frac{۱}{۴}(L^۲-M^۲)$ است.

مثال ۳۰: حاصل عبارت $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[۲n]{۲^n+۳^n+\cdots+(k-۱)^n+k^n}$ با فرض $k\in\mathbb{Z}$ کدام است؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) ۱   ۲) k   ۳) $\sqrt{k}$ ۴) $k^۲$

پاسخ: گزینه «۳» طبق قانون رشد در بین توابع نمایی، جمله‌ای بیشترین رشد را دارد که پایه بزرگتری داشته باشد، بنابراین در بین جملات زیر رادیکال k^n بیشترین رشد را دارد.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[۲n]{۲^n+۳^n+\cdots+(k-۱)^n+k^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[۲n]{k^n} = \sqrt{k}$$

مثال ۳۱: کدام یک از موارد زیر در مورد دنبالهٔ $\{\frac{a^n}{n!}\}$ درست است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) دنباله حد ندارد.
۲) حد دنباله به ازای هر a صفر است.
۳) فقط به ازای $0 < a \le 1$ حد دنباله صفر است.
۴) حد دنباله به ازای $a > 1$ برابر با ∞ و برای $0 < a \le 1$ برابر صفر است.

پاسخ: گزینه «۲» چون رشد تابع نمایی (یعنی a^n) از فاکتوریل $(n!)$ کمتر است پس حد دنباله همواره برابر صفر است.

مثال ۳۲: در دنباله $\{n^2 - 2n\}$، چندمین جمله برابر با ۳۹۹ است؟ (مکانیک ـ ساخت و تولید ـ آزاد ۸۹)

۱) ۲۱
۲) ۲۴
۳) ۲۳
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» یک سؤال در حد دبیرستان! کافی است $n^2 - 2n$ را مساوی با ۳۹۹ قرار دهیم:

$$n^2 - 2n = 399 \Rightarrow n^2 - 2n - 399 = 0 \Rightarrow n = 1 \pm \sqrt{400} = 1 \pm 20 \Rightarrow n = 21$$

مثال ۳۳: مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3n}{3n-1})^{2n+\sqrt{n}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $e^{\frac{3}{2}}$
۲) $e^{-\frac{2}{3}}$
۳) $e^{-\frac{3}{2}}$
۴) $e^{\frac{2}{3}}$

پاسخ: گزینه «۴» حد دنباله داده شده به‌صورت مبهم 1^∞ می‌باشد، از طرفی برای حل حد در این حالت مبهم به‌صورت کلی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1) b_n}$$

که در این تست $a_n = \frac{3n}{3n-1}$ و $b_n = 2n + \sqrt{n}$ می‌باشد، لذا با جایگذاری در صورت سؤال داریم:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{3n}{3n-1})^{2n+\sqrt{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3n}{3n-1} - 1)(2n+\sqrt{n})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n+\sqrt{n}}{3n-1})} = e^{\frac{2}{3}}$$

مثال ۳۴: اگر داشته باشیم $a > b > c > 0$ و $p > 0$ آن‌گاه حد دنباله‌ی $x_n = \frac{a^n + b^n + c^n}{a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p}}$ چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱
۲) $\frac{1}{c^p}$
۳) $\frac{1}{a^p}$
۴) $\frac{1}{a^p + b^p + c^p}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا از بزرگترین جمله صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم:

$$x_n = \frac{a^n + b^n + c^n}{a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p}} = \frac{a^n (1 + (\frac{b}{a})^n + (\frac{c}{a})^n)}{a^{n+p} (1 + (\frac{b}{a})^{n+p} + (\frac{c}{a})^{n+p})} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^{n+p}} = \frac{1}{a^p}$$

با توجه به این‌که $a > b > c > 0$ و $p > 0$ آن‌گاه حد داده شده هم‌ارز با $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^{n+p}}$ می‌شود که به راحتی حاصل آن برابر $\frac{1}{a^p}$ می‌شود.

درسنامه۲: صعودی و نزولی بودن دنباله‌ها و تعریف دنباله‌های کران‌دار و بی‌کران

مثال۱: کران پایین دنباله $a_n=(n-\frac{9}{2})^2$ کدام است؟

۱) $\frac{49}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{25}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» دقت شود، $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$، لذا دنباله فقط کران پایین دارد و ممکن است، تصور شود کران پایین دنباله به ازای $n=1$ یعنی $a_1=(1-\frac{9}{2})^2=\frac{49}{4}$ باشد، ولی این تصور صحیح نیست، باید نقاط بحرانی تابع را به‌دست بیاوریم: $f(x)=(x-\frac{9}{2})^2 \Rightarrow f'(x)=2(x-\frac{9}{2})=0 \Rightarrow x=\frac{9}{2}=4/5$

توجه شود باید مقدار دنباله را در اطراف نقطه $x=4/5$ مثلاً $n=2$ و $n=3$ و $n=4$ و $n=5$ را به‌دست بیاوریم، و با مقدار دنباله در $n=1$ مقایسه کنیم.

$$n=2 \Rightarrow a_2=(2-\frac{9}{2})^2=\frac{25}{4}\ ,\ n=3 \Rightarrow a_3=(3-\frac{9}{2})^2=\frac{9}{4}$$

$$n=4 \Rightarrow a_4=(4-\frac{9}{2})^2=\frac{1}{4}\ ,\ n=5 \Rightarrow a_5=(5-\frac{9}{2})^2=\frac{1}{4}$$

ملاحظه می‌گردد کوچکترین مقدار برابر $\frac{1}{4}$ است.

مثال۲: اگر $S_n=-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n n}{2n-1}$، دنباله $\{S_n\}$ چگونه است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) صعودی و کراندار ۲) نزولی و کراندار ۳) همگرا ۴) فقط کراندار

پاسخ: گزینه «۴» $S_1=-1\ ,\ S_2=-\frac{1}{3}\ ,\ S_3=-\frac{14}{15}\ ,\cdots$

با توجه به چند جمله اول دنباله ملاحظه می‌شود که دنباله صعودی یا نزولی نمی‌باشد، ضمناً بـه سـادگی مـی‌تـوان نشـان داد کـه بطـورکلی $-1\le S_n\le 0$ و چون $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}\neq 0$ می‌باشد لذا شرط لازم برای همگرایی را ندارد و همگرا هم نیست، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مثال۳: کدامیک از احکام زیر همواره صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) هر دنباله صعودی واگراست.
۲) دنباله‌ای که نه صعودی باشد و نه نزولی، واگراست.
۳) هر دنباله صعودی از بالای کراندار، همگراست.
۴) دنباله‌ای که صعودی و از پایین کراندار باشد همگراست.

پاسخ: گزینه «۳» هر دنبالهٔ صعودی که از بالا کراندار باشد همگرا می‌باشد.

مثال۴: فرض کنید $(a_n)_{n\ge1}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که برای هر n داشته باشیم: $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{n+4}{2n+1}$. در این صورت $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟
(آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» طبق فرض سؤال داریم: سؤال داریم: $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{n+4}{2n+1}$ پس وقتی $n\to\infty$ میل کند، خواهیم داشت: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n+1}=\frac{1}{2}$

پس برای n های بزرگ، مثلاً $n\ge N_0$ داریم: $a_{n+1}\le\frac{1}{2}a_n$. از آن‌جا که چند جملهٔ اول، تأثیری روی همگرایی یا واگرایی دنباله ندارند، فرض می‌کنیم از همـان ابتدا $a_{n+1}\le\frac{1}{2}a_n$ باشد. بنابراین a_n دنباله‌ای نزولی است. حالا نشان می‌دهیم که این دنباله به صفر میل می‌کند؛ می‌دانـیم $a_{n+1}\le\frac{1}{2}a_n$ بـا اسـتفاده از همـین نامساوی داریم: $a_{n+1}\le\frac{1}{2}a_n\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a_{n-1}\le\cdots\le(\frac{1}{2})^n a_1$

حالا وقتی $n\to\infty$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

مثال۵: فرض کنید برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \le r < 1$ کدام گزاره صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ از جمله‌ای به بعد نوسانی است.

۲) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ از جمله‌ای به بعد نزولی است.

۳) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ نزولی و واگراست.

۴) دنباله $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ صعودی و بی‌کران است.

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول: از رابطه داده شده نتیجه می‌شود که از جمله‌ای به بعد دنباله $|a_n|$ یا به طور معادل دنباله $|a_{n+1}|$ نزولی است، در نتیجه دنباله $\frac{|a_{n+1}|}{1-r}$ نیز نزولی است (تقسیم کردن جملات دنباله به عدد مثبت $1-r$ تأثیری در نزولی بودن دنباله نمی‌گذارد).

روش دوم: طبق صورت سؤال $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ $\lim_{n\to\infty}$ پس طبق آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست، در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ پس $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{1-r}| = 0$. همچنین برای n های بزرگ داریم $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ پس $|a_{n+1}| \le |a_n|$ پس دنباله‌ی $|a_{n+1}|$ نزولی است، در نتیجه $|\frac{a_{n+1}}{1-r}|$ هم نزولی است.

مثال۶: در مورد دنباله $a_n = 10^{\left\lfloor \frac{\cos n\pi}{n} \right\rfloor}$، کدام گزینه درست است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (تاریخ و فلسفه علم ـ آزاد ۸۷)

۱) کراندار و واگراست.

۲) کراندار و همگراست.

۳) بی‌کران و واگراست.

۴) بی‌کران است و بسته به n همگرایی و یا واگرایی آن تعیین می‌شود.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $\cos n\pi = (-1)^n$، یعنی به ازای n های زوج مقدار آن برابر با ۱ و به ازای n های فرد، مقدار آن برابر با ۱- است. لذا داریم:

اگر n فرد باشد: $\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor -\frac{1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{+\infty} \right\rfloor = \lfloor \text{عددی بسیار کوچک و کمتر از صفر} \rfloor = -1$

اگر n زوج باشد: $\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor +\frac{1}{+\infty} \right\rfloor = \lfloor \text{عددی بسیار کوچک و بیشتر از صفر} \rfloor = 0$

پس برای n های فرد، $a_n = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ و برای n های زوج، $a_n = 10^0 = 1$ می‌شود، پس نمی‌تواند همگرا باشد، ولی کراندار است.

درسنامه۳: دنباله‌های بازگشتی

مثال ۱: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صورت $\forall n \ge 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ و $a_1 = \sqrt{6}$ تعریف شده است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد این دنباله صحیح می‌باشد؟

۱) دنباله صعودی و همگرا به ۶ است. ۲) دنباله صعودی و همگرا به ۱ است. ۳) دنباله صعودی و همگرا به ۳ است. ۴) دنباله نزولی و همگرا به ۶ است.

پاسخ : گزینه «۳» اولاً اگر کمی به گزینه‌ها دقت کنیم، متوجه می‌شویم که این دنباله یا صعودی است یا نزولی، پس با نوشتن چند جمله اول داریم:

$$a_1 = \sqrt{6} \ , \ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} \Rightarrow a_2 > a_1$$

با توجه به این‌که $a_2 > a_1$ پس دنباله صعودی است. اگر فرض کنیم دنباله به L همگرا باشد، $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = L$ ، آن‌گاه داریم:

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{6+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{6+L} \Rightarrow L^2 = 6+L \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (L-3)(L+2) = 0 \Rightarrow L = 3 \ , \ L = -2$$

چون جملات دنباله مثبت هستند، فقط $L = 3$ قابل قبول است.

مثال ۲: دنباله $\{a_n\}$ به‌صورت: $n \ge 2$, $a_1 = 3, a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}+1}$ تعریف شده است، کدام گزاره درست است؟

۱) $\{a_n\}$ حد ندارد. ۲) $\{a_n\}$ نزولی است.

۳) $\{a_n\}$ صعودی است و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. ۴) $\{a_n\}$ نه صعودی و نه نزولی.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به ضابطه a_n و این‌که $a_1 = 3$ است، پس $a_n > 0$ است، اگر فرض کنیم a_n صعودی است، آن‌گاه «$a_{n-1}+1$» هم صعودی می‌شود، پس $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}+1}$، نزولی می‌شود (مخرج کسر بزرگ می‌شود، پس خود عبارت کوچک می‌شود) پس فرض صعودی بودن a_n غلط بوده، به همین ترتیب اگر فرض کنیم، a_n نزولی است، پس «$a_{n-1}+1$» هم نزولی است، پس $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}+1}$، صعودی است، پس فرض نزولی بودن a_n هم صحیح نیست، پس گزینه (۴) صحیح است.

البته **روش راحت‌تر** این است که چند جمله اول دنباله را بنویسیم که معلوم می‌شود، a_n نه نزولی و نه صعودی است:

$$a_1 = 3 \ , \ a_2 = \frac{1}{4} \ , \ a_3 = \frac{4}{5}, \ldots$$

مثال ۳: دنباله $\{x_n\}$ از اعداد گویا به‌صورت $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ ، $x_1 = 2$ تعریف می‌شود. این دنباله ....

۱) صعودی و کراندار است. ۲) صعودی و همگراست. ۳) نزولی و کراندار است. ۴) نزولی و همگرا به $\sqrt{3}$ است.

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها، دنباله یا صعودی یا نزولی است. با توجه به این که $x_1 = 2$ است، لذا می‌توانیم x_2 را حساب کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) \xrightarrow{x_1=2} x_2 = \frac{1}{2}(2+\frac{2}{2}) = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$$

چون $x_2 < x_1$ ، بنابراین **دنباله نزولی است**، پس یکی از گزینه‌های ۳ یا ۴ صحیح است. حالا می‌توانیم همگرایی یا کرانداری دنباله را تعیین کرده و گزینه‌ی صحیح را کشف کنیم! واضح است دنباله کراندار است، چون دنباله از اعداد گویای مثبت تشکیل شده و نزولی با جمله‌ی اول $x_1 = 2$ است، لذا $0 < x_n < 2$، پس **دنباله کراندار است**.

هر چند همین‌جا پاسخ به تست تمام است، اما برای تمرین عدد همگرایی دنباله را به‌دست می‌آوریم، گفته بودم اگر $L = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$ ، آن‌گاه می‌توان $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1}$ را نیز تقریباً برابر L دانست، پس داریم:

$$L = \frac{1}{2}(L+\frac{2}{L}) \Rightarrow 2L = L + \frac{2}{L} \Rightarrow L = \frac{2}{L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \pm\sqrt{2}$$

با توجه به این که $x_n > 0$ ، بنابراین $L = \sqrt{2}$ می‌شود.

مثال ۴: فرض کنید، $x_1 = 1$ و $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ برای $n \ge 2$ ، کدام گزاره درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) دنباله $\{x_n\}$ همگراست. ۲) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است ولی همگرا نیست.

۳) دنباله $\{x_n\}$ یکنواست ولی کراندار نیست. ۴) دنباله $\{x_n\}$ واگراست.

پاسخ: گزینه «۱» با کمک استقرا نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n < 2$ است.

واضح است که $x_1 < 2$ (توجه: $x_1 = 1$) و اگر $x_n < 2$ باشد آن‌گاه $2 + x_n < 4$ پس $\sqrt{2+x_n} < 2$ است یعنی $x_{n+1} < 2$ می‌باشد پس $\{x_n\}$ کراندار از بالا می‌باشد از طرف دیگر $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\sqrt{2+x_n}}{x_n}$ و داریم:

$$(\frac{x_{n+1}}{x_n})^2 = \frac{2+x_n}{x_n^2} = \frac{2}{x_n^2} + \frac{1}{x_n} > \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow$$ x_n صعودی است.

پس دنباله‌ی داده شده چون صعودی بوده و از بالا کراندار است لذا همگرا می‌باشد.

مثال ۵: در مورد دنباله $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی با ضابطه $n>2$، $x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$ کدام گزاره درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) به $\frac{3}{2}$ همگراست. ۲) به $\frac{5}{3}$ همگراست. ۳) به صفر همگراست. ۴) واگراست.

پاسخ: گزینه «۲» معادله مشخصه رابطه بازگشتی داده شده به‌صورت روبرو است:

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1}) \Rightarrow x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-2} = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = \frac{-1}{2}$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به‌صورت روبرو نوشت:

$$x_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = a_1 + a_2(\frac{-1}{2})^n$$

چون طبق فرض $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$، پس داریم:

$$\begin{cases} a_1 - \frac{1}{2}a_2 = 1 \\ a_1 + \frac{1}{4}a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{3} \ , \ a_2 = \frac{4}{3}$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به‌صورت روبرو نوشت:

$$x_n = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}(\frac{-1}{2})^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{5}{3} + \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n) = \frac{5}{3}$$

مثال ۶: دنباله تعریف شده به‌صورت $r_1 = 1$، $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) دنباله $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۲) دنباله $\{r_n\}$ صعودی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۳) زیر دنباله فرد $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۴) زیر دنباله زوج $\{r_n\}$ نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

پاسخ: گزینه «۴» با نوشتن چند جمله اول دنباله می‌توان دید که زیردنباله زوج به‌صورت نزولی و زیردنباله فرد به‌صورت صعودی همگرا می‌باشند.

$$r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 = r + 1 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

مثال ۷: دنباله‌ی $\{x_n\}$ حد دارد و به‌صورت $x_1 = 2$ و $n = 1, 2, \ldots$، $2x_{n+1} = x_n + \frac{5}{x_n}$ تعریف شده است. $\lim_{n\to\infty} x_n$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}+5}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» قرار می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} x_n = L$، در این صورت داریم:

$$2L = L + \frac{5}{L} \Rightarrow L = \frac{5}{L} \Rightarrow L^2 = 5 \Rightarrow L = \sqrt{5}$$

مثال ۸: در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله با ضابطه $a_0 = 1 \ , \ a_n = \min\{a_{n-1}, \cos n\}$ کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) چون کراندار نیست، پس واگراست.

۲) نه نزولی و نه صعودی است و واگراست.

۳) چون صعودی و کراندار از بالا است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگراست.

۴) چون نزولی و کراندار از پایین است، پس بنا به قضیه همگرایی یکنوا، همگراست.

پاسخ: گزینه «۴» از رابطه داده شده در صورت سؤال، واضح است که $a_n \le a_{n-1}$، پس دنباله a_n نزولی است و همچنین دنباله a_n یک دنباله کراندار است پس دنباله a_n همگرا می‌باشد.

مثال ۹: فرض کنید $\alpha > 1$ و $c > 0$ اعدادی ثابت باشند. دنباله $\{x_n\}$، با تعریف $n \ge 1$ و $x_{n+1} = (1-\frac{1}{\alpha})^2 x_n + \frac{2}{\alpha}x_n^{1-\alpha}$ و $x_1 = c$ به کدام عدد همگراست؟

(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sqrt[\alpha]{2}$ ۲) $2\sqrt[\alpha]{\alpha}$ ۳) $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ۴) $\sqrt[\alpha]{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}$

پاسخ: گزینه «۴» حد دنباله موردنظر را L فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$L = (1-\frac{1}{\alpha})^2 L + \frac{2}{\alpha}L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{2}{\alpha}L^{-\alpha} = \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow L = \sqrt[\alpha]{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}}$$

مثال ۱۰: دنباله‌ی بازگشتی $x_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_n}$ و $x_1=-1$ مفروض است، در اینصورت: (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) x_n نزولی و همگرا به -8 است.
۲) x_n صعودی و همگرا به $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ است.
۳) x_n صعودی و همگرا به صفر است.
۴) x_n صعودی و همگرا به $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها واضح است که دنباله موردنظر همگرا می‌باشد، مقدار همگرایی دنباله را L در نظر می‌گیریم، در این صورت:

$$L=\frac{1}{2}\sqrt[3]{L}\Rightarrow 8L^3=L\Rightarrow L=0\ ,\ L=\frac{-\sqrt{2}}{4}\ ,\ L=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$

چون تمام جملات دنباله موردنظر منفی می‌باشد پس فقط $L=\frac{-\sqrt{2}}{4}$ قابل قبول است.

مثال ۱۱: اگر $0<a_1<1$، و برای هر $n\ge 1$، داشته باشیم؛ $a_{n+1}=1-\sqrt{1-a_n}$، آن‌گاه: (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) دنباله a_n نزولی و همگرا به صفر است.
۲) دنباله a_n صعودی و همگرا به صفر است.
۳) دنباله a_n نزولی و همگرا به یک است.
۴) دنباله a_n صعودی و همگرا به یک است.

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها، دنباله a_n یا صعودی و یا نزولی است، پس بهترین راه‌حل، امتحان کردن عدد است:

$$a_1=\frac{1}{2}\Rightarrow a_2=1-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=1-\sqrt{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{2}$$

بنابراین دنباله نزولی است. برای پیدا کردن عدد همگرایی می‌توانیم فرض کنیم حدود a_n و a_{n+1} در بی‌نهایت تقریباً با هم برابر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}=L\Rightarrow L=1-\sqrt{1-L}\Rightarrow -L+1=\sqrt{1-L}\Rightarrow L^2+1-2L=1-L\Rightarrow L^2-L=0\Rightarrow L=1\ ,\ L=0$$

واضح است، دنباله نمی‌تواند همگرا به یک شود، چون دنباله نزولی و جمله‌ی اول آن کمتر از یک است، بنابراین دنباله همگرا به صفر است.

مثال ۱۲: فرض کنید $a_1=\frac{1}{2}$ و برای هر n، $a_{n+1}=\frac{1}{6}+a_n^2$ در این صورت دنباله $\{a_n\}$: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) نزولی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ است.
۲) نزولی و همگرا به $\frac{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ است.
۳) صعودی و همگرا به $\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ است.
۴) یکنواخت نیست ولی به $\frac{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ همگراست.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به گزینه‌های سؤال، معلوم می‌شود که دنباله موردنظر همگراست اگر حد دنباله را L فرض کنیم، آن‌گاه:

$$L=\frac{1}{6}+L^2\Rightarrow L^2-L+\frac{1}{6}=0\Rightarrow L=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{4}{6}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$$

با توجه به رابطه بازگشتی داده شده و جمله اول دنباله نتیجه می‌شود دنباله $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی است، پس در بین جواب‌های به‌دست آمده در بالا فقط $\frac{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$ قابل قبول است.

مثال ۱۳: اگر $b_1=4$، $a_1=1$، $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$، $a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}$ در این صورت دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب .... (ریاضی ـ آزاد ۸۹)

۱) همگرا هستند و حد آن‌ها برابر با ۲ است.
۲) همگرا هستند و حدشان برابر ۴ است.
۳) اولی همگرا به ۴ و دومی واگراست.
۴) اولی واگرا و دومی همگرا به ۱ است.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا a_{n+1} را بازنویسی می‌کنیم:

$$a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

ابتدا توجه کنید برای دو عدد حقیقی a و b همواره نامساوی مقابل برقرار است:

$$\underbrace{\frac{2ab}{a+b}}_{\text{میانگین توافقی}}\le\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{میانگین هندسی}}\le\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{میانگین حسابی}}$$

حالا سراغ حل سؤال می‌رویم: از نامساوی $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$، داریم:
$$\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \le \frac{a_n+b_n}{2} \Rightarrow a_{n+1} \le b_{n+1}$$

نامساوی فوق به ازای هر n برقرار است، خصوصاً به ازای $n-1$ بنابراین داریم:
$$a_{n-1+1} \le b_{n-1+1} \Rightarrow a_n \le b_n$$

حالا نشان می‌دهیم، b_n نزولی است:
$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \le \frac{b_n+b_n}{2} = \frac{2b_n}{2} = b_n$$

بنابراین $b_{n+1} \le b_n$ و این یعنی دنباله نزولی است و چون تمام جملات b_n مثبت هستند و $b_1 = 4$، دنباله از پایین کراندار بنابراین دنباله همگراست.

حال نشان می‌دهیم، a_n صعودی است:
$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \ge \frac{2a_n.b_n}{b_n+b_n} = \frac{2a_nb_n}{2b_n} = a_n \Rightarrow a_{n+1} \ge a_n$$

پس دنباله a_n صعودی است. از طرفی چون $a_n \le b_n$، بنابراین دنباله a_n کراندار از بالاست بنابراین a_n نیز همگراست.

قبل از به‌دست آوردن حد دنباله رابطه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:
$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}.\frac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n$$

بنابراین $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1b_1$، و این یعنی دنباله a_n به a و دنباله b_n به b همگراست.

با حدگیری از روابط $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ و $a_nb_n = a_1b_1$، داریم:
$$\begin{cases} a = \frac{a+b}{2} \\ ab = a_1b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = a_1b_1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt{a_1b_1}$$

مثال ۱۴: **حد دنباله‌ی $\{a_n\}$، وقتی که برای $a > 0$، $a_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ بار}}$، در صورت وجود کدام است؟** (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) a

۲) $\frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$

۴) حد وجود ندارد. زیرا دنباله صعودی و از بالا بی‌کران است.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا نشان می‌دهیم دنباله مورد نظر همگراست. برای این منظور نشان می‌دهیم که دنباله صعودی و از بالا کراندار است:

با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که $a_{n+1} > a_n$، یعنی دنباله صعودی است. واضح است که $a_2 > a_1$ می‌باشد. فرض کنیم که $a_n > a_{n-1}$ باشد حال ثابت می‌کنیم که $a_{n+1} > a_n$ می‌باشد:
$$a_{n+1} = \sqrt{a+a_n} > \sqrt{a+a_{n-1}} = a_n$$

پس حکم صحیح است و دنباله صعودی است.

با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که به ازای $a > 1$ دنباله از بالا کراندار است. واضح است که $a_1 = \sqrt{a} < 2a$. حال فرض می‌کنیم که $a_n < 2a$ باشد ثابت می‌کنیم $a_{n+1} < 2a$ می‌باشد:
$$a_{n+1} = \sqrt{a+a_n} < \sqrt{a+2a} = \sqrt{3a} = \sqrt{3}\sqrt{a} < 2a$$

بنابراین دنباله از بالا کراندار است، به ازای $0 < a \le 1$ بطور مشابه به کمک استقرا ثابت می‌شود که $\forall n, a_n < 2$.

در نتیجه به ازای هر $a > 0$ دنباله مورد نظر از بالا کراندار می‌باشد و چون صعودی نیز هست پس همگرا است.

حد دنباله را عددی مانند L در نظر می‌گیریم. چون $a_{n+1} = \sqrt{a+a_n}$، پس با حدگیری از طرفین این رابطه نتیجه می‌شود:
$$L = \sqrt{a+L} \Rightarrow L^2 = a+L \Rightarrow L^2 - L - a = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

توجه کنید که فقط جواب $L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ قابل قبول است، زیرا جواب دیگر یعنی $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ منفی است در حالیکه تمام جملات دنباله مثبت هستند.

درسنامه ۴: سیگما و خواص آن، مفهوم سری و شرط همگرایی سری‌ها

مثال ۱: اگر $\sum_{k=1}^{n}(4k+4)=8$ باشد، حاصل $\sum_{k=1}^{n}k$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یک سؤال بسیار ساده که کافی است خواص و فرمول‌های سری را بدانیم:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+4)=\sum_{k=1}^{n}4k+\sum_{k=1}^{n}4=4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$$

می‌دانیم $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ و همچنین $\sum_{k=1}^{n}4=4n$، لذا داریم:

$$4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+4n=8\Rightarrow 2n^2+2n+4n=8\Rightarrow 2n^2+6n=8\Rightarrow n^2+3n-4=0\Rightarrow n=1\ ,\ n=-\frac{4}{3}$$

فقط $n=1$ قابل قبول است، پس داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

مثال ۲: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $+\infty$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n^2}{n^4}$$

می‌دانیم $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، حال اگر در طرفین این تساوی به جای n، مقدار n^2 را قرار دهیم، داریم:

$$1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

پس مقدار حد داده شده به شکل روبرو خواهد بود:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n^2}{2n^4}\simeq\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{2n^4}=\frac{1}{2}$$

مثال ۳: اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=A$، آن‌گاه مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2A}{3}$ ۲) $\frac{3A}{2}$ ۳) $\frac{4A}{3}$ ۴) $\frac{3A}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» سری $\sum\frac{1}{n^2}$ در واقع شامل یک سری جملات زوج و یک سری جملات فرد است که جملات زوج آن را به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ و جملات فرد آن را نیز به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ می‌نویسیم، پس داریم:

$$A=\sum\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow A=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow A=\frac{1}{4}A+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=A-\frac{A}{4}=\frac{3A}{4}$$

مثال ۴: اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+an^4+1}{n^4+bn^3+1}$ همگرا باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) b ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+an^4+1}{n^4+bn^3+1}\ \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{an^4}{n^4}=a$$

تنها در حالتی که حد جمله عمومی سری برابر صفر شود، سری همگراست پس باید $a=0$ باشد.

مثال ۵: اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A>B$ ۲) $B>A$ ۳) $A=B$ ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

پاسخ : گزینه «۱» دقت کنید، قدرت رشد 3^n، خیلی بیشتر از n^3 است بنابراین مقدار $\frac{1}{3^n}$ کوچکتر از $\frac{1}{n^3}$ است، یعنـی $\frac{1}{n3^n}<\frac{1}{n^3}$. بنـابراین: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

پس گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۶: حاصل $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^6}\sum_{p=1}^{n}p^5)$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پاسخ : گزینه «۱» هرگاه $n\to\infty$، آن‌گاه داریم: $1^5+2^5+3^5+...+n^5\sim\frac{n^6}{6}$، در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^6}\sum_{p=1}^{n}p^5)=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^6}.\frac{n^6}{6})=\frac{1}{6}$$

مثال ۷: اگر $A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ ، $B=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$ مقدار B برحسب A کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $B=\frac{A}{2}$ ۲) $B=\frac{3}{2}A$ ۳) $B=\frac{3}{4}A$ ۴) $B=\frac{2}{3}A$

پاسخ : گزینه «۱» قرار می‌دهیم $C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$، در این صورت داریم:

$$C=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}A\ ,\ B=A-2C\Rightarrow B=A-2(\frac{1}{4}A)=\frac{A}{2}$$

مثال ۸: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 2)^n}$: (عمران ـ آزاد ۸۸)

۱) یک سری همگراست. ۲) برابر با $\frac{1}{\ln 2}$ است. ۳) یک سری واگراست. ۴) برابر با $\ln 2$ است.

پاسخ : گزینه «۳» سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد، چون حد جمله عمومی آن مخالف با صفر است. (دقت کنید $\ln 2\simeq 0/7$ و بنابراین رشد صورت کسر بیشتر است.)

مثال ۹: اگر $A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\lfloor mx\rfloor}{n^2}$ باشد مقدار A چقدر است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{x}{2}$ ۲) x ۳) $\frac{\lfloor x\rfloor}{2}$ ۴) $\lfloor x\rfloor$

پاسخ : گزینه «۱» بطور کلی هرگاه $n\to\infty$، داریم $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\cdots+\lfloor nx\rfloor\sim\frac{n^2}{2}x$، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\lfloor mx\rfloor}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}x}{n^2}=\frac{x}{2}$$

مثال ۱۰: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) ۵۰۰۰۵۰ ۲) ۵۰۰۵۰۰ ۳) ۵۵۰۰۰۰ ۴) ۵۰۵۰۰۰

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به رابطه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، نتیجه می‌شود:

$$1+2+3+\cdots+1000=\frac{1000(1000+1)}{2}=500500$$

مثال ۱۱: مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(3i^2+3i+1)}{n^3}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۲»

روش اول: ابتدا سری داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2+3i+1}{n^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2}{n^3}+\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3(\frac{i}{n})^2+\frac{3}{n^3}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\times n$$

حال از عبارت فوق حد می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2+3i+1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3(\frac{i}{n})^2+\lim_{n\to\infty}\frac{3n(n+1)}{2n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3(\frac{i}{n})^2+0+0$$

از طرفی برای حل حد فوق با استفاده از حد حاصل جمع ریمانی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3(\frac{i}{n})^2=\int_0^1 3x^2dx=x^3\Big|_0^1=1$$

روش دوم: سری داده شده را به‌صورت مقابل ساده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2+3i+1}{n^3}=\frac{1}{n^3}[\sum_{i=1}^{n}3i^2+\sum_{i=1}^{n}3i+\sum_{i=1}^{n}1]\qquad(1)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\ \sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\ ,\ \sum_{i=1}^{n}1=n$$

حال با جایگذاری در رابطه (۱) و حد گرفتن از رابطه حاصل داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2+3i+1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\times[3\times(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2})+n]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}=1$$

مثال ۱۲: اگر $S_n=1+2+3+\cdots+n$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}\frac{2S_n-n^2}{n}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۹۰)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا S_n که مجموع اعداد طبیعی می‌باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$s_n=1+2+3+\cdots+n \Rightarrow s_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حال مجموع S_n فوق را در حد داده شده قرار می‌دهیم و مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2s_n-n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{n}=1$$

مثال ۱۳: بهترین مقدار تقریبی s برای $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1000^{11}}{11}<s<1000^{10}+\frac{1000^{11}}{11}$

۲) $\frac{1000^{11}}{11}<s<1000^{11}+\frac{1000^{11}}{11}$

۳) $1000^{10}+1<s<1000^{11}+\frac{1000^{11}}{11}$

۴) $1000<s<1000^{10}+\frac{1}{10}$

پاسخ : گزینه «۱» به راحتی با استفاده از فرمول گفته شده داریم:

$$1^P+2^P+\cdots+n^P\approx\frac{n^{P+1}}{P+1}\approx\frac{n^{P+1}}{P+1}+\frac{n^P}{2}<\frac{n^{P+1}}{P+1}+n^P\Rightarrow 1^{10}+\cdots+1000^{10}\approx\frac{1000^{11}}{11}<\frac{1000^{11}}{11}+1000^{10}\Rightarrow\frac{1000^{11}}{11}<s<1000^{10}+\frac{1000^{11}}{11}$$

درسنامه۵: به‌دست آوردن حاصل سری‌های عددی

مثال ۱: حاصل $\sum_{n=1}^{5}(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$، لذا داریم:

$$\sum_{n=1}^{5}(\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})=\sum_{n=1}^{5}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{5}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(\frac{1}{1}-(\frac{1}{5+1}))=2(1-\frac{1}{6})=\frac{5}{3}$$

مثال ۲: همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$ را بررسی کنید.

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» یک سؤال تقریباً سخت! از مبحث سری‌های تلسکوپی که به یک راه حل ابتکاری نیاز دارد:

$$(2k+1)=(k+1)^2-k^2=(k+1)^2+1-(k^2+1)\Rightarrow\frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}=\frac{(k+1)^2+1-(k^2+1)}{(k^2+1)[(k+1)^2+1]}=\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}$$

$$S_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}(f_k-f_{k+1})=\frac{1}{2}-\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{(k+1)^2+1})=\frac{1}{2}$$

مثال ۳: حاصل سری $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» در این روش که معمولاً در تست‌هایی استفاده می‌شود که سه عامل در مخرج داریم، کسر اصلی را به‌صورت تفاضل دو کسر تبدیل می‌کنیم که در مخرج کسر اول، حاصل‌ضرب دو عامل سمت چپ (از مخرج کسر اصلی) و در مخرج کسر دوم، حاصل‌ضرب دو عامل سمت راست (از مخرج کسر اصلی) را قرار می‌دهیم و صورت هر دو کسر را عدد یک در نظر می‌گیریم. حال برای این‌که این کسرهای جزئی (سمت راست) با کسر اصلی برابر باشند، مخرج مشترک در سمت راست می‌گیریم (در برگ چرک‌نویس!!)، عددی پدید می‌آید که صورت آن یک نیست.

مثلاً در این تست برابر عدد ۲ می‌شود و چون صورت کسر سمت چپ عدد یک است، پس در پشت سیگمای سمت راست، عدد $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم و چون در ۲ ضرب می‌شود، صورت کسر سمت راست هم همان یک می‌شود:

در این سؤال، باید عبارت اول به‌صورت $\frac{1}{k(k+1)}$ و عبارت دوم به‌صورت $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ در نظر گرفته شود، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-(k)}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

پس لازم است، عدد $\frac{1}{2}$ پشت سیگما در سمت راست قرار گیرد:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{f_k}-\underbrace{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}_{f_{k+1}})$$

ملاحظه می‌گردد با یک سری تلسکوپی برخورد کرده‌ایم و لذا داریم:

$$S=\frac{1}{2}[\frac{1}{1(1+1)}-\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{(k+1)(k+2)})]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-0]=\frac{1}{4}$$

مثال ۴: حاصل سری $S=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1392)}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{1391\times 1393!}$ ۲) $\frac{1}{1391\times 1392!}$ ۳) $\frac{1}{1392\times 1393!}$ ۴) $\frac{1}{1391!\times 1393}$

پاسخ: گزینه «۱» در این تست $m=1$، $P=2$ و $n=1392$ می‌باشد و لذا داریم:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1392-1}\times\frac{(1+2-1)!}{(2+1392-1)!}\right]=\frac{1}{1391}\times\frac{1}{1393!}$$

مثال ۵: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{n+1}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) 1 ۴) سری واگراست.

پاسخ: گزینه «۴» ممکن است در این سری فرم استاندارد سری تلسکوپی به وضوح مشاهده نشود، اما با استفاده از خاصیت لگاریتم $\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$ داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}[\log n-\log(n+1)]=\log 1-\lim_{n\to+\infty}\log(n+1)=0-\log\lim_{n\to+\infty}(n+1)=-\infty$$

دقت کنید چون $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$، لذا سری واگرا می‌باشد.

مثال ۶: حاصل $S=\sum_{n=1}^{10}n(n!)$، کدام است؟

۱) $10!$ ۲) $11!$ ۳) $10!-1$ ۴) $11!-1$

پاسخ: گزینه «۴» اگر جمله‌ی عمومی را به این فرم بنویسیم، حاصل سری به راحتی محاسبه می‌شود:

$$S=\sum_{n=1}^{10}[(n+1)-1](n!)=\sum_{n=1}^{10}[(n+1)n!-n!]$$

می‌دانیم $n!(n+1)=(n+1)!$ است، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{10}(n+1)!-n!=-\sum_{n=1}^{10}(\underbrace{n!}_{f_n}-\underbrace{(n+1)!}_{f_{n+1}})=-[1!-(10+1)!]=11!-1$$

مثال ۷: اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+k}{(n+k+1)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{kk!}$ ۲) $\frac{1}{k!}$ ۳) $\frac{1}{k}$ ۴) $\frac{k!}{(k+1)!}$

پاسخ: گزینه «۲» در این سؤال نیز عبارتی شامل فاکتوریل داریم، بنابراین سعی می‌کنیم صورت کسر را شبیه مخرج کسر کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+k}{(n+k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)-1}{(n+k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+k+1)}{(n+k)!(n+k+1)}-\frac{1}{(n+k+1)!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{(n+k)!}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+k+1)!}}_{f_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{(0+k)!}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+k+1)!}=\frac{1}{k!}-0=\frac{1}{k!}$$

مثال ۸: سری $\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{4}{1+(4k+3)(4k-1)}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از رابطه $\text{Arctga}-\text{Arctgb}=\text{Arctg}\frac{a-b}{1+ab}$ داریم:

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{4}{1+(4k+3)(4k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\text{Arctg}\frac{(4k+3)-(4k-1)}{1+(4k+3)(4k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}[\text{Arctg}(4k+3)-\text{Arctg}(4k-1)]$$

$$=(-1)\sum_{k=0}^{\infty}[\underbrace{\text{Arctg}(4k-1)}_{f_k}-\underbrace{\text{Arctg}(4k+3)}_{f_{k+1}}]=(-1)[\text{Arctg}(4\times 0-1)-\lim_{k\to+\infty}\text{Arctg}(4k+3)]=(-1)[\text{Arctg}(-1)-\text{Arctg}\infty]$$

$$=(-1)\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{3\pi}{4}$$

مثال۹: حاصل عبارت $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+\cdots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» با کمی دقت واضح است؛ می‌توان دسته‌بندی جملات را طوری عوض کرد که دو سری هندسی داشته باشیم:

$$S=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{64})+\cdots=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots)$$

ملاحظه می‌گردد دو سری هندسی نامحدود یکی با جمله اول $a_1=\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ و دیگری با جمله اول $a=\frac{1}{4}$ و قدر نسبت $q=\frac{1}{4}$ داریم، پس حاصل مجموع فوق برابر است با:

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

مثال۱۰: اگر $S=0/125125125\cdots$ آنگاه مقدار $\frac{1}{S}$ کدام است؟ (دوره‌ی تکرار S تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

۱) $\frac{1001}{125}$ ۲) $\frac{999}{125}$ ۳) $\frac{125}{999}$ ۴) $\frac{125}{1001}$

پاسخ: گزینه «۲» با نوشتن بسط اعشاری به صورت یک سری هندسی داریم:

$$S=0/125125125\cdots=\frac{125}{1000}+\frac{125}{1000^2}+\frac{125}{1000^3}+\cdots\Rightarrow S=125(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000^2}+\frac{1}{1000^3}+\cdots)$$

همان‌طور که می‌بینید، درون پرانتز یک سری هندسی با جملات نامحدود داریم که جمله‌ی اول آن $\frac{1}{1000}$ و قدرنسبت آن هم $\frac{1}{1000}$ است، بنابراین داریم:

$$S=125\times\frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=125\times\frac{1}{1000-1}=\frac{125}{999}\Rightarrow\frac{1}{S}=\frac{999}{125}$$

توضیح: البته این مسأله یک راه‌حل مقدماتی هم دارد. با توجه به آن‌که دوره‌ی تکرار S دارای ۳ رقم است آن را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$1000S=125/125125125\cdots\Rightarrow1000S-125=0/125125125\cdots\Rightarrow1000S-125=S\Rightarrow999S=125\Rightarrow S=\frac{125}{999}\Rightarrow\frac{1}{S}=\frac{999}{125}$$

مثال۱۱: دنباله $\{x_n\}$ را با فرض $x_n=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$، در نظر بگیرید. مقدار $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۷۶)

۱) ۰ ۲) e ۳) e^2 ۴) ∞

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=[Lnx]_k^{k+1}=Ln(k+1)-Lnk$$

بنابراین دنباله x_n را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$x_n=\sum_{k=1}^{\infty}[Ln(k+1)-Lnk]=-\sum_{k=1}^{\infty}[\underbrace{Lnk}_{f_k}-\underbrace{Ln(k+1)}_{f_{k+1}}]=-Ln1+Ln(n+1)=Ln(n+1)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(\frac{x_n}{n})=\lim_{n\to+\infty}(\frac{Ln(n+1)}{n})=0$$ (طبق قانون رشد، همواره رشد n از $Ln(n+1)$ بیشتر است.)

مثال۱۲: به ازای $n\geq2$، حاصل عبارت $T_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$ با کدام عدد برابر است؟ (معدن ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{n-1}{2n}$ ۲) $\frac{n+1}{2n}$ ۳) $\frac{2n}{n+1}$ ۴) $\frac{2n}{n-1}$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

دقت کنید که حاصلضرب را می‌توان به صورت $T_n=\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$ نوشت و آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$T_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\times k}=\prod_{k=2}^{n}\frac{\frac{k-1}{k}}{\frac{k}{k+1}}$$

اگر $a_k=\frac{k-1}{k}$ تعریف شود، آن‌گاه یک سری تلسکوپی داریم:

$$T_n=\frac{a_2}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{2n}$$

مثال ۱۳: مقدار سری $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» سری داده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (از قاعدهٔ تلسکوپی استفاده می‌کنیم):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})=\frac{1}{1!}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$$

مثال ۱۴: اگر $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$، مقدار S کدام است؟ (ریاضی و صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم، اگر $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+a_{n+1})=-a_1$ بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})=-(-1)=1$$

مثال ۱۵: حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n\times 3^n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ : گزینه «۳» سری داده شده را می‌توان با تفکیک کسر به دو سری هندسی تبدیل کرد پس داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n\times 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n})=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

مثال ۱۶: فرض کنید S و S_n به ترتیب مجموع و مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ هستند و $\varepsilon=\frac{1}{2^{10}}$ به ازای چه مقـادیری از n، $|S_n-S|<\frac{1}{2^{10}}$ برقرار است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵ و عمران آزاد ۸۵)

۱) $n>10$ ۲) $n>5$ ۳) $n>3$ ۴) $n>128$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم منظور از S همان مجموع تمام جملات سری یعنی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}$ می‌باشد و S_n مجموع n جمله اول سری یعنی $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}$ است، بنابراین داریم:

$$|S-S_n|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}$$

حال توجه کنید که سری فوق شبیه سری هندسی $\sum\frac{1}{2^k}$ است ولی وجود k در مخرج ایجاد مشکل کرده است و بنابراین نمی‌توانیم از مجموع سری هندسی استفاده کنیم، ولی در این مثال هدف ما پیدا کردن مجموع دقیق سری نیست و فقط می‌خواهیم این مجموع از $\frac{1}{2^{10}}$ کوچک باشد. بـه همـین علـت سـعی مـی‌کنـیم بـه جـای متغیـر k در مخـرج در صـورت امکـان مقـداری ثابـت قـرار داده و آن را از سـیگما خـارج کنـیم. توجـه کنیـد کـه $k\ge n+1$، بنـابراین $\frac{1}{k}\le\frac{1}{n+1}$ در نتیجـه $\frac{1}{k2^k}\le\frac{1}{(n+1)2^k}$ است.

$$|S-S_n|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{n+1}\times\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{n+1}\times(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2^n(n+1)}$$

حال برای این‌که $\frac{1}{2^n(n+1)}<\frac{1}{2^{10}}$، لازم است $2^n(n+1)>2^{10}$ باشد. به ازای $n\ge 8$ نامساوی برقرار می‌باشد یعنی گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۱۷: مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\xrightarrow{\text{از فرمول تلسکوپی استفاده می‌کنیم}}S=\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty}=1$$

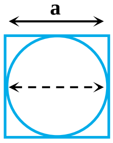
مثال ۱۸: اگر $x_n=\frac{P_n}{P}$ و $y_n=\frac{A_n}{A}$ به ترتیب نسبت محیط و مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R به محیط و مساحت این دایره باشند، به ازای $n\ge 3$ رابطه بین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $x_n=y_n$ ۲) $y_n=Rx_n$ ۳) $x_n>y_n$ ۴) $x_n<y_n$

پاسخ : گزینه «۱» **روش اول:** به ازای $n=4$ خواهیم داشت: $2r=a\Rightarrow r=\frac{a}{2}$

r: شعاع دایره a: طول چهار ضلعی منتظم محیطی

$$\begin{cases}A_n=a^2\\ A=\pi r^2=\pi(\frac{a}{2})^2=\frac{\pi a^2}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{A_n}{A}=\frac{4}{\pi}\qquad\begin{cases}P_n=4a\\ P=2\pi r=2\pi(\frac{a}{2})=\pi a\end{cases}\Rightarrow\frac{P_n}{P}=\frac{4}{\pi}$$



ملاحظه می‌گردد که نسبت $\frac{P_n}{P}$ و $\frac{A_n}{A}$ با هم برابرند.

روش دوم: بین P_n و A_n رابطهٔ $A_n=\frac{RP_n}{2}$ برقرار است و بین A و P رابطهٔ $A=\frac{RP}{2}$ برقرار است. از تقسیم کردن طرفین این دو رابطه نتیجه می‌شود که $\frac{A_n}{A}=\frac{P_n}{P}$.

مثال ۱۹: مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱»

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$$

توضیح: در محاسبهٔ حاصل سری تلسکوپی فوق، دقت کنید؛ اختلاف جمله‌ها ۲ واحد است، بنابراین باید مجموع دو جملهٔ اول را بنویسیم و حد دو جملهٔ آخر را حساب کنیم که حد دو جملهٔ آخر صفر است.

مثال ۲۰: هرگاه در دنباله a_n، $|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{10}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

۱) a_n کراندار است. ۲) اختلاف جمله یازدهم و اول از یک کمتر است.

۳) همگراست. ۴) a_n یکنواست.

پاسخ : گزینه «۲» مطابق با قاعدهٔ تلسکوپی داریم:

$$\sum_{n=1}^{k}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{k+1}\Rightarrow\left|\sum_{n=1}^{k}a_n-a_{n+1}\right|=|a_1-a_{k+1}|$$

واضح است $\left|\sum_{n=1}^{k}a_n-a_{n+1}\right|\le\sum_{n=1}^{k}|a_n-a_{n+1}|$، بنابراین داریم:

$$|a_1-a_{k+1}|\le\sum_{n=1}^{k}|a_n-a_{n+1}|\xrightarrow{|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{10}}|a_1-a_{k+1}|\le\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{10}\Rightarrow|a_1-a_{k+1}|\le\frac{k}{10}$$

اگر فرض کنیم $k=10$، آن‌گاه می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بگیریم:

$$|a_1-a_{11}|\le 1$$

مثال ۲۱: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi}{n^2+n})\cos(\frac{2n+1}{n^2+n}\pi)$ ، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

۱) 0　۲) 1　۳) -1　۴) 2

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این که حاصل‌ضرب سینوس در کسینوس را در سری داریم، ابتدا از فرمول تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\sin(\frac{\pi}{n^2+n})\cos(\frac{2n+1}{n^2+n}\pi)=\frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{n^2+n}+\frac{2n\pi+\pi}{n^2+n})+\sin(\frac{\pi}{n^2+n}-\frac{2n\pi+\pi}{n^2+n})]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\frac{2n\pi+2\pi}{n^2+n})+\sin(\frac{\pi-2n\pi-\pi}{n^2+n})]=\frac{1}{2}[\sin(\frac{2\pi(n+1)}{n(n+1)})+\sin(\frac{-2n\pi}{n(n+1)})]=\frac{1}{2}[\underbrace{\sin(\frac{2\pi}{n})}_{f_n}-\underbrace{\sin(\frac{2\pi}{n+1})}_{f_{n+1}}]$$

همان‌طور که می‌بینید؛ با یک سری تلسکوپی روبه‌رو شدیم، پس داریم:

$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\sin(\frac{2\pi}{n})-\sin(\frac{2\pi}{n+1})]=\frac{1}{2}[\sin(\frac{2\pi}{1})-\lim_{n\to+\infty}\sin(\frac{2\pi}{n})]=\frac{1}{2}[\sin 2\pi-\sin 0]=0$$

مثال ۲۲: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n^2})$ ، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۷)

۱) $e^{\frac{2}{3}}$　۲) $e^{\frac{1}{3}}$　۳) $e^{\frac{1}{2}}$　۴) e

پاسخ : گزینه «۳» بهترین راه‌حل این است که حاصل حد را A بنامیم و از طرفین Ln بگیریم، در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n^2})=A\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\text{Ln}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{i}{n^2})=\text{Ln}A\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\text{Ln}[(1+\frac{1}{n^2}).(1+\frac{2}{n^2}).(1+\frac{3}{n^2})\cdots]=\text{Ln}A$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}[\text{Ln}(1+\frac{1}{n^2})+\text{Ln}(1+\frac{2}{n^2})+\text{Ln}(1+\frac{3}{n^2})+\cdots+\text{Ln}(1+\frac{n}{n^2})]=\text{Ln}A$$

اگر $\text{Ln}(1+u)$ را هم‌ارز با u در نظر بگیریم، وقتی $n\to+\infty$ آن‌گاه $\frac{k}{n^2}\to 0$ ، پس می‌توانیم هم‌ارزی را بنویسیم:

$$\text{Ln}A\sim\lim_{n\to+\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}]\Rightarrow\text{Ln}A=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2})$$

$$\Rightarrow\text{Ln}A=\lim_{n\to+\infty}(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2})\Rightarrow\text{Ln}A=\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^2+n}{2n^2})\Rightarrow\text{Ln}A=\frac{1}{2}\Rightarrow\mathbf{A=e^{\frac{1}{2}}}$$

مثال ۲۳: کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ صحیح می‌باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) سری واگراست.　۲) سری همگرا به عدد $\frac{1}{2}$ است.　۳) سری همگرا به عدد ۱ است.　۴) سری همگرا به عدد ۲ است.

پاسخ : گزینه «۴» توجه کنید که $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1})=2$$

مثال ۲۴: اگر $tg\alpha=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)^n$ چقدر است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{1}{3}$　۲) $-\frac{1}{5}$　۳) $\frac{1}{3}$　۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ : گزینه «۲» با استفاده از فرمول $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ ، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2\sin\alpha\times\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(tg\alpha)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{4})^n=\frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{5}$$

توضیح : در قسمت نهایی یک سری هندسی با جمله‌ی اول $t_1=-\frac{1}{4}$ و قدرنسبت $q=-\frac{1}{4}$ داشتیم که با فرمول حد مجموع به جواب رسیدیم.

مثال ۲۵: مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ برابر کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ : گزینه «۲» با یک سری هندسی زیر هستیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4$$

مثال ۲۶: جمع سری بی‌نهایت $\sum_{n=1}^{\infty}[tg^{-1}(n+1) - tg^{-1}(n)]$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» سری داده شده یک سری تلسکوپی می‌باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[tg^{-1}(n+1) - tg^{-1}(n)] = -\sum_{n=1}^{\infty}[tg^{-1}(n) - tg^{-1}(n+1)] = -(tg^{-1}(1) - tg^{-1}(\infty)) = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۷: اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = \frac{3}{4}$ باشد، x کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{7}{8}$

پاسخ : گزینه «۱» مجموع یک سری هندسی با قدر نسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ یک سری هندسی با قدرنسبت $(1-x)$ و جمله اول $(1-x)$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$S = \frac{1-x}{1-(1-x)} = \frac{1-x}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{7}$$

مثال ۲۸: مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n(n+3)}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ آزاد ۸۹)

۱) $\frac{13}{16}$ ۲) $\frac{13}{12}$ ۳) $\frac{13}{24}$ ۴) $\frac{13}{8}$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به ظاهر سری، معلوم است که باید از قاعده‌ی تلسکوپی کمک بگیریم. ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} \Rightarrow A = \left.\frac{1}{n+3}\right|_{n=0} = \frac{1}{3} \ ,\ B = \left.\frac{1}{n}\right|_{n=-3} = -\frac{1}{3}$$

پس سری را به شکل مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n(n+3)} = \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}}{n} - \frac{\frac{1}{3}}{(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{f_n} - \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{f_{n+3}}\right)$$

خُب، حالا به راحتی حاصل سری را حساب می‌کنیم. اما دقت کنید؛ اختلاف جملات، سه تاست، پس باید سه جمله از اول و سه جمله از آخر را بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 3\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6+4+3}{12} - 0\right] = \frac{13}{24}$$

مثال ۲۹: مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} Ln\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ کدام است؟ (صنایع سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $-Ln2$ ۲) $-Ln\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) واگراست

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به وجود Ln و اختلاف اندیس‌ها در جلوی Ln، باید به فکر استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی افتاد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} Ln(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}) = \sum_{n=1}^{\infty}[\underbrace{Ln(\frac{n}{n+1})}_{f_n} - \underbrace{Ln(\frac{n+1}{n+2})}_{f_{n+1}}] = f_1 - \lim_{n\to+\infty} f_{n+1}$$

$$= Ln\frac{1}{1+1} - \lim_{n\to+\infty} Ln\frac{n+1}{n+2} = Ln\frac{1}{2} - Ln(\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}) = Ln\frac{1}{2} - Ln1 = Ln\frac{1}{2} = -Ln2$$

مثال ۳۰: تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ تعریف شده است. مقدار $f(\frac{7}{2})$ کدام است؟ (فیزیک دریا ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا به جای x عدد $\frac{7}{2}$ را جایگزین می‌کنیم، تا $f(\frac{7}{2})$ را حساب کنیم:

$$f(\frac{7}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}(\frac{7}{2}-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}\times(\frac{1}{2})^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+2)}\right] = \frac{1}{2}$$

درسنامه ۷: آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت

مثال ۱: به ازای چه مقدار از k، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^k+1}$ حتماً همگراست؟

۱) $k\ge 2$ ۲) $k>2$ ۳) $k>3$ ۴) $k\ge 3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بزرگترین توان n در صورت کسر برابر ۲ است، باید اختلاف آن با بزرگترین توان n در مخرج کسر بزرگتر از یک باشد: $k-2>1 \Rightarrow k>3$

مثال ۲: در مورد سری $S=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$، کدام گزینه درست است؟

۱) سری همگرا به ۱ است. ۲) سری همگرا به ۲ است. ۳) سری همگرا به صفر است. ۴) سری واگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با کمی دقت و البته تمرکز، به راحتی جمله‌ی عمومی سری مشخص می‌شود: $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$

در واقع سؤال از ما، مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})$ را خواسته است. با مخرج مشترک گرفتن می‌توان سری را به شکل زیر نیز نوشت:

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$$

با مقایسه با P سری، به وضوح، واگرایی سری مشخص است؛ با توجه به درجه‌ی مخرج، $P=1$، می‌باشد. لذا **سری واگراست**.

مثال ۳ (سخت): اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{aLnn+b}{cLnn+d}}$ همگرا باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (a، b، c و $d\neq 0$ اعدادی حقیقی هستند.)

۱) $\frac{a}{d}<-1\,,\,c=0$ ۲) $\frac{a}{d}<0\,,\,c=0$ ۳) $\frac{b}{d}>-1\,,\,a=c=0$ ۴) $\frac{b}{d}<0\,,\,a=c=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر قرار باشد سری همگرا باشد، لازم است حد جمله‌ی عمومی آن برابر با صفر شود. حتماً باید مقدار c برابر با صفر و مقدار a مخالف صفر باشد. چون اگر قرار باشد c مساوی صفر نشود و مثلاً $a=0$ باشد، آن‌گاه حد تابع به‌صورت مقابل می‌شود: $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{b}{cLnn+d}}=e^{\frac{b}{+\infty}}=e^{\circ}=1$

و اگر قرار باشد a و c هر دو مخالف صفر شوند، حد تابع برابر با $e^{\frac{a}{c}}$ می‌شود که باز هم مخالف صفر است و اگر هر دو صفر باشند $e^{\frac{b}{d}}$ به دست می‌آید که صفر نیست. بنابراین $c=0$ و $a\neq 0$ که در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{aLnn+b}{d}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{a}{d}Lnn+\frac{b}{d}}=e^{\frac{b}{d}}\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{a}{d}Lnn}$$

تنها در حالتی حد جمله‌ی عمومی صفر می‌شود که $\frac{a}{d}<0$. اما دقت کنید، این پایان کار نیست و با عجله گزینه (۲) را انتخاب نکنید! چون فعلاً شرط لازم همگرایی برقرار شده، اما شرط کافی را می‌توانیم به شکل مقابل بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a}{d}Lnn+\frac{b}{d}}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a}{d}Lnn}.e^{\frac{b}{d}}=e^{\frac{b}{d}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a}{d}Lnn}=e^{\frac{b}{d}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{Lnn^{\frac{a}{d}}}$$

حالا با استفاده از خاصیت $e^{Lnx}=x$، سری را بازنویسی می‌کنیم:

$$S=e^{\frac{b}{d}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{a}{d}}=e^{\frac{b}{d}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\frac{a}{d}}}$$

خب حالا با توجه به مطالب P_سری به راحتی می‌توان گفت، با شرط $-\frac{a}{d}>1$ سری قطعاً همگراست. پس داریم: $-\frac{a}{d}>1 \Rightarrow \frac{a}{d}<-1$

مثال ۴ (سخت): اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{a}{n})^{n^3}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}[\frac{\cosh\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}]$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ $(a\neq 0)$

۱) سری A همگرا و سری B واگراست.
۲) سری A واگرا و سری B همگراست.
۳) هر دو سری A و B همگرا هستند.
۴) هر دو سری A و B واگرا هستند.

پاسخ: گزینه «۳» هر دو سری را بررسی می‌کنیم:

بررسی سری A: با توجه به این‌که عبارتی بر حسب n به توان n^3 رسیده، بنابراین از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}[(\cos\frac{a}{n})^{n^3}]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{a}{n})^{n^2}$$

حالت ابهام 1^{∞} می‌باشد که حاصل آن برابر با $e^{\lim_{n\to+\infty}(\text{توان}\times(\text{پایه}-1))}$ می‌شود. فعلاً e را کنار می‌گذاریم و حد توان آن را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{n\to+\infty}\text{توان}\times(\text{پایه}-1)=\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{a}{n}-1)\times n^2=\lim_{n\to+\infty}(\frac{\cos\frac{a}{n}-1}{\frac{1}{n^2}})=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{a^2}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{-a^2}{2}$$

پس حاصل حد $e^{-\frac{a^2}{2}}$ می‌باشد و چون کوچکتر از یک می‌باشد (چون توان e یک عدد منفی است) پس سری همگراست.

بررسی سری B: ابتدا توجه کنید از خاصیت $\mathrm{Ln}\frac{A}{B}=\mathrm{Ln}A-\mathrm{Ln}B$ داریم:

$$\mathrm{Ln}[\frac{\cosh\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}]=\mathrm{Ln}[\cosh\frac{1}{n}]-\mathrm{Ln}[\cos\frac{1}{n}]=\mathrm{Ln}[\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}}{2}]-\mathrm{Ln}[1-\frac{1}{2n^2}+-\cdots\cdots]$$

$$=\mathrm{Ln}[\frac{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\cdots)+(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-+\cdots)}{2}]-\mathrm{Ln}[1-\frac{1}{2n^2}+-\cdots]=\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{2n^2}+-\cdots)-\mathrm{Ln}(1-\frac{1}{2n^2}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}+\cdots=\frac{1}{n^2}+\cdots$$

پس این سری هم‌ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ است و چون این سری مطابق مطالب گفته شده در مورد P ــ سری همگراست، لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}(\frac{\cosh(\frac{1}{n})}{\cos\frac{1}{n}})$ نیز همگراست.

مثال ۵: دو سری با جملات $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$، از نظر همگرایی به کدام صورت هستند؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۷)

۱) هر دو همگرا هستند.
۲) هر دو واگرا هستند.
۳) A واگرا و B همگراست.
۴) A همگرا و B واگراست.

پاسخ: گزینه «۳» واضح است سری A را می‌توان هم‌ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ دانست و بنابراین در مقایسه با P سری واگراست. اما برای تعیین همگرایی یا واگرایی سری B می‌توانیم از آزمون انتگرال استفاده کنیم. فرض کنید $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ و به عبارت دیگر $f(x)=\frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$، همان‌طور که می‌بینید f تابعی نزولی و مثبت است، بنابراین داریم:

$$I=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\xrightarrow[\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du]{\sqrt{x}=u}I=\int_1^{+\infty}-2e^{-u}du=-2[e^{-u}]_1^{+\infty}=\frac{2}{e}\Rightarrow\text{سری همگرا}$$

مثال ۶: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد و $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,a_k$ در این صورت همواره ...... است. (ریاضی ـ سراسری ۷۸)

۱) S_n کراندار است. ۲) S_n همگراست. ۳) S_n واگراست. ۴) با شرط $a_n \geq 0$، دنباله S_n واگرا

پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال بهتر است از نامساوی زیر که به نامساوی کوشی (شوارتز) معروف است، استفاده کنیم:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}$$

ابتدا S_n را به شکل مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)a_k \Rightarrow |S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n}a_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

در این مرحله ابتدا حاصل سری $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right]$$

با توجه به روش محاسبه‌ی حد مجموع، سری فوق برابر با $\int_0^1 x\,dx$ است و لذا برابر با $\frac{1}{2}$ است و لذا داریم:

$$|S_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[k=1]{\text{همگراست } \sum a_k^2} S_n \text{ کراندار است.}$$

مثال ۷: به ازای چه مقادیری از p سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)$ همگراست؟ (آمار ـ سراسری ۸۰)

۱) $p<1$ ۲) $p>1$ ۳) $p>2$ ۴) $p<2$

پاسخ: گزینه «۳» واضح است باید عبارت را در مزدوج آن ضرب و تقسیم کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^p+1)-n^p}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p+1}+\sqrt{n^p}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{p}{2}}}$$

پس سری داده شده هم‌ارز با $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ است و برای همگرایی باید $\frac{p}{2}>1$ یا $p>2$ باشد.

مثال ۸: اگر $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ و $b_n = \text{Arcsin}\frac{1}{n}$، آن‌گاه: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا هستند. ۲) $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگراست.

۳) هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا هستند. ۴) $\sum a_n$ واگرا و $\sum b_n$ همگراست.

پاسخ: گزینه «۲» واضح است که $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ و چون سری $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست، بنابراین سری $\sum a_n$ نیز طبق آزمون مقایسه همگراست. از طرفی چون $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{Arcsin}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$، پس طبق آزمون مقایسه حدی، واگرایی سری $\sum\frac{1}{n}$، واگرایی سری $\sum b_n$ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۹: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ واگرا باشد، آن‌گاه .... واگراست. (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ ۲) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ ۳) $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}na_n$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم: $na_n \geq a_n$ و چون سری $\sum a_n$ واگراست، پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum na_n$ واگراست.

مثال ۱۰: کدام سری واگراست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{2n^3-1}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \{(1+\frac{1}{n^2})^n - 1\}$ ۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)(LnLnn)^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای درک بهتر و تمرین بیشتر هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): می‌دانیم $Lnn < n$، بنابراین $\frac{Lnn}{2n^3-1} < \frac{n}{2n^3-1}$ و با توجه به این‌که سری $\sum \frac{n}{2n^3-1}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری مورد نظر نیز همگراست.

گزینه (۲): عبارت $1-\cos\frac{1}{n}$، هم‌ارز $\frac{(\frac{1}{n})^2}{2} = \frac{1}{2n^2}$ می‌باشد و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ همگراست پس سری مورد نظر نیز همگراست.

گزینه (۳): ابتدا هم‌ارز عبارت $(1+\frac{1}{n^2})^n - 1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(1+\frac{1}{n^2})^n - 1 = e^{nLn(1+\frac{1}{n^2})} - 1 \sim e^{n.\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، پس سری مورد نظر نیز واگراست.

گزینه (۴): به‌طور کلی می‌دانیم سری $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{nLnn(LnLnn)^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا می‌باشد، بنابراین سری مورد نظر نیز همگراست.

مثال ۱۱: اگر $A = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kLnk}$ و $B = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kLn^2k}$، کدام مورد درست است؟ (آمار ـ سراسری ۸۲)

۱) $A = B = +\infty$ ۲) $A = +\infty$ و $B < +\infty$ ۳) $A < +\infty$ و $B < +\infty$ ۴) $A < +\infty$ و $B = +\infty$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به طور کلی می‌دانیم سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \le 1$ واگرا می‌باشد.

مثال ۱۲: در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$ $(a > 0)$ کدام گزینه درست است؟ (معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) به ازای تمام مقادیر a همگراست.
۲) به ازای تمام مقادیر a واگراست.
۳) به ازای $a = 2$ همگراست و به ازای $a \neq 2$ واگراست.
۴) به ازای $a = 2$ واگراست و به ازای $a \neq 2$ همگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n+1}{\underbrace{\sqrt{n^4+2n+1}}_{\text{هم‌ارز با } n^2 \text{ است}} + \underbrace{\sqrt{n^4+an}}_{\text{هم‌ارز با } n^2 \text{ است}}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-a)n}{2n^2} = \frac{2-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$، سری همساز می‌باشد و واگراست پس فقط به ازای $a = 2$ سری مورد نظر همگراست.

مثال ۱۳: فرض کنید a_n و b_n همواره مثبت باشند و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$. کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.
۲) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.
۳) اگر $L = 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.
۴) اگر $L > 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به آزمون مقایسه حدی می‌دانیم که اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری‌هایی با جملات نامنفی باشند و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ باشد اگر $L = 0$ باشد و $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ هم همگراست.
اگر $L = \infty$ باشد و $\sum b_n$ واگرا باشد، $\sum a_n$ هم واگراست.
اگر $L \neq 0$ و $L \neq \infty$ باشد، آن‌گاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا می‌باشند.
با توجه به مطالب فوق واضح است که گزینه ۱ غلط می‌باشد و پاسخ تست است.

مثال ۱۴: مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۸)

۱) ∞ ۲) $\pi+3$ ۳) $3+\frac{\pi}{2}$ ۴) 3

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وقتی $n\to\infty$, $\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$ و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ واگراست (سری همساز واگراست) پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ نیز طبق آزمون مقایسه حدی واگراست.

مثال ۱۵: سری‌های $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n(\text{Ln}(\text{Ln}n))}$ و $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n(\text{Ln}(\text{Ln}n))^2}$ به ترتیب چگونه‌اند؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) واگرا ـ واگرا ۲) واگرا ـ همگرا ۳) همگرا ـ همگرا ۴) همگرا ـ واگرا

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بر طبق نکته می‌دانیم سری به فرم زیر با فرض $P>1$ همگرا و با فرض $P\le 1$ واگراست.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\text{Ln}n[\text{Ln}(\text{Ln}n)]^P}$$

بنابراین سری اول، واگرا و سری دوم، همگراست.

مثال ۱۶: کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^k}$، به ازای مقادیر مختلف $k\in\mathbb{R}$، صحیح است؟ (پزشکی ـ آزاد ۸۹)

۱) به ازای $k<0$، همگرا و به ازای $k\ge 0$، واگراست.
۲) به ازای $k>0$، همگرا و به ازای $k\le 0$، واگراست.
۳) به ازای $k\ge 1$، همگرا و به ازای $k<1$، واگراست.
۴) به ازای $k\le 1$، همگرا و به ازای $k\ge 1$، واگراست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر $k<0$ باشد، آن وقت $\lim_{n\to+\infty}-n^k=0$ و در نتیجه $\lim_{n\to+\infty}e^{-n^k}=e^0=1$، این یعنی حد جمله‌ی عمومی سری مخالف صفر است، پس در این حالت سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد. پس تا این جا با گزینه‌های (۱) و (۴) خداحافظی می‌کنیم و تمام حواسمان را به فرق بین گزینه‌های (۲) و (۳) اختصاص می‌دهیم. که البته فرق چندانی ندارند، فقط در یک واحد برای k با هم اختلاف دارند. بهتر است گزینه (۲) را بررسی کنیم، چون اگر قرار باشد شرایط همگرایی گزینه (۳) را بررسی کنیم، نمی‌توانیم از آن شرایط همگرایی گزینه (۲) را نتیجه بگیریم (وضعیت سری برای $0<k<1$ باید جداگانه بررسی شود). برای $k>0$، سری شرط لازم برای همگرایی را دارد. یعنی $\lim_{n\to+\infty}e^{-n^k}=0$، اما برای مشخص شدن این‌که سری همگراست یا واگرا، می‌توانیم از آزمون مقایسه کمک بگیریم: سری $\sum\frac{1}{n^3}$ را به عنوان سری مقایسه در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n^k}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^{n^k}}\overset{\text{قانون رشد}}{=\!=}0$$

چون سری $\sum\frac{1}{n^3}$، همگراست، بنابراین سری داده شده نیز همگراست، پس گزینه (۲) صحیح است.

درسنامه۷: سری‌های متناوب، همگرایی مطلق و مشروط

مثال ۱: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)Ln(n+1)}$ از نظر همگرایی کدام شرایط را دارد؟

۱) همگرای مشروط است. ۲) همگرای مطلق است. ۳) به ازای n های فرد همگراست. ۴) به ازای n های زوج همگراست.

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $\cos n\pi=(-1)^n$، پس این سری متناوب است. اگر قرار دهیم $a_n=\frac{1}{(n+1)Ln(n+1)}$، در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|$ به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)Ln(n+1)}$ در می‌آید که همان سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ است و بنابراین واگراست. ولی سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست، زیرا جمله عمومی آن یعنی $a_n=\frac{1}{(n+1)Ln(n+1)}$ به وضوح نزولی و همگرا به صفر است. پس این سری، همگرایی مشروط دارد.

یادآوری: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLn^P n}=\begin{cases}\text{همگرا} & P>1\\ \text{واگرا} & P\le 1\end{cases}$.

مثال ۲: اگر $S_1=\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{Ln(Lnn)}$ و $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ باشند، آن‌گاه کدام‌یک از جملات زیر صحیح است؟

۱) S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند. ۲) S_1 همگرای مشروط و S_2 همگرای مطلق است.

۳) S_2 همگرای مشروط و S_1 همگرای مطلق است. ۴) S_1 و S_2 هر دو همگرای مطلق هستند.

پاسخ: گزینه «۱» هر دو سری متناوب هستند و حد جمله عمومی هر دو برابر صفر است. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{Ln(Lnn)}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{100}{2n+3}=0$

و شرط نزولی بودن نیز برای آن‌ها برقرار است، پس هر دو سری همگرا می‌باشند. ولی سری $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{Ln(Lnn)}$ واگرا می‌باشد، زیرا جمله عمومی سری یعنی $\frac{1}{Ln(Lnn)}$ از $\frac{1}{n}$ بزرگتر است و چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست، پس سری مورد نظر نیز طبق آزمون مقایسه واگراست. همچنین واضح است که سری $\sum\frac{1}{2n+3}$ نیز واگراست زیرا $\sum\frac{1}{2n+3}\sim\sum\frac{1}{2n}$ و سری $\sum\frac{1}{2n}$ واگراست. از بحث بالا نتیجه می‌شود S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.

مثال ۳: اگر $S_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Lnn)^2}$ و $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{Ln(n+1)}$ آن‌گاه کدام گزینه در مورد وضعیت همگرایی S_1 و S_2 درست است؟

۱) S_1 همگرای مطلق و S_2 همگرای مشروط است. ۲) S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.

۳) S_1 و S_2 هر دو همگرای مطلق هستند. ۴) S_1 همگرای مشروط و S_2 همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به آزمون همگرایی برای سری‌های متناوب، سری‌های S_1 و S_2 هر دو همگرا هستند زیرا دنباله‌های $\frac{1}{(Lnn)^2}$ و $\frac{1}{Ln(n+1)}$ هر دو نزولی و همگرا به صفر هستند. حالا باید همگرایی مطلق آن‌ها را بررسی کنیم. سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}$ را با استفاده از قضیه‌ی تراکم کوشی بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}2^n\times\frac{1}{(Ln2^n)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(nLn2)^2}=\frac{1}{(Ln2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

این سری به وضوح واگراست، زیرا سرعت رشد صورت از مخرج بیشتر بوده و $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty$ است. بنابراین S_1 فقط همگرای مشروط است. حالا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Ln(n+1)}$ را در نظر بگیرید. برای n های بزرگ $Ln(n+1)\simeq Ln(n)$ البته می‌توانیم به جای این هم‌ارزی، از خاصیت «لغزاندن» حدود سری استفاده کنیم:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Ln(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}$ حالا طبق قضیه‌ی تراکم کوشی، واگرا بودن این سری هم واضح است:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn}\simeq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{Ln(2^n)}=\frac{1}{Ln2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n}$$

باز هم $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\infty$ یعنی شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست. خلاصه آن‌که S_1 و S_2 هر دو همگرای مشروط هستند.

مثال ۴: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^p}$، به ازای کدام مقادیر p و α همگراست؟ $(p>0)$

۱) به ازای تمام مقادیر مثبت p و هر مقدار دلخواه برای α
۲) به ازای $p>1$ و هر مقدار دلخواه برای α
۳) به ازای $\alpha=0$ یا $p>1$
۴) به ازای $p\geq 1$ و هر مقدار دلخواه برای α

پاسخ: گزینه «۱» اگر α مضرب π باشد، در این صورت $\sin(n\alpha)$ برابر صفر است و بنابراین سری همگرا به صفر است. اگر α مضرب π نباشد، نشان می‌دهیم دنباله‌ی مجموع‌های جزئی $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha)$ کراندار است. بدین منظور آن را در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و تقسیم کرده و از فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$S=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(k\alpha)=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k\alpha-\frac{\alpha}{2})-\cos(k\alpha+\frac{\alpha}{2})\right)$$

$$\xrightarrow{\text{سری تلسکوپی}} S=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\underbrace{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos(n\alpha+\frac{\alpha}{2})\right)}_{\text{حداکثر برابر ۲ می‌شود}}\leq\frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین مجموع جزئی $\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha)$ کراندار است و چون دنباله $a_n=\frac{1}{n^p}$، مثبت، نزولی و همگرا به صفر است، پس طبق آزمون آبل سری موردنظر به ازای تمام مقادیر مثبت p و هر مقدار α همگراست.

مثال ۵: کدام‌یک از سری‌های زیر همگراست؟ (اکتشاف و استخراج معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+1}{n^2}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{Lnn}{n}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$

پاسخ: گزینه «۳» برای این‌که بفهمیم کدام گزینه جواب صحیح است، تک‌تک گزینه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در گزینه (۱)، عبارت مقابل سیگما یعنی $\sin\frac{1}{n}$، هم‌ارز $\frac{1}{n}$ می‌باشد و چون $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس سری موردنظر واگراست.

در گزینه (۲) سری داده شده شرط لازم برای همگرایی را ندارد لذا واگراست $(\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n^2+1}{n^2}=\sin(1))$

در گزینه (۳) سری داده شده شرط لازم برای همگرایی را دارد $(\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n Lnn}{n}=0)$ همچنین با استفاده از آزمون لایب نیتز برای سری متناوب داریم:

$1)\ \lim_{n\to\infty}a_n=0 \qquad 2)\ |a_{n+1}|<|a_n|$

با توجه به این‌که $\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{n}=0$، کافی است نشان دهیم که دنباله نزولی می‌باشد. بدین منظور تابع $f(x)=\frac{Lnx}{x}$ را در نظر بگیرید، چون $f'(x)<0$ می‌باشد $(x>3)$ پس دنباله نزولی خواهد بود.

در گزینه (۴) سری داده شده شرط لازم برای همگرایی را ندارد، لذا سری واگراست.

مثال ۶: در سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ در صورتی که ۶ عدد اول انتخاب شود، در مورد باقیمانده سری کدام‌یک از گزاره‌ها صحیح است؟ (نفت ـ سراسری ۸۳)

۱) باقیمانده از $\frac{1}{12!}$ کوچکتر است.
۲) قدرمطلق باقیمانده از $\frac{1}{12!}$ کوچکتر است.
۳) باقیمانده از $\frac{1}{14!}$ بزرگتر است.
۴) قدرمطلق باقیمانده از $\frac{1}{14!}$ کوچکتر است.

پاسخ: گزینه «۴» در سری‌های متناوب همگرا، اگر دنباله‌ی مجموع‌های جزئی را تا n جمله بنویسیم یعنی $S_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$ آن‌گاه باقیمانده‌ی سری کمتر از a_{n+1} است:

$|S-S_n|<a_{n+1}\ \Rightarrow |S-S_6|<a_7$

در این مثال $a_n=\frac{1}{(2n)!}$ پس $a_7=\frac{1}{(2\times7)!}$ در نتیجه داریم:

$|S-S_6|<\frac{1}{(2\times7)!}=\frac{1}{14!}$

مثال ۷: اگر A سری $\cdots+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ و B سری $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ باشند، کدام گزینه در مورد این دو سری صحیح است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) A همگرا و B واگراست. ۲) A واگرا و B همگراست. ۳) هر دو همگراست. ۴) هر دو واگرا هستند.

پاسخ: گزینه «۳» قدر مطلق جملات هر دو سری نزولی می‌باشد و حد جملات عمومی آنها نیز برابر صفر است، پس هر دو سری طبق آزمون لایب نیتز همگرا هستند.

مثال ۸: کدام‌یک از سری‌های زیر واگرا هستند؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۳)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{Ln}\,n}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$

پاسخ: گزینه «۲» تک‌تک گزینه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

گزینه (۱) شرط لازم برای همگرایی را دارد ($\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}=0$) و می‌دانیم $\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3}<\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}$ یعنی در اصل $\frac{(-1)^{n+1}}{n}<\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}$ است، با توجه به این‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ سری همساز متناوب بوده، لذا با توجه به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+2}$ نیز همگراست.

گزینه (۲) می‌دانیم هنگامی که n به سمت ∞ میل می‌کند $3^n>n^2$ می‌باشد، لذا برای سری ارائه شده در گزینه‌ی ۲ شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست چرا که $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^2}=\infty$ بوده و $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n^2}$ وجود ندارد پس سری واگراست.

گزینه (۳) می‌دانیم هنگامی که n به سمت ∞ میل کند، $n>\mathrm{Ln}\,n$ می‌باشد پس $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{Ln}\,n}{n}=0$ و شرط لازم برای همگرایی برقرار است و نیز می‌دانیم $\frac{\mathrm{Ln}(n+1)}{n+1}<\frac{\mathrm{Ln}\,n}{n}$ پس طبق آزمون لایب نیتز سری داده شده همگرا می‌باشد.

گزینه (۴) سری داده شده یک سری هندسی می‌باشد که قدر نسبت آن $\frac{1}{e}$ است لذا همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\frac{1}{e}}{\frac{e-1}{e}}=\frac{1}{e-1}$$

مثال ۹: کدام سری واگراست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(100)^n}{n!}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech} n$

پاسخ: گزینه «۱» تک‌تک گزینه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

بررسی گزینه (۱): وقتی $n\to\infty$، $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}$ می‌باشد و چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگراست.

بررسی گزینه (۲): سری داده شده سری همساز متناوب است که می‌دانیم این سری همگرا به Ln۲ می‌باشد.

بررسی گزینه (۳): می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$، پس سری داده شده در گزینه‌ی ۳ به e^{100} همگراست.

بررسی گزینه (۴): می‌دانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech} n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n+e^{-n}}$ و همچنین می‌دانیم $\frac{2}{e^n+e^{-n}}<\frac{2}{e^n}$ و با توجه به این‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت کوچکتر از یک می‌باشد و همگراست لذا با توجه به آزمون مقایسه‌ی حدی، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech} n$ نیز همگرا می‌باشد.

مثال ۱۰: کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{Lnn}{\sqrt{n}}$ درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) سری همگراست. ۲) سری واگراست. ۳) سری همگرای مطلق است. ۴) سری همگرای مشروط است.

پاسخ: گزینه «۴» چون $\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{\sqrt{n}}=0$ و قدرمطلق جملات سری نزولی هستند، بنابراین طبق آزمون لایب‌نیتز سری متناوب همگراست. ولی در سری مثبت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{\sqrt{n}}$ اگر $n=1$ را کنار بگذاریم ($Ln1=0$)، داریم: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(Lnn)^{-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Lnn}{\sqrt{n}}$ پس همان سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^pLn^qn}$ است که در آن $p=\frac{1}{2}$ و $q=-1$ است، پس واگراست. در نتیجه سری مورد نظر همگرای مشروط است.

مثال ۱۱: وضعیت دو سری $A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(Lnn)^2}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ چگونه است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۶)

۱) A همگرای مشروط و B واگراست. ۲) A همگرای مطلق و B واگراست.
۳) A همگرای مشروط و B همگرای مطلق است. ۴) A واگرا و B همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۱» سری A یک سری متناوب است، ابتدا توجه کنید $a_n=\frac{1}{(Ln\,n)^2}$ نزولی و همگرا به صفر است، پس تا این‌جا شرط همگرایی را دارد. حالا نوع این همگرایی را مشخص می‌کنیم. چون سری قدرمطلق آن یعنی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Ln\,n)^2}$ واگراست، پس این سری همگرای مطلق نیست، بلکه همگرای مشروط است.

در مورد سری B توجه کنید که با توجه به هم‌ارزی استرلینگ و استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2n}{e})^2}{2(\frac{n}{e})^2}=\frac{4}{2}=2>1\Rightarrow$$

پس سری B واگراست.

مثال ۱۲: اگر به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $\frac{1}{2}\le a_n\le 1$ باشد، در این صورت سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(1+\sqrt{na_n})}$ چه وضعی دارد؟ (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۶)

۱) واگراست. ۲) همگرایی آن بستگی به مقادیر خاص a_n دارد.
۳) همگرایی مشروط است. ۴) همگرایی مطلق دارد.

پاسخ: گزینه «۴» چون $a_n\ge\frac{1}{2}$، بنابراین $\sqrt{na_n}\ge\sqrt{n\times\frac{1}{2}}$ و لذا داریم:

$$b_n=\frac{a_n}{n(1+\sqrt{na_n})}\le\frac{a_n}{n(1+\sqrt{\frac{n}{2}})}\le\frac{1}{n\sqrt{\frac{n}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست، بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز همگراست.

توضیح: دقت کنید چون سری S، همواره جملاتش مثبت است، همگرایی سری، همگرایی مطلق را نیز نتیجه می‌دهد و در واقع واژه‌ی همگرایی مطلق در گزینه (۴) معادل همگرایی است.

مثال ۱۳: کدام سری واگراست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{Ln2}-\frac{1}{Ln3}+\frac{1}{Ln4}-\frac{1}{Ln5}+\cdots$
۲) $\frac{1}{2Ln2}+\frac{1}{3Ln3}\cdots$
۳) $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}-\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\cdots$
۴) $\frac{1}{2(Ln2)^2}+\frac{1}{3(Ln3)^2}+\frac{1}{4(Ln4)^2}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۲» تمام گزینه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

گزینه اول: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{Lnn}$ طبق آزمون لایب نیتز برای سری‌های متناوب چون داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{Lnn}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$Ln(n+1)>Ln(n)\Rightarrow\frac{1}{Ln(n+1)}<\frac{1}{Ln(n)}$$

لذا سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Lnn}$ همگراست.

گزینه دوم: به طور کلی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \le 1$ واگراست.

گزینه سوم: با توجه به این‌که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، لذا سری داده شده در گزینه ۳ همگرای مطلق است.

گزینه چهارم: به طور کلی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Lnn)^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \le 1$ واگراست.

مثال ۱۴: کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\frac{1}{n} + \sin(\frac{1}{n^2}))$ صحیح می‌باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) سری واگرا به $+\infty$ است.
۲) سری همگرای مطلق است.
۳) سری واگرا به $-\infty$ است.
۴) سری همگرای مشروط است.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که وقتی $n \to \infty$ داریم $\frac{1}{n} + \sin(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ همگراست پس سری داده شده نیز همگرا می‌باشد.

از طرفی توجه کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \sin(\frac{1}{n^2}))$ واگراست، زیرا $\frac{1}{n} + \sin(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n}$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا می‌باشد. پس از بحث گفته شده، نتیجه می‌گیریم سری موردنظر همگرای مشروط است.

مثال ۱۵: کدام سری واگراست؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Lnn}{n^2}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$
۴) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

پاسخ: گزینه «۱»

بررسی گزینه (۱): واضح است که وقتی $n \to \infty$، داریم $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$، بنابراین طبق آزمون مقایسه حدی چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ نیز واگراست. بررسی سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): وقتی $n \to \infty$، داریم $\frac{Lnn}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ و چون سری $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه سری $\sum \frac{Lnn}{n^2}$ نیز همگرا می‌شود.

بررسی گزینه (۳): هرگاه $n \to \infty$، $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ و چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه حدی سری $\sum \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ نیز همگراست.

بررسی گزینه (۴): سری داده شده را می‌توان به‌صورت $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ در نظر گرفت، طبق آزمون لایب نیتز این سری همگراست.

مثال ۱۶: کدام سری از نظر همگرایی با بقیه فرق دارد؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
۳) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Ln\, n}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$

پاسخ: گزینه «۳» به وضوح گزینه (۳) مطابق متن کتاب یک سری واگراست. گزینه‌های (۱) و (۲) سری‌هایی متناوب هستند و چون حد جمله‌های $\frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\frac{1}{n^2}$ برابر با صفر و هر دو جمله نزولی هستند، لذا سری‌های آن‌ها همگرا هستند. سری داده شده در گزینه (۴) هم‌ارز $\frac{\pi}{2^n}$ است و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ یک سری هندسی و همگراست، لذا سری داده شده در گزینه (۴) هم همگرا است.

مثال ۱۷: سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{2^{n^2}}$: (مواد ـ سراسری ۹۰)

۱) همگرای مطلق است. ۲) همگرای مشروط است.

۳) همگرا است زیرا حد جمله عمومی آن صفر است. ۴) واگرا است زیرا حد جمله عمومی آن صفر نیست.

پاسخ: گزینه «۱» برای تشخیص رفتار سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ به این ترتیب عمل می کنیم که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ باشد، سری متناوب واگراست؛ در غیر این‌صورت اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد سری متناوب فوق نیز همگراست و همگرایی از نوع مطلق می‌باشد و اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد ولی سری متناوب فوق همگرا باشد، (سری نزولی باشد)، همگرایی از نوع مشروط است. لذا در اینجا ابتدا رفتار سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم: $\sum_{n=0}^{\infty}|(-1)^n \frac{n^n}{2^{n^2}}| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$

برای تشخیص همگرایی سری فوق با استفاده از آزمون نسبت داریم: $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}n^n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n\frac{(n+1)}{2^{2n+1}} = 0 < 1$

بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$ همگرا و لذا سری متناوب فوق نیز همگرای مطلق است.

مثال ۱۸: کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{Lnn}$ صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) مطلقاً همگراست. ۲) سری همگرای مشروط است. ۳) واگراست. ۴) نوع سری نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۲» سری داده شده را ساده می‌کنیم: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{Lnn} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{Lnn}$

حالا توجه کنید که سری قدرمطلق یعنی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Lnn} = \sum_{n=2}^{\infty}|\frac{(-1)^n}{Lnn}|$ واگراست، پس سری همگرای مطلق نیست. حالا باید شرایط همگرایی مشروط را بررسی کنیم؛ ابتدا توجه کنید که جمله‌ی عمومی یعنی $a_n = \frac{1}{Lnn}$، نزولی و همگرا به صفر است و چون سری متناوب است، پس سری همگرایی مشروط دارد.

درسنامه ۸: تعریف سری‌های توانی، محاسبه‌ی شعاع و فاصله‌ی همگرایی سری‌های توانی

مثال ۱: فاصله همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۰,e)$ ۴) $(-e,e)$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا لازم است شعاع همگرایی را به‌دست آوریم. طبق هم‌ارزی استرلینگ داریم $\sqrt[n]{n!}\simeq\frac{n}{e}$:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{e}}{n}=\frac{۱}{e}\Rightarrow R=e\Rightarrow |x|<e\Rightarrow -e<x<e$$

مثال ۲: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}z^n$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳» برای تمرین بیشتر، شعاع همگرایی این سری را با توجه به هر دو فرمول حساب می‌کنیم:

روش اول:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(۲n+۲)!}{((n+۱)!)^۲}}{\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^۲(۲n+۲)!}{(۲n)!((n+۱)!)^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^۲(۲n+۲)(۲n+۱)(۲n)!}{(۲n)!(n+۱)^۲\times(n!)^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)}{(n+۱)^۲}=۴\Rightarrow R=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{۲n}{e})^{۲n}}{(\frac{n}{e})^{۲n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{۲n}{e})^۲}{(\frac{n}{e})^۲}=۴\Rightarrow R=\frac{۱}{۴}$$

توجه: هرگاه $n\to\infty$ با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم: $(kn+b)!\simeq(\frac{kn}{e})^k$.

مثال ۳: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲n-۱)}{n!}x^n$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از روابطی که در مورد این دنباله‌ها گفته‌ایم، خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲n-۱)}{n!}=\frac{\frac{(۲n)!}{۲^n n!}}{n!}=\frac{(۲n)!}{۲^n(n!)^۲}$$

حالا از هم‌ارزی استرلینگ استفاده می‌کنیم تا حد ریشه‌ی nاُم a_n را حساب کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(۲n)!}{۲^n(n!)^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{۲n}{e})^۲}{۲(\frac{n}{e})^۲}=۲\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۴: بازه همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{e^n}{n^۳}(۴-x)^n$ کدام است؟

۱) $(-۴+\frac{۱}{e},۴+\frac{۱}{e})$ ۲) $[-۴+\frac{۱}{e},۴+\frac{۱}{e})$ ۳) $(۴-\frac{۱}{e},۴+\frac{۱}{e}]$ ۴) $[۴-\frac{۱}{e},۴+\frac{۱}{e}]$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا شعاع همگرایی سری توانی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^۳}}=e\Rightarrow R=\frac{۱}{e}\Rightarrow|۴-x|<\frac{۱}{e}\Rightarrow\frac{-۱}{e}<۴-x<\frac{۱}{e}\Rightarrow ۴-\frac{۱}{e}<x<۴+\frac{۱}{e}$$

همگرایی سری را در نقاط انتهایی بازه نیز بررسی می‌کنیم.

$$x=۴-\frac{۱}{e}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۳}\Rightarrow \text{همگرا}\qquad \text{و}\qquad x=۴+\frac{۱}{e}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}\Rightarrow \text{همگرا}$$

پس سری در فاصله $[۴-\frac{۱}{e}\ ,\ ۴+\frac{۱}{e}]$ همگراست.

مثال۵: بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{n^n}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $(-\infty,+\infty)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-1,1)$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}}{1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\Rightarrow R=\infty\Rightarrow|4x-1|<\infty\Rightarrow-\infty<4x-1<\infty\Rightarrow-\infty<x<\infty$$

مثال۶: دامنه تابع $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n\mathrm{Ln}(n+1)}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(0,5]$ ۲) $[0,4)$ ۳) $[0,4]$ ۴) $[-2,2]$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی مشخص است $x=2$، مرکز بازه همگرایی می‌باشد. بنابراین گزینه‌هایی جواب هستند که بازه‌های آن‌ها نسبت به ۲ متقارن باشد، پس همین الآن با گزینه‌های (۱) و (۴) خداحافظی می‌کنیم و تا این‌جا می‌دانیم یکی از گزینه‌های (۲) یا (۳) صحیح است. تفاوت این دو گزینه در این است که گزینه (۳) اصرار دارد؛ $x=4$ در بازه‌ی همگرایی قرار دارد و گزینه (۲) به شدت با این حرف مخالف است! بنابراین کافی است؛ شرایط همگرایی سری در $x=4$ را بررسی کنیم:

$$x=4\Rightarrow f(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2)^n}{2^n\mathrm{Ln}(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}$$

برای بررسی همگرایی این سری، از آزمون مقایسه کمک می‌گیریم. می‌دانیم $n+1>\mathrm{Ln}(n+1)$، بنابراین $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}$.

از طرف با توجه به مطالب P ـ سری می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ واگراست، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{Ln}(n+1)}$ نیز واگرا بوده و در نتیجه نقطه‌ی $x=4$ جزء دامنه سری **نمی‌باشد**، معلوم شد؛ حق با جناب گزینه (۲) بود و گزینه (۳) بیخود اصرار می‌کرد!!

مثال۷: بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$ کدام است؟ (آزمون دکترای دانشگاه صنعتی شریف ـ سال ۸۷)

۱) $(1,3)$ ۲) $(2,4)$ ۳) $[2,4)$ ۴) $[1,3)$

پاسخ: گزینه «۳» با نگاهی ساده و گذرا معلوم است که نقطه‌ی $x=3$، مرکز بازه همگرایی است. پس گزینه‌های (۱) و (۴) را مرخص می‌کنیم! (چون بازه‌ی آن‌ها نسبت به $x=3$ متقارن نیست) خُب حالا ببینیم؛ دعوای گزینه‌های (۲) و (۳) بر سَر چیست؟

گزینه (۳) دوست دارد، عدد $x=2$ نیز جزو بازه‌ی همگرایی حساب شود، اما گزینه (۲) مخالفت می‌کند، ولی به هر حال نظر من و شما مهم‌تر است، شما چی فکر می‌کنید!؟ فرض می‌کنیم گزینه (۳) درست می‌گوید:

$$x=2\Rightarrow \text{حاصل سری}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

در سری فوق $a_n=\frac{1}{n}$ و چون $|a_{n+1}|<|a_n|$ و $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$، بنابراین طبق مطالب سری‌های متناوب، سری همگراست. پس گزینه (۲) اشتباه می‌کرد و گزینه (۳) درست می‌گفت!

مثال۸: بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ کدام گزینه است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ۲) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ۳) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ ۴) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها، کافی است بدانیم سری در نقاط $x=-\frac{1}{3}$ و $x=\frac{1}{3}$ چه وضعی دارد.

$$x=-\frac{1}{3}\Rightarrow \text{حاصل سری}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(-3)^{-n}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

با توجه به مطالب « P ـ سری» واضح است که این سری واگراست $(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}})$.

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{حاصل سری}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(3)^{-n}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

این سری متناوب است؛ دنباله‌ی $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ نزولی بوده و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ است، بنابراین بر طبق مطالب «سری‌های متناوب» سری همگراست. پس گزینه (۳) صحیح است.

مثال ۹: به ازای چه مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ همگراست؟

۱) $-\infty < x < \infty$ ۲) $-1 < x < 1$ ۳) $x > 1$ ۴) $1 < x < 3$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا شعاع همگرایی این سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{(2n-1)!}$ را به‌دست می‌آوریم و در نهایت جذر آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\times\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n+1)(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2+2n}=0$$

$$\frac{1}{R}=0\Rightarrow R\to\infty\Rightarrow -\infty<x<\infty$$

با توجه به شعاع همگرایی به‌دست آمده، جذر آن نیز همان $-\infty < x < \infty$ در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۱۰: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n x^n$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که توانی از n داریم، بنابراین از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|[3+(-1)^n]^n|}\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}(3+(-1)^n)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{R}=4\ ;\ \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\\ \frac{1}{R}=2\ ;\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

برای این که R، کوچکترین مقدار باشد، باید حالت اول را در نظر بگیریم، پس $\frac{1}{R}=4$ و به عبارت دیگر $R=\frac{1}{4}$ است.

مثال ۱۱: در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) به ازای $x \geq -1$ به طور مطلق همگرا و به ازای $x < -1$ واگراست.
۲) به ازای $x > -1$ به طور مطلق همگرا و به ازای $x \leq -1$ واگراست.
۳) به ازای $x \geq -1$ واگرا و به ازای $x < -1$ همگرای مطلق است.
۴) به ازای $x > -1$ و اگرا به ازای $x \leq -1$ همگرای مطلق است.

پاسخ: گزینه «۲» از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $f_n(x)=(n+1)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^n$، در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)^2\left(\frac{x}{x+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{(n+1)^2}}_{1}\left|\frac{x}{x+2}\right|=\left|\frac{x}{x+2}\right|$$

برای همگرایی طبق آزمون ریشه لازم است حاصل حد فوق کوچکتر از ۱ باشد، یعنی داریم:

$$\left|\frac{x}{x+2}\right|<1\Rightarrow -1<\frac{x}{x+2}<+1\Rightarrow -1<1-\frac{2}{x+2}<1\Rightarrow -2<\frac{-2}{x+2}<0\Rightarrow 0<\frac{2}{x+2}<2\Rightarrow 0<\frac{1}{x+2}<1\Rightarrow x>-1$$

یعنی سری به ازای $x > -1$ همگرا و در نتیجه به ازای $x \leq -1$ واگراست.

مثال ۱۲: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+3)^n}{4^n}$ به ازای چه مقادیری از x همگراست؟

۱) $-4 < x < 4$ ۲) $-1 < x < 7$ ۳) $-1 < x < 1$ ۴) $0 < x < 1$

پاسخ: گزینه «۳» از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(x^2+3)^n}{4^n}}=\frac{x^2+3}{4}<1\Rightarrow x^2+3<4\Rightarrow x^2<1\Rightarrow -1<x<1$

مثال ۱۳: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x}$ به ازای چه مقادیری از x همگرا می‌باشد؟

۱) $0 < x < 1$ ۲) $-1 < x < 1$ ۳) $x > 0$ ۴) $x > 1$

پاسخ: گزینه «۲» از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n^x}}=|x|<1\Rightarrow -1<x<1$

توضیح: در محاسبه حد فوق از این‌که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^x}=1$ استفاده کردیم.

مثال ۱۴: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n!}}{2^n}$ به ازای کدام مقادیر x همگراست؟

۱) $-1<x<1$ ۲) $-1\le x\le 1$ ۳) $0\le x\le 1$ ۴) $x=0$

پاسخ: گزینه «۲» از آزمون ریشه (کوشی)، استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{n!}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{(n-1)!}}{2}$$

برای این‌که حد فوق کمتر از یک باشد، لازم است $|x|\le 1$ باشد، یعنی به ازای $-1\le x\le 1$ سری همگراست.

مثال ۱۵: مجموعه همگرایی سری $S=3x+3^4x^4+3^9x^9+\cdots$ کدام است؟

۱) $\{x:|x|<\frac{2}{3}\}$ ۲) $\{x:|x|\le\frac{2}{3}\}$ ۳) $\{x:|x|\le\frac{1}{3}\}$ ۴) $\{x:|x|<\frac{1}{3}\}$

پاسخ: گزینه «۴» واضح است فرم بستهٔ سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$ است. با توجه به توان x، لازم است از آزمون ریشه برای سری‌های تابعی استفاده کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|3^{n^2}x^{n^2}|}=\lim_{n\to+\infty}3^n|x|^n=\lim_{n\to+\infty}(3|x|)^n=\begin{cases}0 & ;\ |x|<\frac{1}{3}\\ 1 & ;\ |x|=\frac{1}{3}\\ +\infty & ;\ |x|>\frac{1}{3}\end{cases}$$

سری فقط برای مقادیر کوچکتر از یک، یعنی (صفر) همگراست بنابراین بازهٔ همگرایی $|x|<\frac{1}{3}$ است. اما نقاط مرزی باید بررسی شود:

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}(\frac{1}{3})^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}1\Rightarrow \text{سری واگراست}\quad،\quad x=-\frac{1}{3}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}(-\frac{1}{3})^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\Rightarrow \text{سری واگراست}$$

مثال ۱۶: سری $S=\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+-\cdots$ در فاصلهٔ $-1\le x\le 1$ چه وضعیتی دارد؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۶)

۱) واگراست. ۲) همگراست. ۳) به جز $x=1$ همگراست. ۴) به جز $x=-1$ همگراست.

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا فرم بستهٔ سری را به شکل $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x^n}{n^2})$ می‌نویسیم. حالا به راحتی شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1\Rightarrow R=1$$

بنابراین بازهٔ همگرایی $|x|<1$ می‌باشد و لازم است نقاط $x=-1$ و $x=1$ جداگانه بررسی شوند:

این سری با توجه به مطالب سری‌های متناوب همگراست.
$$x=1\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{(1)^n}{n^2}]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

این سری با توجه به مطالب P سری همگراست.
$$x=-1\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{(-1)^n}{n^2}]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

مثال ۱۷: شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}x^{2n}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا سری داده شده را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n\times 3}x^{2n}$$

با توجه به این که: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ در نتیجه داریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{9^n\times 3}}{\frac{1}{9^{n+1}\times 3}}\right|=9$$

بنابر نکته متن درسنامه (توان $2n$ برای x) شعاع همگرایی سری موردنظر $\sqrt{9}$ یعنی ۳ می‌باشد.

مثال ۱۸: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n^2} z^n$ چقدر است؟ (عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) ۱ ۲) e ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\sqrt{e}$

پاسخ : گزینه «۲» برای به‌دست آوردن شعاع همگرایی سری داده شده از فرمول $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ استفاده می‌کنیم پس داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=1^\infty$$

برای رفع ابهام $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=1^\infty$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=1^\infty=e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)} \Rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=1^\infty=e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}-1)n}=e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{-1}{n})n}=e^{-1}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

مثال ۱۹: بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-2x)^n}{3^n(n+1)}$، کدام است؟ (آبیاری و زهکشی ـ آزاد ۷۹)

۱) $1\le x<4$ ۲) $2\le x<5$ ۳) $3\le x<6$ ۴) $1<x\le 4$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n(n+1)}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}\Rightarrow R=3$$

بنابراین بازه همگرایی به صورت $-3<5-2x<3$ و یا $1<x<4$ می‌باشد که نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شوند. مثلاً برای $x=1$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-2\times 1)^n}{3^n(n+1)}$ می‌رسیم که می‌دانیم واگراست. یعنی $x=1$ جزء بازه همگرایی نیست و این یعنی گزینه (۴) جواب است. بررسی همگرایی در $x=4$ را به عنوان تمرین انجام دهید، هرچند در پاسخ به سؤال با توجه به گزینه‌ها، نیاز نیست.

مثال ۲۰: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n(Lnn)^2}$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $[-1,3]$ ۲) $[1,3]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

برای به‌دست آوردن بازه‌ی همگرایی ابتدا شعاع همگرایی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to+\infty}|\frac{\frac{1}{n(Lnn)^2}}{\frac{1}{(n+1)(Ln(n+1))^2}}|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(Ln(n+1))^2}{n(Lnn)^2}=1\Rightarrow|x-2|<1\Rightarrow -1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3$$

در نقاط روی مرز یعنی $x=1$ و $x=3$ می‌توان تحقیق کرد که سری همگراست.

مثال ۲۱: مقدار x را طوری پیدا کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n3^n}$ همگرا باشد. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$ ۲) $1\le x\le 3$ ۳) $-\frac{3}{2}<x\le\frac{3}{2}$ ۴) $1<x\le 3$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

شعاع همگرایی به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n3^n}}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\Rightarrow R=\frac{3}{2}$$

بنابراین بازه همگرایی به صورت $-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$ قطعی است و نقاط روی مرز باید جداگانه حساب شوند، دقت کنید که به ازای $x=-\frac{3}{2}$ به سری $\sum\frac{-1}{n}$ می‌رسیم که واگراست، پس گزینه‌ی (۳) جواب است.

مثال ۲۲: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۱)

۱) $[2,5)$ ۲) $(1,5]$ ۳) $[1,5)$ ۴) $(2,5]$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. ابتدا شعاع همگرایی را به‌دست می‌آوریم و پس از آن بازه‌ی همگرایی را محاسبه می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{n2^{n+1}}{n2^n}=2$$

$$|x-3|<2\Rightarrow -2<x-3<2\Rightarrow 1<x<5$$

همچنین به ازای $x=5$ سری واگرا و به ازای $x=2$ سری همگراست، پس $[1,5)$ بازه‌ی همگرایی می‌باشد.

مثال ۲۳: شعاع همگرایی سری توانی به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}z^n$ برابر چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) e^{-1} ۲) ۱ ۳) e ۴) صفر

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

مثال ۲۴: بازه‌ی همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\{0\}$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

پاسخ : گزینه «۴»

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\infty$$

پس بازه همگرایی $(-\infty,+\infty)$ می‌باشد و شعاع همگرایی سری به دلیل وجود x^{2n+1}، برابر با $\sqrt{R}$ است که باز هم ∞ است.

مثال ۲۵: فاصله‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x)^n}{n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۲) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ۳) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۴) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

پاسخ : گزینه «۳» از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(\sin x)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\sin x}{n+1}\right|=|\sin x|$$

برای این‌که سری همگرا باشد، لازم است $|\sin x|<1$ و بنابراین $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ باشد و در نقطه مرزی $x=\frac{\pi}{2}$ سری به $\sum\frac{1}{n}$ تبدیل می‌شود کـه واگراسـت و در نقطه مرزی $x=\frac{-\pi}{2}$ سری به $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ تبدیل می‌شود که همگراست.

مثال ۲۶: بازه همگرایی سری $a>b>0$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $(-a,a)$ ۲) $[-a,a)$ ۳) $(-b,b)$ ۴) $[-b,b)$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به قوانین رشد داریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+b^n}}{\frac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a$$

$$|x|<a\Rightarrow -a<x<a$$

به ازای $x=a$ و $x=-a$ سری به ترتیب به‌صورت $\sum\frac{a^n}{a^n+b^n}$ و $\sum\frac{(-a)^n}{a^n+b^n}$ در می‌آید که هر دو سری واگرا می‌باشند، زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارند.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=1\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-a)^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\text{حد موجود نیست}$$

مثال ۲۷: در سری $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$ ، فاصله همگرایی کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $(-e,e)$ ۴) $(-e,0)$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{e^n}}=\frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e\Rightarrow \text{فاصله همگرایی}=(-e,e)$$

(در محاسبات فوق از هم‌ارزی $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ استفاده کرده‌ایم).

مثال ۲۸: بازه‌ی همگرایی سری $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Lnn)^2}(x-1)^n$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $(0,2)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(Ln(n+1))^2}}{\frac{1}{(Lnn)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(Lnn)^2}{(Ln(n+1))^2}=1\Rightarrow R=1\Rightarrow|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2$$

در نقطه مرزی $x=0$ ، سری به‌صورت $\sum\frac{(-1)^n}{(Lnn)^2}$ در می‌آید که همگراست و در $x=2$ ، سری به‌صورت $\sum\frac{1}{(Lnn)^2}$ در می‌آید که واگراست.

مثال ۲۹: کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد بازه همگرایی سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n!}$ صحیح است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۴)

۱) بازه همگرایی سری فوق بازه $(-1,1)$ است.
۲) بازه همگرایی سری فوق بازه $(0,1)$ است.
۳) به ازای همه مقادیر x ، سری واگراست. $(x\neq0)$
۴) به ازای همه مقادیر x ، سری همگراست. $(x\neq0)$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به نمایی بودن جمله‌ی عمومی سری بهتر است از آزمون ریشه استفاده کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x|^{n!}}=\lim_{n\to+\infty}|x|^{\frac{n!}{n}}=\lim_{n\to+\infty}|x|^{(n-1)!}$$

می‌دانیم که $(n-1)!$ به $+\infty$ میل می‌کند؛ پس با توجه به مقدار $|x|$ وضعیت‌های مختلفی داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}|x|^{(n-1)!}=\begin{cases}0 & ;\ |x|<1\\ +\infty & ;\ |x|>1\\ 1 & ;\ |x|=1\end{cases}$$

اگر مقدار حد $\sqrt[n]{|a_n|}$ کوچکتر از یک باشد، سری همگراست. همان طور که می‌بینید؛ مقدار حد بـه ازای $|x|<1$ کـوچکتر از یـک مـی‌شـود و بنـابراین سـری در بازه‌ی $(-1,1)$ حتماً همگراست. البته وضعیت سری بر روی مرز، یعنی در نقاط $x=+1$ و $x=-1$ باید بررسی شود که با توجه به گزینه‌ها این‌کار لازم نیست. اما بررسی این نقاط هم کار سختی نیست؛ چون به ازای $x=\pm1$ به سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}1^{n!}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n!}$ می‌رسیم که حد جمله‌ی عمومی آن‌ها مخالف صـفر اسـت، لـذا سری در این نقاط واگراست.

مثال ۳۰: بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $[-5,-1)$　۲) $(-5,-1)$　۳) $[-5,-1]$　۴) $(-5,-1]$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$$

بنابراین بازه همگرایی به صورت $|x+3|<2$ و به عبارت دیگر به صورت $-5<x<-1$ است که نقاط روی مرز باید جداگانه حساب شوند:

در $x=-5$ سری به‌صورت $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ در می‌آید که همگراست و در $x=-1$ سری به‌صورت $\sum\frac{1}{n+1}$ در می‌آید که واگراست.

مثال ۳۱: بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ عبارتست از: (مکانیک ـ سراسری ۸۵ ـ ریاضی سراسری ۸۱)

۱) $(-\sqrt{e},\sqrt{e})$　۲) $(-e,e)$　۳) $[-e,e]$　۴) $[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

پاسخ : گزینه «۱» طبق آزمون ریشه، برای همگرایی سری $\sum a_n$، کافی است $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x^2}{e}<1\Rightarrow -\sqrt{e}<x<\sqrt{e}$$

در نقاط مرزی $x=\sqrt{e}$ و $x=-\sqrt{e}$ سری واگرا خواهد بود.

مثال ۳۲: اگر r شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}x^n$، S شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(x-1)^n$ و t شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ باشد، گزینه صحیح کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۵)

۱) $t<r<s$　۲) $t<s<r$　۳) $s<r<t$　۴) $r<s<t$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم برای به‌دست آوردن شعاع همگرایی (R) می‌توانیم از رابطه‌ی $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ استفاده کنیم پس داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}x^n\Rightarrow a_n=\frac{n+1}{n-1}\Rightarrow r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{n-1}}{\frac{n+2}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\right|=1$$

$$\sum\frac{3^n}{n!}(x-1)^n\Rightarrow a_n=\frac{3^n}{n!}\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n(n+1)!}{3^{n+1}(n)!}\right|\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3}\right|=\infty$$

$$\sum n!x^n\Rightarrow a_n=n!\Rightarrow t=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0\quad\Rightarrow r=1\ ,\ s=\infty\ ,\ t=0\Rightarrow t<r<s$$

مثال ۳۳: بازه‌ی همگرایی کدام سری شامل بازه‌های همگرایی سه سری دیگر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۵)

۱) $f_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ ۲) $f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ ۳) $f_4(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ ۴) $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

پاسخ : گزینه «۴» بازه‌ی همگرایی هر گزینه را به‌دست می‌آوریم:

بررسی گزینه (۱):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=1\Rightarrow |x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$$

سری فوق به ازای $x=0$ سری همساز متناوب خواهد شد که می‌دانیم همگراست اما به ازای $x=2$ سری همساز خواهد شد که می‌دانیم واگراست پس بازه‌ی همگرایی به‌صورت $[0,2)$ خواهد بود.

بررسی گزینه (۲):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=1\Rightarrow |x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

سری فوق به ازای $x=\pm 1$ نیز همگراست پس بازه‌ی همگرایی به‌صورت $[-1,1]$ خواهد بود.

بررسی گزینه (۳):

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0$$

سری فوق فقط به ازای $x=0$ همگرا خواهد بود.

بررسی گزینه (۴): سری روبه‌رو هم به ازای $x\in(-\infty,+\infty)$ همگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

با توجه به مطالب فوق بازه‌ی همگرایی سری گزینه‌ی ۴ دربر گیرنده‌ی بازه‌ی همگرایی سه سری دیگر است.

مثال ۳۴: بازه (فاصله) همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $[-1,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,1]$ ۴) $[-1,1]$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}$ پس داریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{2n^2}=1\Rightarrow |x|<1\Rightarrow -1<x<1$$

به ازای $x=1$، سری به‌صورت روبه‌رو در می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}\Rightarrow \text{همگراست}$$

و به ازای $x=-1$، سری به‌صورت روبه‌رو در می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})(-1)^n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2}\Rightarrow \text{همگراست}$$

البته اصلاً لازم نبود بازه‌ی همگرایی را حساب کنیم، چون گزینه‌ها خودشان گویای این مطلب بودند.

مثال ۳۵: فاصله‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n(n+1)}}{n^n}$، کدام است؟ (پزشکی ـ آزاد ۸۵)

۱) $|x|>1$ ۲) $|x|\geq\sqrt{2}$ ۳) $|x|\leq 1$ ۴) $|x|\leq\sqrt{2}$

پاسخ : گزینه «۳» چون سری توانی نیست، بنابراین از روش گفته شده برای سری‌های تابعی و آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n(n+1)}}{|n^n|}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x^{n+1})^n}{n^n}\right|}=\frac{|x|^{n+1}}{n}=\begin{cases}+\infty & ;\ |x|>1\\ 0 & ;\ |x|\leq 1\end{cases}$$

می‌دانیم اگر حد کمتر از یک باشد، سری همگراست، بنابراین برای $|x|\leq 1$، سری همگراست.

مثال ۳۶: اگر $a_n = \frac{n!n!}{(2n)!}$، آن‌گاه شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۶)

۱) $R=1$ ۲) $R=2$ ۳) $R=4$ ۴) $R=\infty$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^{2n}}{(\frac{2n}{e})^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R=4$$

مثال ۳۷: به ازای چه مقادیری از x، سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin(\frac{x}{3^{n-1}})$ همگراست؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۶)

۱) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ۲) $-\infty < x < +\infty$ ۳) $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ۴) $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» وقتی $n \to +\infty$، آن‌گاه $\frac{x}{3^{n-1}} \to 0$ بنابراین جمله‌ی عمومی سری هم‌ارز با $\frac{x}{3^{n-1}} \times 2^{n-1}$ است، یعنی سری مقابل را داریم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x(\frac{2}{3})^{n-1}$$

سری فوق یک سری هندسی و به ازای تمام مقادیر x همگراست.

مثال ۳۸: دامنه تابع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3}(x-2)^n$، کدام است؟ (مهندسی پزشکی ـ آزاد ۸۶)

۱) $(1,3]$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $[1,3]$ ۴) $(-1,1)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}Ln(n+2)}{(n+2)^3}\right|} \sim \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{Lnn}{n^3}} = 1 \Rightarrow R=1$$

بنابراین بازه‌ی همگرایی به صورت $-1 < x-2 < 1$ و یا به صورت $1 < x < 3$ می‌باشد که نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شود.

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3}(1-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\times(-1)^{2n}\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3}$$

سری فوق همان سری $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^3}$ می‌باشد و طبق نکته می‌دانیم سری‌هایی به فرم $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Lnn}{n^\alpha}$ به ازای $\alpha > 1$ همگرا و به ازای $\alpha \le 1$ واگرا هستند، پس این سری همگراست. همچنین $f(3) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}Ln(n+2)}{(n+2)^3}$ همگراست چون دنباله‌ی $\frac{Ln(n+2)}{(n+2)^3}$ نزولی و همگرا به صفر است.

مثال ۳۹: شعاع همگرایی سری $a \neq 0$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(\sin(na))x^n$ کدام است؟ (a یک عدد گویای ثابت است.) (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) به مقدار a بستگی دارد.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» با استفاده از فرمول $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin(na)} = \lim_{n\to\infty}(\sin(na))^{\frac{1}{n}} = (\text{عدد})^{\frac{1}{\infty}} = (\text{عدد})^{0} = 1 \Rightarrow R=1$$

توجه شود که $\sin(na)$ همواره عددی بین ۱− و ۱ خواهد شد و چون $a \neq 0$ است هیچگاه $\sin(na)$ برابر صفر نمی‌شود که به حالت مبهم (0^0) برسیم.

مثال ۴۰: اگر شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر R باشد، شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{1}{eR^2}$ ۲) R^2 ۳) $\frac{1}{e}R^2$ ۴) eR^2

پاسخ : گزینه «۴» چون شعاع همگرایی سری $\sum a_n x^n$ برابر R است، پس $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{R}$ حال به محاسبه شعاع همگرایی سری $\sum \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ با کمک آزمون ریشه می‌پردازیم، در این‌صورت:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n} a_n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n} a_n^2} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{R^2} \Rightarrow R' = eR^2$$

مثال ۴۱: کدام عبارت در ارتباط با سری $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ صحیح است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) واگراست. ۲) برای تمام مقادیر x همگراست. ۳) فقط در نقطه $x = 0$ همگراست. ۴) فقط در نقطه $x = 1$ همگراست.

پاسخ : گزینه «۳» طبق آزمون ریشه برای این‌که سری همگرا باشد، لازم است $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ باشد، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! x^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{e})^n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e} x$$

واضح است که حد فوق برابر ∞ می‌باشد، به جزء در $x = 0$.

مثال ۴۲: سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ در کدام فاصله همگراست؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲) $|x| < 2$ ۳) $|x| < 1$ ۴) $0 < x < 2$

پاسخ : گزینه «۲» برای این‌که سری همگرا باشد، طبق آزمون ریشه لازم است $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ باشد.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\frac{n}{e})^{2n} x^{2n}}{(\frac{2n}{e})^{2n}}} = \frac{x^2}{4} < 1 \Rightarrow |x| < 2$$

مثال ۴۳: بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+n+1}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۸)

۱) $[1, 3]$ ۲) $[-1, 1]$ ۳) $(1, 3)$ ۴) $(-1, 1)$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. سری مزبور دارای شعاع همگرایی مقابل است: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+n+1}} \sim \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow R = 1$

بنابراین بازه همگرایی به صورت $-1 < x-2 < 1$ و یا به صورت $1 < x < 3$ است که نقاط روی مرز باید جداگانه بررسی شود.

حالا نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را به طور مجزا بررسی می‌کنیم:

$x = 1 \Rightarrow$ سری $= \sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$: سری همگرا ، $x = 3 \Rightarrow$ سری $= \sum \frac{1}{n^2+n+1}$: سری همگرا

البته با بررسی یکی از این دو نقطه نیز می‌توان به جواب رسید!

مثال ۴۴: فاصله‌ی همگرایی سری $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \cdots$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ آزاد ۸۸)

۱) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ۲) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

به راحتی مشخص است، سری را می‌توان به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 2^n x^n$ نوشت، پس داریم $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2$ در نتیجه $R = \frac{1}{2}$ است و ناحیه‌ی

همگرایی $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ خواهد بود. حالا باید شرایط سری در نقاط $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ بررسی شود:

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2\times\frac{1}{2})^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\times 1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

سری فوق یک سری متناوب است و هر دو شرط آزمون لایب‌نیتز برای آن برقرار است و لذا همگراست.

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}[2\times(-\frac{1}{2})]^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\times(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\times(-1)^{2n}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

این سری با توجه به P ـ سری، واگراست. بنابراین بازه‌ی همگرایی $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ است.

مثال ۴۵: وسیع‌ترین بازه همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $(0,\infty)$ ۲) $[1,\infty)$ ۳) $(1,\infty)$ ۴) $[a,\infty)$ که $0<a$

پاسخ : گزینه «۳» به ازای $x=1$ سری به‌صورت $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ در می‌آید که یک سری واگراست زیرا به ازای nهای بزرگ $\frac{\log n}{n}>\frac{1}{n}$ و چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس سری موردنظر نیز واگراست. به ازای $x>1$ سری همگرا خواهد بود، زیرا:

$$x>1 \Rightarrow \text{سری}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{(x+1)/2}}$$

و چون سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{(x+1)/2}}$ همگراست (توجه کنید که توان n بزرگتر از یک می‌باشد)، پس سری موردنظر نیز همگراست.

مثال ۴۶: بازه همگرایی سری $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m!)^2}{(2m)!}x^{2m}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $(-2,2)$ ۲) $[-2,2)$ ۳) $[-4,4)$ ۴) $(-4,4)$

پاسخ : گزینه «۱» قرار می‌دهیم $a_m=\frac{(m!)^2}{(2m)!}x^{2m}$، در این‌صورت طبق آزمون ریشه برای همگرایی این سری لازم است $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{a_m}<1$ باشد، بنابراین:

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{(m!)^2}{(2m)!}x^{2m}} \xrightarrow{\text{فرمول استرلینگ}} \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{(\frac{m}{e})^{2m}}{(\frac{2m}{e})^{2m}}x^{2m}}=\lim_{m\to\infty}(\frac{x^2}{4})=\frac{x^2}{4}$$

برای این‌که حد فوق کمتر از یک باشد، لازم است $\frac{x^2}{4}<1$، که از آن نتیجه می‌شود $-2<x<2$. توجه کنید که سری فوق در نقاط $x=2, x=-2$ به‌صورت $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m!)^2}{(2m)!}2^{2m}$ درمی‌آید که یک سری واگراست.

مثال ۴۷: بازه همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{e^k k^2}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (معدن ـ سراسری ۸۹)

۱) $[-e,e]$ ۲) $(-e,e)$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-2,2)$

پاسخ : گزینه «۱» شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ برابر $R=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a_k=\frac{1}{e^k k^2} \rightarrow R=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{e^k k^2}}{\frac{1}{e^{k+1}(k+1)^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{k+1}(k+1)^2}{e^k k^2}=e$$

لذا بازه همگرایی سری مذکور $-e<x<e$ می‌باشد. حال همگرایی سری را در نقاط $x=e$ و $x=-e$ بررسی می‌کنیم.

$$x=e \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k}{e^k k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[p=2>1]{\text{آزمون P سری}}\text{همگراست}\ ,\quad x=-e \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-e)^k}{e^k k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^k}{e^k k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\xrightarrow{\text{سری متناوب}}\text{همگراست}$$

در نتیجه بازه همگرایی به‌صورت $[-e,e]$ می‌باشد.

مثال ۴۸: بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{20n}}{n^{100}}$ برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۹۰)

۱) $[-3,-2]$ ۲) $[-3,-1]$ ۳) $(-3,1]$ ۴) $[-2,-1)$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

طبق آزمون کوشی (ریشه) برای همگرایی سری باید: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x+2|^{20n}}{n^{100}}}<1 \Rightarrow \frac{|x+2|^{20}}{1}<1 \Rightarrow |x+2|<1 \Rightarrow -3<x<-1$

به ازای نقاط ابتدایی و انتهایی بازه یعنی $x=-1$ و $x=-3$ سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{100}}$ خواهد شد که همگراست (P سری به ازای $P=100$).

بنابراین ناحیه همگرایی به‌صورت بازه $[-3,-1]$ می‌باشد.

مثال ۴۹: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۰)

۱) $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ ۲) $[-3,3]$ ۳) $[-4,-1]$ ۴) $[1,4]$

پاسخ : گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا شعاع همگرایی سری را حساب می‌کنیم: $a_n=\frac{1}{(n^2+1)3^n} \Rightarrow \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n^2+1)3^n}}=\frac{1}{3} \Rightarrow R=3$

بازه همگرایی: $|2x+5|\le 3 \to |x+\frac{5}{2}|\le\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}\le x+\frac{5}{2}\le\frac{3}{2} \Rightarrow -4\le x\le -1$

که نقاط ابتدا و انتهای بازه باید به‌صورت جداگانه بررسی شوند که البته با توجه به گزینه‌ها نیازی نیست!

مثال ۵۰: بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{nLnn}$ عبارت است از: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $[-1,0)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $[-2,0)$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

برای به‌دست آوردن بازه همگرایی سری توانی داده شده، ابتدا شعاع همگرایی را به‌دست می‌آوریم، لذا داریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{nLnn}}{\frac{1}{(n+1)Ln(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)Ln(n+1)}{nLnn}=1$$

برای بازه همگرایی سری توانی داریم: بازه همگرایی: $|x-x_0|<R \Rightarrow |x+1|<1 \Rightarrow -1<x+1<1 \Rightarrow -2<x<0$

و برای نقاط ابتدایی و انتهایی بازه با قرار دادن نقاط در سری توانی و بررسی همگرایی سری داریم:

$x=0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Rightarrow$ سری واگراست. , $x=-2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nLnn}$ سری متناوب همگراست.

بنابراین بازه همگرایی سری فوق $[-2,0)$ است.

درسنامه۹: سری‌های تیلور و مک‌لورن

مثال۱: در بسط مک‌لورن تابع $\sin(1+x)$، ضریب x^3 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{6}\cos 1$ ۲) $\frac{1}{6}\cos 1$ ۳) $-\frac{1}{2}\sin$ ۴) $\frac{1}{2}\sin 1$

پاسخ: گزینه «۱» ضریب x^3، برابر $\frac{f'''(0)}{3!}$ است. $f(x)=\sin(1+x) \Rightarrow f'(x)=\cos(1+x) \Rightarrow f''(x)=-\sin(1+x) \Rightarrow f'''(x)=-\cos(1+x)$

بنابراین ضریب x^3، برابر $\frac{-\cos 1}{6}$ می‌باشد.

مثال۲: در نمایش سری تیلور تابع $\cos^2 x$ حول نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{8}$، ضریب $(x-\frac{\pi}{8})^3$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{\sqrt{8}}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینه «۴» ضریب $(x-\frac{\pi}{8})^3$ برابر $\frac{f'''(\frac{\pi}{8})}{3!}$ است. بنابراین داریم:

$$f(x)=\cos^2 x \Rightarrow f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x \Rightarrow f''(x)=-2\cos 2x \Rightarrow f'''(x)=4\sin 2x$$

در نقطه $\frac{\pi}{8}$، $f'''(x)$ برابر $2\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید و ضریب بسط تیلور برابر $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

مثال۳: فرض کنید: $f(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2}+\cdots$ سری مک‌لورن f باشد، به ازای چه مقادیری از a_1 و a_2 نقطه‌ی $x=0$ برای f یک نقطه ماکزیمم است؟

۱) $a_2=-2\ ,\ a_1=1$ ۲) $a_2=0\ ,\ a_1=0$ ۳) $a_2=-2\ ,\ a_1=0$ ۴) $a_2=0\ ,\ a_1=-1$

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ به‌صورت روبه‌روست: $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+\cdots$

چون $x=0$ قرار است یک نقطه ماکزیمم برای تابع باشد، لذا باید $f'(0)=0$ و $f''(0)<0$ باشد پس باید $a_1=0$ و $a_2<0$ باشد.

مثال۴: سومین جمله بسط تیلور برای $f(x)=\cos 2x$ برحسب توان‌های $x-\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $2(x-\frac{\pi}{2})^2$ ۳) $-2(x-\frac{\pi}{2})^2$ ۴) $\frac{4(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}$

پاسخ: گزینه «۲» بسط تیلور حول نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ برای تابع $f(x)=\cos 2x$ برابر است با :

$$\cos 2x=\cos(2\times\frac{\pi}{2})+\frac{x-\frac{\pi}{2}}{1!}f'(\frac{\pi}{2})+\underbrace{\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}f''(\frac{\pi}{2})}_{\text{جمله سوم}}+\cdots$$

$$f(x)=\cos 2x \Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x \Rightarrow f''(x)=-4\cos 2x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{2})=-4\cos\pi=+4 \Rightarrow \text{جمله سوم}=\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}\times 4=2(x-\frac{\pi}{2})^2$$

مثال۵: ضریب چهارمین جمله بسط مک‌لورن تابع $f(x)=Ln(1+2x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) -4 ۴) 4

پاسخ : گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده که باید در بسط $Ln(1+x)$، به جای تمام x ها، $2x$ قرار دهیم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \Rightarrow Ln(1+2x)=(2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\cdots \Rightarrow \text{ضریب جمله چهارم}=-\frac{2^4}{4}=-4$$

مثال ۶: در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{Ln(۱+x)}{x}$ برای $|x|<۱$ برحسب قوای x، ضریب $x^۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بسط مک‌لورن تابع $Ln(۱+x)$ داریم:

$$\frac{Ln(۱+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}}{x}=۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^۲}{۳}-\frac{x^۳}{۴}+\cdots \Rightarrow x^۳ \text{ ضریب } =-\frac{۱}{۴}$$

مثال ۷: یک جواب تقریبی برای x ازمعادله $\frac{e^x-۱}{x}=\frac{۲۷۸۵}{۲۷۸۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۳۹۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱۳۹۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۳۹۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳۹۴}$

پاسخ: گزینه «۲» سمت راست تساوی فوق عددی نزدیک به یک است، یعنی به طور تقریبی داریم: $e^x-۱\sim x$، و می‌دانیم این هم‌ارزی در xهای نزدیک به صفر حاصل می‌شود، پس می‌توانیم بسط مک‌لورن e^x را بنویسیم:

$$\frac{e^x-۱}{x}\sim\frac{(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots)-۱}{x}=\frac{x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots}{x}\sim ۱+\frac{x}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$۱+\frac{x}{۲}=۱+\frac{۱}{۲۷۸۴}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲۷۸۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۳۹۲}$$

مثال ۸: اگر $\frac{tgx}{x}=\frac{۱۲۰۱}{۱۲۰۰}$، آن‌گاه x برحسب رادیان، کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲۰۱}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که عدد $\frac{۱۲۰۱}{۱۲۰۰}$ تقریباً نزدیک به عدد یک است، بنابراین $\frac{tgx}{x}$ هم حدوداً یک است و این یعنی x نزدیک به صفر است.

لذا می‌توانیم بسط مک‌لورن tgx را بنویسیم:

$$\frac{tgx}{x}=\frac{x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots}{x}=۱+\frac{x^۲}{۳}+\cdots$$

بنابراین مقدار تقریبی x به‌صورت مقابل حساب می‌شود:

$$۱+\frac{x^۲}{۳}=\frac{۱۲۰۱}{۱۲۰۰}\Rightarrow\frac{x^۲}{۳}=\frac{۱۲۰۱}{۱۲۰۰}-۱\Rightarrow\frac{x^۲}{۳}=\frac{۱}{۱۲۰۰}\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴۰۰}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۰}$$

مثال ۹: در بسط مک‌لورن تابع $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸+x}}$، ضریب $x^۲$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۵۷۶}$ ۲) $\frac{-۱}{۵۷۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۲۸۸}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم بسط مک‌لورن $(۱+x)^k$ به‌صورت مقابل است:

$$(۱+x)^k=۱+kx+\frac{k(k-۱)}{۲}x^۲+\cdots$$

بنابراین بسط مک‌لورن $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸+x}}$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸+x}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{(۱+\frac{x}{۸})^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{x}{۸})^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}[۱+(\frac{-۱}{۳})(\frac{x}{۸})+\frac{(\frac{-۱}{۳})(\frac{-۴}{۳})}{۲}(\frac{x}{۸})^۲+\cdots]=\frac{۱}{۲}-\frac{x}{۴۸}+\frac{x^۲}{۵۷۶}-\cdots$$

مثال ۱۰: بسط تیلور تابع $f(x)=xe^x+\frac{1}{e}$ حول نقطه $x=-1$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)!}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e^n}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e}(n-1)$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!e}(n+1)$

پاسخ: گزینه «۳» برای این که بتوانیم از بسط مک‌لورن استفاده کنیم، تغییر متغیر می‌دهیم: $x+1=t \Rightarrow x=t-1$

$$f(x)=xe^x+\frac{1}{e}=(t-1)e^{t-1}+\frac{1}{e}=\frac{t-1}{e}e^t+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}((t-1)e^t+1)$$

$$=\frac{1}{e}(te^t-e^t+1)=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}+1)=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!})=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!})$$

$$=\frac{1}{e}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}(1-\frac{1}{n+1}))=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}\frac{(n-1)}{n}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(n-1)\xlongequal{t=x+1}\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}(n-1)$$

مثال ۱۱: در بسط مک‌لورن $f(x)=Ln(\cos x)$، ضریب x^6 برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{45}$
۲) $\frac{1}{45}$
۳) $-\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه «۱» چون $f'(x)=-tgx$ است، پس بسط مک‌لورن $-tgx$ را نوشته و از آن انتگرال می‌گیریم:

$$-tgx=-x+\frac{-x^3}{3}+\frac{-2x^5}{15}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}Ln(\cos x)=\frac{-x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$$

یعنی ضریب x^6 برابر $\frac{-1}{45}$ است. البته اگر راه‌حل فوق به ذهنتان نرسید، می‌توانید $f(x)$ را به‌صورت $Ln[(1-\frac{x^2}{2})]$ بنویسید، به راحتی از بسط $Ln(1-u)$ استفاده کنید. که البته راه‌حل سخت‌تر نیازمند دقت بیشتر است.

مثال ۱۲: حاصل $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$، کدام است؟

۱) e
۲) e^{-2}
۳) $\frac{1}{e}$
۴) e^2

پاسخ: گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده! دقت کنید؛ بسط مک‌لورن e^x، به‌صورت $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ است. اگر در طرفین این تساوی به جای x، عدد ۱- قرار دهیم، تساوی مقابل را داریم:

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$$

مثال ۱۳: اگر $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$، $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است؟

۱) 0
۲) $Ln2$
۳) $\frac{\pi}{4}$
۴) موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک لورن تابع $y=Arctgx$ به‌صورت مقابل است:

$$Arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

اگر در بسط فوق به جای x مقدار یک را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=Arctg1=\frac{\pi}{4}$$

تحلیل دیگر: می‌توانیم طور دیگری هم به سؤال جواب بدهیم؛ در واقع می‌خواهیم از سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ استفاده کنیم (اینجوری حتی اگه بسط Arctgx را هم ندانیم خطری تهدیدمان نمی‌کند!) اولاً توجه کنید که سری داده شده در صورت سؤال را می‌توان به صورت $S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$ نوشت (دقت کنید حاصل انتگرال برابر با $\frac{1}{2k+1}$ است) حالا می‌توان نوشت:

$$S=\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\right]dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[Arctgx\right]_0^1=Arctg1=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۴: حاصل سری $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)}$ کدام است؟ [$(2n-1)!!$ یعنی $1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$ و $(2n)!!$ یعنی $2\times4\times6\times\cdots\times2n$]

۱) $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}-1$

پاسخ: گزینه «۳» طبق توضیحات صورت سؤال و اطلاعاتی که از قبل داریم، می‌دانیم که: $(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times(2n)=2^n\times n!$

پس به دنبال تابعی هستیم که در بسط مک‌لورن آن، در مخرج کسر $2^n\times n!$ ظاهر می‌شود. این تابع $\operatorname{Arcsin} x$ است:

$$\operatorname{Arcsin} x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\quad,\quad |x|<1$$

در این سری به جای x، عدد $\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}\Rightarrow\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)}$$

توضیح: البته استفاده از نماد $(2n-1)!!$ به جای $1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$، و یا $(2n)!!$ به جای $2\times4\times\cdots\times2n$ مرسوم نیست، فقط به این دلیل یک مثال با این ظاهر ارائه شد که احیاناً ۱ درصد، طراحان چنین کاری کردند، شما شوکه نشوید!

مثال ۱۵: حاصل سری $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Ln}2-\frac{1}{3}$ ۲) $\operatorname{Ln}2-\frac{1}{4}$ ۳) $\operatorname{Ln}2$ ۴) $2\operatorname{Ln}2-1$

پاسخ: گزینه «۴» سری داده شده در این تست در واقع تقریباً همان سری سؤال قبل است. اگر از قاعده‌ی لغزاندن حدود استفاده کنیم، داریم:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times(-1)^2}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این سری همان سری مثال قبل می‌باشد که فقط ضریب ۲ را ندارد.

مثال ۱۶: حاصل سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ چقدر است؟

۱) $\operatorname{Ln}3$ ۲) $\operatorname{Ln}\sqrt{3}$ ۳) $\operatorname{Ln}2$ ۴) $\operatorname{Ln}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به بسط $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$، داریم: $1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}3=\operatorname{Ln}\sqrt{3}$$

مثال ۱۷: حاصل $S=1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\cdots$، کدام است؟

۱) e ۲) e^2-4 ۳) $2e-3$ ۴) $\frac{e^2+1}{e}$

پاسخ: گزینه «۱» واقعاً کی فکرشُ میکنه حاصل این سری هم e بشه؟! اما به عملیات ساده و البته زیبای زیر دقت کنید:

$$S=1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\ldots=1+\frac{2+1}{2!}+\frac{4+1}{4!}+\frac{6+1}{6!}+\cdots=1+\left(\frac{2}{2!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{4}{4!}+\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{6}{6!}+\frac{1}{6!}\right)+\cdots$$

می‌دانیم $\frac{1}{1!}=\frac{2}{1!\times2}=\frac{2}{2!}$ و یا مثلاً $\frac{1}{3!}=\frac{4}{3!\times4}=\frac{4}{4!}$، پس داریم:

$$S=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=\mathbf{e}$$

مثال ۱۸: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n!}$، کدام است؟

۱) e ۲) $1/5e$ ۳) $2e$ ۴) $2/5e$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، بنابراین سری را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2(n-1)!n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2(n-1)!}$

خب حالا به راحتی می‌توانیم، به سؤال جواب بدهیم، همان‌طور که می‌دانیم باید در صورت کسر $(n-1)$ ایجاد کنیم:

$$\text{حاصل سری}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+2}{2(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{2(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

تکلیف سری دوم که مشخص است، (برابر با e است)، بنابراین سراغ تعیین تکلیف سری اول می‌رویم:

$$\text{حاصل سری اول}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{2(n-2)!(n-1)}\overset{(*)}{=\!=}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2(n-2)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}}\text{حاصل سری اول}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{2}e$$

بنابراین حاصل سری برابر با $e+\frac{1}{2}e=\frac{3}{2}e$ است.

توضیح در مورد قسمت $(*)$: ممکن است برای شما این سؤال پیش بیاید چرا در قسمت $(*)$ حد پایین سیگما تغییر کرد. جواب این است که وقتی در مرحله‌ی قبل عبارت «$n-1$» از صورت و مخرج ساده شد، حتماً باید شرط $n\neq 1$ لحاظ شود.

مثال ۱۹ (سخت): حاصل $S=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{3\times 7}+\frac{1}{4\times 9}+\cdots$، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $3-2\text{Ln}3$ ۲) $2-\text{Ln}3$ ۳) $2-\text{Ln}2$ ۴) $3-\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۳» به راحتی می‌توانیم جمله‌ی عمومی سری را حدس بزنیم:

$$a_n=\frac{1}{n(2n+1)}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$$

حالا باید سری را به دو کسر تفکیک کنیم:

$$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{2n+1}$$

واضح است $A=\frac{1}{2n+1}\Big|_{n=0}$ و $B=\frac{1}{n}\Big|_{n=-\frac{1}{2}}$ است. به عبارت دیگر $A=\frac{1}{2\times 0+1}=1$ و $B=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$، پس داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1})$

حاصل این سری را نمی‌توان با قاعده‌ی تلسکوپی و یا قاعده‌های دیگر گفته شده به‌دست آورد، بنابراین جملات آن را می‌نویسیم.

$$S=(\frac{1}{1}-\frac{2}{2\times 1+1})+(\frac{1}{2}-\frac{2}{2\times 2+1})+(\frac{1}{3}-\frac{2}{2\times 3+1})+\cdots=(1-\frac{2}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{2}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{2}{7})+\cdots$$

حالا جملات مثبت و منفی را از هم جدا می‌کنیم:

$$S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots)-2(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots)$$

به غیر از دو جمله‌ی اول در پرانتز اول، بقیه جملات پرانتز اول با جملات پرانتز دوم یکسان هستند و البته یک ۲- نیز در آن‌ها ضرب شده، پس داریم:

$$S=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+-\cdots$$

برای این که از عبارت فوق $\text{Ln}2$ را استخراج کنیم، باید علامت‌ها از جمله‌ی دوم به بعد تغییر کند (مثبت‌ها، به منفی و منفی‌ها به مثبت تبدیل شود) پس عدد ۱ را به‌صورت ۱−۲ می‌نویسیم و داریم:

$$S=2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+-\cdots\xrightarrow{\text{از علامت منفی فاکتور می‌گیریم}}S=2-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\cdots)=\mathbf{2-Ln2}$$

مثال ۲۰ (سخت): مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$ کدام است؟

۱) $18-12\text{Ln}2$ ۲) $12-18\text{Ln}2$ ۳) $18-24\text{Ln}2$ ۴) $10-12\text{Ln}2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یک سؤال بسیار سخت برای دانشجویان مشتاق و برتر! ابتدا با استفاده از فرمول‌های گفته شده، مخرج کسر را بازنویسی می‌کنیم؛

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

در این مرحله لازم است کسر را تفکیک کنیم:

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{2n+1}$$

$$A=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\Big|_{n=0}=1\ ,\ B=\frac{1}{n(2n+1)}\Big|_{n=-1}=1\ ,\ C=\frac{1}{n(n+1)}\Big|_{n=-\frac{1}{2}}=-4$$

بنابراین سری به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S=6\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1})=6\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{2}{n+1}-\frac{4}{2n+1})]=6\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{f_{n+1}})+6\times2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{2n+1})$$

برای این که جملات زوج و فرد را در کنار هم داشته باشیم، صورت و مخرج کسر اول در سری دوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow S=6\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{f_n})+12\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n+2}-\frac{2}{2n+1})=S_1+S_2$$

سری اول یک سری تلسکوپی است و حاصل آن برابر با ۶ $S_1=6(\frac{1}{1}-0)=6$ می‌شود. اما حاصل سری دوم را می‌توانیم با نوشتن جملات آن مشخص کنیم.

$$\text{حاصل سری دوم}=S_2=12\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n+2}-\frac{2}{2n+1})=24\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=24[(\frac{1}{2\times1+2}-\frac{1}{2\times1+1})+(\frac{1}{2\times2+2}-\frac{1}{2\times2+1})+(\frac{1}{2\times3+2}-\frac{1}{2\times3+1})+\cdots]=24[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{7}+-\cdots]$$

عبارت داخل کروشه، همان بسط «$-\text{Ln}2$» می‌باشد، که البته چند جمله از آن غایب هستند! برای درک بهتر بسط $\text{Ln}2$ را می‌نویسیم:

$$\text{Ln}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\cdots\ \Rightarrow -\text{Ln}2=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+-\cdots$$

اعداد $\frac{1}{2}$ و ۱- را از سمت راست به سمت چپ انتقال می‌دهیم:

$$\Rightarrow -\text{Ln}2+1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots$$

همان‌طور که می‌بینید سمت راست عبارت فوق، همان عبارت داخل کروشه است، پس داریم:

$$S_2=24[-\text{Ln}2+1-\frac{1}{2}]=-24\text{Ln}2+24(\frac{1}{2})=\mathbf{-24Ln2+12}$$

بنابراین حاصل کل سری به شکل مقابل است:

$$S=S_1+S_2=6+12-24\text{Ln}2=\mathbf{18-24Ln2}$$

مثال ۲۱: اگر $\varepsilon(x)$ با رابطه $\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0$ تعریف شده باشد، کدامیک از روابط زیر برقرار است؟ (عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$

۲) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$

۳) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$

۴) $\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها می‌توان حدس زد که بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\sqrt{1+x}\cos x$ خواسته شده است.

$$f(x)=\sqrt{1+x}\cos x\ \Rightarrow f(0)=1\ ,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\cos x-\sqrt{1+x}\sin x\ \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}\cos x-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\sin x-\sqrt{1+x}\cos x\ \Rightarrow f''(0)=\frac{-5}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{1+x}\cos x=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+x^2\varepsilon(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{5}{8}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

مثال ۲۲: سری تیلور تابع $Ln(1+x^2)$ کدام‌یک از عبارات زیر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۸)

۱) $x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots$ ۲) $x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}-\frac{x^8}{4!}$ ۳) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots$ ۴) $x-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \Rightarrow Ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots$$

مثال ۲۳: حاصل $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$، تا سه رقم اعشار کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $0/984$ ۲) $0/918$ ۳) $0/946$ ۴) $0/972$

پاسخ: گزینه «۳» محاسبه‌ی انتگرال $\frac{\sin x}{x}$ با فرمول‌های مرسوم انتگرال‌گیری ممکن نیست، اما می‌توانیم از بسط مک‌لورن کمک بگیریم:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } \frac{1}{x}}\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\ ,\ a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

همان‌طور که می‌بینیم سری سمت راست یک سری متناوب است و می‌دانیم برای این که بدانیم بـه ازای چـه n هـایی، مقـدار خطـا از $\frac{1}{1000}$ کمتـر اسـت، بایـد قـدر مطلـق جمله‌ی «$n+1$»ام را کمتر از $\frac{1}{1000}$ قرار دهیم:

$$\frac{1}{[2(n+1)+1][2(n+1)+1]!}<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}<\frac{1}{1000}\Rightarrow(2n+3)(2n+3)!>1000$$

نامساوی فوق به ازای $n\ge 2$ برقرار است، (چون به ازای $n=1$، سمت چپ نامساوی برابر با $5\times 5!=600$ می‌شود که کوچکتر از ۱۰۰۰ است) بنابراین باید مقدار سری را به ازای $n=0$، $n=1$ و $n=2$ حساب کنیم تا قدرمطلق خطا از $\frac{1}{1000}$ کمتر شود.

$$S_2=\frac{(-1)^0}{(2\times0+1)(2\times0+1)!}+\frac{(-1)^1}{(2\times1+1)(2\times1+1)!}+\frac{(-1)^2}{(2\times2+1)(2\times2+1)!}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3\times3!}+\frac{1}{5\times5!}=1-\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{5\times120}=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{5\times120}\simeq 0/946$$

مثال ۲۴: ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $Ln(x+\sqrt{x^2+1})$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۷ و مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید تابع داده شده در واقع همان $\sinh^{-1}x$ است که می‌دانـیم، بسـط آن بـه صـورت $\sinh^{-1}x=x-\frac{x^3}{3!}+-\cdots$ مـی‌باشـد. و همان‌طور که می‌بینید؛ ضریب x^3 برابر با $-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3!}$ است.

مثال ۲۵: ضریب x^2 در بسط مک‌لورن مشتق سری $\text{Arcsin}\,x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ـ سراسری ۷۸)

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۳» این سؤال را می‌توان به دو طریق پاسخ داد؛ یک روش این است که از سری $\text{Arcsin}\,x$ مشتق بگیریم که می‌دانـیم برابـر بـا $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ است و حالا با توجه به دو جمله‌ای نیوتن بسط مک‌لورن $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ را نوشته و ضریب x^2 را تعیین کنیم که من استفاده از این روش را جالب نمی‌دانم، چون راه عاقلانه این است که از جمله‌ای شامل x^3 در بسط $\sin^{-1}x$، مشتق بگیریم:

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

$$x^3\ \text{جمله شامل}=\frac{1}{6}x^3\xrightarrow{\text{مشتق}}(\frac{1}{6}x^3)'=\frac{3}{6}x^2\Rightarrow x^2\ \text{ضریب}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲۶: سری مک‌لورن $\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})$ برای $-1<x<1$، کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۷۹)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ۲) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$ ۴) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این سؤال باید از خواص Ln استفاده کنیم:

$$\text{Ln}(\frac{1+x}{1-x})=\text{Ln}(1+x)-\text{Ln}(1-x)$$

خُب ما بسط $\text{Ln}(1+x)$ را می‌دانیم و با قرار دادن $-x$ به جای x در طرفین این بسط به راحتی به بسط $\text{Ln}(1-x)$ هم می‌رسیم.

$$\text{Ln}(1+x)-\text{Ln}(1-x)=(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+\cdots)-(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots)=2(x+\frac{x^3}{3}+\cdots)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

مثال ۲۷: اگر $f(x)=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\cdots$، آن‌گاه $f'(1)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۷۹)

۱) e ۲) $2e$ ۳) π ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» یک سؤال نسبتاً جالب از کاربرد سری‌های مک‌لورن! اگر از x در ضابطه‌ی $f(x)$ فاکتور بگیریم، داریم:

$$f(x)=x(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)=xe^x \Rightarrow f'(x)=1\times e^x+xe^x=e^x(1+x) \Rightarrow f'(1)=e^1(1+1)=2e$$

مثال ۲۸: ضریب x^4 در بسط تیلور xe^{-x} حول نقطه صفر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» بسط تیلور e^{-x} حول نقطه $x=0$ همان بسط مک‌لورن e^{-x} می‌باشد که به صورت مقابل است:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$xe^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\cdots \Rightarrow x^4 \text{ ضریب } =-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

مثال ۲۹: ضریب x^5 در بسط مک‌لورن $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ کدام است؟ (آبیاری و زهکشی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لورن تابع e^{-t^2} را نوشته و سپس از آن انتگرال می‌گیریم:

$$e^{-t^2}=1+(-t^2)+\frac{(-t^2)^2}{2}+\frac{(-t^2)^3}{3!}+\cdots$$

$$f(x)=\int_0^x(1-t^2+\frac{t^4}{2}+\cdots)dt=[t]_0^x-[\frac{t^3}{3}]_0^x+[\frac{t^5}{2\times 5}]_0^x+\cdots=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\cdots$$

که واضح است؛ ضریب x^5 برابر با $\frac{1}{10}$ است.

مثال ۳۰: ضریب x^3 در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=e^x\sin x$ کدام است؟ (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱» یک سؤال نسبتاً ساده که فقط کافیست، بسط دو تابع e^x و $\sin x$ را بنویسیم و جملاتی که در صورت ضرب شدن در هم، x^3 تولید می‌کنند، را جدا کنیم:

$$e^x\sin x=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots) \Rightarrow x^3 \text{ ضریب }=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

مثال ۳۱: ضریب جمله‌ی x^2 در بسط مک‌لورن تابع $y=\cos^2 2x$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۱)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه «۱» نخست توجه کنید که داریم:

$$y=\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$$

برای نوشتن بسط مک‌لورن $\cos 4x$، کافی است در بسط $\cos x$، به جای x، $4x$ قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$y=\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\cdots) \Rightarrow x^2 \text{ ضریب }=\frac{-16}{4}=-4$$

مثال ۳۲: مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ پس داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n e^{-2}}{(n-2)!}=4e^{-2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\overset{n-2=k}{=\!=}4e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}=4e^{-2}\times e^2=4$$

مثال ۳۳: بسط تیلور e^x حول $x=a$ به کدام صورت است؟ (معدن، اکتشاف معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۲) $e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۳) $e^{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{na}(x-a)^n}{n!}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(x)=e^x\Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(n)}(a)=e^a\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

مثال ۳۴: ضریب x^5 در بسط مک لورن $Ln(1+x)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{1}{5!}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{5!}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\Rightarrow x^5\ \text{ضریب}=\frac{1}{5}$$

مثال ۳۵: ضریب جملهٔ x^4 در بسط مک‌لورن تابع با ضابطه $y=x\sin 2x$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۲)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» در بسط مک‌لورن تابع $\sin x$، به جای x، $2x$ قرار می‌دهیم. در اینصورت داریم:

$$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{6}+\cdots\Rightarrow x\sin 2x=2x^2-\frac{8x^4}{6}+\cdots$$

مثال ۳۶: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{n!}$ کدام است؟ (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $4e-1$ ۲) $8e-1$ ۳) $5e-1$ ۴) $7e+1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا سری را به فرم دو سری مجزا می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=S_1-S_2$$

سری S_2 که همان بسط e^1 است، که البته جملهی اول را ندارد، یعنی « $e-1$ » پس فعلاً آن را کنار می‌گذاریم و سراغ محاسبه‌ی سری S_1 می‌رویم:

$$S_1=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-1)!n}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}$$

برای ادامه‌ی محاسبات باید سعی کنیم با اضافه و کم کردن عدد به صورت کسر، $(n-1)$ ایجاد کنیم:

$$S_1=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

سری دوم همان سری e است، (از قاعده‌ی لغزاندن حدود استفاده کردیم و از سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ به سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ رسیدیم.) پس تا این‌جا $4e$ دیگر ایجاد شد:

$$S_1=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-2)!(n-1)}+4e=4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+4e=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+4e=4e+4e=8e$$

بنابراین حاصل نهایی برابر با مقدار مقابل است:

$$S=S_1-S_2=8e-(e-1)=8e-e+1=\mathbf{7e+1}$$

مثال ۳۷: مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۳ و عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $(x+1)e^x$ ۲) $(x^2+1)e^x$ ۳) x^2e^x ۴) $(x^2+x)e^x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n\overset{n-1=k}{=\!=\!=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)}{k!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{k!}x^{k+1}+\frac{x^{k+1}}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}x^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^{k+1}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\overset{k-1=m}{=\!=\!=}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m+2}+xe^x=x^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}+xe^x=x^2e^x+xe^x$$

مثال ۳۸: در بسط تابع $f(x)=\mathrm{Ln}(1-x^2)$ به صورت یک سری برحسب توان‌های صعودی x جمله عمومی به کدام صورت است؟ (MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{-x^{2n}}{n}$ ۲) $\frac{-x^{2n}}{n!}$ ۳) $(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}$ ۴) $(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم جمله عمومی بسط مک‌لورن $\mathrm{Ln}(1+u)$ به صورت مقابل است:

$$\mathrm{Ln}(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}$$

با قرار دادن $-x^2$ به جای u خواهیم داشت:

$$\mathrm{Ln}(1-x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x^2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{n}$$

مثال ۳۹: سری مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$ به کدام صورت است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{2n-1}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+x}$ به صورت روبرو می‌باشد:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه داریم:

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}\xrightarrow{\text{به جای }x\text{، }x^2\text{ قرار می‌دهیم}}\frac{-1}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر }-x}f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n-1}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+1}$$

مثال ۴۰: فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که سری تیلور آن همه جا به آن همگراست. اگر $f(0)=2$، $f'(0)=2$ و برای $n\ge 2$ داشته باشیم $f^{(n)}(0)=3$ آنگاه $f(x)$ توسط کدام ضابطه داده می‌شود؟ (آمار ـ سراسری ۸۳)

۱) $3e^x+2x-1$ ۲) $3e^x-x-1$ ۳) $e^{3x}+2x+1$ ۴) $3e^x-x+1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها تابع f، باید به صورت: $f(x)=ae^x+bx+c$ باشد و داریم:

$$\left.\begin{array}{lll}f(x)=ae^x+bx+c & , & f(0)=2\Rightarrow 2=a+c\\ f'(x)=ae^x+b & , & f'(0)=2\Rightarrow 2=a+b\\ f''(x)=ae^x & , & f^{(n)}(0)=3\Rightarrow 3=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=3\ ,\ b=c=-1\Rightarrow f(x)=3e^x-x-1$$

مثال۴۱: مجموع سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ برابر با کدام عدد است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{5}{8}-\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{8}+\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{4}-\text{Ln}\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{5}{4}+\text{Ln}\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا توجه کنید که بسط مکلورن $\text{Ln}(1+x)$ به صورت مقابل است:

$$\text{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

با جایگزینی $x=\frac{-1}{2}$ در رابطه فوق به دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\frac{-1}{2})^n}{n}=\text{Ln}(1-\frac{1}{2})\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n2^n}=\text{Ln}\frac{1}{2}\Rightarrow-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\text{Ln}\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{8}-\text{Ln}\frac{1}{2}=\frac{-5}{8}-\text{Ln}\frac{1}{2}$$

مثال۴۲: ضریب x^4 در بسط مکلورن $\frac{x+1}{x^2+1}$، کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{3!}$ ۲) $\frac{1}{4!}$ ۳) ۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» عبارت داده شده را به دو کسر مختلف تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

قسمت اول، یک تابع فرد است و در بسط آن جمله‌ی زوج وجود ندارد، یعنی ضریب x^4 در این قسمت برابر با صفر است. بنابراین کافی‌ست ضریب x را در بسط $\frac{1}{1+x^2}$ حساب کنیم، از بسط مقابل استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+-\cdots\Rightarrow$$

ملاحظه می‌کنید که ضریب x^4 برابر با ۱ است و لذا گزینه (۴) صحیح است.

مثال۴۳: سری مکلورن تابع با ضابطه $f(x)=\text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{n!(2n)}x^{2n+1}$

۲) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\times4\times\cdots\times2n}{n!(2n+2)}x^{2n+1}$

۳) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{(2n+1)2^n n!}x^{2n+1}$

۴) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\times4\times\cdots\times2n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: تابع داده شده همان $\text{Arcsinh}\,x$ می‌باشد که بسط مکلورن آن همان رابطه داده شده در گزینه (۳) می‌باشد.

روش دوم: با توجه به گزینه‌ها کافی است ضریب x^3 در بسط مکلورن را به دست آوریم، بدین منظور باید $f'''(0)$ را به دست آوریم، پس داریم:

$$f(x)=\text{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=\frac{-(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times2x\times(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\times(-x)}{(1+x^2)^3}\Rightarrow f'''(0)=-1$$

$$\Rightarrow\ \text{ضریب } x^3 \text{ در بسط مکلورن}=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{-1}{6}\Rightarrow$$

با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینه ۳ به ازای $n=1$ ضریب x^3 برابر $\frac{-1}{6}$ خواهد شد.

مثال ۴۴: مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) xe^x ۲) $x(e^x+1)$ ۳) $(x-1)e^x$ ۴) $x(e^x-1)$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\overset{k=n-1}{=\!=\!=}x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=x(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1)=x(e^x-1)$$

مثال ۴۵: ضریب x^3 در بسط مک‌لورن $(x^2+5)e^x$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $-\frac{11}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک‌لورن $y=e^x$ به صورت مقابل می‌باشد. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$$(x^2+5)e^x=x^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)+5(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)\Rightarrow x^3\ \text{ضریب}=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

مثال ۴۶: در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(2+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ضریب x^4 کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) 0 ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» برای یافتن ضریب x^4 باید $\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$ را بیابیم پس ابتدا $f^{(4)}(x)$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$f'(x)=5x(2+x^2)^{\frac{3}{2}}\ ,\ f''(x)=5(2+x^2)^{\frac{3}{2}}+15x^2(2+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'''(x)=45x(2+x^2)^{\frac{1}{2}}+15x^3(2+x^2)^{\frac{-1}{2}}$$
$$f^{(4)}(x)=45(2+x^2)^{\frac{1}{2}}+90x^2(2+x^2)^{\frac{-1}{2}}-15x^4(2+x^2)^{\frac{-3}{2}}\Rightarrow f^{(4)}(0)=45\sqrt{2}$$
$$x^4\ \text{ضریب}=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{45\sqrt{2}}{24}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

مثال ۴۷: اگر از $1+\frac{1}{n^2}\ (n>1)$، به عنوان تقریب $\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ استفاده کنیم، بهترین جمله درست کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۴)

۱) تقریب نقصانی است و قدرمطلق خطا از $\frac{1}{2n^3}$ کوچکتر است.

۲) تقریب نقصانی است و قدرمطلق خطا از $\frac{1}{2n^n}$ کوچکتر است.

۳) تقریب اضافی است و قدرمطلق خطا از $\frac{1}{2n^3}$ کوچکتر است.

۴) تقریب اضافی است و قدرمطلق خطا از $\frac{1}{2n^n}$ کوچکتر است.

پاسخ: گزینه «۳» عبارت مورد نظر را می‌توان به صورت $(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ نوشت. بنابراین کافیست تـابع $f(x)=(1+x)^x$ را در نظر گرفتـه و بـه ازای $x=\frac{1}{n}$ مقدار تقریبی آن را پیدا کنیم. با توجه به آن که $\frac{1}{n}\to 0$ پس در همسایگی عدد صفر هستیم، می‌توانیم از بسط مک لورن استفاده کنیم:

$$f(x)=(1+x)^x=e^{x\operatorname{Ln}(1+x)}=e^{x(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots)}=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots}$$

حالا می‌دانیم که $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$ پس به ازای $t=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots$ داریم:

$$f(x)=1+(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots)+\frac{1}{2!}(x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots)^2+-\cdots$$

اگر از این بسط فقط جملات تا درجه‌ی ۳ را بنویسیم، خواهیم داشت: $f(x)\simeq 1+x^2-\frac{x^3}{2}+-\cdots$

به عبارتی داریم: $(1+x)^x\simeq 1+x^2-\frac{x^3}{2}+-\cdots$ حالا با جایگذاری $x=\frac{1}{n}$ به تقریب مقابل می‌رسیم: $(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\simeq 1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+-\cdots$

بنابراین اگر تقریبی به صورت $(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\simeq 1+\frac{1}{n^2}$ نوشته شود، از مقدار واقعی این عبارت کمی بیشتر است و اولـین جملـه‌ی خطـای آن $-\frac{1}{2n^3}$ اسـت در واقـع قدرمطلق خطا، حداکثر $\frac{1}{2n^3}$ خواهد بود.

مثال ۴۸: مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{x^a+1}$ ، $(a>0)$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{3a+1}+\cdots$
۲) $1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3a+1}+\cdots$
۳) $1-\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{2a^2+1}+\frac{1}{3a^2+1}+\cdots$
۴) $1-\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{2a^2+1}-\frac{1}{3a^2+1}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بسط مک‌لورن تابع مقابل انتگرال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-x^3+\cdots \Rightarrow \frac{1}{x^a+1}=1-x^a+x^{2a}-x^{3a}+\cdots$$

بنابراین:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^a+1}=\int_0^1(1-x^a+x^{2a}-x^{3a}+\cdots)dx=\left(x-\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{x^{2a+1}}{2a+1}-\frac{x^{3a+1}}{3a+1}+\cdots\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}-\frac{1}{3a+1}+\cdots$$

مثال ۴۹: ضریب x^3 در بسط مک لورن $y=(e^x-1)\cos x$ کدام است؟ (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \quad \text{و} \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

بنابراین:

$$y=(e^x-1)\cos x=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots)$$

$$x^3 \text{ ضریب } =\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{-1}{3}$$

مثال ۵۰: مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)3^n}$ ، $S=$ کدام است؟ (هوافضا ـ آزاد ۸۵)

۱) 0
۲) ∞
۳) $1+2\mathrm{Ln}\frac{2}{3}$
۴) $1+\mathrm{Ln}3$

پاسخ: گزینـه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا توجه کنید که $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ ، چون حد پایین سیگما در صورت سؤال از ۱ شروع شده، پس با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود داریم: $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ ،

حالا با توجه به اینکه در مخرج کسرِ صورت سؤال، $n(n+1)$ داریم؛ لذا باید از انتگرال‌گیری استفاده کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\mathrm{Ln}(1-x)$$

اگر دوباره انتگرال بگیریم، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=-\int_0^x\mathrm{Ln}(1-x)dx$$

حالا اگر در سمت چپ به جای x، عدد $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم، به $3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)3^n}$ می‌رسیم که در واقع $3S$ است، حالا اگر انتگـرال سـمت راسـت را حسـاب کنـیم و جای xها، عدد $\frac{1}{3}$ را قرار دهیم، برابر با $3S$ می‌شود:

$$3S=\left[-x\mathrm{Ln}(1-x)-(x+\mathrm{Ln}(1-x))\right]_{x=\frac{1}{3}} \Rightarrow 3S=-\frac{1}{3}\mathrm{Ln}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\mathrm{Ln}\frac{2}{3} \Rightarrow S=2\mathrm{Ln}\frac{2}{3}+1$$

مثال ۵۱: بسط مک‌لورن $2x\cos x^3-3x^4\sin x^3$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۶)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n+2)x^{6n+1}}{(2n)!}$
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+1}(6n+2)}{(2n)!}$
۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n+1}(6n+2)}{(2n+1)!}$
۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+1}(6n+2)}{(2n+1)!}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم بسط مک لورن توابع $\cos x$ و $\sin x$ بصورت زیر است:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \quad , \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

برای به‌دست آوردن بسط‌های $\sin x^3$ و $\cos x^3$ کافی است در بسط‌های فوق به جای x، x^3 قرار دهیم داریم:

$$2x\cos x^3-3x^4\sin x^3=2x(1-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\cdots)-3x^4(x^3-\frac{x^9}{3!}+\cdots)=(2x-x^7+\frac{2x^{13}}{4!}-\cdots)-(3x^7-\frac{3x^{13}}{3!}+\cdots)$$

$$=2x-4x^7+\cdots \Rightarrow$$

تنها در گزینه (۱) به ازای $n=1$ ضریب x^7 برابر -4 به دست می‌آید.

مثال ۵۲: تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ، $-2<x<4$ به صورت سری توان‌های صعودی $(x-1)$ نوشته شده است، ضریب جمله شامل $(x-1)^n$ در این سری کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ ۲) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ ۳) $\frac{(-1)^n}{2^n}$ ۴) $\frac{(-1)^n}{3^n}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم بسط تیلور تابع f حول نقطه $x=a$ به صورت مقابل است: $f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!}+\dots$

پس ضریب جمله شامل $(x-1)^n$ بصورت $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ خواهد بود و نیز می‌دانیم مشتق nام تابع $y=\frac{1}{ax+b}$ بصورت $y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ می‌باشد، پس برای تابع $y=\frac{1}{x+2}$ مشتق nام برابر است با:

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\Rightarrow f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}}\Rightarrow (x-1)^n \text{ ضریب جمله شامل}=\frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}}\times\frac{1}{n!}=\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

روش تستی نیاز به محاسبات حجیم بالا نبود، می‌توانیم به جای n، عدد ۱ را قرار دهیم وضریب $(x-1)$ برابر با $\frac{f'(1)}{1!}$ است، از طرفی داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{3^2}$$

خُب حالا در گزینه‌ها، $n=1$ قرار می‌دهیم، هر کدام مقدارش برابر با $-\frac{1}{3^2}$ شد، جواب است، واضح است فقط گزینه (۱) این شرایط را دارد.

مثال ۵۳: با توجه به سری $\text{Ln}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-+\dots$ سری $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$ به کدام عدد همگراست؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}\text{Ln}2$ ۲) $\frac{3}{2}\text{Ln}2$ ۳) $\frac{2}{3}\text{Ln}2$ ۴) $2\text{Ln}2$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\text{Ln}2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\text{Ln}2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\dots \quad (2)$$

با جمع طرفین رابطه ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\text{Ln}2+\frac{1}{2}\text{Ln}2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots$$

بنابراین حاصل سری داده شده برابر $\frac{3}{2}\text{Ln}2$ می‌باشد.

مثال ۵۴: تابع $f(x)=x^3\cos x$ دارای نمایش سری به صورت $f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\dots$ است، که برای تمام مقادیر x برقرار است، C_9 عبارت است از: (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{1}{6!}$ ۲) $-\frac{1}{4!}$ ۳) $\frac{1}{6!}$ ۴) $\frac{1}{4!}$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم بسط مکلورن تابع $\cos x$ بصورت: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$ است، پس داریم:

$$f(x)=x^3(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots)=x^3-\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{4!}-\frac{x^9}{6!}\Rightarrow C_9=\frac{-1}{6!}$$

مثال ۵۵: اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بوده و $f(0)=1$ و $f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به رابطه $f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$ داریم، $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}$ حال اگر از طرفین رابطه انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dx}{2}\Rightarrow \text{Ln}(f(x))=\frac{1}{2}x+c$$

چون $f(0)=1$ است لذا:

$$\text{Ln}(f(0))=\text{Ln}(1)=0=0+c\Rightarrow c=0\Rightarrow \text{Ln}(f(x))=\frac{1}{2}x\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$$

می‌دانیم بسط مکلورن تابع e^x بصورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ است پس برای بسط تابع $f(x)$ کافی است به جای x، $\frac{x}{2}$ قرار دهیم، داریم:

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n!}$$

مثال ۵۶: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حول نقطه $x_0=0$ دارای سری تیلور باشد و داشته باشیم: $f'(x)=1+x+f(x)+f^2(x)$ و $f(0)=1$، آنگاه چندجمله‌ای درجه سوم تیلور حول $x_0=0$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۷)

۱) $1+3x+5x^2+4x^3$ ۲) $1+3x+5x^2+8x^3$ ۳) $1+3x+10x^2+48x^3$ ۴) $(2x+1)^3-\frac{3}{2}(2x+1)$

پاسخ: گزینه «۲» چندجمله‌ای درجه سوم تابعی مانند $f(x)$ حول نقطه‌ی $x=0$ برابر با $\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$ است. اگر سری را باز کنیم، داریم:

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3 = \text{چندجمله‌ای تیلور درجه ۳}$$

بنابراین باید $f'(0)$، $f''(0)$ و $f'''(0)$ را حساب کنیم، ضابطه‌ی $f'(x)$ را داریم، ابتدا $f'(0)$ را با جایگذاری $x=0$ در طرفین تساوی حساب می‌کنیم:

$$f'(0)=1+0+f(0)+f^2(0)\xrightarrow{f(0)=1}f'(0)=1+1+1=3$$

اگر از ضابطه‌ی $f'(x)$، یک بار مشتق بگیریم به $f''(x)$ و اگر دو بار مشتق بگیریم به $f'''(x)$ می‌رسیم:

$$f''(x)=1+f'(x)+2f(x)f'(x)\xrightarrow[f(0)=1,f'(0)=3]{x=0}f''(0)=1+3+2\times1\times3=10$$

$$f'''(x)=f''(x)+2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)\xrightarrow[f''(0)=10]{f'(0)=3}f'''(0)=10+2\times3\times3+2\times1\times10=48$$

بنابراین چندجمله‌ای درجه‌ی سوم $f(x)$ به صورت مقابل است: $1+3x^2+5x^2+8x^3=$ چندجمله‌ای درجه سوم $f(x)$

مثال ۵۷: جمله عمومی بسط مک لورن $f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt{(1-x^2)^x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۷)

۱) $-\frac{x^{2n+1}}{2n}$ ۲) $(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{2n}$ ۳) $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$ ۴) $\frac{x^{2n+1}}{4n+2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا با توجه به خاصیت لگاریتم ضابطه‌ی $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt{(1-x^2)^x}=\mathrm{Ln}(1-x^2)^{\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\mathrm{Ln}(1-x^2)$$

حالا از بسط مک لورن $\mathrm{Ln}(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}u^n$ کمک می‌گیریم، (که برای این سؤال $u=-x^2$ است):

$$f(x)=\frac{x}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x^2)^n=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^{2n+1}}{2n}$$

مثال ۵۸: سری $\cdots+S=x+\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3})+\frac{1\times3}{2\times4}(\frac{x^5}{5})+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}(\frac{x^7}{7})$ در چه فاصله‌ای همگراست؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۷)

۱) $[-2,2]$ ۲) $[-3,3]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-4,4]$

پاسخ: گزینه «۳» سری فوق بسط $\mathrm{Arcsin}\,x$ است و می‌دانیم بازه‌ی همگرایی آن $|x|<1$ و به عبارت دیگر $-1\le x\le1$ می‌باشد.

مثال ۵۹: چند جمله‌ای مک‌لورن از درجه ۵ تابع $\sin(x-x^2)$ کدام‌یک از چند جمله‌ای‌های زیر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۷)

۱) $x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{59}{60}x^5$ ۲) $x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}-\frac{59}{120}x^5$ ۳) $x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}-\frac{59}{60}x^5$ ۴) $x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}-\frac{59}{120}x^5$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\text{بسط مک لورن}=(x-x^2)-\frac{(x-x^2)^3}{6}+\frac{(x-x^2)^5}{120}+\cdots=x-\frac{x^2}{1}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}-\frac{59}{120}x^5+\cdots$$

مثال ۶۰: مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۷ و سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $2e+1$ ۳) $e+1$ ۴) $2e-3$

پاسخ: گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

سری اول بسط e می‌باشد که شامل جمله‌ی $\frac{1}{0!}$ نیست و سری دوم بسط e می‌باشد که شامل دو جمله‌ی اول آن یعنی $\frac{1}{0!}$ و $\frac{1}{1!}$ نیست، بنابراین داریم:

$$S=(e-\frac{1}{0!})+(e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!})=2e-3$$

مثال ۶۱: اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n, |x|<1$ آنگاه $f(x)$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۷ و ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{x^2+1}{(1-x)^3}$ ۲) $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ ۴) $\frac{1}{(1-x)^2}$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$ می‌باشد، باید با مشتق گرفتن و عملیات مناسب روی این سری آن را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ در آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

حالا با مشتق گرفتن از طرفین رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } x}\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

مثال ۶۲: ضریب x^{10} در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) -5 ۲) 5 ۳) 1 ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$، و نیز $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$ بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}=(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)-x(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$$

بنابراین ضریب موردنظر -1 می‌باشد.

مثال ۶۳: مجموع سری $1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots |x|<1$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷ و سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2x}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ۳) $\frac{1+x}{1+x^2}$ ۴) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

قرار می‌دهیم $S=1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots$ در این صورت داریم:

$$\int S dx=x-x^3+x^5-x^7+\cdots=x(1-x^2+x^4+\cdots)=\frac{x}{1+x^2}+c$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

مثال ۶۴: با فرض $x>1$ بسط $tg^{-1}x$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۷)

۱) $tg^{-1}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$ ۲) $tg^{-1}x=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\cdots$

۳) $tg^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\cdots$ ۴) $tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. اگر بسط مک‌لورن $tg^{-1}x$ را به یاد نداشته باشیم، آن‌گاه روش زیر می‌تواند راهگشا باشد:

$$y=tg^{-1}x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

حالا از بسط $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots$ کمک می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}y=c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

حالا دقت کنید که در $x=0$ داریم: $y=tg^{-1}(0)=0$، لذا $c=0$ می‌شود و داریم:

$$tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

مثال ۶۵: تابع $-2<x<4$; $f(x)=\frac{1}{2+x}$ به صورت یک سری برحسب توان‌های صعودی $(x-1)$ نوشته شده است، جمله دهم این سری کدام است؟

(MBA ـ سراسری ۸۸)

۱) $-\frac{(x-1)^9}{3^{10}}$ ۲) $\frac{(x-1)^9}{3^{10}}$ ۳) $-\frac{(x-1)^{10}}{3^{11}}$ ۴) $\frac{(x-1)^{10}}{3^{11}}$

پاسخ: گزینه «۱» سری مورد نظر همان بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x=1$ می‌باشد، و جمله دهم آن بصورت $\frac{f^{(9)}(1)}{9!}(x-1)^9$ می‌باشد. پس لازم است مشتق مرتبه نهم تابع $f(x)$ را به‌دست آوریم. می‌دانیم اگر $y=\frac{1}{ax+b}$، آنگاه $y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2+x}\Rightarrow f^{(9)}(x)=\frac{(-1)^9 9!}{(2+x)^{10}}\Rightarrow f^{(9)}(1)=\frac{-9!}{3^{10}}$$

و در نتیجه جمله دهم سری مورد نظر بصورت $\frac{-(x-1)^9}{3^{10}}$ در می‌آید.

مثال ۶۶: مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^{n+1}}{n!}$ برابر است با:

(عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^{-x}-xe^{-x}$ ۲) $xe^{-x}-x^2e^{-x}$ ۳) e^x+xe^x ۴) $xe^x+x^2e^x$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

$$=-x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=-x^2e^{-x}+xe^{-x}$$

مثال ۶۷: مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$ چقدر است؟

(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) e^x+xe^x ۲) $e^{-x}+xe^{-x}$ ۳) $e^{-x}-x^2e^{-x}$ ۴) $xe^x+x^2e^x$

پاسخ: گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$، بنابراین سعی می‌کنیم سری داده شده را به شکل بسط e^x در بیاوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\overset{(*)}{=\!=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!n}x^n+e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}+e^x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+e^x=xe^x+e^x$$

توضیح: در بالا از قاعده‌ی لغزاندن حدود یعنی رابطه‌ی $\sum_{n=k}^{\infty}a_n=\sum_{n=k-i}^{\infty}a_{n+i}$ استفاده کرده‌ایم. همچنین در قسمت $(*)$ ممکن است داوطلب سؤال کند چگونه وقتی تساوی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ نوشته شد، حد پایین سیگما تغییر کرد، جواب این است وقتی سری سمت چپ بـه صـورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!n}x^n$ نوشته می‌شود و n از صورت و مخرج ساده می‌شود، قطعاً با شرط $n\neq 0$ این موضوع امکان دارد بنابراین در سمت راست باید $n=1$ بنویسیم.

مثال ۶۸: در بسط تابع $f(x)=\sin x\cos x$ به صورت سری توان‌های صعودی x، ضریب x^5 برابر کدام است؟

(صنایع غذایی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{4}{15}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$، می‌باشد بنابراین بسط تابع $f(x)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots\right)=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\cdots$$

مثال ۶۹: اگر $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$ در این صورت مشتق مرتبه ۱۳۸۸، f در $x=-1$ یعنی $f^{(1388)}(-1)$ برابر است با: (فیزیک دریا ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1388!}{2^{694}}$ ۲) $\frac{1388!}{2^{695}}$ ۳) $\frac{1388!}{2^{1388}}$ ۴) $\frac{1388!}{2^{1389}}$

پاسخ: گزینه «۲» واضح است محاسبه‌ی مستقیم مشتق «۱۳۸۸ام» سخت است و لذا باید از بسط تیلور یا مک لورن کمک بگیریم، اما مشتق در نقطه‌ی $x=-1$ خواسته شد، بنابراین باید با تغییر متغیر مناسب، مشتق در نقطه‌ی $t=0$ حساب شود. با فرض $x+1=t$ و نوشتن $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{1}{2+(x+1)^2}$ و لذا $g(t)=\frac{1}{2+t^2}$ مشکل حل می‌شود. که با کمی تغییر در ضابطه‌ی $g(t)$ داریم:

$$g(t)=\frac{1}{2(1-(-\frac{t^2}{2}))}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-(-\frac{t^2}{2})})$$

حالا بر طبق بسط $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$ می‌توانیم ضابطه‌ی $g(t)$ را به صورت سری بنویسیم $(u=-\frac{t^2}{2})$ لذا داریم:

$$g(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-t^2}{2})^n$$

مثال ۷۰: در بسط تابع $f(x)=\sin x+x\cos x$ بر حسب توان‌های صعودی x ضریب x^9 کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{10}{9!}$ ۲) $\frac{8}{9!}$ ۳) $-\frac{10}{9!}$ ۴) $-\frac{8}{9!}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بسط مکلورن $\sin x$ و $\cos x$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \qquad (1)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\Rightarrow x\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k)!} \qquad (2)$$

برای ایجاد ضریب x^9 خواهیم داشت:

$$2k+1=9\Rightarrow k=4$$

$$\text{ضریب } x^9 \text{ در (۱) و (۲)} \stackrel{k=4}{=\!=\!=} [\frac{(-1)^4}{9!}+\frac{(-1)^4}{8!}]x^9=x^9(\frac{1}{9!}+\frac{1}{8!})=\frac{10}{9!}x^9$$

مثال ۷۱: ضریب جمله سوم بسط تیلور $\frac{\text{Ln}(1-x)}{x-1}$ حول $x=0$ برابر کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{10}{6}$ ۲) $-\frac{10}{6}$ ۳) $-\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{11}{6}$

پاسخ: گزینه «۴» فرض می‌کنیم $f(x)=\text{Ln}(1-x)$، $g(x)=\frac{1}{x-1}$ و $h(x)=f(x)g(x)$ باشد.

بسط‌های تیلور توابع $f(x)$ و $g(x)$ حول $x=0$ را می‌نویسیم:

$$g(x)=\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \quad f(x)=\text{Ln}(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

لذا تابع $h(x)$ برابر است با:

$$h(x)=f(x)g(x)=(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$

بنابراین برای محاسبه ضریب x^3 در بسط تابع $h(x)$ داریم:

$$\text{ضریب } x^3=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{11}{6}$$

مثال ۷۲: حاصل عبارت $A=\frac{4}{3!}\pi^2-\frac{6}{5!}\pi^4+\frac{8}{7!}\pi^6-\frac{10}{9!}\pi^8+\cdots$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

عبارت A را به صورت سری زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{4}{3!}\pi^2-\frac{6}{5!}\pi^4+\frac{8}{7!}\pi^6-\frac{10}{9!}\pi^8+\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)}{(2n+1)!}(-1)^n\pi^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n)!})(-1)^n\pi^{2n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\pi^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}=-[\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}]=-[\frac{1}{\pi}(\sin\pi-\pi)+\cos(\pi)-1]=+3$$

یادآوری:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

مثال ۷۳: سری تیلور تابع $f(x)=\sin x\cos ۴x$ کدام گزینه است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۰)

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\dfrac{(۲x)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

۲) $\dfrac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\dfrac{(۲x)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

۳) $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(۴^{۲n+۱}-۲^{۲n+۱})\dfrac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

۴) $\dfrac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(۴^{۲n+۱}-۲^{۲n+۱})\dfrac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا با استفاده از رابطه تبدیل ضرب به جمع توابع مثلثاتی داریم:

$$\sin p\cos q=\frac{۱}{۲}[\sin(p+q)+\sin(p-q)]\ \Rightarrow \sin x\cos ۴x=\frac{۱}{۲}[\sin ۵x-\sin ۳x]$$

حال با استفاده از سری مک‌لورن برای توابع فوق داریم:

$$\sin ۵x=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{(۵x)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n ۵^{۲n+۱}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$\sin ۳x=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{(۳x)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n ۳^{۲n+۱}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$\sin x\cos ۴x=\frac{۱}{۲}[\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(۵^{۲n+۱}-۳^{۲n+۱})\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}]$$

مثال ۷۴: اگر f قابل بسط به سری مک‌لورن باشد و $f(۰)=۱$ و $f'(x)=۱+(f(x))^۵$ آنگاه ضریب $x^۳$ در سری مک‌لورن f کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\dfrac{۶۵}{۶}$ ۲) $\dfrac{۶۵}{۴}$ ۳) $\dfrac{۶۵}{۳}$ ۴) $\dfrac{۶۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» بسط مک لورن تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x)=f(۰)+f'(۰)x+f''(۰)\frac{x^۲}{۲!}+f^{(۳)}(۰)\frac{x^۳}{۳!}+\cdots+f^{(n)}(۰)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$f'(x)=۱+(f(x))^۵\ \Rightarrow f'(۰)=۲\ ,\ f(۰)=۱$$

$$f''(x)=۵f'(x)(f(x))^۴\ \Rightarrow f''(۰)=۱۰$$

$$f^{(۳)}(x)=۵f''(x)(f(x))^۴+۲۰(f'(x))^۲\times f(x)^۳\ \Rightarrow f^{۳}(۰)=۵\times ۱۰+۲۰\times ۴\ \Rightarrow$$

$$f \text{ ضریب } x^۳ \text{ در سری مک‌لورن}=\frac{f^{(۳)}(۰)}{۳!}=\frac{۵\times ۱۰+۲۰\times ۴}{۳!}=\frac{۶۵}{۳}$$

مثال ۷۵: چهار جمله اول ناصفر بسط مک‌لورن $e^{\sin x}$ عبارت است از: (آمار ـ سراسری ۹۰)

۱) $۱+x+\dfrac{۱}{۲}x^۲+\dfrac{۱}{۸}x^۴$ ۲) $۱+x+\dfrac{۱}{۲}x^۲-\dfrac{۱}{۸}x^۴$ ۳) $۱+x+\dfrac{۱}{۲}x^۲+\dfrac{x^۳}{۶}$ ۴) $۱+x+\dfrac{۱}{۲}x^۲-\dfrac{x^۳}{۶}$

پاسخ: گزینه «۲» بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{f^{(k)}(۰)}{k!}(x-۰)^k$$

حال چون مساله چهار جمله اول ناصفر بسط را خواسته است داریم:

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{f'''(۰)}{۳!}x^۳$$

$$f(x)=e^{\sin x}\ \Rightarrow f(۰)=e^{\circ}=۱\ \Rightarrow f'(x)=\cos x\ e^{\sin x}\ \Rightarrow f'(۰)=۱$$

$$f''(x)=-\sin x\ e^{\sin x}+\cos^۲ x\, e^{\sin x}\ \Rightarrow f''(۰)=۱$$

$$f'''(x)=\cos x\ e^{\sin x}(\cos^۲ x-\sin x)+e^{\sin x}(-\sin ۲x-\cos x)\Rightarrow f'''(۰)=۱-۱=۰$$

چون $f'''(۰)=۰$ شده است و مساله چهار جمله اول ناصفر را خواسته $f^{(۴)}(۰)$ را نیز حساب می‌کنیم.

$$f^{(۴)}(x)=\cos x\, e^{\sin x}(\cos^۳ x-\frac{۳}{۲}\sin ۲x-\cos x)+e^{\sin x}(-۳\cos^۲ x\sin x-۳\cos ۲x+\sin x)\Rightarrow f^{(۴)}(۰)=-۳$$

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{f^{(۴)}(۰)}{۴!}x^۴=۱+x+\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۸}x^۴$$

مثال ۷۶: چند جمله اول سری مک‌لورن تابع $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{dt}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}$ عبارتست از: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۰)

۱) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-+\cdots$
۲) $x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x^3-+\cdots$
۳) $x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3-+\cdots$
۴) $x-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{27}x^3-+\cdots$

پاسخ: گزینه «۴» بسط مک لورن تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$f(0)=0\ ,\ f'(0)=\left(\int_{0}^{x}\frac{dt}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}\right)'=\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}\Big|_{x=0}=1$$

توجه: برای مشتق‌گیری از تابع انتگرالی همانند فوق داریم:

$$f(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}h(t)dt\ \Rightarrow f'(x)=b'(x)h(b(x))-a'(x)h(a(x))$$

و در ادامه برای محاسبه $f''(0)$ از تابع $f(x)=\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$ مشتق می‌گیریم، لذا داریم:

$$f''(0)=\left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}\right)'\Big|_{x=0}=\left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)'\Big|_{x=0}=-\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{3}\Rightarrow f'''(0)=\left(-\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{4}{3}}\right)'\Big|_{x=0}=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow f(x)=x-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{27}x^3-\cdots$$

مدرسان شریف

فصل هفتم

« دستگاه مختصات قطبی »

درسنامه: دستگاه مختصات قطبی و مفاهیم مرتبط به آن

مثال ۱: مساحت مربعی که نقاط $A(6,-105^\circ)$ و $B(4,30^\circ)$ از دستگاه قطبی دو رأس متقابل آن هستند، کدام است؟

۱) $52+24\sqrt{2}$ ۲) $26+12\sqrt{2}$ ۳) $13+6\sqrt{2}$ ۴) $52+6\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی A و B دو رأس متقابل از یک مربع باشند، در این‌صورت قطر مربع برابر با فاصله‌ی A تا B خواهد بود. با توجه به فرمول، در این مثال $r_A=6$، $\theta_A=-105^\circ$، $r_B=4$ و $\theta_B=30^\circ$ پس قطر مربع برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{4^2+6^2-48\cos(30^\circ+105^\circ)}=\sqrt{16+36-48\cos 135^\circ}=\sqrt{52+24\sqrt{2}}$$

می‌دانیم که در هر مربع طول قطر، $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع است، بنابراین داریم

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\text{طول قطر})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{52+24\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \text{مساحت}=(\text{طول ضلع})^2=\frac{52+24\sqrt{2}}{2}=26+12\sqrt{2}$$

مثال ۲: زاویه‌ی بین خط مماس و شعاع حامل در نقطه‌ی $(\frac{3}{2},\frac{\pi}{6})$ از دلگون $r=1+\sin\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرمول فوق و با توجه به اینکه $f(\theta)=1+\sin\theta$ به راحتی داریم:

$$tg\psi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{6}}tg\psi=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\psi=\frac{\pi}{3}$$

مثال ۳: کدام گزینه یکی از محورهای تقارن $r=\sin\theta+\cos\theta$ است؟

۱) محور قطبی ۲) نیمساز ربع اول ۳) محور y های مثبت ۴) نیم‌خط $\theta_\circ=\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» نیم‌خط $\theta=\theta_\circ$ به شرطی محور تقارن است که دو عبارت مقابل با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}f(2\theta_\circ-\theta)=\sin(2\theta_\circ-\theta)+\cos(2\theta_\circ-\theta)\\ f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta\end{cases}$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. روی محور قطبی داریم $\theta_\circ=0$ با قرار دادن آن در روابط فوق داریم:

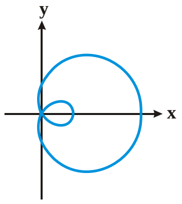
$$f(2\theta_\circ-\theta)=f(0-\theta)=\sin(-\theta)+\cos(-\theta)=-\sin\theta+\cos\theta\neq f(\theta)$$

روی نیمساز ربع اول داریم $\theta_\circ=\frac{\pi}{4}$ و با جایگذاری آن داریم:

$$f(2\theta_\circ-\theta)=f(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta+\cos\theta=f(\theta)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. در گزینه (۳) داریم $\theta_\circ=\frac{\pi}{2}$ و در گزینه‌ی (۴) هم $\theta_\circ=\frac{\pi}{6}$ است که هیچ‌کدام از آن‌ها در تساوی $f(2\theta_\circ-\theta)=f(\theta)$ صدق نمی‌کنند.

مثال۴: معادله‌ی قطبی منحنی شکل زیر کدام گزینه است؟

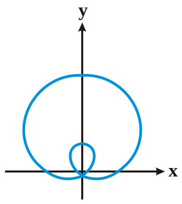


۱) $r=1+2\cos\theta$

۲) $r=1-2\cos\theta$

۳) $r=1+\frac{1}{2}\cos\theta$

۴) $r=1+\frac{1}{2}\sin\theta$



پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید که چون لیماسیون افقی است، پس گزینه (۴) نمی‌تواند جواب باشد، از طرفی واضح است چون حلقه داخلی تشکیل شده، پس b باید از a بزرگ‌تر باشد، پس گزینه (۳) هم غلط است. بین گزینه‌های (۱) و (۲) تفاوت بین علامت پشت $2\cos\theta$ است. واضح است معادله‌ی منحنی باید به شکل گزینه (۱) باشد. چون منحنی شکل مقابل که منحنی $r=a+b\sin\theta$ $(b>a)$ است، $\frac{\pi}{2}$ در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است.

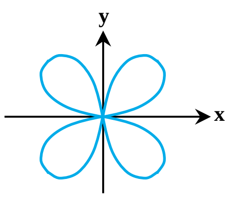
مثال۵: خم $r=\sin 2\theta$ در مبدأ به کدام خط مماس است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\theta=\frac{\pi}{3}$ ۲) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» خم داده شده در واقع یک رز چهار برگ است (شکل زیر) که واضح است در مبدأ بر دو محور قطبی و $\theta=\frac{\pi}{2}$ مماس می‌باشد.

توجه شود که برای منحنی $r=\sin 2\theta$ در مبدأ $r=0$ داریم:

$$0=\sin 2\theta \Rightarrow 2\theta=0 \text{ یا } \pi \Rightarrow \begin{cases}\theta=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$



یعنی در مبدأ θ هیچکدام از مقادیر $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ را نمی‌پذیرد.

مثال۶: خطوط مماس بر $r^2=4\sin 2\theta$ در مبدأ کدام‌اند؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\theta=\frac{\pi}{2},\pi$ ۲) $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که نقطه‌ی تماس همان نقطه‌ی مبدأ می‌باشد، لذا ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس را به‌دست می‌آوریم و داریم:

$$r=0 \Rightarrow 4\sin 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=k\pi \Rightarrow \theta=\frac{k\pi}{2} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

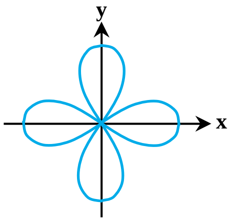
پس باید مختصات نقطه‌ی تماس $(0,\frac{k\pi}{2})$ در معادله‌ی خط مماس صدق کند که تمامی گزینه‌ها دارای چنین شرطی هستند اما چون گزینه‌ی ۴ نسبت به سه گزینه‌ی دیگر کامل‌تر است گزینه صحیح‌تر می‌باشد.

مثال۷: معادله قطبی سهمی که کانونش در $r=0$ و رأسش در $\theta=0$ و $r=1$ واقع شده است، عبارت است از: (علوم دریایی ـ آزاد ۸۴)

۱) $r=\frac{1+\cos\theta}{2}$ ۲) $r=\frac{2}{1+\cos\theta}$ ۳) $r=\frac{1+\sin\theta}{2}$ ۴) $r=\frac{2}{1+\sin\theta}$

پاسخ: گزینه «۲» چون کانون سهمی در نقطه $(0,0)$ و رأس آن در $(x,y)=(1,0)$ قرار دارد، پس سهمی افقی است و فقط گزینه (۲) معادله‌ی یک سهمی افقی در مختصات قطبی را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم به فرمول‌های متن کتاب مراجعه کنیم می‌دانیم هر معادله به صورت $r=\frac{k}{1\pm\cos\theta}$ نمایش یک سهمی در مختصات قطبی است و فقط گزینه (۲) چنین منحنی را نمایش می‌دهد.

مثال ۸: شکل مقابل مربوط به کدام منحنی است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)



۱) $r=\cos ۲\theta$

۲) $r=۱-tg^{۲}\theta$

۳) $r^{۲}=a^{۲}\sin\theta$

۴) $r=a(۱-۲\sin ۳\theta)$

پاسخ: گزینه «۱» شکل داده شده رُز ۴ برگ می‌باشد و معادله آن $r=\cos ۲\theta$ است.

مثال ۹: فرض کنید $C_۱$ نمودار $r=\sin ۲\theta$ و $C_۲$ نمودار $r=\cos ۳\theta$ باشد. در این صورت کدام گزاره درست است؟ (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $C_۱$ چهار پر و $C_۲$ سه پر دارد. ۲) $C_۱$ چهار پر و $C_۲$ شش پر دارد. ۳) $C_۱$ دو پر و $C_۲$ سه پر دارد. ۴) $C_۱$ دو پر و $C_۲$ شش پر دارد.

پاسخ: گزینه «۱» به طور کلی تعداد پرها یا برگ‌های $r=\cos n\theta$ و $r=\sin n\theta$ از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد پرها (برگ‌ها)}=\begin{cases} n & ; \ n \text{ فرد} \\ ۲n & ; \ n \text{ زوج} \end{cases}$$

مثال ۱۰: معادله‌ی منحنی $x^{۴}-y^{۴}=۲xy$ در مختصات قطبی چگونه است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۵)

۱) $r=\cot g ۲\theta$ ۲) $r=\sin ۲\theta$ ۳) $r=\sqrt{tg ۲\theta}$ ۴) $r=\cos ۲\theta$

پاسخ: گزینه «۳» با در نظر گرفتن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$x^{۴}-y^{۴}=۲xy \Rightarrow r^{۴}\cos^{۴}\theta-r^{۴}\sin^{۴}\theta=۲r^{۲}\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

$$r^{۲}\underbrace{(\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta)}_{\cos ۲\theta}\underbrace{(\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta)}_{\text{یک}}=\underbrace{۲\sin\theta\cos\theta}_{\sin ۲\theta} \Rightarrow r^{۲}=tg ۲\theta \Rightarrow r=\sqrt{tg ۲\theta}$$

مثال ۱۱: معادله‌ی دایره به مرکز $(a,۰)$ و شعاع a در دستگاه قطبی کدام است؟ (علوم دریایی ـ سراسری ۸۵)

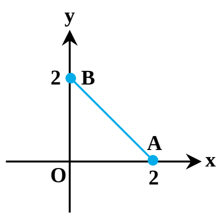
۱) $r(r-۲a\cos\theta)=۰$ ۲) $r^{۲}-۲a\cos\theta=۰$ ۳) $r-۲ar\cos\theta=۰$ ۴) $r^{۳}-۲ar^{۲}\cos\theta=۰$

پاسخ: گزینه «۱» در متن درس گفتیم معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(a,۰)$ و شعاع a به‌صورت $r=۲a\cos\theta$ است که با ضرب طرفین آن در r به‌صورت $r^{۲}=۲ra\cos\theta$ می‌شود و لذا با کمی عملیات ساده به معادله‌ی $r(r-۲a\cos\theta)=۰$ می‌رسیم که همان معادله‌ی داده شده در گزینه (۱) است. البته اگر معادله‌ی این دایره در مختصات قطبی یادتان نباشد، می‌توانید از مختصات دکارتی استفاده کنیم. می‌دانیم معادله این دایره در مختصات دکارتی به‌صورت $(x-a)^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ است که با جایگزینی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ می‌توانیم به معادله‌ی داده شده در گزینه (۱) برسیم.

مثال ۱۲: مسیر متحرکی در مختصات قطبی به صورت $r=\dfrac{۲}{\sin\theta+\cos\theta}$ است. این مسیر امتدادهای $\theta=۰,\dfrac{\pi}{۲}$ را در A و B قطع می‌کند. اگر نقطه O نمایش $r=۰$ باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۷)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مختصات نقاط A و B را تعیین می‌کنیم، A و B به ازای $\theta=۰$ و $\theta=\dfrac{\pi}{۲}$ از معادله‌ی منحنی $r=\dfrac{۲}{\sin\theta+\cos\theta}$ حاصل می‌شود که $A(۲,۰)$ و $B(۰,۲)$ به‌دست می‌آید، از طرفی O هم نمایش مبدا است که مختصات آن $(۰,۰)$ است، لذا داریم:

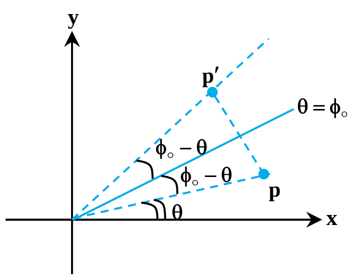


$$S=\frac{۲\times ۲}{۲}=۲$$

مثال ۱۳: در مختصات قطبی، شرط کافی برای این‌که خط $\theta=\phi_{۰}$ محور تقارن نمودار تابع $r=f(\theta)$ $(f\geq ۰)$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) $f(\phi_{۰}+\theta)=f(\theta)$ ۲) $f(\phi_{۰}+\theta)=f(\phi_{۰}-\theta)$ ۳) $f(۲\phi_{۰}-\theta)=f(\theta)$ ۴) $f(۲\phi_{۰}+\theta)=f(\theta)$

پاسخ: گزینه «۳» فرض کنید P یکی از نقاط منحنی $r=f(\theta)$ باشد، در اینصورت برای این‌که منحنی نسبت به خط $\theta=\phi_{۰}$ متقارن باشد باید نقطه P' نیز روی منحنی f باشد و با توجه به شکل روبرو زاویه‌ی نقطه P' نسبت به محور x ها برابر $۲\phi_{۰}-\theta$ می‌باشد پس نتیجه می‌گیریم شرط کافی برای تقارن رابطه $f(۲\phi_{۰}-\theta)=f(\theta)$ می‌باشد.



مثال ۱۴: فرم دکارتی $r=\cos 2\theta$ کدام‌یک از موارد زیر است؟ (عمران ـ سراسری ۹۰)

۱) $x^2+y^2=2xy$ ۲) $x^2+y^2=(2xy)^{\frac{3}{2}}$ ۳) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^2-y^2$ ۴) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$ و $r^2=x^2+y^2$. پس ابتدا تبدیل $\cos 2\theta$ را می‌نویسیم، لذا داریم:

$$r=\cos 2\theta \to r=\cos^2\theta-\sin^2\theta \xrightarrow{\times r^2} r^3=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta \Rightarrow (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^2-y^2$$

مثال ۱۵: دو نقطه‌ی $A(3,\frac{\pi}{6})$ و $B(4,\frac{2\pi}{3})$ در مختصات قطبی داده شده‌اند. فاصله این دو نقطه کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول: طبق فرمول داریم:

$$d_{AB}=\sqrt{3^2+4^2-2\times 3\times 4\times \cos(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})}=\sqrt{9+16-24\times\cos\frac{\pi}{2}}=5$$

روش دوم: اگر فرمول را بلد نباشیم، برای یافتن فاصله بین نقاط A و B، می‌توان ابتدا نقاط را در مختصات دکارتی پیدا کرد و سپس فاصله دو نقطه را به‌دست آورد، لذا داریم:

تبدیل مختصات قطبی به دکارتی: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$ نقطه A: $\begin{cases} x_A=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y_A=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2} \end{cases}$ ، نقطه B: $\begin{cases} x_B=4\cos\frac{2\pi}{3}=-2 \\ y_B=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3} \end{cases}$

فاصله نقطه A و B: $d_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2)^2+(\frac{3}{2}-2\sqrt{3})^2}$

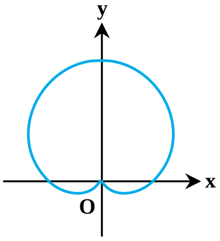
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{27}{4}+6\sqrt{3}+4+\frac{9}{4}-6\sqrt{3}+12}=\sqrt{\frac{36}{4}+16}=\sqrt{25}=5$$

درسنامه۲: محاسبه‌ی طول قوس، مساحت محصور، سطح و حجم حاصل از دوران در منحنی‌های قطبی

مثال ۱: طول دلوار $r=۱+\sin\theta$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل، این منحنی نسبت به محور y ها تقارن دارد. بنابراین می‌توانیم طول قسمت سمت راست که در محدوده $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد را محاسبه کرده و دو برابر کنیم. بنابراین طول کامل این منحنی از رابطه زیر تعیین می‌شود:



$$L=۲\times\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{f^{۲}(\theta)+(f'(\theta))^{۲}}\,d\theta=۲\times\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{(۱+\sin\theta)^{۲}+\cos^{۲}\theta}\,d\theta$$

$$L=۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۲+۲\sin\theta}\,d\theta=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱+\sin\theta}\,d\theta$$

برای حل این انتگرال، از ضرب و تقسیم عبارت زیر انتگرال در $\sqrt{۱-\sin\theta}$ استفاده می‌کنیم.

$$L=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۱+\sin\theta}\times\sqrt{۱-\sin\theta}}{\sqrt{۱-\sin\theta}}d\theta=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}}{\sqrt{۱-\sin\theta}}d\theta=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos\theta|}{\sqrt{۱-\sin\theta}}d\theta$$

در قسمت سمت راست، یعنی در ربع اول و چهارم، علامت $\cos\theta$ مثبت است و از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$L=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{۱-\sin\theta}}d\theta=۲\sqrt{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}\cos\theta\,d\theta$$

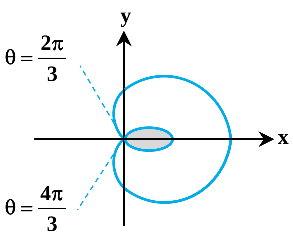
این انتگرال با تغییر متغیر $u=۱-\sin\theta$ ، $du=-\cos\theta d\theta$ حل می‌شود و در نهایت داریم:

$$L=۲\sqrt{۲}\left[-۲\sqrt{۱-\sin\theta}\,\right]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}=۲\sqrt{۲}(۰+۲\sqrt{۲})=۸$$

مثال ۲: مساحت داخل حلقه کوچکتر منحنی $r=۱+۲\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\pi-\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۲}$ ۲) $\pi-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۳) $\pi-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\pi-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به شکل باید مساحت ناحیه هاشورخورده را محاسبه کنیم. حدود θ در حلقه کوچک از حل $r=۰$ به‌دست می‌آیند:



$$r=۰\Rightarrow ۱+۲\cos\theta=۰\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۴\pi}{۳}}(۱+۲\cos\theta)^{۲}d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۴\pi}{۳}}(۱+۴\cos^{۲}\theta+۴\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۴\pi}{۳}}(۱+۴\cos\theta+۲+۲\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}[۳\theta+۴\sin\theta+\sin ۲\theta]_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۴\pi}{۳}}=\pi-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

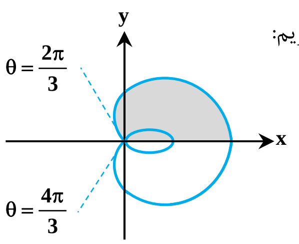
سؤال دانشجو: آیا در این مثال نیز می‌توانیم نصف ناحیه را در نظر گرفته و جواب را ۲ برابر کنیم؟

پاسخ: بله، کل این ناحیه بین $\frac{۲\pi}{۳}$ تا $\frac{۴\pi}{۳}$ است. اگر می‌خواهید آن را نصف کنید باید حدود انتگرال را $\frac{۲\pi}{۳}$ تا $\pi=\frac{۳\pi}{۳}$ در نظر گرفته و جواب به دست آمده را ۲ برابر کنید.

مثال ۳: مساحت محدود به یکی از دو حلقه بزرگتر منحنی $r=۱+۲\cos\theta$ و محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$ ۳) $۲\pi+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\pi+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» برای محاسبه مساحت محدود به یکی از دو حلقه بزرگتر با توجه به شکل، حدود حلقه را از حل $r=۰$ بدست می‌آوریم که برابر $\theta=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}$ است، سپس برای یافتن یکی از حلقه‌های بزرگتر $۰\le\theta\le\frac{۲\pi}{۳}$ یا $\frac{۴\pi}{۳}\le\theta\le ۲\pi$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

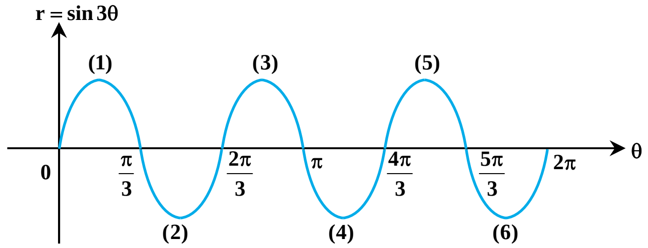


$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}(۱+۲\cos\theta)^{۲}d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}(۱+۴\cos\theta+۲+۲\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}[\theta+۴\sin\theta+۲\theta+\sin ۲\theta]_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}$$

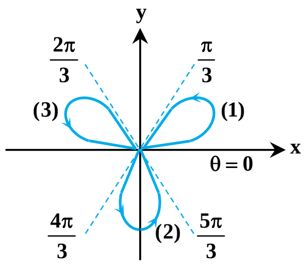
$$=\frac{۱}{۲}[\frac{۲\pi}{۳}+۲\sqrt{۳}+\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=\frac{۱}{۲}[۲\pi+\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}]=\pi+\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

مثال ۴: مساحت محدود به یک برگ از منحنی قطبی $r = \sin ۳\theta$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۲}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» البته انتظار ما این است که شما نمودار $\sin ۳\theta$ را حفظ باشید. اما به عنوان تمرین و با فرض این‌که شکل نمودار در ذهنتان نباشد، شکل را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار رز $r = \sin ۳\theta$ (رز ۳ برگ) از نمودار دکارتی $r = \sin ۳\theta$ استفاده می‌کنیم. مقدار $r = ۰$، به ازای زوایای $\theta = ۰, \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \pi, \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}, ۲\pi$ به‌دست می‌آید (شکل مقابل).



بنابراین این منحنی از همان ابتدا یعنی در $\theta = ۰$ در مبدأ قرار دارد و سپس ۶ بار دیگر از مبدأ عبور می‌کند. در فاصله‌ی $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۳}$ مقدار r از $r = ۰$ به $r = ۱$ می‌رسد و دوباره به $r = ۰$ بر می‌گردد. این بخش از منحنی را با (۱) نشان داده‌ایم. قطعه‌ی بعدی از مسیر بین زوایای $\frac{\pi}{۳}$ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ است. ولی در این بازه $r < ۰$ است، پس منحنی در بازه‌ی $\pi + \frac{\pi}{۳}$ تا $\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ قرار می‌گیرد. در این قسمت هم ابتدا از $r = ۰$ به $r = ۱$ می‌رسیم و سپس به $r = ۰$ بر می‌گردیم. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. قسمت‌های (۴)، (۵) و (۶) روی قطعات (۱)، (۲) و (۳) قرار گرفته و بر آن منطبق می‌شوند.

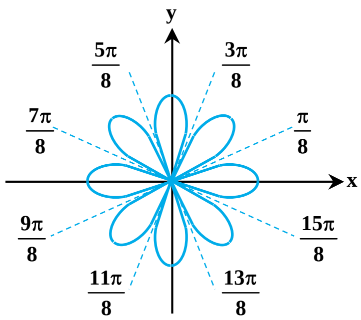
حالا یک دور کامل را به قطعاتی به‌صورت $I_۱ = [۰, \frac{\pi}{۳}]$, $I_۲ = [\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}]$ ، ... ، $I_۶ = [\frac{۵\pi}{۳}, ۲\pi]$ تقسیم کنید. در $I_۱$ برگی وجود دارد چون در این محدوده $r > ۰$ است. در $I_۲$ برگی وجود ندارد، چون $r < ۰$ است. به همین ترتیب یکی در میان، در این بازه‌ها برگ وجود دارد:

$$\text{مساحت یک برگ} = \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \sin^۲ ۳\theta d\theta = \frac{۱}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} (۱-\cos ۶\theta)d\theta = \frac{۱}{۴}[\theta - \frac{۱}{۶}\sin ۶\theta]_۰^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{۱}{۴}(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\pi}{۱۲}$$

مثال ۵: مساحت محدود به منحنی قطبی $r = \cos ۴\theta$، کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی شریف)

۱) $\frac{\pi}{۳۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» منحنی قطبی $r = \cos ۴\theta$، رز ۸ برگ است. برای محاسبه مساحت کل شکل، کافی است مساحت یک برگ را بدست آورده و حاصل را در ۸ ضرب کنیم (زیرا این شکل دارای ۸ برگ متقارن است):



$$r = ۰ \Rightarrow \cos ۴\theta = ۰ \Rightarrow ۴\theta = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۸}, \frac{۳\pi}{۸}, \frac{۵\pi}{۸}, \frac{۷\pi}{۸}, \frac{۹\pi}{۸}, \frac{۱۱\pi}{۸}, \frac{۱۳\pi}{۸}, \frac{۱۵\pi}{۸}$$

$$\text{مساحت یک برگ} = \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۸}}^{\frac{۳\pi}{۸}} \cos^۲ ۴\theta d\theta = \frac{۱}{۴}\int_{\frac{\pi}{۸}}^{\frac{۳\pi}{۸}} (۱+\cos ۸\theta)d\theta = \frac{۱}{۴}[\theta + \frac{۱}{۸}\sin ۸\theta]_{\frac{\pi}{۸}}^{\frac{۳\pi}{۸}} = \frac{\pi}{۱۶}$$

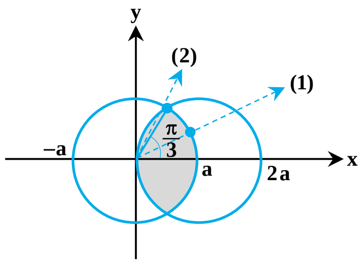
بنابراین مساحت کل برابر با $۸ \times \frac{\pi}{۱۶} = \frac{\pi}{۲}$ است.

مثال ۶: مساحت داخل دو دایره $r = a$ و $r = ۲a\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi - ۳\sqrt{۳}}{۱۲}a^۲$ ۲) $\frac{۴\pi + ۳\sqrt{۳}}{۱۲}a^۲$ ۳) $\frac{۴\pi + ۳\sqrt{۳}}{۶}a^۲$ ۴) $\frac{۴\pi - ۳\sqrt{۳}}{۶}a^۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به شکل، باید مساحت ناحیه هاشورخورده را محاسبه کنیم. با رسم خطوط شعاعی، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید آن‌ها همواره از مبدأ وارد ناحیه هاشور خورده می‌شوند، ولی گاهی از $r = a$ (در محدوده‌ی $\theta = ۰$ تا $\theta = \frac{\pi}{۳}$ که محل برخورد ۲ دایره است و ما آن را با (۱) نشان داده‌ایم) و گاهی از $r = ۲a\cos\theta$ (در محدوده‌ی $\theta = \frac{\pi}{۳}$ تا $\theta = \frac{\pi}{۲}$ که در شکل با (۲) نشان داده شده است) خارج می‌شوند. ابتدا تقاطع ۲ نمودار را بدست آورده و مساحت را به مجموع دو انتگرال تبدیل می‌کنیم. دقت داشته باشید، چون ناحیه شامل دو مساحت کاملاً یکسان است می‌توانیم مساحت نیمه بالایی را بدست آورده و حاصل را در دو ضرب کنیم.

$$a = ۲a\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{۳}$$



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 d\theta + a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta$$

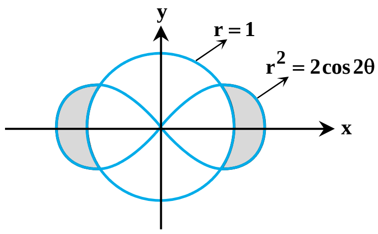
$$= [\frac{a^2}{2}\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} + [a^2\theta + \frac{a^2}{2}\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{6} + [\frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{3}] + [0 - \frac{\sqrt{3}a^2}{4}]$$

$$= \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = (\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12})a^2$$

بنابراین مساحت موردنظر برابر $(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6})a^2$ است، چون باید عبارت بالا در ۲ ضرب شود.

مثال ۷: **کل مساحت داخل پروانه‌ی $r^2 = 2\cos 2\theta$ و خارج دایره‌ی $r = 1$ کدام است؟**

۱) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ ۲) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$



پاسخ: گزینه «۲» در واقع باید مجموع مساحت قسمت‌های سایه‌زده شده را بیابیم. می‌توانیم مساحت یک ناحیه (مساحت واقع در ربع اول) را حساب کرده و سپس حاصل آن را ۴ برابر کنیم:

ابتدا نقطه‌ی تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} r^2 = 2\cos 2\theta \\ r^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\cos 2\theta = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \theta = \pm\frac{\pi}{6}$$

همان‌طور که گفتیم می‌خواهیم مساحت واقع در ربع اول را حساب کنیم، بنابراین حدود انتگرال از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{6}$ است.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta - 1)d\theta = \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta) = \frac{1}{2}[2\times\frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

اکنون مساحت به دست آمده را باید ۴ برابر کنیم چون در صورت سؤال کل مساحت از ما خواسته شده است.

$$S = 4(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

مثال ۸: **مساحت داخل دلگون $r = a(1-\cos\theta)$ و داخل دایره $r = a$، کدام است؟**

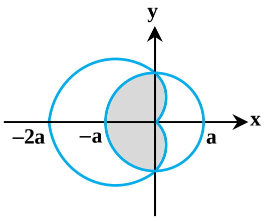
۱) $(\frac{5\pi}{4} - 2)a^2$ ۲) $(\frac{5\pi}{4} + 2)a^2$ ۳) $(\frac{5\pi}{8} - 1)a^2$ ۴) $(\frac{5\pi}{8} + 1)a^2$

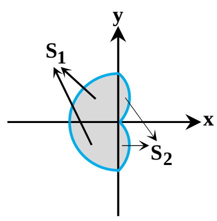
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل، باید مساحت ناحیه هاشورخورده را بدست بیاوریم، برای این منظور تقاطع دو منحنی را محاسبه می‌کنیم. ناحیه‌ی موردنظر را می‌توانیم به این صورت تفکیک کنیم:

قسمتی از این ناحیه که در سمت چپ محور y ها قرار دارد، یک نیم‌دایره به شعاع a است. این قسمت را S_1 می‌نامیم. $S_1 = \text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{1}{2}\pi a^2$

اما در سمت راست محور y ها ناحیه‌ی موردنظر یعنی S_2 از دو تکه‌ی متقارن تشکیل شده است. برای محاسبه‌ی مساحت S_2 کافی است مساحت نیمه‌ای که در ربع اول قرار دارد را نوشته و دو برابر کنیم.

$$a(1-\cos\theta) = a \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$





$$S_2 = 2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}d\theta = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + a^2\cos^2\theta - 2a^2\cos\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos 2\theta - 2a^2\cos\theta)d\theta$$

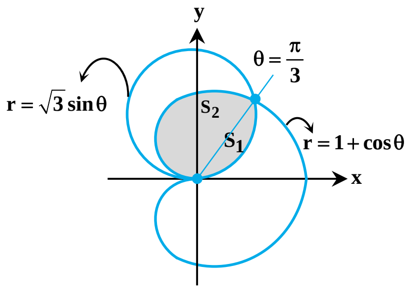
$$S_2 = [a^2\theta + \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\sin 2\theta - 2a^2\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}a^2 - 2a^2$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{3\pi}{4}a^2 - 2a^2 = \frac{5\pi}{4}a^2 - 2a^2 = (\frac{5\pi}{4} - 2)a^2$$

مثال ۹: مساحت ناحیه‌ای از دلوار $r=۱+\cos\theta$ که به‌وسیله‌ی دایره‌ی $r=\sqrt{۳}\sin\theta$ قطع می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}(\pi-\sqrt{۳})$ ۲) $\pi-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}(\pi-\sqrt{۳})$ ۴) $\frac{۳}{۸}(\pi-\sqrt{۳})$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases} r=۱+\cos ۲\theta \\ r=\sqrt{۳}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow ۱+\cos\theta=\sqrt{۳}\sin\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳} \text{ و } \pi$$

مساحت بین دو منحنی از دو بخش $S_۱$ و $S_۲$ تشکیل می‌شود.

$S_۱$ بخشی از دایره‌ی $r=\sqrt{۳}\sin\theta$ است که در محدوده‌ی از $\theta=۰$ تا $\theta=\frac{\pi}{۳}$ قرار دارد.

$$S_۱=\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{r^۲}{۲}d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۳\sin^۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۳}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)\,d\theta=\frac{۳}{۴}[\theta-\frac{\sin ۲\theta}{۲}]_۰^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۳}{۴}[\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}]$$

$S_۲$ به منحنی $r=۱+\cos\theta$ محدود شده است و در بازه‌ی $\theta=\frac{\pi}{۳}$ تا $\theta=\pi$ قرار دارد.

$$S_۲=\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}\frac{r^۲}{۲}d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+\cos\theta)^۲d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+۲\cos\theta+\cos^۲\theta)\,d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+۲\cos\theta+\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲})\,d\theta=\frac{۱}{۲}[\frac{۳}{۲}\theta+۲\sin\theta+\frac{\sin ۲\theta}{۴}]_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}$$

$$=\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۸}]=\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۹}{۸}\sqrt{۳}]$$

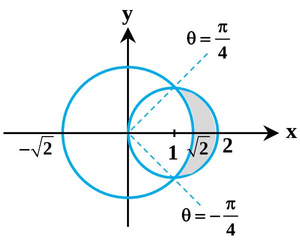
با جمع کردن مساحت‌ها داریم:

$$S_۱+S_۲=\frac{۳}{۴}[\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}]+\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}]=\frac{۳}{۴}[\pi-\sqrt{۳}]$$

مثال ۱۰: مساحت محدود به ناحیه داخل نمودار قطبی تابع $r=۲\cos\theta$ و خارج نمودار قطبی تابع $r=\sqrt{۲}$ چند واحد مربع است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

پاسخ: هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم. دایره‌ی $r=\sqrt{۲}$ از مبدأ نمی‌گذرد، پس در مبدأ برخوردی رخ نمی‌دهد. تنها نقاط برخورد، ریشه‌های معادله‌ی $۲\cos\theta=\sqrt{۲}$ می‌باشد. یعنی $\frac{-\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{\pi}{۴}$ بنابراین داریم:

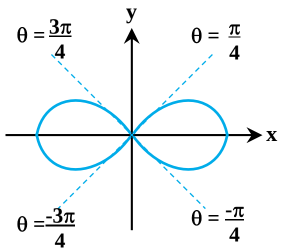


$$S=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}((۲\cos\theta)^۲-(\sqrt{۲})^۲)\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(۴\cos^۲\theta-۲)\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}۲\cos ۲\theta d\theta=\sin ۲\theta\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=۱$$

مثال ۱۱: مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی به معادله $r^۲=۲\cos ۲\theta$ حول محور oy کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸ و عمران ـ آزاد ۸۴)

۱) $۳\pi\sqrt{۲}$ ۲) $۳\pi\sqrt{۳}$ ۳) $۴\pi\sqrt{۲}$ ۴) $۴\pi\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۳» منحنی قطبی داده شده یک لمنیسکات می‌باشد که در شکل مقابل نمایش داده شده است.



$$r=۰\Rightarrow ۲\cos ۲\theta=۰\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{۴}\ ,\ \pm\frac{۳\pi}{۴}$$

با توجه به این‌که نمودار نسبت به محور y ها متقارن است، لذا دوران قسمت سمت راست محور y ها که به ازای $\frac{-\pi}{۴}<\theta<\frac{\pi}{۴}$ ایجاد می‌شود، کل سطح را ایجاد می‌کند.

$$r^۲=۲\cos ۲\theta\Rightarrow ۲rr'=-۴\sin ۲\theta\Rightarrow r'^۲=\frac{۴\sin^۲ ۲\theta}{r^۲}=\frac{۴\sin^۲ ۲\theta}{۲\cos ۲\theta}$$

بنابراین داریم:

$$r^۲+r'^۲=۲\cos ۲\theta+\frac{۴\sin^۲ ۲\theta}{۲\cos ۲\theta}=\frac{۴}{۲\cos ۲\theta}=\frac{۴}{r^۲}$$

$$S=۲\pi\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}r\cos\theta\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta=۲\pi\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}r\cos\theta\times\frac{۲}{r}d\theta=۸\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\cos\theta d\theta=۴\pi\sqrt{۲}$$

مثال ۱۲: طول قوس منحنی $r = 2(1+\cos\theta)$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» برای به‌دست آورن طول قوس داریم:

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{4(1+\cos\theta)^2+4\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{8+8\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 4\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right) = 16$$

توجه: طبق نکته متن کتاب، طول قوس منحنی‌هایی به شکل $r = a(1\pm\cos\theta)$ همواره برابر با $8a$ است. در این سؤال $a = 2$ و لذا طول قوس برابر ۱۶ است.

مثال ۱۳: سطح محصور به منحنی $r = \sqrt{\theta}$ در ناحیه‌ی $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (r شعاع و θ زاویه با قسمت مثبت محور x هاست) برابر است با ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{64}$ ۲) $\frac{\pi^2}{32}$ ۳) $\frac{\pi^2}{64}$ ۴) $\frac{\pi}{32}$

پاسخ: گزینه «۳» در رابطه با محاسبه‌ی مساحت محصور داریم:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{\theta})^2\,d\theta = \frac{1}{4}\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{64}$$

مثال ۱۴: اگر $0 < \theta < \pi$، طول قوس سیکلوئید به معادله‌ی $\begin{cases} x = a(\theta+\sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta)\end{cases}$ بین مبدأ و نقطه (x,y) کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) axy ۲) $\sqrt{8ay}$ ۳) $a\theta$ ۴) $8ay$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این‌که x و y بر حسب پارامتری از θ ارائه شده‌اند، لذا با استفاده از مطالب ارائه شده در متن درس داریم:

در مبدأ $\theta = 0$، اگر θ را در نقطه (x,y)، θ_0 فرض کنیم، در این صورت:

$$L = \int_0^{\theta_0}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta = \int_0^{\theta_0}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\theta_0}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{\theta_0}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4a\sin\frac{\theta_0}{2} = 4a\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}} = 4a\sqrt{\frac{y}{2a}} = \sqrt{8ay}$$

مثال ۱۵: طول منحنی نمایش $\rho = \sin^3\frac{\theta}{3}$ چقدر است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» در رابطه با روش به‌دست آوردن طول منحنی داریم:

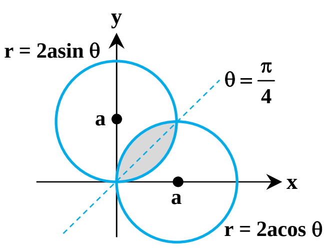
$$L = \int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta = \int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta = \int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

برای تابع $\sin\frac{\theta}{3}$، دوره تناوب 3π است. از این رو حدود انتگرال ۰ تا 3π شده است.

مثال ۱۶: مساحت مشترک بین دایره‌های $r = 2a\cos\theta$, $r = 2a\sin\theta$ را بیابید. (ریاضی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$ ۲) $\frac{a^2\pi}{3}$ ۳) $\frac{a^2}{3}(\pi-1)$ ۴) $\frac{a^2}{3}(\pi-2)$

پاسخ: گزینه «۱»



روش اول: با توجه به شکل مقابل، مساحت خواسته شده را می‌توان ۲ برابر مساحت بین دایره‌ی $r = 2a\cos\theta$ و خط $\theta = \frac{\pi}{4}\ (r=0)$ در نظر گرفت:

$$S = 2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos\theta)^2\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4a^2\cos^2\theta\,d\theta = 4a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow S = 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = 2a^2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right] = 2a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

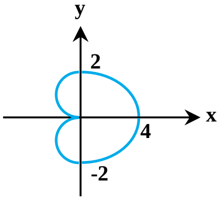
روش دوم: این راه حل با استفاده از انتگرال دوگانه می‌باشد که مبحث آن در این کتاب ارائه نشده است اما جهت اطلاع آن دسته از دانشجویانی که با این مبحث آشنایی دارند، این راه‌حل را نیز ارائه می‌کنیم:

$$S=۲\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{۲a\cos\theta} r\,dr\,d\theta = ۲\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}r^۲\right)\Big]_{۰}^{۲a\cos\theta} d\theta = ۲\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(۲a\cos\theta)^۲ d\theta = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}(۲a\cos\theta)^۲ d\theta = a^۲\left(\frac{\pi}{۲}-۱\right)$$

توجه: هر چند دو نقطه‌ی قطبی $(۰,۰),(۰,\frac{\pi}{۲})$ بر روی هر دو دایره مشترک می‌باشد اما با توجه به این‌که ما از $\theta=\frac{\pi}{۴}$ باید در جهت مثلثاتی حرکت کنیم (پادساعت‌گرد) و به نقطه‌ی دیگر برسیم لذا قطعاً زاویه افزایش خواهد یافت و لذا به همین دلیل نقطه‌ی مشترک دوم را $(۰,\frac{\pi}{۲})$ انتخاب کردیم و نه $(۰,۰)$ به همین جهت در کران‌ها θ از $\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر یافته است.

مثال ۱۷: مساحت محصور به معادله قطبی $r=۲+۲\cos\theta$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) ۴π ۲) ۳π ۳) ۲π ۴) ۶π



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق نکته متن کتاب، مساحت محصور معادله‌ی قطبی $r=a(۱\pm\cos\theta)$ همواره برابر با $\frac{۳\pi}{r}a^۲$ است، در این سؤال $a=۲$، لذا $S=۶\pi$ می‌شود. اما راه‌حل تشریحی به شکل زیر است:

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}f^۲(\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۲+۲\cos\theta)^۲d\theta=۲\int_{۰}^{۲\pi}(۱+۲\cos\theta+\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲})d\theta=۶\pi$$

مثال ۱۸: مساحت ناحیه واقع در داخل دایره $r=۲$ و در خارج دلنمای $r=۲(۱+\cos\theta)$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) $\pi-۱$ ۲) $۴-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۸-\pi$ ۴) $۴-\frac{\pi}{۴}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» نقاط برخورد دو منحنی از حل معادله $۲(۱+\cos\theta)=۲$ بدست می‌آید، که ریشه‌های معادله برابر $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ خواهد بود. بنابراین سطح محصور برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}(۲^۲-۲^۲(۱+\cos\theta)^۲)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}(-۸\cos\theta-۴\cos^۲\theta)d\theta=(-۴\sin\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta-\theta)\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۲}}=۸-\pi$$

مثال ۱۹: معادله‌ی یک منحنی در مختصات قطبی به‌صورت $\rho=e^{\frac{\theta}{۲}}$ است. طول این منحنی از $\theta=۱$ تا $\theta=۲$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sqrt{۳}(e-\sqrt{e})$ ۲) $\sqrt{۵}(e-\sqrt{e})$ ۳) $\sqrt{۵}(e^۲-\sqrt{e})$ ۴) $\sqrt{۳}(e^۲-\sqrt{e})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

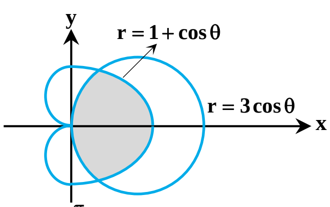
$$L=\int_{۱}^{۲}\sqrt{(e^{\frac{\theta}{۲}})^۲+(\frac{۱}{۲}e^{\frac{\theta}{۲}})^۲}\,d\theta=\int_{۱}^{۲}\frac{\sqrt{۵}}{۲}e^{\frac{\theta}{۲}}d\theta=\sqrt{۵}\,e^{\frac{\theta}{۲}}\Big|_{۱}^{۲}=\sqrt{۵}(e-\sqrt{e})$$

مثال ۲۰: مساحت مشترک دایره $r=۳\cos\theta$ و کاردیوئید $r=۱+\cos\theta$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) π

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$۳\cos\theta=۱+\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{۳}$$



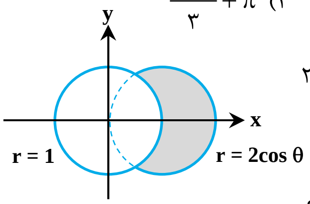
با توجه به شکل مقابل مساحت محدود بین دو منحنی برابر است با (مساحت قسمت سایه زده شده):

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}(۹\cos^۲\theta-(۱+\cos\theta)^۲)d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(۸\cos^۲\theta-۲\cos\theta-۱)d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(۳+۴\cos ۲\theta-۲\cos\theta)d\theta=(۳\theta+۲\sin ۲\theta-۲\sin\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\pi$$

با توجه به شکل فوق برای محاسبه مساحت مشترک بین دو منحنی کافی است مساحت کل دایره را از مساحت به‌دست آمده در فوق کم کنیم. دایره $r=۳\cos\theta$، دایره‌ای به شعاع $\frac{۳}{۲}$ می‌باشد، بنابراین مساحت دایره برابر $\frac{۹\pi}{۴}$ خواهد بود و در نتیجه مساحت مشترک موردنظر برابر $\frac{۹\pi}{۴}-\pi=\frac{۵\pi}{۴}$ خواهد بود.

مثال ۲۱: مساحت ناحیه درون منحنی $r=۲\cos\theta$ و خارج $r=۱$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}+\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+\pi$



پاسخ: گزینه «۲» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم. $۲\cos\theta=۱ \Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}$

بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}((۲\cos\theta)^۲-۱^۲)d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(۴\cos^۲\theta-۱)d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}(۱+۲\cos۲\theta-۱)d\theta=(\theta+\sin۲\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۲۲: مساحت ناحیه محدود به دو منحنی قطبی $r=۱+\sin\theta$ و $r=\sin\theta$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

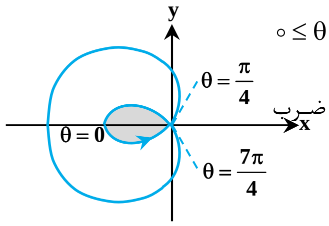
پاسخ: گزینه «۴» دایره $r=\sin\theta$ به شعاع $\frac{۱}{۲}$ درون دلوار قائم $r=۱+\sin\theta$ قرار می‌گیرد. بنابراین کافی است مساحت دلوار را به‌دست آورده، سپس مساحت دایره را از آن کم کنیم.

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۱+\sin\theta)^۲d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۱+۲\sin\theta+\frac{۱-\cos۲\theta}{۲})d\theta=\frac{۳\pi}{۲}$$

با توجه به این‌که مساحت دایره $\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد، مساحت موردنظر برابر $\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}=\frac{۵\pi}{۴}$ خواهد بود.

مثال ۲۳: مساحت درون حلقه کوچکتر محصور شده توسط خم $r=۱-\sqrt{۲}\cos\theta$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{۲}-۱$ ۲) $\frac{\pi-۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi-۳}{۲}$ ۴) $\frac{\pi-\sqrt{۳}}{۲}$



پاسخ: گزینه «۳» از $r=۰$ نتیجه می‌شود $\frac{۷\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{\pi}{۴}$. حلقه‌ی داخلی با توجه به شکل به ازای $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}\le\theta\le۲\pi$ ایجاد می‌شود. با توجه به تقارن شکل کافی است محاسبه برای $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ انجام شود و حاصل را در ۲ ضرب کنیم.

$$S=۲\times\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(۱-\sqrt{۲}\cos\theta)^۲d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(۱-۲\sqrt{۲}\cos\theta+۲\cos^۲\theta)d\theta=(۲\theta-۲\sqrt{۲}\sin\theta+\frac{۱}{۲}\sin۲\theta)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{\pi-۳}{۲}$$

مثال ۲۴: مساحت محصور به وسیله‌ی منحنی $r=\cos۲\theta$ کدام است؟ (مکاترونیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

پاسخ: گزینه «۱» منحنی $r=\cos۲\theta$، رُز ۴ برگ می‌باشد. با توجه به تقارن شکل کافی است مساحت محصور بوسیله‌ی منحنی در فاصله‌ی $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ را محاسبه کرده و سپس حاصل انتگرال را در ۸ ضرب کنیم.

$$S=۸\times\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\cos^۲۲\theta d\theta=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}(\frac{۱+\cos۴\theta}{۲})d\theta=\frac{\pi}{۲}$$

توجه: طبق نکته متن کتاب مساحت محصور توسط منحنی $r=a\cos۲\theta$ برابر با $\frac{\pi a^۲}{۲}$ است، در این سؤال $a=۱$، لذا مساحت برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

مثال ۲۵: طول منحنی $\vec{r}(\theta)=(\theta-\sin\theta)\vec{i}+(۱-\cos\theta)\vec{j}, ۰\le\theta\le\pi$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرمول داریم:

$$L=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{(۱-\cos\theta)^۲+\sin^۲\theta}\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲-۲\cos\theta}\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۴\sin^۲\frac{\theta}{۲}}\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}۲\sin\frac{\theta}{۲}d\theta=-۴\cos\frac{\theta}{۲}\Big|_{۰}^{\pi}=۴$$

مثال ۲۶: مساحت تولید شده به وسیله دور اول مارپیچ ارشمیدسی $\theta \geq 0$ و $r = \frac{1}{2\pi}\theta$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۷)

۱) 1 ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi^2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2}\theta^2 d\theta = \frac{1}{8\pi^2}\times\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}$$

مثال ۲۷: مساحت ناحیه واقع در درون دایره‌ی $r = 2$ و بیرون دلنمای $r = 1+\cos\theta$، کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۸)

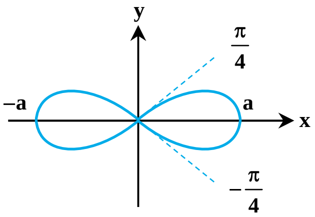
۱) π ۲) $\frac{5}{2}\pi$ ۳) 3π ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرمول مساحت داریم:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (f_1^2(\theta) - f_2^2(\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2^2 - (1+\cos\theta)^2)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 - 2\cos\theta - \cos^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 - 2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta = \frac{5\pi}{2}$$

مثال ۲۸: مساحت سطح حاصل از دوران $r^2 = a^2\cos 2\theta$ حول محور x کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۹)

۱) $4\pi a^2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۲) $\pi a^2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۳) $4\pi(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ ۴) $4\pi a^2$



پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که برای تعیین ناحیه انتگرال‌گیری، باید معادله $r = 0$ را حل کنیم.

$$a^2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

با توجه به نمودار منحنی داده شده کافی است مساحت حاصل از دوران را در فاصله $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ به‌دست آورده و آنرا دو برابر کنیم، یعنی:

$$S = 2(2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta + (a\frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}})^2}d\theta) = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta + \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta = 4\pi a^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

مثال ۲۹: طول قوس منحنی به معادله قطبی $r = 2\cos\theta$ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) π ۲) 2π ۳) 4π ۴) $2+\pi$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا معادله منحنی را در مختصات دکارتی بیان می‌کنیم.

$$r = 2\cos\theta \rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \xrightarrow[r\cos\theta = x]{r^2 = x^2+y^2} x^2+y^2 = 2x \rightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$$

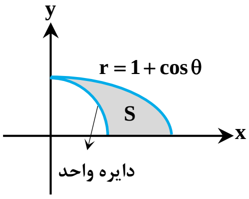
لذا منحنی دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع ۱ می‌باشد و محیط آن برابر 2π است.

$$P = 2\pi r \xrightarrow{r=1} P = 2\pi$$

مثال ۳۰: مساحت ناحیه‌ای که درون دلوار $r = 1+\cos\theta$ و بیرون دایره‌ی $r = 1$ در ربع اول قرار دارد، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{3}{8}\pi$ ۲) $\frac{4}{3}\pi$ ۳) $1+\frac{1}{8}\pi$ ۴) $1+\frac{3}{8}\pi$

پاسخ: گزینه «۳» منحنی‌های دایره و دلوار و ناحیه موردنظر به‌صورت زیر ترسیم می‌شوند:



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+\cos\theta)^2 - 1)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta = 1+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta + 1}{2}d\theta = 1+\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}) = 1+\frac{\pi}{8}$$

مدرسان شریف

فصل هشتم

« اعداد مختلط »

درسنامه: اعداد مختلط و خواص آن

مثال ۱: حاصل $A=(1+2i)(i+2)$ برابر است با:

۱) $5i$ ‏ ۲) $-5i$ ‏ ۳) $4+5i$ ‏ ۴) $4-5i$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از ضرب معمولی داریم:

$$A=(1+2i)(2+i)=2+i+4i+2i^2=2+5i-2=5i$$

مثال ۲: حاصل $A=\dfrac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{i}{10}$ ‏ ۲) $-\dfrac{i}{10}$ ‏ ۳) $\dfrac{1}{10}$ ‏ ۴) $-\dfrac{1}{10}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا باید پرانتزها را در هم ضرب کرده و با استفاده از $i^2=-1$، مخرج را ساده کنیم:

$$A=\frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}=\frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)}=\frac{1}{(1+3i)(3+i)}\Rightarrow A=\frac{1}{3+i+9i+3i^2}=\frac{1}{10i}=\frac{1}{10i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{10i^2}=-\frac{i}{10}$$

مثال ۳: مقدار $\dfrac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^5}$ برابر کدام است؟

۱) $1-i$ ‏ ۲) $1+i$ ‏ ۳) $i-1$ ‏ ۴) $-i-1$

پاسخ : گزینه «۱» می‌دانیم $i^2=-1$، بنابراین داریم:

$$\frac{i^{36}-i^{27}}{i^{124}-i^{12}+i^5}=\frac{(i^2)^{18}-(i^2)^{13}i}{(i^2)^{62}-(i^2)^6+(i^2)^2 i}=\frac{(-1)^{18}-(-1)^{13}i}{(-1)^{62}-(-1)^6+(-1)^2 i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

مثال ۴: حاصل $S=\dfrac{1+i^{1390}+i^{1391}+i^{1392}+i^{1393}}{1-(i^{2011}+i^{2012}+i^{2013}+i^{2014})}$، کدام است؟

۱) 0 ‏ ۲) 1 ‏ ۳) -1 ‏ ۴) $-i$

پاسخ: گزینه «۲» طبق نکته‌ی فوق مجموع هر چهار توان متوالی از i برابر با صفر است. پس مجموع چهار توان i در صورت و مخرج صفرند و لـذا فقـط اعداد ۱ در صورت و مخرج باقی می‌مانند، پس $S=\frac{1}{1}=1$ می‌شود.

مثال ۵: فرض کنید $z\in\mathbb{C}$ و $|z+ai|=|z+bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a\neq b$) در این صورت مقدار $z-\bar{z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $-(a+b)i$ ‏ ۲) $-(a-b)i$ ‏ ۳) $(a-b)i$ ‏ ۴) $(a+b)i$

پاسخ : گزینه «۱» با فرض $z=x+iy$ داریم:

$$|x+iy+ai|=|x+iy+bi|\Rightarrow x^2+(y+a)^2=x^2+(y+b)^2\Rightarrow y+a=\pm(y+b)\Rightarrow y=-(\frac{a+b}{2})\quad(1)$$

$$z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2yi\xrightarrow{(1)}z-\bar{z}=2[-(\frac{a+b}{2})]i=-(a+b)i$$

مثال ۶: در معادله مختلط $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ ، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

۱) $x=-1, y=2$ ۲) $x=1, y=-2$ ۳) $x=0, y=-2$ ۴) $x=1, y=0$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می‌کنیم: $(3x+5y)+(2y-x)i=7+5i$

برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی با یکدیگر برابر باشند، یعنی داریم:

$$\begin{cases}3x+5y=7\\2y-x=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+5y=7\\6y-3x=15\end{cases}\Rightarrow 11y=22\Rightarrow y=2, x=-1$$

مثال ۷: اگر تابع $f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ax\sin n\alpha$ بر x^2+1 بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ چقدر باید باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» برای این‌که تابع $f(x)$ بر x^2+1 بخش‌پذیر باشد، باید ریشه‌های معادله $x^2+1=0$ را به‌دست آوریم و آن‌ها را در ضابطه‌ی $f(x)$ به جای xها قرار دهیم، هر دو ریشه باید $f(x)$ را صفر کنند، پس اول ریشه‌ها را حساب می‌کنیم: $x^2+1=0\Rightarrow(x-i)(x+i)=0\Rightarrow x=\pm i$

$$f(i)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=0\Rightarrow\cos n\alpha+i\sin n\alpha+b\cos n\alpha-ai\sin n\alpha=0\Rightarrow(1+b)(\cos n\alpha)+i(1-a)\sin n\alpha=0$$

برای صفر شدن سمت چپ باید مقادیر حقیقی و موهومی صفر شوند، بنابراین $b=-1$ و $a=1$ می‌شود. اگر قرار دهیم $x=-i$ داریم:

$$f(-i)=(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+b\cos n\alpha-a(-i)\sin n\alpha=0\Rightarrow\cos n\alpha-i\sin n\alpha+b\cos n\alpha+ai\sin n\alpha=0$$
$$\Rightarrow(1+b)\cos n\alpha+i(a-1)\sin n\alpha=0\Rightarrow b=-1, a=1$$

بنابراین $a-b=1-(-1)=2$ می‌شود.

مثال ۸: مثلثی به رئوس $z_1=0$, $z_2=\beta+i$ و $z_3=\alpha+1$ و مثلث دیگری با رئوس $w_1=-1$, $w_2=1+i$ و $w_3=1-i$ داریم. اگر بخواهیم این دو مثلث متشابه باشند، چه رابطه‌ای بین β و α برقرار است؟ (α و β اعداد حقیقی و مخالف صفر هستند)

۱) $\beta=3\alpha$ ۲) $\beta=-3\alpha$ ۳) $\alpha=3\beta$ ۴) $\alpha=-3\beta$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نکته‌ی فوق لازم است دترمینان رئوس دو مثلث برابر با صفر باشد:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\beta+i&\alpha+1\\-1&1+i&1-i\end{vmatrix}=0\Rightarrow[(\beta+i)(1-i)-(1+i)(\alpha+1)]-[0-(-1)(\alpha+1)]+[0-(-1)(\beta+i)]=0$$

$$\Rightarrow\beta-\beta i+i-i^2-i\alpha-i-\alpha-1-\alpha-1+\beta+i=0\Rightarrow(2\beta-2\alpha-1)+(1-\beta-\alpha)i=0$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}2\beta-2\alpha-1=0\\1-\beta-\alpha=0\end{cases}\times 2\Rightarrow 2-2\alpha-2\alpha-1=0\Rightarrow4\alpha=1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\beta=\frac{3}{4}\Rightarrow\beta=3\alpha$$

مثال ۹: اگر $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$ و $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$ ، مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

۱) $-i$ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) i

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. $z_1=e^{\frac{\pi}{5}i}$, $z_2=e^{-\frac{\pi}{5}i}$ داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2}=\frac{(e^{\frac{\pi}{5}i})^4}{e^{-\frac{\pi}{5}i}}=e^{\frac{4\pi}{5}i}.e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

مثال ۱۰: حاصل i^{-i} برابر چیست؟

۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، لذا داریم: $i^{-i}=(e^{\frac{\pi}{2}i})^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}}$

مثال ۱۱: حاصل $(2+2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

۱) $1024\measuredangle60^\circ$ ۲) $1024\measuredangle300^\circ$ ۳) $256\sqrt{2}\measuredangle30^\circ$ ۴) $256\sqrt{2}\measuredangle60^\circ$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $2+2\sqrt{3}i=4e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، بنابراین داریم: $(2+2\sqrt{3}i)^5=(4e^{\frac{\pi}{3}i})^5=4^5(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=1024\angle300^\circ$

مثال ۱۲: حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به تقسیم دو عبارت بر هم و توان ۸ برای صورت کسر بهتر است در مختصات نمایی سؤال را حل کنیم:

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ -1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^8}{2^7\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{8\pi}{3}i}}{e^{\frac{2\pi}{3}i}}=e^{\frac{6\pi}{3}i}=1$$

مثال ۱۳: حاصل $z=(1+i)^{200}$ کدام است؟

۱) -2^{50} ۲) 2^{100} ۳) 2^{50} ۴) -2^{100}

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته فوق $n=200$ و لذا $z=(2i)^{\frac{200}{2}}=(2i)^{100}=2^{100}$ می‌باشد. اگر بخواهیم از نکته‌ی فوق استفاده نکنیم، به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow(1+i)^{200}=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{200}=(\sqrt{2})^{200}e^{i200\times\frac{\pi}{4}}=2^{100}e^{i50\pi}=2^{100}(\cos 50\pi+i\sin 50\pi)=2^{100}\times 1=2^{100}$$

مثال ۱۴: حاصل $z=1+i+i^2+\cdots+i^{1392}$، برابر کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{i+1}{i-1}$ ۴) $-\frac{i+1}{i-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با شرط $k\neq 1$، به ازای هر k همواره رابطه‌ی مقابل را داریم: $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}=\frac{k^n-1}{k-1}$

با توجه به‌صورت سؤال خواهیم داشت:

$$z=\frac{i^{1393}-1}{i-1}=\frac{i(i)^{1392}-1}{i-1}=\frac{i(i^2)^{696}-1}{i-1}=\frac{i(-1)^{696}-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1$$

مثال ۱۵: اگر $z=\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})$ و $w=iz(\frac{1}{z^2-1}+\frac{1}{z^2+1})$، آن‌گاه حاصل w^{1392} کدام است؟

۱) -2^{1392} ۲) -2^{696} ۳) 2^{1392} ۴) 2^{696}

پاسخ: گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم، روش اول ساده‌تر و کوتاه‌تر است و روش دوم طولانی‌تر ولی تکنیکی‌تر و باکلاس‌تر است!

روش اول: ابتدا مخرج مشترک گرفته و iz را در پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$w=iz(\frac{z^2+1+z^2-1}{z^4-1})=iz(\frac{2z^2}{z^4-1})=2i(\frac{z^3}{z^4-1})$$

اما فرم قطبی z به‌صورت $z=e^{i\frac{\pi}{8}}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$w=2i[\frac{(e^{i\frac{\pi}{8}})^3}{(e^{i\frac{\pi}{8}})^4-1}]=2i[\frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}-1}]=2i[\frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{i-1}]$$

می‌دانیم $i-1=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ و لذا داریم:

$$w=2i[\frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}]=\frac{2}{\sqrt{2}}i[e^{i(\frac{3\pi}{8}-\frac{3\pi}{4})}]=\sqrt{2}i[e^{i(\frac{3\pi-6\pi}{8})}]\xrightarrow{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}w=\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{-i\frac{3\pi}{8}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$\Rightarrow w^{1392}=(\sqrt{2})^{1392}e^{i\frac{1392}{8}\pi}=(2)^{696}e^{i174\pi}=2^{696}$$

روش دوم: ابتدا با ضرب z^{-1} در صورت و مخرج، z های صورت کسر را از بین می‌بریم:

$$w=\frac{iz}{z^2-1}+\frac{iz}{z^2+1}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } z^{-1}}w=\frac{iz\times z^{-1}}{z^2\times z^{-1}-z^{-1}}+\frac{iz\times z^{-1}}{z^2\times z^{-1}+z^{-1}}=\frac{i}{z-z^{-1}}+\frac{i}{z+z^{-1}}$$

فرم قطبی z به‌صورت $z=e^{i\frac{\pi}{8}}$ می‌باشد و بنابراین $z^{-1}=e^{-i\frac{\pi}{8}}$، لذا داریم:

$$w=\frac{i}{e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}}+\frac{i}{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}}=\frac{i}{2i\sin\frac{\pi}{8}}+\frac{i}{2\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}}+\frac{i}{2\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{2\cos\frac{\pi}{8}+2i\sin\frac{\pi}{8}}{4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})}{2(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8})}$$

در محاسبات فوق از دو تساوی $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ استفاده کردیم، از طرفی می‌دانیم $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$، بنابراین داریم:

$$w=\frac{\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})}{\sin(2\times\frac{\pi}{8})}=\frac{\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})}{\sin(\frac{\pi}{4})}=\frac{\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8})}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$$

بنابراین w^{1392} با کمک فرمول دموآور به شکل زیر حساب می‌شود:

$$w^{1392}=(\sqrt{2})^{1392}\left[\cos(1392\times\frac{\pi}{8})+i\sin(1392\times\frac{\pi}{8})\right]=2^{696}\left[\cos174\pi+i\sin174\pi\right]=2^{696}\times1+0=\mathbf{2^{696}}$$

مثال ۱۶: تابع Lnz با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$
۲) $\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)-iArctg\frac{y}{x}$
۳) $Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$
۴) $Ln(x^2+y^2)-iArctg\frac{y}{x}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$Lnz=Ln|z|+i\theta=Ln\sqrt{x^2+y^2}+iArctg\frac{y}{x}=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)+iArctg\frac{y}{x}$$

مثال ۱۷: اگر z یک عدد مختلط ناصفر، $Lnz=Lnr+i\theta$ و مقدار اصلی Ln موردنظر باشد، آن‌گاه $Ln(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ برابر است با:

۱) $\frac{i\pi}{3}$
۲) $\frac{i4\pi}{3}$
۳) $-\frac{i\pi}{3}$
۴) $Ln\sqrt{3}-\frac{i\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا اندازه و آرگومانِ عبارت، جلوی لگاریتم را حساب می‌کنیم:

$$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow|z|=1\ ,\ Argz=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow Lnz=Ln|z|+iArgz=Ln1+i\frac{4\pi}{3}=i\frac{4\pi}{3}$$

مثال ۱۸: مقدار $arctgh(1+2i)$ کدام است؟ $(k\in z)$

۱) $\frac{1}{2}Ln2+i\pi(k+\frac{3}{8})$
۲) $\frac{1}{4}Ln2+i\pi(k+\frac{3}{8})$
۳) $\frac{1}{4}Ln^2-i2\pi(k+\frac{3}{8})$
۴) $\frac{1}{2}Ln2+i2\pi(k+\frac{3}{8})$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به تساوی $arctghz=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+z}{1-z})$ داریم:

$$arctgh(1+2i)=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+1+2i}{1-1-2i})=\frac{1}{2}Ln(\frac{2+2i}{-2i})=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+i}{-i})=\frac{1}{2}Ln(i-1)=\frac{1}{2}[Ln\sqrt{2}+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)]=\frac{1}{2}Ln2^{\frac{1}{2}}+i(k\pi+\frac{3\pi}{8})$$
$$=\frac{1}{4}Ln2+i(k\pi+\frac{3\pi}{8})$$

مثال ۱۹: مقدار $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۷۸، مکانیک ـ سراسری ۸۰ و مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$
۲) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
۳) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
۴) $+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» با نوشتن صورت و مخرج کسر به فرم نمایی و سپس ساده کردن به سادگی می‌توان مسأله را حل نمود.

$$z_1=1+\sqrt{3}i\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{1+3}=2\\ \theta=tg^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1})=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}\qquad,\qquad z_2=1-\sqrt{3}i\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{1+3}=2\\ \theta=tg^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1})=\frac{-\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow z_2=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{10}=(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}})^{10}=(e^{\frac{2\pi}{3}i})^{10}=e^{\frac{20\pi}{3}i}=e^{6\pi i}\times e^{\frac{2\pi}{3}i}=1\times e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})$$
$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

توجه: روابط زیر را به خاطر بسپارید:

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=e^{-\frac{3\pi}{2}i}=i\qquad,\qquad e^{\pi i}=e^{-\pi i}=-1\ ,\ e^{-\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i\ ,\ e^{2\pi i}=e^{-2\pi i}=1$$

مثال ۲۰: اگر $a(\cos x + i\sin x) = 1 - i$ ، x کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا $z = 1 - i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم. بنابراین داریم:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = a(\cos x + i\sin x) \Rightarrow a = \sqrt{2} \ , \ x = \frac{7\pi}{4}$$

توجه کنید برای $z = 1 - i$ داریم: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ و $\theta = tg^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

مثال ۲۱: اگر z عددی مختلط باشد و در تساوی $|z + ai| = |z + bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a \neq b$) مقدار $z - \bar{z}$ ، کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۷۹)

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-a(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

پاسخ : گزینه «۱» با توجه به این‌که $z = x + iy$ ، لذا داریم:

$$|x + iy + ai| = |x + iy + bi| \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 + 2ay = x^2 + y^2 + b^2 + 2yb$$

$$\Rightarrow 2y(b-a) = a^2 - b^2 \Rightarrow 2y = (\frac{a^2 - b^2}{b-a}) = \frac{(a-b)(a+b)}{b-a} \Rightarrow 2y = -(a+b) \qquad (1)$$

از طرفی $z - \bar{z}$ برابر با مقدار روبرو است: $z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = i2y \qquad (2)$

بنابراین $\mathbf{z - \bar{z} = -(a+b)i}$.

مثال ۲۲: مقدار اصلی $(1-i)^{1+i}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

۲) $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(Ln\sqrt{2}) + i\sin(Ln\sqrt{2})]$

۳) $\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}}[\cos(Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})]$

۴) $\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(Ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(Ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4})]$

پاسخ : گزینه «۴» در حل این سؤال از دو قاعدهٔ $e^{Lna} = a$ و $Lna^n = nLna$ کمک می‌گیریم:

$$A = (1-i)^{1+i} = e^{(1+i)Ln(1-i)} = e^{(1+i)(Ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4})} = e^{Ln\sqrt{2} + iLn\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}} = e^{Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} . e^{i[Ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}]}$$

$$e^{Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} = e^{Ln\sqrt{2}} . e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow A = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(Ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(Ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4})]$$

مثال ۲۳: اگر $z = \frac{1-i}{1+i}$ ، حاصل $ze^{i\frac{\pi}{2}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) -1 ۲) $-1+i$ ۳) $1-i$ ۴) 1

پاسخ : گزینه «۴»

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \Rightarrow ze^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1-i}{1+i} \times i = \frac{i - i^2}{1+i} = \frac{i+1}{1+i} = 1$$

مثال ۲۴: مقدار اصلی عدد مختلط $(-1)^i$ برابر است با : (مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) -1 ۲) $e^{-\pi}$ ۳) 1 ۴) e^{π}

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $e^{\pi i} = -1$ ، لذا داریم:

$$(-1)^i = (e^{\pi i})^i = e^{-\pi}$$

مثال ۲۵: اگر z یک عدد مختلط باشد، $|ze^{\frac{\pi}{3}i} - z|$ برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $|z|$ ۲) $\frac{1}{2}|z|$ ۳) $\frac{1}{2}|z+1|$ ۴) $|z-i|$

پاسخ : گزینه «۱»

$$|ze^{\frac{\pi}{3}i} - z| = |z(e^{\frac{\pi}{3}i} - 1)| = |z|.|e^{\frac{\pi}{3}i} - 1| = |z||\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) - 1| = |z||-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = |z|(\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}) = |z|$$

مثال ۲۶: هرگاه $A=(-i)^i$ آن‌گاه مقدار اصلی A کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۱)

۱) e
۲) e^{-1}
۳) $e^{\frac{\pi}{2}}$
۳) $e^{\frac{-\pi}{2}}$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$، لذا داریم:

$$(-i)^i=[e^{-\frac{\pi}{2}i}]^i=e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۲۷: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
۲) $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$
۳) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
۴) $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\frac{i-1-i+1+i}{1+i}=\frac{i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

مثال ۲۸: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $\frac{2z}{1+i}-\frac{2z}{i}=\frac{5}{2+i}$ باشد، آن‌گاه z برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}(1-3i)$
۲) $\frac{1}{2}(1+3i)$
۳) $\frac{1}{2}(-1-3i)$
۴) $\frac{1}{2}(-1+3i)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{2z}{1+i}-\frac{2z}{i}=2z(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{i})=\frac{2z}{1-i}=\frac{5}{2+i}\xrightarrow{z=x+iy}2(x+iy)(2+i)=5(1-i)\Rightarrow\begin{cases}4x-2y=5\\2x+4y=-5\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{-3}{2}$$

مثال ۲۹: مقدار $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{40}$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$
۲) $2^{19}(1-i\sqrt{3})$
۳) $-2^{20}(1+i\sqrt{3})$
۴) $2^{20}(1-i\sqrt{3})$

پاسخ: گزینه «۱»

$$(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{40}=[(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}})]^{40}=(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i})^{40}=2^{20}e^{\frac{70\pi}{3}i}=2^{20}e^{22\pi i}\times e^{\frac{4\pi}{3}i}=2^{20}e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$=2^{20}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=2^{20}(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-2^{19}(1+i\sqrt{3})$$

مثال ۳۰: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $z=6e^{\frac{\pi i}{3}}$ باشد، آن‌گاه $|e^{iz}|$ کدام است؟ (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) 6
۲) $e^{-3\sqrt{3}}$
۳) 1
۴) $e^{-\sqrt{6}}$

پاسخ: گزینه «۲» با فرض $z=x+yi$ می‌دانیم:

$$e^z=e^{x+yi}=e^x.e^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)\ \Rightarrow|e^z|=e^x$$

$$\Rightarrow z=6e^{\frac{\pi}{3}i}=6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=6(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=3+3\sqrt{3}i\ \Rightarrow iz=i(3+3\sqrt{3}i)=-3\sqrt{3}+3i\ \Rightarrow|e^{iz}|=|e^{-3\sqrt{3}+3i}|=|e^{-3\sqrt{3}}|=e^{-3\sqrt{3}}$$

مثال ۳۱: اگر $z=x+iy$ و $\frac{\bar{z}}{z}=a+ib$، آن‌گاه مقدار a^2+b^2 کدام است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۴)

۱) 0
۲) 1
۳) 2
۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

راه‌حل تشریحی و طولانی، تبدیل سمت چپ معادله به‌صورت یک عبارت مختلط به‌صورت $\alpha+i\beta$ و مساوی قرار دادن α با a و β با b و در نهایت محاسبه‌ی a^2+b^2 است که بسیار پرزحمت و ناشیانه است! اما راه‌حل بهتر این است که توجه کنیم خواسته‌ی سؤال یعنی a^2+b^2، همان مربع اندازه‌ی عبارت سمت راست معادله، یعنی $|a+ib|^2$ است. پس می‌توانیم تساوی صورت سؤال را به توان ۲ برسانیم:

$$|\frac{\bar{z}}{z}|^2=|a+ib|^2\ \Rightarrow\frac{|\bar{z}|^2}{|z|^2}=a^2+b^2\xrightarrow{|\bar{z}|=|z|}\frac{1}{1}=a^2+b^2\Rightarrow\mathbf{a^2+b^2=1}$$

مثال ۳۲: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ و $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ باشد آن‌گاه: (برق ـ آزاد ۸۴)

۱) $z^3=-i$ ۲) $z^3=1$ ۳) $z^3=i$ ۴) $z^3=-1$

پاسخ : گزینه «۳»

$$z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}\Rightarrow z^3=e^{\frac{5\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

مثال ۳۳: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آن‌گاه $\frac{1-i}{(1+i)^4}$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ ۲) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ۳) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ ۴) $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1-i}{(1+i)^4}=\frac{1-i}{((1+i)^2)^2}=\frac{1-i}{(1+i^2+2i)^2}=\frac{1-i}{(2i)^2}=\frac{1-i}{-4}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

مثال ۳۴: فرض کنیم $z_1=3+i\sqrt{5}$ و $z_1\neq z_2$ عددی باشد که در معادلات $|z_1|=|z_2|$ و نیز $|1-z_1|=|1-z_2|$ صدق می‌کند در این صورت: (نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $z_2=3-i\sqrt{5}$ ۲) $z_2<z_1$ ۳) $z_1<z_2$ ۴) z_1 و z_2 نسبت به محور y متقارن‌اند.

پاسخ : گزینه «۱» قرار می‌دهیم $z_2=x_2+iy_2$، در این صورت از معادلات داده شده نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x_2^2+y_2^2=14\\(1-x_2)^2+y_2^2=9\Rightarrow 1-2x_2+x_2^2+y_2^2=9\xrightarrow{x_2^2+y_2^2=14}x_2=3\ ,\ y_2=-\sqrt{5}\end{cases}$$

مثال ۳۵: مقدار $w=[(\frac{e}{2})(-1-i\sqrt{3})]^{3\pi i}$ کدام است؟ (هوا فضا ـ سراسری ۸۵)

۱) $w=-\exp(2\pi^2)$ ۲) $w=\exp(2\pi^2)$ ۳) $w=-\exp(\pi^2)$ ۴) $w=\exp(i\pi^2)$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا کمی عبارت را ساده می‌کنیم:

$$w=[-e(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)]^{3\pi i}=[-e(e^{\frac{\pi}{3}i})]^{3\pi i}\xrightarrow{-1=e^{-\pi i}}w=[e^{-\pi i}.e.e^{\frac{\pi}{3}i}]^{3\pi i}=e^{-3\pi^2i^2}.e^{3\pi i}.e^{\pi^2i^2}=e^{3\pi^2}\times(-1)\times e^{-\pi^2}=-e^{2\pi^2}$$

مثال ۳۶: اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد، حاصل $Ln(\frac{x+iy}{x-iy})$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $itg^{-1}\frac{x}{y}$ ۲) $tg(\sqrt{x^2+y^2})$ ۳) $tg\sqrt{x^2-y^2}$ ۴) $2itg^{-1}\frac{y}{x}$

پاسخ : گزینه «۴» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. اگر $x+iy=re^{i\theta}$، آن‌گاه $x-iy=re^{-i\theta}$، لذا داریم:

$$Ln(\frac{x+iy}{x-iy})=Ln(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}})=Lne^{2i\theta}=2i\theta Lne=2iArctg\frac{y}{x}$$

مثال ۳۷: اگر $z_\circ=r_\circ e^{i\theta_\circ}$ و $z=re^{i\theta}$، آن‌گاه مقدار $|z-z_\circ|^2$ بر حسب مختصات قطبی z و $z_\circ$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$ ۲) $r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta+\theta_\circ)+r^2$ ۳) $r_\circ^2+2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$ ۴) $r_\circ^2-rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)+r^2$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. سؤال فقط یک سری محاسبات را لازم دارد:

$$|z-z_\circ|=|r\cos\theta+ir\sin\theta-r_\circ\cos\theta_\circ-ir_\circ\sin\theta_\circ|=|(r\cos\theta-r_\circ\cos\theta_\circ)+i(r\sin\theta-r_\circ\sin\theta_\circ)|$$

$$\Rightarrow|z-z_\circ|^2=(r\cos\theta-r_\circ\cos\theta_\circ)^2+(r\sin\theta-r_\circ\sin\theta_\circ)^2$$

$$=r^2\cos^2\theta+r_\circ^2\cos^2\theta_\circ-2rr_\circ\cos\theta\cos\theta_\circ+r^2\sin^2\theta+r_\circ^2\sin^2\theta_\circ-2rr_\circ\sin\theta\sin\theta_\circ$$

$$=r^2+r_\circ^2-2rr_\circ(\cos\theta\cos\theta_\circ+\sin\theta\sin\theta_\circ)=\mathbf{r^2+r_\circ^2-2rr_\circ\cos(\theta-\theta_\circ)}$$

مثال ۳۸: حاصل $\mathrm{Re}[(۱+\cos\theta+i\sin\theta)^n]$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۶)

۱) $۲^n\sin(\frac{n\theta}{۲})$ ۲) $۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}\cos(\frac{n\theta}{۲})$ ۳) $۲^n\sin^n\frac{\theta}{۲}\cos(\frac{n\theta}{۲})$ ۴) $۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}\sin(\frac{n\theta}{۲})$

پاسخ : گزینه «۲» می‌دانیم $۱+\cos\theta=۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}$ و $\sin\theta=۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}$، لذا داریم:

$$(۱+\cos\theta+i\sin\theta)^n=(۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}+۲i\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲})^n=[۲\cos\frac{\theta}{۲}(\cos\frac{\theta}{۲}+i\sin\frac{\theta}{۲})]^n=۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}(e^{i\frac{\theta}{۲}})^n=۲^n\cos^n(\frac{\theta}{۲})e^{\frac{n\theta}{۲}i}$$

$$=۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}[\cos\frac{n\theta}{۲}+i\sin(\frac{n\theta}{۲})]=۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}+i۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}\sin\frac{n\theta}{۲}\Rightarrow \mathrm{Re}(۱+\cos\theta+i\sin\theta)^n=\boldsymbol{۲^n\cos^n\frac{\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}}$$

مثال ۳۹: اگر $|\frac{z-a}{z-\bar{a}}|\le\frac{۱}{۲}$ و $z\ne\bar{a}$، آن‌گاه: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $|z|\ge\frac{۱}{۳}|\bar{a}|$ ۲) $|z|\le۲|a|$ ۳) $|z|\ge۲|\bar{a}|$ ۴) $|z|\le۳|a|$

پاسخ : گزینه «۴»

$$|z|-|a|\le|z-a|\le|z|+|a|\quad,\quad |a|=|\bar{a}|$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲|z-a|\le|z-\bar{a}|\\ ۲|z-a|\ge۲|z|-۲|a|\\ |z-\bar{a}|\le|z|+|a|\end{array}\right\}\Rightarrow ۲|z|-۲|a|\le۲|z-a|\le|z-\bar{a}|\le|z|+|a|\Rightarrow ۲|z|-۲|a|\le|z|+|a|\Rightarrow \boldsymbol{|z|\le۳|a|}$$

مثال ۴۰: برای اعداد مختلط z و w، عبارت $|z+w|^۲+|z-w|^۲$ برابر کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۷)

(توجه: $\bar{z}$ مکمل مختلط z و $\bar{w}$ مکمل مختلط w است.)

۱) $۲(|z|^۲+|w|^۲)$ ۲) $۲(|z|^۲-|w|^۲)$ ۳) $۲(|z|^۲-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^۲)$ ۴) $۲(|z|^۲+z\bar{w}+w\bar{z}-|w|^۲)$

پاسخ : گزینه «۱» مطابق متن کتاب می‌دانیم عبارت داده شده مجموع اقطار متوازی‌الاضلاعی است که توسط دو بردار z و w تشکیل می‌شود و می‌دانیم مقدار آن برابر با مجموع مربعات طول اضلاع و در واقع دو برابر طول دو ضلع است. $|z+w|^۲+|z-w|^۲=۲(|z|^۲+|w|^۲)$

مثال ۴۱: اگر $z=x+iy$ و $w=a-ib$، در این صورت معادله خط $ax+by=c$ در صفحه‌ی مختلط به کدام صورت است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۷)

۱) $\mathrm{Re}(zw)=c$ ۲) $\mathrm{Re}(zw)=a$ ۳) $\mathrm{Re}(zw)=b$ ۴) $\mathrm{Re}(zw)=-a$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا با توجه به گزینه‌ها zw را تشکیل می‌دهیم:

$$zw=(x+iy)(a-ib)=xa-ixb+iya-i^۲yb=xa+by+(ay-xb)i\Rightarrow \boldsymbol{\mathrm{Re}(zw)=ax+by}$$

بنابراین $c=\mathrm{Re}(zw)$ و لذا گزینه «۱» جواب است.

مثال ۴۲: اگر $z_۱,z_۲,z_۳$ سه عددمختلط باشند و $|z_۱|=|z_۲|=|z_۳|=۱$, $z_۱+z_۲+z_۳=z_۱z_۲z_۳$ آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۷)

۱) $z_۱z_۲+z_۱z_۳+z_۲z_۳=-۱$ ۲) $z_۱z_۲+z_۱z_۳+z_۲z_۳=۱$ ۳) $z_۱+z_۲+z_۳=۱$ ۴) $z_۱+z_۲+z_۳=-۱$

پاسخ : گزینه «۱» دو حالت زیر را برای $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}z_۱=i\ ,\ z_۲=-i\ ,\ z_۳=۱\\ z_۱=i\ ,\ z_۲=-i\ ,\ z_۳=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_۱+z_۲+z_۳=۱\\ z_۱+z_۲+z_۳=-۱\end{cases}$$

گزینه‌های (۳) و (۴) صحیح هستند، اما در هر دو حالت حاصل $z_۱z_۲+z_۲z_۳+z_۱z_۳$ را حساب می‌کنیم:

حالت اول: $(i)(-i)+(-i)(۱)+(i)(۱)=+۱-i+i=۱$

حالت دوم: $i(-i)+(-i)(-۱)+(i)(-۱)=+۱+i-i=۱$

در هر دو حالت متوجه می‌شویم، گزینه (۱) غلط است.

مثال ۴۳: اگر $A=(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n+(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^n$، آن‌گاه مقدار A به ازای $n=3k$ و $n\neq 3k$ به ترتیب کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۸)

۱) ۲ و ۱-　۲) ۱- و ۲　۳) ۲و۱　۴) ۱و۲

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا کافیست مقادیر را در مختصات قطبی بنویسیم:

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=e^{i\frac{2\pi}{3}}\quad,\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$A=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^n+(e^{i\frac{4\pi}{3}})^n=e^{i(\pi-\frac{\pi}{3})n}+e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})n}=e^{i\pi n}[e^{-i\frac{n\pi}{3}}+e^{i\frac{n\pi}{3}}]=(-1)^n[2\cos\frac{n\pi}{3}]$$

به ازای $n=3k$ حاصل عبارت فوق برابر ۲ می‌گردد و به ازای $n\neq 3k$ حاصل عبارت فوق برابر ۱- می‌گردد.

مثال ۴۴: اگر $i=\sqrt{-1}$، $\text{Arctg}\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ $(x,y>0)$ آن‌گاه حاصل $i^3\text{Ln}\sqrt{\frac{x+iy}{x-iy}}$ کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{3}{2}$　۲) $\frac{3}{4}$　۳) $\frac{4}{3}$　۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به وجود رادیکال و تقسیم دو عبارت بر هم، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم، اگر $z=x+iy=re^{i\theta}$ آن‌گاه $x-iy=re^{-i\theta}$، بنابراین داریم:

$$i^3\text{Ln}\sqrt{\frac{x+iy}{x-iy}}=i^3\text{Ln}\sqrt{\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}}=i^3\text{Ln}\sqrt{(e^{i\theta})^2}=i^3\text{Ln}e^{i\theta}\Rightarrow(i^3 i\theta)\text{Ln}e=\theta\quad,\quad\theta=\text{Arctg}\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$$

مثال ۴۵: فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند که در تساوی $|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$ صدق کنند. در این صورت مقدار $|\text{Arg}(z_1)-\text{Arg}(z_2)|$ کدام است؟

(ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$　۲) ۰　۳) $\frac{\pi}{4}$　۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. می‌دانیم اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، آن‌گاه z_2-z_1 و z_1+z_2 قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که توسط z_1 و z_2 ایجاد می‌شود، چون گفته شده اندازه این دو قطر برابر است ($|z_1-z_2|=|z_1+z_2|$) پس متوازی الاضلاع در اصل مستطیل است، لذا z_1 بر z_2 عمود است و این یعنی زوایای آن هم با هم $\frac{\pi}{2}$ اختلاف زاویه دارد، پس گزینه (۱) درست است.

مثال ۴۶: حاصل عبارت $A=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۸)

۱) $A=2i^n$　۲) $A=-2i^{n+1}$　۳) $A=-2i^n$　۴) $A=2i^{n+1}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا عبارت داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$A=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n(1-i)^{-2}}=(1-i)^2(\frac{1+i}{1-i})^n=(-2i)(\frac{1+i}{1-i})^n=(-2i)(\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i})^n\overset{*}{=}(-2i)(i)^n=-2i^{n+1}$$

در تساوی (*) صورت و مخرج کسر $\frac{1+i}{1-i}$ را در مزدوج مخرج یعنی $(1+i)$ ضرب کرده‌ایم.

مثال ۴۷: حاصل عبارت i^{i^3} چقدر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۸۹)

۱) $-i$　۲) $e^{-\frac{\pi}{2}}$　۳) $e^{\frac{\pi}{2}}$　۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$، بنابراین داریم:

$$i^{i^3}=(e^{\frac{\pi}{2}i})^{i^3}=e^{\frac{\pi}{2}i^4}=e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۴۸: اگر $n \in N$ و $Im(z^n)=0$، آن‌گاه لزوماً: (آمار ـ سراسری ۸۹)

۱) z عدد حقیقی است. ۲) $\arg z$ مضربی گویا از π است. ۳) z^{n-1} حقیقی نیست. ۴) $\arg z$ مضربی صحیح از π است.

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها به نظر می‌رسد بهتر است z^n را تشکیل دهیم، با فرض این‌که $z=re^{i\theta}$ داریم:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Rightarrow Im(z^n) = r^n \sin n\theta = 0 \Rightarrow n\theta = k\pi \Rightarrow \theta = (\frac{k}{n})\pi$$

بنابراین θ (که همان $\arg z$ است) **مضربی گویا از** π است.

توضیح اضافی: دقت کنید انتخاب گزینه (۱) بسیار ناشیانه است، چون تصور این‌که از تساوی $Im(z^n)=0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $Im(z)=0$ و لذا عدد z حقیقی است، غلط است. به مثال مقابل توجه کنید:

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow z^4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$$

که ملاحظه می‌کنید $Im(z^n)=0$ است، اما $Im(z) = \sin\frac{\pi}{4} \neq 0$.

مثال ۴۹: اگر نقاط z_1, z_2, z_3 واقع بر محیط دایره $|z|=1$ باشند به قسمتی که $z_1+z_2+z_3=0$، آن‌گاه مقادیر $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}$، $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ به ترتیب چقدر است؟ (مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) $0, 0$ ۲) $0, 1$ ۳) $1, 0$ ۴) $1, 1$

پاسخ : گزینه «۱» برای عبارت اول صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} = \frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}$$

می‌دانیم $z\bar{z}=|z|$ و چون $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ لذا داریم:

$$A = \frac{\bar{z}_1}{1}+\frac{\bar{z}_2}{1}+\frac{\bar{z}_3}{1} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3 = \overline{z_1+z_2+z_3} = \bar{0} = 0$$

برای محاسبه B از تساوی A استفاده می‌کنیم داریم:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} = 0 \Rightarrow \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}[(z_1+z_2+z_3)^2-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)]}{z_1z_2z_3} = 0$$

$$\Rightarrow (z_1+z_2+z_3)^2-(z_1^2+z_2^2+z_3^2) = 0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2 = (z_1+z_2+z_3)^2 \xrightarrow{\text{با توجه به فرض}} z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$$

مثال ۵۰: اعداد مختلط $z_1 = x_1+iy_1$ و $z_2 = x_2+iy_2$ را در نظر می‌گیریم. مزدوج مختلط z را با $\bar{z}$ نمایش دهیم. مساحت متوازی‌الاضلاعی در صفحه‌ی مختلط که دو پهلوی مجاورش بردارهای z_1 و z_2 باشند، برابر است با: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۹۰)

۱) $|Re(z_1z_2)|$ ۲) $|Re(z_1\bar{z}_2)|$ ۳) $|Im(z_1\bar{z}_2)|$ ۴) $|Im(z_1z_2)|$

پاسخ : گزینه «۳» اگر دو بردار a و b اضلاع متوازی‌الاضلاعی باشند، مساحت حاصل برابر با:

$$A = |a \times b|$$

حالا که دو بردار $z_1 = x_1+iy_1$ و $z_2 = x_2+iy_2$ اضلاع متوازی الاضلاع می‌باشند، مساحت محصور به آن‌ها عبارت است از:

$$A = |z_1 \times z_2| = |(x_1+iy_1)\times(x_2+iy_2)|$$

$$z_1 \times z_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z_1 \times z_2 = (x_1y_2 - x_2y_1) \Rightarrow A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

اگر گزینه‌ها را محاسبه کنیم، گزینه‌ی سوم معادل عبارت فوق است:

$$(z_1\bar{z}_2) = (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) = (x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i$$

$$Im\, z_1\bar{z}_2 = x_2y_1 - x_1y_2 \Rightarrow |Im\, z_1\bar{z}_2| = |x_2y_1 - x_1y_2|$$

ملاحظه می‌شود که همان عبارت بالا به‌دست آمد.

درسنامه۲: ریشه‌های یک عدد مختلط و معادله‌های مختلط

مثال۱: یکی از کعب‌های عدد $z=\dfrac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟

۱) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ۴) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و در نهایت پس از نوشتن فرم نمایی z، ریشه‌های سوم z را حساب می‌کنیم:

$$z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}=\frac{1+i}{1+i+1+i^2-2i}=\frac{1+i}{1-i}\xrightarrow[\text{در عبارت } (1+i)]{\text{ضرب صورت و مخرج}}z=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+i^2+2i}{+2}=i\ \Rightarrow z=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1}[\cos(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})+i\sin(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})]\xrightarrow{k=0}\sqrt[3]{z}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

مثال۲: اگر $z=-1$، آن‌گاه مقدار آرگومان $z^{\frac{2}{3}}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{10\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$ یا $\frac{10\pi}{3}$ یا 2π

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $z=-1$ را می‌توان به‌صورت $z=e^{i\pi}$ نوشت و بنابراین $r=1$ و $\theta=\pi$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$z^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1}e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{3})}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}z^{\frac{2}{3}}=e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{3})\times 2}=e^{i[\frac{2}{3}(\pi+2k\pi)]}\quad,\quad k=0,1,2\ \Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3}(\pi+2k\pi)\quad,\quad k=0,1,2$$

آرگومان $z^{\frac{2}{3}}$ می‌تواند هر کدام از سه مقدار زیر باشد که به ازای سه مقدار k به‌دست می‌آید:

$$k=0\Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}})=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad k=1\Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3}(3\pi)=2\pi\quad,\quad k=2\Rightarrow \arg(z^{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3}(5\pi)=\frac{10\pi}{3}$$

مثال۳: اگر $z^2+z+1=0$ آنگاه حاصل عبارت $S=(z^{1398}+\frac{1}{z^{1398}})^3+(z^{1397}+\frac{1}{z^{1397}})^2$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۳۹۸ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا دقت کنید؛ از روی معادله $z^2+z+1=0$ می‌توان فهمید ریشه‌ها، ریشه‌های سوم و مختلط عدد یک هستند، در واقع می‌توان گفت ω و ω^2 ریشه‌های این معادله (یا همان ریشه‌های سوم و مختلط عدد یک) هستند. از طرفی گفتیم اگر $z=\omega$، آنگاه می‌توان فرض کرد $\frac{1}{z}=\omega^2$، بنابراین سعی می‌کنیم عبارات را برحسب $\frac{1}{z}$ و z بنویسیم؛ دقت کنید که از روابط $\omega+\omega^2=-1$ و همچنین $\omega^3=1$ می‌توانیم در محاسبات استفاده کنیم: واضح است ۱۳۹۸ بر عدد ۳ بخش‌پذیر است و بنابراین داریم:

$$S=[(z^3)^{466}+\frac{1}{(z^3)^{466}}]^3+[(z^3)^{465}.z^2+\frac{1}{(z^3)^{465}.z^2}]^2$$

با جایگزینی $z=\omega$ و لذا $z^3=\omega^3=1$ داریم:

$$S=(1+1)^3+(\omega^2+\frac{1}{\omega^2})^2\xrightarrow{\frac{1}{\omega^2}=\omega}S=8+(\omega^2+\omega)^2\xrightarrow{\omega^2+\omega=-1}S=8+(-1)^2=9$$

مثال۴: اگر ۱، ω، ω^2، ω^3، ω^4 ریشه‌های پنجم واحد باشند، آن‌گاه حاصل $A=(3-\omega)(3-\omega^2)(3-\omega^3)(3-\omega^4)$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۲۴۳ ۴) ۲۴۲

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به تساوی سمت راست، در این سؤال $n=5$ و $z=3$ می‌باشد. بنابراین با توجه به تساوی سمت راست داریم:

$$A=1+3+3^2+3^3+3^4=121$$

مثال ۵: اگر $a=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$، $b=a+a^2+a^4$ و $c=a^3+a^5+a^6$، آنگاه b و c ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $x^2+x+1=0$ ۲) $x^2+2x+4=0$ ۳) $x^2+x+2=0$ ۴) $x^2-2x+4=0$

پاسخ: گزینه «۳» هرگاه b و c دو عدد حقیقی یا مختلط باشند، جواب معادله‌ی درجه‌ی دوی $(x-b)(x-c)=0$ خواهند بود. یعنی داریم:

$$x^2-(b+c)x+bc=0$$

حالا باید مجموع و حاصل‌ضرب b و c را به‌دست آوریم. توجه داشته باشید که $a=e^{i\frac{2\pi}{7}}$ ریشه‌ی هفتم واحد است. بنابراین $a^7=1$ است.

$$b+c=(a+a^2+a^4)+(a^3+a^5+a^6)=(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)-1=\frac{1-a^7}{1-a}-1=\frac{1-1}{1-a}-1=-1$$

اکنون حاصل‌ضرب bc را حساب می‌کنیم. توجه کنید که $a^7=1$ بنابراین $a^8=a^7a=a$ و به همین ترتیب $a^9=a^2$ است:

$$bc=(a+a^2+a^4)(a^3+a^5+a^6)=(a^4+a^6+a^7)+(a^5+a^7+a^8)+(a^7+a^9+a^{10})=(a^4+a^6+1)+(a^5+1+a)+(1+a^2+a^3)$$

$$=(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)+1+1=\frac{1-a^7}{1-a}+2=0+2=2$$

در نتیجه داریم:

$$x^2-(b+c)x+bc=0\Rightarrow x^2+x+2=0$$

مثال ۶: اگر نقطه‌ی $z=-1+i$، یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^7+az^3+2b=0$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این که ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند، با قرار دادن $z=-1+i$ در معادله داده شده، داریم:

$$z^7+az^3+2b=0\Rightarrow(-1+i)^7+a(-1+i)^3+2b=0$$

$$((-1+i)^2)^3(-1+i)+a(-1+i)^2(-1+i)+2b=0\Rightarrow(1+i^2-2i)^3(-1+i)+a(1+i^2-2i)(-1+i)+2b=0\Rightarrow$$

$$-8(i^2)i(-1+i)+a(2i-2i^2)+2b=0\Rightarrow-8i+8i^2+2ai+2a+2b=0$$

$$-8+2a+2b+i(2a-8)=0\Rightarrow\begin{cases}-8+2a+2b=0\\2a-8=0\Rightarrow a=4\end{cases}\Rightarrow-8+8+2b=0\Rightarrow b=0\Rightarrow \mathbf{a+b=4}$$

روش دیگر: البته با توجه به اینکه توان z، ۷ و ۳ می‌باشد و راه‌حل فوق می‌تواند توأم با خطا باشد، بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید که چون نقطه در ربع دوم قرار دارد لذا $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$، بنابراین داریم:

$$z^7=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^7=2^3\times\sqrt{2}e^{i\frac{21\pi}{4}}=8\sqrt{2}[\cos(\frac{21\pi}{4})+i\sin(\frac{21\pi}{4})]=8\sqrt{2}[\cos(5\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(5\pi+\frac{\pi}{4})]\Rightarrow$$

$$z^7=-8\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-i8\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-8-8\times i=-8-8i$$

$$z^3=(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^3=2\times\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=2\sqrt{2}[\cos(\frac{9\pi}{4})+i\sin(\frac{9\pi}{4})]=2\sqrt{2}[\cos(2\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})]\Rightarrow$$

$$z^3=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+i2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+i2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+2i$$

حالا مقادیر فوق را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$z^7+az^3+2b=0\Rightarrow-8-8i+2a+(2a)i+2b=0\Rightarrow(2a+2b-8)+(2a-8)i=0\Rightarrow a=4,b=0$$

مثال ۷: در معادله $z^2-4z+7+4i=0$ که در آن $i=\sqrt{-1}$، تفاضل دو ریشه به‌صورت $a+ib$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۱» ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta'=\sqrt{b'^2-ac}=\sqrt{(2)^2-1\times(7+4i)}=\sqrt{4-7-4i}=\sqrt{-3-4i}=\sqrt{(2i-1)^2}=2i-1$$

$$z_{1,2}=\frac{2\pm(2i-1)}{1}=2\pm(2i-1)\Rightarrow\begin{cases}z_1=2+2i-1=1+2i\\z_2=2-(2i-1)=3-2i\end{cases}$$

$$z_1-z_2=(1+2i)-(3-2i)=-2+4i=a+ib\Rightarrow a=-2\ ,\ b=4\Rightarrow ab=(-2)(4)=-8$$

مثال ۸: اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادله‌ی $z^2-2z+4=0$ باشند، حاصل $A=z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸- ۳) ۶۴- ۴) ۱۲۸

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به معادله‌ی داده شده، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{4}{1}=4$ است، بنابراین $z_1z_2=4$ می‌شود. پس فقط کافیست $z_1^6+z_2^6$ حساب شود. برای این منظور لازم است ریشه‌های معادله حساب شود:

$$z^2-2z+4=0\Rightarrow z_{1,2}=1\pm\sqrt{-3}=1\pm i\sqrt{3}\Rightarrow z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z_1^6+z_2^6=2^6e^{6i\times\frac{\pi}{3}}+2^6e^{-i6\times\frac{\pi}{3}}=2^6\cos(2\pi)+i2^6\sin 2\pi+2^6\cos(-2\pi)-i2^6\sin 2\pi=2^6\times1+2^6\times1=2\times2^6=2^7=128$$

بنابراین داریم:

$$z_1^6+z_2^6-3z_1^3z_2^3=128-3(4)^3=128-192=-64$$

مثال ۹: اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ آن‌گاه حاصل $z^n+\frac{1}{z^n}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $2\sin n\theta$ ۲) $2\cos n\theta$ ۳) $(2\cos\theta)^n$ ۴) $(2\sin\theta)^n$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار z را حساب می‌کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta\ \Rightarrow z^2-2z\cos\theta+1=0\ \Rightarrow z_{1,2}=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}}{1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}$$

$$z=\cos\theta\pm i\sqrt{\sin^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$$

اگر $z=e^{i\theta}$، آن‌گاه $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

اگر $z=e^{-i\theta}$ آن‌گاه $\frac{1}{z}=e^{i\theta}$، لذا داریم:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{-in\theta}+e^{in\theta}=(\cos n\theta-i\sin n\theta)+(\cos n\theta+i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر $2\cos n\theta$ به‌دست آمد.

مثال ۱۰: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(z-i)^n+\frac{1}{(z-i)^n}+1=0$، کدام است؟ $(k=0,1,\dots,n-1)$

۱) $\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})-i\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})$

۲) $\cos(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})]$

۳) $\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})-i[1+\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})]$

۴) $\cos(\frac{4\pi+6\pi}{3n})+i\sin[\frac{4\pi+6k\pi}{3n}]$

پاسخ: گزینه «۲» برای راحتی در محاسبات فرض کنید؛ $w=z-i$، و لذا داریم:

$$w^n+\frac{1}{w^n}+1=0\Rightarrow w^{2n}+w^n+1=0$$

حالا فرض می‌کنیم $A=w^n$ باشد، لذا داریم:

$$A^2+A+1=0\Rightarrow\begin{cases}A_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\\[2mm] A_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-4}}{2}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin(\dfrac{4\pi}{3})\end{cases}$$

اما چون $w^n=A$، بنابراین کافیست ریشه‌های n ام دو عدد مختلط A_1 و A_2 حساب شوند:

$$w_1=\cos(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{n})\quad,\quad w_2=\cos(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{n})\ ,\ (k=0,\dots,n-1)$$

چون $w=z-i$، لذا ریشه‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$z_1=\cos(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{2\pi+6k\pi}{3n})]\quad,\quad z_2=\cos(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})+i[1+\sin(\frac{4\pi+6k\pi}{3n})]\ ,\ (k=0,\dots,n-1)$$

مثال ۱۱: ریشه‌های معادله‌ی $1-iz-z^2+iz^3+z^4-iz^5=0$ به‌صورت $\cos\alpha+i\sin\alpha$ هستند، بیشترین مقدار α در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{17\pi}{10}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{11\pi}{6}$ ۴) $\frac{9\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» سمت چپ معادله‌ی فوق یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $t_1=1$ و قدر نسبت $q=-iz$ و تعداد جملات $n=6$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{1[1-(-iz)^6]}{1-(-iz)}=0 \Rightarrow \frac{1-i^6z^6}{1+iz}=0 \Rightarrow \frac{1+z^6}{1+iz}=0 \Rightarrow z^6+1=0 \Rightarrow z^6=-1$$

بنابراین باید ریشه‌های ششم عدد ۱- را حساب کنیم، چون $-1=e^{i\pi}$، لذا داریم:

$$z=1\times e^{i\frac{2k\pi+\pi}{6}}=e^{i(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} \qquad k=0,1,\dots,5$$

به ازای $k=5$، داریم:

$$\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{10\pi+\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین بیشترین مقدار α برابر با $\frac{11\pi}{6}$ است.

$$z=\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6})$$

مثال ۱۲: تمام ریشه‌های معادله‌ی $z^n+3z^{n-1}+3z^{n-2}+\dots+3z+2=0$، کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی‌شریف)

۱) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})$, $k=0,1,\dots,n-1$

۲) $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})$, $k=1,\dots,n-1$

۳) $z=-2$, $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})$, $k=0,\dots,n-1$

۴) $z=-2$, $z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n})$, $k=1,\dots,n-1$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا معادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$z^n+z^{n-1}+\dots+z+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)=0$$

$$\Rightarrow z(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)+2(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)=0 \Rightarrow (z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)(z+2)=0$$

یکی از جواب‌ها برابر با $z=-2$ است و «$n-1$» ریشه‌ی دیگر، از حل معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1=0 \xrightarrow{\text{تصاعد هندسی است}} \frac{z^n-1}{z-1}=0 \xrightarrow{z\neq 1} z^n-1=0 \Rightarrow z^n=1$$

بنابراین داریم:

$$z=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n}) \ , \quad (z\neq 1) \ , \ k=1,\dots,n-1$$

k نمی‌تواند مساوی صفر باشد، چون $z=1$ جزو ریشه‌ها نیست.

مثال ۱۳: اگر $z+1=\sum_{p=1}^{6}[\sin\frac{2p\pi}{7}-i\cos\frac{2p\pi}{7}]$، آن‌گاه مقدار z کدام است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) $-i+1$ ۲) $-i-1$ ۳) $i-1$ ۴) i

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید با توجه به فرمول اویلر داریم: $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ و بنابراین از $-i$ فاکتور می‌گیریم، تا فرم استاندارد حاصل شود:

$$S=\sum_{p=1}^{6}[\sin\frac{2p\pi}{7}-i\cos\frac{2p\pi}{7}]=-i\sum_{p=1}^{6}[\cos(\frac{2p\pi}{7})+i\sin(\frac{2p\pi}{7})]=-i\sum_{p=1}^{6}e^{\frac{2p\pi}{7}i}=-i[e^{\frac{2\pi}{7}i}+e^{\frac{4\pi}{7}i}+\dots+e^{\frac{12\pi}{7}i}]$$

عبارت داخل کروشه یک تصاعد هندسی با جمله‌ی اول و قدر نسبت $e^{\frac{2\pi}{7}i}$ و جمله‌ی آخر $e^{\frac{12\pi}{7}i}$ می‌باشد، بنابراین طبق فرمول داریم:

$$S=-i\frac{e^{\frac{2\pi}{7}i}[1-e^{\frac{12\pi}{7}i}]}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=-i\frac{[e^{\frac{2\pi}{7}i}-e^{2\pi i}]}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=-i[\frac{-(1-e^{\frac{2\pi}{7}i})}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}]=(-i)\times(-1)=i$$

بنابراین $z+1=i$ و لذا $z=i-1$ می‌باشد.

مثال ۱۴: اگر $x_n=\cos(\frac{\pi}{۴^n})+i\sin(\frac{\pi}{۴^n})$ و $\prod_{n=۱}^{\infty}x_n=\frac{۱}{۴}z$، آن‌گاه مقدار z کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۲+i۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴+i۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱+i\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» به راحتی با توجه به فرمول $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ داریم:

$$\prod_{n=۱}^{\infty}x_n=\prod_{n=۱}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{۴^n}}=e^{i\frac{\pi}{۴}}\times e^{i\frac{\pi}{۴^۲}}\times e^{i\frac{\pi}{۴^۳}}\times\cdots=e^{i[\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴^۲}+\frac{\pi}{۴^۳}+\cdots]}$$

همان‌طور که می‌بینید عبارت داخل کروشه یک تصاعد هندسی نامحدود با جمله‌ی اول $a=\frac{\pi}{۴}$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد که مـی‌دانـیم حـد مجمـوع آن برابـر با $\frac{\frac{\pi}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}}$ و یا به عبارت دیگر برابر با $\frac{\pi}{۳}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{z}{۴}=\prod_{n=۱}^{\infty}x_n=e^{i\frac{\pi}{۳}}=\cos(\frac{\pi}{۳})+i\sin(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow z=۲+i۲\sqrt{۳}$$

مثال ۱۵: اگر z یکی از ریشه‌های موهومی nام عدد یک باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $۱+z+z^۲+\cdots+z^{n-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $n(n-۱)$

پاسخ: گزینه «۱» چون z یکی از ریشه‌های nام موهومی عدد یک است، لذا $z^n=۱$ و $z\neq۱$ است، چون گفته شده z یکی از ریشه‌های موهومی عدد یک است. پس $z^n-۱=۰$ می‌باشد، لذا داریم:

$$z^n-۱=۰\Rightarrow(z-۱)(۱+z+z^۲+\cdots+z^{n-۱})=۰$$

با توجه به معادله به‌دست آمده باید یکی از پرانتزها برابر عدد صفر شود.

$$z-۱=۰\Rightarrow z=۱ \quad \text{یا} \quad ۱+z+z^۲+\cdots+z^{n-۱}=۰$$

از طرفی گفتیم $z=۱$ قابل قبول نیست، پس حتماً تساوی $۱+z+z^۲+\cdots+z^{n-۱}=۰$ برقرار می‌باشد.

مثال ۱۶: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(z+۱)^۶+(z-۱)^۶=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}+۲+i}{\sqrt{۳}+۲-i}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}-۲+i}{\sqrt{۳}+۲-i}$ ۳) $\frac{۳+i\sqrt{۳}}{۳-i\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}+۲+i}{\sqrt{۳}-۲+i}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر فرض کنیم $z\neq۱$، آن‌گاه می‌توانیم طرفین را بر $(z-۱)^۶$ تقسیم کنیم.

$$\frac{(z+۱)^۶}{(z-۱)^۶}+۱=۰\Rightarrow(\frac{z+۱}{z-۱})^۶=-۱$$

با فرض $w=\frac{z+۱}{z-۱}$، آن‌گاه $w^۶=-۱$، پس باید ریشه‌های ششم -۱ را حساب کنیم و از آن‌جایی که $-۱=۱\times e^{i\pi}$، لذا داریم:

$$w=۱\times e^{\frac{۲k\pi+\pi}{۶}}=\cos(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})+i\sin(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})$$

اما چون فرض کرده بودیم $w=\frac{z+۱}{z-۱}$، لذا داریم:

$$w(z-۱)=z+۱\Rightarrow wz-w=z+۱\Rightarrow z(w-۱)=w+۱\Rightarrow z=\frac{w+۱}{w-۱}$$

و بنابراین داریم:

$$z=\frac{\cos(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})+i\sin(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})+۱}{\cos(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})+i\sin(\frac{۲k\pi+\pi}{۶})-۱}\xrightarrow{k=۰}z=\frac{\cos(\frac{\pi}{۶})+i\sin(\frac{\pi}{۶})+۱}{\cos(\frac{\pi}{۶})+i\sin(\frac{\pi}{۶})-۱}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i\frac{۱}{۲}+۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۳}+۲+i}{\sqrt{۳}-۲+i}$$

مثال ۱۷: ریشه‌های مختلط معادله‌ی $2z^3 + (\bar{z})^3 = 3$، به‌صورت (r,θ_1) و (r,θ_2) نمایش داده می‌شوند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر مقدار $|\theta_1 - \theta_2|$ را نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» سؤال به دو طریق قابل حل می‌باشد، یکی نوشتن z به‌صورت $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ و به توان رساندن و مساوی ۳ قرار دادن قسمت حقیقی با عدد ۳ و همچنین مساوی قرار دادن قسمت موهومی با عدد صفر است، و دیگری نوشتن z به‌صورت قطبی یعنی $z = re^{i\theta}$ و $\bar{z} = e^{-i\theta}$، که ما در حل این تست روش دوم را انتخاب می‌کنیم:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^3 = r^3 e^{i3\theta} = r^3 \cos 3\theta + ir^3 \sin 3\theta \ , \quad \bar{z} = re^{-i\theta} \Rightarrow (\bar{z})^3 = r^3 e^{-i3\theta} = r^3 \cos 3\theta - ir^3 \sin 3\theta$$

مقادیر فوق را در معادله قرار می‌دهیم:

$$2r^3 \cos 3\theta + i2r^3 \sin 3\theta + r^3 \cos 3\theta - ir^3 \sin 3\theta = 3 \Rightarrow 3r^3 \cos 3\theta + ir^3 \sin 3\theta = 3$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های موهومی و حقیقی در طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} r^3 \sin 3\theta = 0 \\ 3r^3 \cos 3\theta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^3 \sin 3\theta = 0 \xrightarrow{r \neq 0} \sin 3\theta = \sin k\pi \Rightarrow 3\theta = k\pi \\ r^3 \cos 3\theta = 1 \end{cases}$$

مقادیری از θ که در تساوی دوم هم صدق کنند، قابل قبول هستند؛ یعنی kهایی که به ازای آن‌ها $\cos k\pi > 0$ باشد، چون داریم:

$$r^3 \cos(k\pi) = 1 \xrightarrow{r^3 > 0} \cos k\pi > 0$$

بنابراین $k = 0$، $k = 2$ و $k = 4$ قابل قبول هستند، (به ازای $k = 1$ و یا $k = 3$، مقادیر $\cos k\pi$ منفی می‌شود و تساوی برقرار نمی‌شود). بنابراین داریم:

$$k = 0 \Rightarrow 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم}} r^3 \cos(0) = 1 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$$

دیگر لازم نیست به ازای سایر «kها» مقدار r را حساب کنیم، (چون r اندازه است و مقدار آن برای تمام ریشه‌ها یکسان است!) فقط باید زاویه θ برای آنها معلوم شود، (دقت کنید $\theta = 0$ جزء خواسته‌های سوال نیست. چون در متن سؤال گفته شده **ریشه‌های مختلط معادله**، این در حالی است که $\theta = 0$ ریشه‌های حقیقی معادله را به ما می‌دهد.

$$k = 2 \Rightarrow 3\theta = 2\pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad k = 4 \Rightarrow 3\theta = 4\pi \Rightarrow \theta_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |\theta_1 - \theta_2| = \left|\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right| = \left|-\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$$

مثال ۱۸: معادله $tgz = i$.

۱) فقط ریشه حقیقی دارد. ۲) فقط ریشه موهومی دارد.

۳) هم ریشه موهومی و هم ریشه حقیقی دارد. ۴) ریشه ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به مقادیر $\sin z$ و $\cos z$ به راحتی مقدار tgz برای ما مشخص است:

$$tgz = \frac{2(e^{iz} - e^{-iz})}{2i(e^{iz} + e^{-iz})} \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = i \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i^2 = -1 \xrightarrow{\text{صورت و مخرج سمت چپ را در } e^{iz} \text{ ضرب می‌کنیم}}$$

$$\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -1 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = -e^{2iz} - 1 \Rightarrow 2e^{2iz} = 0 \Rightarrow$$ چون e^{iz} هیچگاه صفر نمی‌شود، پس معادله ریشه ندارد

مثال ۱۹: مقدار $\cosh^{-1} z$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $Ln[z - (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}]$ ۲) $Ln[(2z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ ۳) $Ln[(z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}]$ ۴) $Ln[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$

پاسخ: گزینه «۴»

$$w = \cosh^{-1} z \Rightarrow \cosh w = z \Rightarrow \frac{e^w + e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^w + e^{-w} = 2z \Rightarrow e^w + \frac{1}{e^w} = 2z$$

$$\Rightarrow e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0 \Rightarrow (e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$$

با فرض $A = e^w$ با یک معادله درجه دوم رو به‌رو هستیم و به راحتی داریم:

$$A^2 - 2zA + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 1}}{1} \xrightarrow{A = e^w} e^w = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} w = Ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

دقت کنید چون تابع $\sqrt{z^2 - 1}$ یک تابع دو مقداری است، پس کافیست یکی از علامت‌های مثبت یا منفی را به دلخواه در نظر بگیریم. بنابراین پاسخ $w = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ می‌باشد.

مثال ۲۰: از معادله ۱- = $\cosh z$، مقدار z کدام است؟

۱) $z=n\pi$ ۲) $z=(2n+1)\pi$ ۳) $z=i(2n+1)\pi$ ۴) $z=in\pi$

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$، بنابراین داریم:

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=-1\Rightarrow e^z+\frac{1}{e^z}=-2\Rightarrow\frac{(e^z)^2+1}{e^z}=-2\Rightarrow(e^z)^2+2e^z+1=0\Rightarrow(e^z+1)^2=0\Rightarrow e^z=-1\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}z=\mathrm{Ln}(-1)$$

می‌دانیم $-1=e^{i\pi}$ لذا داریم:

$$\mathrm{Ln}(-1)=\mathrm{Ln}1+i(\pi+2n\pi)=i(2n+1)\pi\ \Rightarrow z=\mathrm{Ln}(-1)=i(2n+1)\pi$$

مثال ۲۱: معادله ۲ = $\cos z$ وقتی که z عددی مختلط باشد:

۱) دارای بی‌نهایت جواب حقیقی است.
۲) دارای هیچ جوابی نیست چون $-1<\cos z<1$ است.
۳) دارای بی‌نهایت جواب مختلط است.
۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

پاسخ : گزینه «۳»

$$\cos z=\cos x.\cosh y-i\sin x.\sinh y=2\xrightarrow{\text{مقدار قسمت موهومی صفر باشد}}\sin x.\sinh y=0$$

در این قسمت دو حالت را باید در نظر بگیریم، یا $\sin x=0$ و یا $\sinh y=0$ است:

اگر $\sin x=0$ باشد، آن‌گاه $x=k\pi$ خواهد بود و می‌دانیم وقتی $x=k\pi$ باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت: $\cos x=(-1)^k$، لذا داریم:

$$(-1)^k\cosh y=2\ \Rightarrow\cosh y=\pm2\xrightarrow{\cosh y>0}\cosh y=2$$

از معادله‌ی فوق، دو مقدار به صورت $\pm y$ به دست می‌آید چون این دو مقدار به ازای x های مختلف، $(x=k\pi)$ حاصل می‌شوند، z دارای بیشمار جواب مختلط است.

سؤال دانشجو: چگونه نتیجه گرفتیم که z دارای بی‌شمار جواب است؟

پاسخ: ابتدا دیدیم که $x=k\pi$ است. البته چون $\cosh y$ مثبت است باید k زوج باشد. معادله‌ی $\cosh y=2$ نیز دو جواب به صورت $\pm y$ به ما می‌دهد بنابراین خواهیم داشت: $z=k\pi\pm iy$ که $k=0,\pm2,\pm4,\ldots$. دیگر به بررسی حالت $\sinh y=0$ نیز احتیاجی نداریم.

مثال ۲۲: تمام جواب‌های معادله ۲ = $\sin z$ کدام است؟

۱) $z=(2n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}+\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})$
۲) $z=(2n+\frac{1}{2})\pi-\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})$
۳) $z=(n+\frac{1}{2})\pi+i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})$
۴) $z=(2n+\frac{1}{2})\pi-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم، اول با استفاده از رابطه‌ای که بلدیم:

$$\sin z=2\ \Rightarrow z=\mathrm{Arc}\sin 2$$

$$\mathrm{Arc}\sin z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})\ \Rightarrow z=-i\mathrm{Ln}[i(2)+\sqrt{1-(2)^2}]=-i\mathrm{Ln}(2i+\sqrt{-3})=-i\mathrm{Ln}(2i\pm\sqrt{3}i)=-i\mathrm{Ln}i(2\pm\sqrt{3})$$

$$=-i[\mathrm{Ln}i+\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})]=-i\times i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})+2n\pi=(2n+\frac{1}{2})\pi-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})$$

روش دیگر: اگر فرمول توابع مثلثاتی معکوس برای اعداد مختلط را بلد نباشیم، می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم، می‌دانیم $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$، لذا داریم:

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\ \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=4i\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } e^{iz}}(e^{iz})^2-1=4ie^{iz}\ \Rightarrow(e^{iz})^2-4ie^{iz}-1=0\xrightarrow{e^{iz}=A}A^2-4iA-1=0$$

$$\Rightarrow A=2i\pm\sqrt{(2i)^2-(1)(-1)}=2i\pm\sqrt{-4+1}=2i\pm\sqrt{3}i=i(2\pm\sqrt{3})\ \Rightarrow e^{iz}=i(2\pm\sqrt{3})\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}iz=\mathrm{Ln}[i(2\pm\sqrt{3})]$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}[i(2\pm\sqrt{3})]=-i\mathrm{Ln}[i(2\pm\sqrt{3})]=-i[\mathrm{Ln}i+\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})]=-i[i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)]-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})\ \Rightarrow z=(2n+\frac{1}{2})\pi-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})$$

مثال ۲۳: اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه جواب معادله‌ی ۱ = $(\frac{1+i}{1-i})^x$، کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $4n+1$ ۲) $2n+1$ ۳) $4n$ ۴) $2n$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا عبارت داخل پرانتز را با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج ساده می‌کنیم: $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{1-i^2}=\dfrac{1+i^2+2i}{2}=\dfrac{1-1+2i}{2}=i$

بنابراین معادله‌ی $i^x=1$ را داریم که با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد، چون فقط به ازای $x=4n$ همواره تساوی برقرار است.

مثال ۲۴: اگر $z_1 = 1 - 2i$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^4 + 11z^2 - 10z + 50 = 0$ باشد، آن‌گاه مجموع قدرمطلق سه ریشه‌ی دیگر کدام است؟

۱) $\sqrt{5} + 2\sqrt{13}$ ۲) $2\sqrt{10} + \sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{5} + 4$ ۴) $8 + \sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۲» سؤال نسبتاً سختی است! دو راه برای حل آن وجود دارد. یکی این که معادله را بر $1 - 2i$ تقسیم کنیم و معادله را به یک معادله‌ی درجه (۳) تبدیل کنیم که این روش اصلاً خوب نیست. چون اولاً محاسبات طولانی است و ثانیاً حل معادله‌ی درجه (۳) پدید آمده نیز خیلی آسان نخواهد بود. بهترین روش استفاده از این قضیه است: اگر z ریشه‌ی معادله‌ای باشد، $\bar{z}$ نیز ریشه‌ی معادله است، پس تا این‌جا می‌دانیم $z_1 = 1 - 2i$ و $z_2 = 1 + 2i$ ریشه‌های معادله هستند، بنابراین داریم:

$$[z-(1-2i)][z-(1+2i)] = (z-1)^2 - (2i)^2 = (z-1)^2 + 4 = z^2 - 2z + 5$$

یعنی یکی از عامل‌ها به‌صورت بالا می‌باشد. حالا با تقسیم معادله بر این عبارت داریم:

$$\begin{array}{l|l}
z^4 + 11z^2 - 10z + 50 & z^2 - 2z + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-(z^4 - 2z^3 + 5z^2)} & z^2 + 2z + 10 \\
2z^3 + 6z^2 - 10z + 50 & \\
\underline{-(2z^3 - 4z^2 + 10z)} & \\
10z^2 - 20z + 50 & \\
\underline{-(10z^2 - 20z + 50)} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2z + 10) = 0$$

ریشه‌های پرانتز اول که معلوم است، $(z_1 = 1 - 2i, z_2 = 1 + 2i)$ بنابراین لازم است ریشه‌های پرانتز دوم تعیین شوند، لذا داریم:

$$z_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

مجموع قدرمطلق این دو ریشه $2\sqrt{(-1)^2 + (\pm 3)^2} = 2\sqrt{10}$ و قدرمطلق z_2 برابر با $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ است لذا مجموع قدرمطلق سه ریشه‌ی معادله، برابر با $2\sqrt{10} + \sqrt{5}$ است.

مثال ۲۵: اگر سه عدد مختلط kz^2، k^2z و z^3 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند و k عددی مختلط باشد، آن‌گاه z برابر با کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harward)

۱) $\frac{k}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ ۲) $\frac{k}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ۳) $k(-1 + i\sqrt{3})$ ۴) $k(-1 - i\sqrt{3})$

پاسخ: گزینه «۲» مطابق نکته‌ی فوق داریم:

$$(kz^2)^2 + (k^2z)^2 + (z^3)^2 = (kz^2)(k^2z) + (kz^2)(z^3) + (k^2z)z^3$$

$$\Rightarrow k^2z^4 + k^4z^2 + z^6 = k^3z^3 + kz^5 + k^2z^4 \Rightarrow z^6 - k^3z^3 - kz^5 + k^4z^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^3(z^3 - k^3) - kz^2(z^3 - k^3) = 0 \Rightarrow z^2(z^3 - k^3)(z - k) = 0 \Rightarrow z^2(z-k)^2(z^2 + kz + k^2) = 0$$

قطعاً $z \neq 0$ است، چون در غیر این صورت سه نقطه اصلاً مثلث تشکیل نمی‌دهند! بنابراین $z = k$ و $z^2 + kz + k^2 = 0$ و لذا با حل معادله‌ی درجه دوم ریشه‌ها به‌صورت $z = \frac{k}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$، به‌دست می‌آیند، بنابراین فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۶: یکی از کعب‌های عدد $z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۷۹)

۱) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ ۴) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2} = \frac{1+i}{1+i+1+i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{+2} = i \;\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)\right] \xrightarrow{k=0} \sqrt[3]{z} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

مثال۲۷: اگر a و b ریشه‌های مختلط معادله‌ی $z^۲ - ۲z + ۴ = ۰$ باشند، آن‌گاه مقدار عبارت $a^n + b^n + ab$، که در آن n عددی طبیعی است. برابر با کدام گزینه است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۰)

۱) $۲^n \cos(\frac{n\pi}{۳}) + ۴$ ۲) $۲^{n+۱} \cos(\frac{n\pi}{۳}) + ۴$ ۳) $۲^{n+۱} \sin(\frac{n\pi}{۳}) + ۴$ ۴) $۲^n \sin(\frac{n\pi}{۳}) + ۴$

پاسخ : گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. واضح است باید ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست آوریم:

$$z_{۱,۲} = ۱ \pm \sqrt{۱-۴} = ۱ \pm \sqrt{-۳} \Rightarrow a = ۱ + i\sqrt{۳} \ , \ b = ۱ - i\sqrt{۳}$$

برای محاسبه‌ی راحت‌تر، a و b را به‌صورت قطبی می‌نویسیم:

$$a = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i} \ , \ b = ۲e^{-\frac{\pi}{۳}i} \Rightarrow a^n = (۲e^{\frac{\pi}{۳}i})^n = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳}i} \ , \ b^n = (۲e^{-\frac{\pi}{۳}i})^n = ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳}i}$$

از طرفی $ab = (۲e^{\frac{\pi}{۳}i})(۲e^{-\frac{\pi}{۳}i}) = ۴$، (البته این را از صورت سؤال هم می دانستیم، چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{۴}{۱} = ۴$ است) و لذا داریم:

$$a^n + b^n + ab = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳}i} + ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳}i} + ۴ = ۲^n \cos\frac{n\pi}{۳} + i۲^n \sin(\frac{n\pi}{۳}) + ۲^n \cos(-\frac{n\pi}{۳}) + i۲^n \sin(-\frac{n\pi}{۳}) + ۴ = \mathbf{۲^{n+۱}\cos(\frac{n\pi}{۳}) + ۴}$$

مثال۲۸: فرض کنیم که عدد مختلط z ریشه معادله $۵z^{۱۰} - ۱۱z^۶ + ۷z - ۱ = ۰$ باشد در این صورت: (هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $\bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد. ۲) $\bar{z}$ ریشه معادله نمی‌باشد. ۳) $z + \bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد. ۴) $z - \bar{z}$ نیز ریشه معادله می‌باشد.

پاسخ : گزینه «۱» اگر z ریشه چند جمله‌ای درجه n و غیر ثابت $p(z)$ با ضرایب حقیقی باشد، آن‌گاه $\bar{z}$ نیز همواره ریشه $p(z)$ خواهد بود.

مثال۲۹: سه ریشه معادله $x^۳ - ۲x - ۴ = ۰$ عبارتند از: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $-۲ , -۱+i , -۱-i$ ۲) $۲ , ۱+i , ۱-i$ ۳) $۲ , -۱+i , -۱-i$ ۴) $-۲ , ۱+i , ۱-i$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم در معادله‌ی $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{d}{a}$ و حاصل جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ می‌باشد پس در معادله‌ی داده شده چون $d = -۴$، $b = ۰$ و $a = ۱$ می‌باشد لذا حاصل‌جمع ریشه‌ها برابر صفر بوده که فقط گزینه‌های ۳ و ۴ دارای این شرط هستند و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۴ می‌باشد که از بین گزینه‌های ۳ و ۴ فقط گزینه ۳ شرط دوم را هم داراست.

مثال۳۰: یکی از ریشه‌های معادله $z^۴ - ۸ + ۸\sqrt{۳}i = ۰$ که در آن z یک عدد مختلط و $i^۲ = -۱$ است برابر است با: (مکانیک «کلیه گرایشها» ـ آزاد ۸۱)

۱) $z = ۲(\cos\frac{۳\pi}{۱۶} - i\sin\frac{۳\pi}{۱۶})$ ۲) $z = ۲(\cos\frac{\pi}{۸} + i\sin\frac{\pi}{۸})$ ۳) $z = ۲(\cos\frac{۳\pi}{۸} - i\sin\frac{۳\pi}{۸})$ ۴) $z = ۲(\cos\frac{۵\pi}{۱۲} + i\sin\frac{۵\pi}{۱۲})$

پاسخ : گزینه «۴»

$$z^۴ - ۸ + ۸\sqrt{۳}i = ۰ \Rightarrow z^۴ = ۸ - ۸\sqrt{۳}i$$

باید ریشه چهارم عدد مختلط $۸ - ۸\sqrt{۳}i$ محاسبه شود:

$$۸ - ۸\sqrt{۳}i = ۱۶e^{-\frac{\pi}{۳}i} \Rightarrow \sqrt[۴]{۸ - ۸\sqrt{۳}i} = \sqrt[۴]{۱۶}[\cos\frac{۲k\pi - \frac{\pi}{۳}}{۴} + i\sin\frac{۲k\pi - \frac{\pi}{۳}}{۴}] \ , \ k = ۰,۱,۲,۳$$

به ازای $k = ۱$ ریشه معادله فوق برابر است با:

$$\mathbf{z = ۲[\cos\frac{۵\pi}{۱۲} + i\sin\frac{۵\pi}{۱۲}]}$$

مثال۳۱: کعب‌های عدد مختلط $z = \frac{۲i}{i-۱}$ به‌صورت $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ می‌باشد، یکی از θ ها کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$z = \frac{۲i}{i-۱} \xrightarrow{\text{عبارت را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم}} z = \frac{۲i(i+۱)}{(i-۱)(i+۱)} = \frac{۲i^۲ + ۲i}{i^۲ - ۱} = \frac{-۲ + ۲i}{-۲} = ۱ - i$$

که فرم نهایی آن به‌صورت مقابل است: (θ در ربع چهارم است)

$$|z| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲} \ , \ \text{Arctg}\frac{y}{x} = \text{Arctg}(\frac{-۱}{۱}) = -\text{Arctg}۱ = -\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین $z = \sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i}$، اگر بخواهیم زاویه θ را برای ریشه‌ی سوم z حساب کنیم، داریم:

$$\theta = \frac{۲k\pi - \frac{\pi}{۴}}{۳} = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۲}$$

که به ازای $k = ۱$، آن‌گاه $\theta = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۷\pi}{۱۲}$ به‌دست می‌آید که در گزینه «۳» داده شده است.

مثال ۳۲: چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد آن‌گاه یک جواب معادله‌ی $(۵+z)^۵-(۵-z)^۵=۰$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۴)

۱) $۵i\,tg\frac{\pi}{۱۰}$ ۲) $۱۰i\,tg\frac{\pi}{۵}$ ۳) $۵i\,tg\frac{\pi}{۵}$ ۴) $۱۰\,tg\frac{\pi}{۱۰}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$(۵+z)^۵-(۵-z)^۵=۰\Rightarrow(۵+z)^۵=(۵-z)^۵\Rightarrow(\frac{۵+z}{۵-z})^۵=۱\Rightarrow\frac{۵+z}{۵-z}=\sqrt[۵]{۱}=e^{\frac{۲k\pi}{۵}i}\Rightarrow ۵+z=۵e^{\frac{۲k\pi}{۵}i}-ze^{\frac{۲k\pi}{۵}i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{۵(e^{\frac{۲k\pi}{۵}i}-۱)}{e^{\frac{۲k\pi}{۵}i}+۱}=\frac{۵(\cos\frac{۲k\pi}{۵}+i\sin\frac{۲k\pi}{۵}-۱)}{\cos\frac{۲k\pi}{۵}+i\sin\frac{۲k\pi}{۵}+۱}=\frac{۱۰\sin\frac{k\pi}{۵}(i\cos\frac{k\pi}{۵}-\sin\frac{k\pi}{۵})}{۲\cos\frac{k\pi}{۵}(\cos\frac{k\pi}{۵}+i\sin\frac{k\pi}{۵})}=۵i\,tg\frac{k\pi}{۵}$$

مثال ۳۳: یکی از جواب‌های معادله‌ی $z^۳+۳z+۲i=۰$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۸۴)

۱) $i+۱$ ۲) $i-۱$ ۳) $۳i$ ۴) $۲i$

پاسخ : گزینه «۴» به سمت چپ $۶i$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$z^۳+۳z+۲i+۶i-۶i=۰\Rightarrow(z^۳+۸i)+(۳z-۶i)=۰$$

می‌دانیم $۸i=-۸i^۳$ و لذا داریم:

$$(z^۳-۸i^۳)+۳(z-۲i)=۰\Rightarrow(z-۲i)[z^۲+۲iz+(۲i)^۲]+۳(z-۲i)=۰\Rightarrow(z-۲i)(z^۲+۲iz-۱)=۰\Rightarrow z=۲i\ ,\ z^۲+۲iz-۱=۰$$

با توجه به اینکه $z=۲i$ در گزینه‌ها وجود دارد پس گزینه «۴» صحیح است.

مثال ۳۴: اگر $(\cos۲\theta+i\sin۲\theta)^۵=-(\sin\theta+i\cos\theta)^۶$، آن‌گاه θ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۸}$ ۳) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۴}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۸}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$(\cos۲\theta+i\sin۲\theta)^۵=(e^{(۲\theta)i})^۵=e^{(۱۰\theta)i}$$

$$-(\sin\theta+i\cos\theta)^۶=-(\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta))^۶=e^{\pi i}(e^{(\frac{\pi}{۲}-\theta)i})^۶=e^{(۴\pi-۶\theta)i}=e^{-۶\theta i}$$

بنابراین معادله داده شده به‌صورت روبرو در می‌آید:

$$e^{i(۱۰\theta)}=e^{(-۶\theta)i}\Rightarrow۱۰\theta=-۶\theta+۲k\pi\Rightarrow۱۶\theta=۲k\pi\Rightarrow\theta=\frac{k\pi}{۸}$$

مثال ۳۵: اگر $z+\frac{۱}{z}=\sqrt{۲}$، حاصل $z^۴$ کدام است؟ (آبیاری و زهکشی ـ سراسری ۸۶)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۳»

$$z+\frac{۱}{z}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{z^۲+۱}{z}=\sqrt{۲}\Rightarrow z^۲-\sqrt{۲}z+۱=۰\Rightarrow z_{۱,۲}=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲-۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲}i}{۲}$$

$$\Rightarrow z=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}i=\cos\frac{\pi}{۴}\pm i\sin\frac{\pi}{۴}=۱\times e^{\pm\frac{\pi}{۴}i}\Rightarrow z^۴=(e^{\pm\frac{\pi}{۴}i})^۴=(e^{\pm\pi i})=\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)=-۱+۰=-۱$$

مثال ۳۶: یکی از ریشه‌های معادله‌ی $8z^3 - 4z^2 + 2z - 1 = 0$، به‌صورت $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ است. دوتایی مرتب (r,θ) کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۸۶)

۱) $(2, \frac{\pi}{2})$ ۲) $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ۳) $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ ۴) $2, \frac{\pi}{4}$

پاسخ : گزینه «۲» به راحتی واضح است سمت چپ معادله یک سری هندسی با جمله‌ی اول $t_1 = -1$ و قدرنسبت $q = -2z$ می‌باشد، لذا داریم:

$$S = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{-1[1-(-2z)^4]}{1-(-2z)} = \frac{-1+16z^4}{1+2z}$$

پس معادله به شکل $\frac{16z^4 - 1}{1+2z} = 0$ می‌شود، برای این که کسر صفر شود باید صورت آن یعنی $16z^4 - 1$ صفر شود، (البته شرط $z \neq -\frac{1}{2}$ نیز باید برقرار باشد)، لذا داریم: $16z^4 - 1 = 0$

حالا باید معادله‌ی $z^4 = \frac{1}{16}$ را حل کنیم. یعنی لازم است ریشه‌ی چهارم $\frac{1}{16}$ را حساب کنیم، می‌دانیم $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}e^{0i}$ و لذا داریم:

$$z = \sqrt[4]{\frac{1}{16}e^{0i}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}\, e^{(\frac{0+2k\pi}{4})i} = \frac{1}{2}e^{\frac{k\pi}{2}i}$$

که به ازای $k = 1$، آن‌گاه داریم:

$$z = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \Rightarrow r = \frac{1}{2}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (r,\theta) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$$

مثال ۳۷: فرض کنید z_1 و z_2، ریشه‌های معادله $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$، در صفحه‌ی مختلط باشند. حاصل $z_1^9 - z_2^9$ کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۸۷)

۱) 1024 ۲) $512i$ ۳) $1024i$ ۴) $512(1+i)$

پاسخ : گزینه «۳» ابتدا ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم را حساب می‌کنیم:

$$z_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = -\sqrt{3} \pm i$$

پس $z_1 = -\sqrt{3} - i$ و $z_2 = -\sqrt{3} + i$، با نوشتن فرم نهایی این اعداد داریم:

$$z_1 = re^{i\theta}\ ,\ z_2 = re^{-i\theta}\ ,\ r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2\ ,\ \theta = \mathrm{Arctg}\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

بنابراین داریم:

$$z_1^9 - z_2^9 = (re^{i\theta})^9 - (re^{-i\theta})^9 = r^9\underbrace{[e^{i9\theta} - e^{-i9\theta}]}_{2i\sin 9\theta} = 2r^9 i\sin 9\theta \xrightarrow{r=2,\theta=\frac{7\pi}{6}} z_1^9 - z_2^9 = 2^9 \times 2\sin(9\times\frac{7\pi}{6}) = 2^{10} i\sin(\frac{21\pi}{2}) = \mathbf{1024i}$$

مثال ۳۸: جواب کلی معادله‌ی $\sin z = \cosh 4$ کدام است؟ (n یک عدد صحیح نامنفی است.)

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $z = (\pm 2n + \frac{1}{4})\pi \pm 2i$ ۲) $z = (\pm 2n + \frac{1}{3})\pi \pm \frac{4}{3}i$ ۳) $z = (\pm 2n + \frac{1}{2})\pi \pm 4i$ ۴) $z = (\pm 2n + \frac{1}{5})\pi \pm 2i$

پاسخ : گزینه «۳» می‌دانیم $\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$ و لذا داریم:

$$\sin z = \cosh 4 \Rightarrow \sin x.\cosh y + i\cos x.\sinh y = \cosh 4 \Rightarrow \begin{cases} \sin x.\cosh y = \cosh 4 \\ \cos x.\sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \sin x\cosh(0) = \cosh 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{if};k = 2n \Rightarrow \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2})\cosh y = \cosh 4 \Rightarrow y = \pm 4 \quad \text{و} \quad \text{if};k = 2n-1 \Rightarrow -\cosh y = \cosh 4$$

$k = 2n - 1$ غیرقابل قبول می‌باشد، چون یک مقدار مثبت (یعنی $\cosh 4$) برابر با یک مقدار منفی (یعنی $-\cosh y$) شده است.

$$\Rightarrow x = \pm 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad , \quad y = \pm 4 \Rightarrow z = (\pm 2n\pi + \frac{\pi}{2}) \pm 4i$$

مثال ۳۹: اگر $\sqrt{2}z^i = 1+i$ ، آن‌گاه z کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۷)

۱) $z = e^{n\pi+\frac{\pi}{4}}$ ۲) $z = e^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}$ ۳) $z = e^{2n\pi-\frac{\pi}{4}}$ ۴) $z = e^{n\pi-\frac{\pi}{4}}$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا $1+i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \theta = \text{Arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و لذا داریم:

$$\sqrt{2}z^i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z^i = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = (e^{i\frac{\pi}{4}})^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{\pi}{4}}$$

واضح است می‌توان $2n\pi$ را به $\frac{\pi}{4}$ اضافه کرد. بنابراین گزینه «۲» جواب است.

مثال ۴۰: اگر $|z| = 5$ و $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ ، ریشه‌های n ام متمایز واحد باشند، $(n \ge 2)$ ، آن‌گاه مقدار $\sum_{k=0}^{n-1} |z-\omega_k|^2$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۷)

۱) $-26n$ ۲) $2n$ ۳) $-2n$ ۴) $26n$

پاسخ : گزینه «۴» این سؤال را می‌توانیم با عدد گذاری راحت جواب دهیم. اگر فرض کنیم؛ $n = 2$ و $z = 5$ ؛ آن‌گاه داریم:

$$\sum_{k=0}^{1} |z-\omega_k|^2 = |z-\omega_0|^2 + |z-\omega_1|^2$$

چون ω_n ریشه n ام عدد $\underline{\underline{1}}$ است، لذا $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -1$ پس داریم: $= |5-1|^2 + |5-(-1)|^2 = 4^2 + 6^2 = 52$ حاصل سری

در گزینه‌ها به جای n، عدد $\underline{\underline{2}}$ را قرار می‌دهیم، هر کدام برابر با ۵۲ شد، جواب است. فقط گزینه (۴) چنین شرایطی دارد.

مثال ۴۱: جواب معادله $z^2 - i = 0$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۸)

۱) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ۲) $\pm\sqrt{2}(1-i)$ ۳) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ۴) $\pm\sqrt{2}(1+i)$

پاسخ : گزینه «۳» از معادله $z^2 - i = 0$ ، نتیجه می‌شود $z = \sqrt{i}$. پس کافی است $\sqrt{i}$ را محاسبه کنیم.

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}} = e^{(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{2})i} \qquad k = 0,1$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = e^{(5\frac{\pi}{4})i} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

مثال ۴۲: اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + 4 = 0$ باشند. حاصل $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۶۴

پاسخ : گزینه «۱» ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -3 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{3}i \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

حالا ریشه‌ها را به جای a و b درعبارت مورد نظر جایگزین می‌کنیم:

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = (1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i)^7 - (1+\sqrt{3}i)^7 - (1-\sqrt{3}i)^7 = 2^7 - (1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^6 - (1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)^6$$

$$= 2^7 - (1+\sqrt{3}i)(2e^{\frac{\pi}{3}i})^6 - (1-\sqrt{3}i)(2e^{-\frac{\pi}{3}i})^6 = 2^7 - (1+\sqrt{3}i)(2^6\underbrace{e^{2\pi i}}_{\text{یک}}) - (1-\sqrt{3}i)(2^6\underbrace{e^{-2\pi i}}_{\text{یک}}) = 2^7 - 2^6(1+\sqrt{3}i) - 2^6(1-\sqrt{3}i) = 0$$

مثال ۴۳: اگر معادله $z^{7}+z^{5}+z^{3}+1=0$ دارای n ریشه حقیقی و m ریشه موهومی محض باشد، آن‌گاه (n,m) برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) (۳,۴) ۲) (۰,۲) ۳) (۱,۰) ۴) (۱,۶)

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» قرار می‌دهیم $f(z)=z^{7}+z^{5}+z^{3}+1$، در این صورت معادله $f(z)=0$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد (زیرا هر معادله از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد)، و واضح است که ریشه مورد نظر منفی می‌باشد و معادله $f(z)=0$، ریشه مثبت ندارد. حال با توجه به اینکه $f'(z)=7z^{6}+5z^{4}+3z^{2}$ و $f'(z)$ در اعداد منفی تغییر علامت نمی‌دهد $(f'(z)\geq 0)$ پس معادله $f(z)=0$ دقیقاً فقط یک ریشه منفی دارد و ریشه‌های دیگر این معادله همگی مختلط هستند. برای تعیین تعداد ریشه‌های موهومی محض معادله، z را برابر iy در نظر می‌گیریم و آن را در معادله جایگزین می‌کنیم، در این‌صورت:

$$(iy)^{7}+(iy)^{5}+(iy)^{3}+1=0 \Rightarrow -iy^{7}+iy^{5}-iy^{3}+1=0 \Rightarrow i(y^{7}-y^{5}+y^{3})=1$$

معادله اخیر به ازای هیچ مقدار y نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا سمت چپ معادله فوق موهومی محض و سمت راست معادله فوق حقیقی محض می‌باشد پس معادله موردنظر ریشه موهومی محض ندارد.

مثال ۴۴: یکی از ریشه‌های معادله $z^{4}+i=0$ به‌صورت $z=\cos\theta+i\sin\theta$ است، θ کدام است؟ (کشاورزی ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{8}$ ۳) $\frac{11\pi}{8}$ ۴) $\frac{13\pi}{8}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ریشه معادله $z^{4}+i=0$ می‌باشد لذا داریم:

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow z^{4}=\cos 4\theta+i\sin 4\theta \ ,\ z^{4}+i=0 \quad \cos 4\theta+i\sin 4\theta=-i \ \rightarrow \begin{cases}\cos 4\theta=0\\ \sin 4\theta=-1\end{cases}$$

با بررسی گزینه‌ها مشخص است که تنها گزینه (۳) در هر دو شرط صدق می‌کند.

مثال ۴۵: اگر عدد مختلط z_1، جوابی برای معادله‌ی $z^{2}+az+b=0$ باشد، آن‌گاه در حالت کلی جواب دیگر معادله کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{1}{z_1}$ ۲) $-z_1$ ۳) $\overline{z}_1$ ۴) $-z_1-a$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» یک سؤال بسیار ساده! با استفاده از خواص معادلات درجه (۲) می‌دانیم مجموع ضرایب برابر با $-a$ است، بنابراین گزینه‌ای جواب است که وقتی با z_1 جمع می‌شود برابر با $-a$ شود. فقط گزینه «۴» چنین شرایطی دارد!

سؤال دانشجو: مگر قبلاً در قضیه‌ای نگفته بودید اگر z ریشه‌ی یک معادله‌ی (معادله‌ی چند جمله‌ای) باشد، آن‌گاه $\overline{z}$ هم ریشه‌ی معادله است پس چرا گزینه (۳) به عنوان جواب انتخاب نشد؟

پاسخ: دقت کنید در آن قضیه که قبلاً گفتیم؛ حتماً باید ضرایب چند جمله‌ای **حقیقی** باشند، اما در این سؤال معلوم نیست، چون ممکن است a عددی مختلط باشد.

مثال ۴۶: جوابی از معادله $e^{z}=-\sqrt{3}+i$ عبارت است از: (ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۹)

۱) $z=\text{Ln}2-\frac{\pi}{3}i$ ۲) $z=\text{Ln}2+\frac{5\pi}{6}i$ ۳) $z=\text{Ln}\sqrt{2}+\frac{\pi}{3}i$ ۴) $z=2\text{Ln}2-\frac{5\pi}{6}i$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$e^{z}=-\sqrt{3}+i \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z=\text{Ln}(-\sqrt{3}+i)$$

$$(-\sqrt{3}+i)\ \text{اندازه}=r=\sqrt{(-\sqrt{3})^{2}+(1)^{2}}=\sqrt{4}=2 \quad \text{و} \quad (-\sqrt{3}+i)\ \text{آرگومان}=\theta=\text{Arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=-\text{Arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } \theta \text{ در ربع دوم قرار دارد}} \theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

از طرفی داریم:

$$\text{Ln}(re^{i\theta})=\text{Ln}r+i\theta \Rightarrow \ln 2e^{i\frac{5\pi}{6}}=\text{Ln}2+i\frac{5\pi}{6}$$

مثال ۴۷: محیط شش ضلعی منتظمی که رئوس آن ریشه‌های معادله‌ی $z^6=64$ هستند، کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۹)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ : گزینه «۲» واضح است باید ابتدا ریشه‌های ششم ۶۴ را حساب کنیم، می‌دانیم $64=64e^{0i}$ و لذا داریم:

$$z=\sqrt[6]{64}e^{(\frac{2k\pi+0}{6})i}=2e^{\frac{k\pi}{3}i}\ ,\quad k=0,1,2,3,4,5$$

چون ۶ ضلعی منتظم است، یعنی طول تمام ضلع‌های آن با هم برابر است. لذا فاصله‌ی بین هر دو ریشه متوالی را که حساب کنیم، طول ضلع شش ضلعی به‌دست می‌آید. برای راحتی در کار $z_1=2$ و $z_2=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\text{طول هر ضلع شش ضلعی}=|z_2-z_1|=|2e^{\frac{\pi}{3}i}-2|=|2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}-2|=|2\times\frac{1}{2}+2i\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

و چون تعداد اضلاع ۶ تاست، محیط شکل **۱۲** = ۲×۶ می‌شود.

مثال ۴۸: مقدار θ که در معادله زیر صدق می‌نماید، چقدر است؟ $(i=\sqrt{-1})$ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۰)

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)\ldots\ldots(\cos(2r-1)\theta+i\sin(2r-1)\theta)=1$$

۱) $\frac{2k\pi}{r^2}$ ۲) $\frac{2k\pi}{r(r-1)}$ ۳) $\frac{2k\pi}{r(2r-1)}$ ۴) $\frac{2k\pi}{r(r+1)}$

پاسخ : گزینه «۱» با استفاده از رابطه اویلر داریم: $e^{ia\theta}=\cos a\theta+i\sin a\theta$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)\ldots(\cos(2r-1)\theta+i\sin(2r-1)\theta)=e^{i\theta}e^{i3\theta}\ldots e^{i(2r-1)\theta}=e^{i(1+3+\ldots+(2r-1))\theta}=e^{ir^2\theta}$$

از طرفی می‌دانیم $e^{i2k\pi}=1$ است، لذا داریم: $e^{ir^2\theta}=e^{i2k\pi}\Rightarrow r^2\theta=2k\pi\to\theta=\frac{2k\pi}{r^2}$

روش تستی برای حذف دو گزینه: اگر فرض کنیم $r=1$، اونوقت داریم: $\cos\theta+i\sin\theta=1\Rightarrow e^{i\theta}=1\Rightarrow\theta=2k\pi$

در گزینه‌ها $r=1$ قرار می‌دهیم، فقط گزینه‌های (۱) و (۳) هستند که مقدارشان به ازای $r=1$، برابر با $2k\pi$ می‌شود. البته با این روش فقط توانسته‌ایم دو گزینه را حذف کنیم، ولی به هر حال از شانسی زدن بهتر است!!

مثال ۴۹: اگر $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ باشد، حاصل z^4 کدام است؟ (صنایع‌غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $-i$ ۲) ۱ ۳) i ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم و سپس طرفین رابطه حاصل را به توان دو می‌رسانیم، لذا داریم:

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}\to\frac{z^2+1}{z}=\sqrt{2}\to z^2+1=\sqrt{2}\,z\to(z^2+1)^2=2z^2\to z^4+1+\cancel{2z^2}=\cancel{2z^2}\to z^4=-1$$

مثال ۵۰: اگر $z+\frac{1}{z}=1$ باشد، آن گاه $z^2+(\bar{z})^2$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : گزینه «۱» سؤال را به سه روش پاسخ می‌دهیم!

روش اول: می‌توانیم با استفاده از قوانین معادله‌ی درجه (۲) مقدار z را حساب کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=1\Rightarrow z^2-z+1=0\Rightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2+(\bar{z})^2=(x+iy)^2+(x-iy)^2=x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy=2(x^2-y^2)=2(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})=-1$$

روش دوم: در این حالت $z=x+iy$ قرار می‌دهیم:

$$z+\frac{1}{z}=1\Rightarrow x+iy+\frac{1}{x+iy}=1\Rightarrow x^2-y^2+2ixy+1=x+iy$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2+1=x & (1)\\ 2xy=y\xrightarrow{y\neq 0}x=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathbf{x^2=\frac{1}{4}}\end{cases}\xrightarrow{(1)}\frac{1}{4}-y^2+1=\frac{1}{2}\Rightarrow \mathbf{y^2=\frac{3}{4}}$$

$$z^2+(\bar{z})^2=x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy=2(x^2-y^2)=2(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})=-1$$

روش سوم: فرض می‌کنیم $z=e^{i\theta}$، لذا $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$ و بنابراین داریم:

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=1\xrightarrow{e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta}2\cos\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

بنابراین $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و لذا $\bar{z}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$، پس داریم:

$$z^2+(\bar{z})^2=e^{(i\frac{\pi}{3})^2}+e^{(-i\frac{\pi}{3})^2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{2\pi}{3}}=2\cos(\frac{2\pi}{3})=2(-\frac{1}{2})=-1$$

مثال۵۱: به ازای چه مقدار از k، مبدأ مختصات و دو ریشه‌ی مختلط معادله $z^2+az+\frac{a^2}{k}=0$، سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند؟ $(a\in R)$
(عمران ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» واضح است باید دو ریشه‌ی معادله را به‌دست آوریم، اما قبل از آن برای راحتی در محاسبات، $a=1$ قرار می‌دهیم تا در محاسبات راحت‌تر باشیم (دقت کنید در صورت سؤال قید شده a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد)

$$z^2+z+\frac{1}{k}=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\times1\times\frac{1}{k}}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\frac{4}{k}}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{k}}\xrightarrow{i=\sqrt{-1}} z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1}$$

نکته تستی: همین‌جا داوطلب باهوش می‌تواند کار را تمام کند، با نگاهی به عبارت رادیکالی واضح است k باید برابر ۳ شود تا بتوانیم به عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برسیم:

$$\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

شاید لازم به توضیح نباشد اما دلیل این که عبارت رادیکالی باید برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ شود این است که زاویه‌ی بین z_1 و z_2 باید برابر ۶۰ درجه باشد و چون z_1 و z_2 مزدوج هستند، برای همین باید زاویه‌ی هر کدام ۳۰ درجه شود:

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow k=3$$

ادامه‌ی حل تشریحی: اما برای روشن شدن مطلب و نظر به این که احتمالاً تعداد انگشت‌شماری در روز آزمون و یا حتی بعد از آن! متوجه این نکته نخواهند شد، ادامه‌ی حل ارائه می‌شود. گفته شده این دو نقطه و مبدأ باید رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، پس لازم است فاصله‌ی این دو نقطه از هم با فاصله‌ی هر یک از این نقاط از مبدأ برابر باشد:

$$|z_1-z_2|=|(-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1})-(-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1})|=|i\sqrt{\frac{4}{k}-1}|=\sqrt{\frac{4}{k}-1}$$

$$|z_1-0|=|-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1}|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k}-1})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{4}{k}-1)}$$

این دو مقدار را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{\frac{4}{k}-1}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{4}{k}-1)}\Rightarrow\frac{4}{k}-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{4}{k}-1)\Rightarrow\frac{4}{k}-\frac{1}{k}=1\Rightarrow\frac{3}{k}=1\Rightarrow \mathbf{k=3}$$

راه‌حل بهتر و زیباتر: مطابق مطالب متن کتاب می‌دانیم برای اینکه نقاط z_1، z_2 و z_3 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\boxed{z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}$$

با توجه به سؤال، با فرض اینکه $z_3=0$ باشد، چون قرار است z_2 و z_1 ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشند، رابطه‌ی فوق برای این مسأله به شکل زیر می‌شود:

$$z_1^2+z_2^2+0=z_1z_2+0+0\Rightarrow(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=z_1z_2\Rightarrow(z_1+z_2)^2=3z_1z_2$$

دیگر لازم نیست ریشه‌های معادله را حساب کنیم! چون از دبیرستان خواص معادله‌ی درجه (۲) را بلدیم! یعنی z_1+z_2 برابر با $-a$ و z_1z_2 برابر با $\frac{a^2}{k}$ می‌باشد. پس داریم:

$$(-a)^2=3(\frac{a^2}{k})\Rightarrow a^2=3(\frac{a^2}{k})\Rightarrow 1=\frac{3}{k}\Rightarrow k=3$$

مثال۵۲: اگر $z+\frac{4}{z}=2$ باشد، آن‌گاه $(z)^5+(\bar{z})^5$ کدام است؟
(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا از معادله‌ی $z+\frac{4}{z}=2$ مقدار z را به‌دست آورده و سپس حاصل $z^5+(\bar{z})^5$ را می‌یابیم.

$$z+\frac{4}{z}=2\to z^2-2z+4=0\to z=1\pm\sqrt{3}i$$

دقت کنید، عبارت داده شده در صورت سؤال نسبت به z و $\bar{z}$ متقارن است، بنابراین فرقی نمی‌کند کدام جواب را در نظر بگیریم، پس به ازای $z=1+\sqrt{3}i$ جواب را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} z=1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\to z^5=32e^{\frac{5\pi}{3}i}=32(\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3}))=16-16\sqrt{3}i \\ \bar{z}=1-\sqrt{3}i=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow(\bar{z})^5=32e^{-\frac{5\pi}{3}i}=32[\cos(\frac{-5\pi}{3})+i\sin(\frac{-5\pi}{3})]=16+16\sqrt{3}i \end{array}\right\}\Rightarrow z^5+(\bar{z})^5=\mathbf{32}$$

درسنامه۳: نواحی در صفحه‌ی مختلط

مثال۱: مکان هندسی نقاط $z = x + iy$ واقع در صفحه مختلط که در تساوی $|\frac{z+1}{z-1}| = 4$ صدق کنند، کدام است؟

۱) $(x - \frac{17}{15})^2 + y^2 = (\frac{8}{15})^2$
۲) $(x - \frac{1}{15})^2 + y^2 = (\frac{8}{15})^2$
۳) $(x + \frac{1}{15})^2 + y^2 = (\frac{8}{15})^2$
۴) $(x + \frac{17}{15})^2 + y^2 = (\frac{8}{15})^2$

پاسخ : گزینه «۱»

$$|\frac{z+1}{z-1}| = 4 \Rightarrow \frac{|(x+1)+iy|}{|(x-1)+iy|} = 4 \Rightarrow |(x+1)+iy| = 4|(x-1)+iy| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 16[(x-1)^2 + y^2] \Rightarrow 15x^2 + 15y^2 - 34x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{34}{15}x + 1 = 0 \Rightarrow (x - \frac{17}{15})^2 + y^2 = (\frac{8}{15})^2$$

مثال۲: مکان هندسی معادله $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ که در آن z یک متغیر مختلط است، کدام است؟

۱) یک دایره به مرکز $4i$ و شعاع ۱
۲) یک کره به مرکز $4i$ و شعاع
۳) یک مربع با ضلع ۳
۴) یک بیضی به کانون‌های $\pm 4i$ و قطر بزرگ ۱۰

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به اینکه $10 > 8 = |8i| = |4i - (-4i)|$، لذا معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک بیضی می‌باشد و لذا گزینه «۴» صحیح است.

مثال۳: نمودار معادله $x^2 + y - 2x = 0$ کدام است؟

۱) بیضی
۲) دایره
۳) سهمی
۴) هذلولی

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به بند (۴) مطالب فوق ضریب y^2 صفر است، لذا معادله ذکر شده مربوط به **سهمی** می‌باشد.

مثال۴: معادله‌ی پارامتری $\begin{cases} x = 1 + 2\cosh t \\ y = 3\sinh t \end{cases}$، معرف دقیق کدام منحنی است؟

۱) شاخه راست یک هذلولی
۲) هذلولی
۳) سهمی
۴) بیضی

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$، لذا باید $\cosh t$ را برحسب x و $\sinh t$ را برحسب y بنویسیم:

$$\cosh t = \frac{x-1}{2}, \sinh t = \frac{y}{3} \quad \text{و} \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow (\frac{x-1}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2 = 1$$

معادله‌ی فوق نمایانگر یک هذلولی است و چون $\cosh t \geq 1$، در نتیجه $\frac{x-1}{2} \geq 1$ و به عبارت دیگر $x \geq 3$، پس **نیمه راست یک هذلولی** است.

مثال۵: مکان هندسی نقطه‌ی $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط و غیرحقیقی z که در رابطه‌ی $z^3 + z^2 - 2z = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 2\bar{z}$ صدق کند، کدام است؟

۱) نیم‌دایره
۲) هذلولی
۳) سهمی
۴) بیضی

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید توجه کنید سمت راست تساوی مزدوج سمت چپ تساوی است، چرا که همواره داریم: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3}$

و بنابراین داریم:

$$\bar{z}^3 + \bar{z}^2 - 2\bar{z} = \overline{z^3 + z^2 - 2z}$$

در واقع اگر سمت چپ w باشد، سمت راست $\bar{w}$ است، پس تساوی $w = \bar{w}$ را داریم و این یعنی $\text{Im}(w) = 0$ است. پس کافی است قسمت موهومی سمت چپ را حساب کرده و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$(x+iy)^3 + (x+iy)^2 - 2(x+iy) = x^3 + (iy)^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + x^2 + (iy)^2 + i2xy - 2x - 2iy$$

$$= x^3 - iy^3 + i3x^2y - 3xy^2 + x^2 - y^2 + i2xy - 2x - (2y)i \Rightarrow \text{Im}(w) = -y^3 + 3x^2y + 2xy - 2y$$

$$\Rightarrow \text{Im}(w) = y(-y^2 + 3x^2 + 2x - 2) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0$$

معادله‌ی فوق، نمایانگر یک **هذلولی** است. البته اگر بخواهید از نکات فوق استفاده نکنید، می‌توانید فرض کنید $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ و محاسبات را در طرفین انجام دهید و در نهایت به نتیجه‌ی فوق برسید.

مثال ۶: اگر $z = x+iy$، آن‌گاه کلیه نقاطی از صفحه z که به ازای آنها $\operatorname{Re}(\frac{z-i}{z+i})<1$ و $\operatorname{Im}(\frac{z-i}{z+i})<a$ ($a>0$ و عددی ثابت است.) عبارتست از ...

(برق ـ سراسری ۷۹)

۱) نیمه پائینی درون دایره $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$

۲) نیمه بالائی درون دایره‌ی $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$

۳) نیمه بالائی بیرون دایره‌ی $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$

۴) نیمه پائینی بیرون دایره‌ی $(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}i$$

$$\operatorname{Re}(\frac{z-i}{z+i})=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}<1 \Rightarrow x^2+y^2-1<x^2+y^2+2y+1 \Rightarrow y>-1 \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}(\frac{z-i}{z+i})=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}<a \Rightarrow -\frac{2x}{a}<x^2+(y+1)^2 \Rightarrow x^2+(y+1)^2+\frac{2x}{a}>0 \Rightarrow \mathbf{(x+\frac{1}{a})^2+(y+1)^2>\frac{1}{a^2}}$$

مثال ۷: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط و α و β اعداد حقیقی غیرمنفی با شرط $\alpha+\beta=1$ باشند، مکان هندسی نقاط نظیر $z=\alpha z_1+\beta z_2$ چگونه است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) خط گذرنده بر دو نقطه متناظر z_1 و z_2

۲) دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه نظیر z_1 و z_2

۳) بیضی به کانون‌های نقاط نظیر z_1 و z_2

۴) پاره خط واصل به دو نقطه متناظر z_1 و z_2

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» می‌دانیم معادله پاره‌خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_2 به‌صورت مقابل می‌باشد: $z=(1-k)z_1+kz_2$

بنابراین مکان هندسی $z=\alpha z_1+\beta z_2$ را با توجه به شرط $\alpha+\beta=1$ به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $z=(1-\beta)z_1+\beta z_2$

در نتیجه مکان هندسی فوق، پاره‌خط واصل بین دو نقطه z_1 و z_2 می‌باشد.

مثال ۸: چنانچه $z=x+iy$ باشد، آن‌گاه $|z-2|=3$:

(برق ـ آزاد ۸۱)

۱) یک خط است.

۲) یک دایره است.

۳) یک بیضی است.

۴) دو خط است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۲»

$$|z-2|=3 \Rightarrow |x+yi-2|=3 \Rightarrow |(x-2)+yi|=3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=9$$

ملاحظه می‌شود که به یک معادله‌ی دایره به مرکز $\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ و شعاع ۳ رسیدیم.

توجه: به طور کلی $|z-z_0|=r$ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r می‌باشد.

مثال ۹: معادله $|z-2|=|z+4|$ که در آن z عددی مختلط است نمایشگر چه نقاطی از صفحه مختلط است؟

(هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) دایره

۲) بیضی

۳) سهمی

۴) خط راست

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» کافیست به جای z در طرفین تساوی $z=x+iy$ قرار دهیم:

$$|z-2|=|z+4| \Rightarrow |x+iy-2|=|x+iy+4| \Rightarrow (x-2)^2+y^2=(x+4)^2+y^2 \Rightarrow x^2+4-4x=x^2+16+8x \Rightarrow x=-1$$

مثال ۱۰: معادله $|\frac{z-3i}{z+i}|=1$ در صفحه z ها معرف کدام شکل است؟

(مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) بیضی

۲) خط $y=0$

۳) خطهای $y=x$, $y=-x$

۴) خط $y=1$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» کافیست $z=x+iy$ قرار دهیم و اندازه‌ها را حساب کرده و به توان ۲ برسانیم:

$$|\frac{z-3i}{z+i}|=1 \Rightarrow |x+iy-3i|=|x+iy+i| \Rightarrow x^2+(y-3)^2=x^2+(y+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2+9-6y=x^2+y^2+1+2y \Rightarrow 8y=8 \Rightarrow \mathbf{y=1}$$

مثال ۱۱: دو عدد a و b ثابت و مختلطاند. اگر $z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}=b\bar{b}$ آن‌گاه مکان هندسی نقطه M(x,y) متناظر z کدام است؟

(مکانیک ـ سراسری ۸۳ و MBA سراسری ۸۴)

۱) دایره

۲) نیمدایره

۳) نقطه ثابت

۴) خط راست

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود. با توجه به خواص اعداد مختلط داریم:

$$z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}=z(\bar{z}-\bar{a})-a(\bar{z}-\bar{a})=(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(z-a)\overline{(z-a)}=b\bar{b} \Rightarrow |z-a|^2=b^2 \Rightarrow |z-a|=|b|$$

مثال ۱۲: **مکان هندسی نقطه M متناظر با عدد مختلط z که در رابطه $z^3+2z^2-3z=(\bar{z})^3+2(\bar{z})^2-3(\bar{z})$ صدق کند، کدام است؟**
(MBA ـ سراسری ۸۳)

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) هذلولی متساوی‌الساقین

☑ **پاسخ :** گزینه «۳»

$$z=x+iy\Rightarrow z^2=x^2-y^2+2xyi\Rightarrow z^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$$
$$z=x+iy\Rightarrow \bar{z}^2=x^2-y^2-2xyi\Rightarrow \bar{z}^3=x^3-3xy^2+(y^3-3x^2y)i$$

با جایگزینی در رابطه داده شده خواهیم داشت:

$$x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i+2(x^2-y^2+2xyi)-3(x+iy)=x^3-3xy^2+(y^3-3x^2y)i+2(x^2-y^2-2xyi)-3(x-iy)$$
$$\Rightarrow (3x^2y-y^3+4xy-3y)i=(y^3-3x^2y-4xy+3y)i\ \Rightarrow y^3-3x^2y-4xy+3y=0$$
$$\Rightarrow y(y^2-3x^2-4x+3)=0\ \Rightarrow y=0\quad \text{یا}\quad y^2-3x^2-4x+3=0$$

مکان هندسی موردنظر محور x ها یا یک هذلولی می‌باشد (هذلولی مربوطه متساوی‌الساقین نمی‌باشد زیرا قدرمطلق ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر نیست.)

مثال ۱۳: **مکان عدد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $z\bar{z}+(1+i)z+\overline{(1+i)z}+1=0$ صدق می‌کند، کدام است؟** (معدن و علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) محیط دایره‌ای است به مرکز $c(1,1)$ و شعاع یک
۲) محیط دایره‌ای به مرکز $c(1,-1)$ و شعاع یک
۳) محیط دایره‌ای است به مرکز $c(-1,1)$ و شعاع یک
۴) محیط و داخل دایره‌ای است به مرکز $c(1,1)$ و شعاع یک

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با فرض اینکه $z=x+iy$، آن‌گاه $\bar{z}=x-iy$ و لذا داریم:

$$(x+iy)(x-iy)+(1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy)+1=0$$
$$x^2+y^2+x+iy+ix-y+x-iy-ix-y+1=0\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y+1=0\Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=1$$

که معادله‌ی **دایره‌ای به مرکز $(-1,1)$ و شعاع ۱** است.

مثال ۱۴: **چنانچه $i=\sqrt{-1}$ باشد، آن‌گاه معادله $|z-i|=2$:** (برق ـ آزاد ۸۳)

۱) یک بیضی است. ۲) یک نقطه است. ۳) یک دایره است. ۴) یک خط است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا باید z^2 را حساب کنیم و سپس قسمت حقیقی را جدا کنیم، داریم:

$$z=x+iy\Rightarrow z^2=(x+iy)^2=x^2+(iy)^2+i2xy=x^2-y^2+i2xy\ \Rightarrow \mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2$$

از طرفی می‌دانیم $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و این یعنی $|z|^2=x^2+y^2$، بنابراین خواهیم داشت: $x^2+y^2+3(x^2-y^2)=4\Rightarrow\ 4x^2-2y^2=4$

پس مکان فوق، نشان‌دهنده‌ی هذلولی است.

مثال ۱۵: **مکان هندسی $|z|^2+3\mathrm{Re}(z^2)=4$، کدام است؟** (مکانیک ـ آزاد ۸۳)

۱) هذلولی ۲) سهمی ۳) دایره ۴) بیضی

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» ابتدا باید z^2 را حساب کنیم و سپس قسمت حقیقی را جدا کنیم، داریم:

$$z=x+iy\Rightarrow z^2=(x+iy)^2=x^2+(iy)^2+i2xy=x^2-y^2+i2xy\ \Rightarrow \mathrm{Re}(z^2)=x^2-y^2$$

از طرفی می‌دانیم $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ و این یعنی $|z|^2=x^2+y^2$، بنابراین خواهیم داشت: $x^2+y^2+3(x^2-y^2)=4\Rightarrow\ 4x^2-2y^2=4$

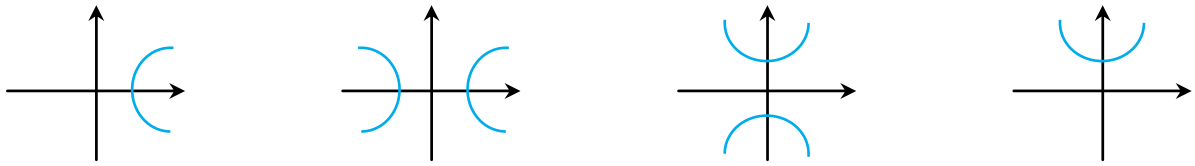
پس مکان فوق، نشان‌دهنده‌ی هذلولی است.

مثال ۱۶: **معادله $|z-1|+|z+1|=4$ نمایش دهنده چه شکلی در صفحه مختلط است؟** (عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) خط ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) مجموعه تهی

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» شکل داده شده مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت ۱ و ۱- برابر مقدار ثابت ۴ می‌باشد، که همان بیضی می‌باشد.

مثال ۱۷: اگر $z = x + iy$، آن‌گاه نمودار $\mathrm{Re}(\bar{z}^2) = 1$ به کدام صورت است؟ (نساجی ـ سراسری ۸۴)



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ: گزینه «۳» کافیست بدانیم ضابطه‌ی معادله‌ی هذلولی (افقی و عمودی) به چه شکل است. ابتدا توجه کنید که $\bar{z} = x - iy$ و لذا $(\bar{z})^2 = x^2 + (-iy)^2 - i2xy$

و به عبارت دیگر $(\bar{z})^2 = x^2 - y^2 - i2xy$ می‌شود، بنابراین $\mathrm{Re}(\bar{z})^2 = x^2 - y^2$ و معادله‌ی داده شده به‌صورت $x^2 - y^2 = 1$ است که معادله‌ی یک هذلولی است و چون ضریب y منفی است، پس **هذلولی افقی** است و گزینه «۳» جواب است.

مثال ۱۸: اگر سه نقطه z_1, z_2, z_3 از صفحه مختلط در رابطه $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$ صدق کند که در آن α و β و γ اعداد حقیقی با شرط $\alpha + \beta + \gamma = 0$ باشند، آن‌گاه: (مکانیک «ساخت و تولید» ـ آزاد ۸۴)

۱) سه نقطه، رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین است.
۲) سه نقطه، رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه است.
۳) سه نقطه، در یک راستا قرار دارند.
۴) سه نقطه، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

پاسخ: گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -(\alpha + \beta) \;,\; (\alpha + \beta) \neq 0$$

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \Rightarrow \alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha + \beta) z_3 \Rightarrow z_3 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} z_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} z_2$$

توجه شود چون $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$، پس z_3 بر روی پاره‌خط واصل z_1 و z_2 قرار دارد.

مثال ۱۹: مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط $z = \cosh(2 + it); t \in \mathbb{R}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۵)

۱) دایره
۲) هذلولی
۳) بیضی
۴) سهمی

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم: $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ و نیز $e^z = e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ پس داریم:

$$\cosh(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\alpha + \beta i} + e^{-\alpha - \beta i}}{2} = \frac{1}{2}[e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) + e^{-\alpha}(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))]$$

$$\Rightarrow \cosh(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2}[(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\cos\beta + (e^{\alpha} - e^{-\alpha})i\sin\beta] = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\cos\beta + \frac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{2} i\sin\beta = \cosh\alpha.\cos\beta + \sinh\alpha.i\sin\beta$$

$$\Rightarrow z = x + yi = \cosh(2 + it) \overset{\alpha = 2, \beta = t}{=\!=\!=\!=} \cosh 2.\cos t + \sinh 2.i\sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cosh 2.\cos t \Rightarrow \dfrac{x}{\cosh 2} = \cos t \Rightarrow \dfrac{x^2}{(\cosh 2)^2} = \cos t \\ y = \sinh 2.\sin t \Rightarrow \dfrac{y}{\sinh 2} = \sin t \Rightarrow \dfrac{y^2}{(\sinh 2)^2} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{(\cosh 2)^2} + \frac{y^2}{(\sinh 2)^2} = 1$$

مکان هندسی مورد نظر معادله‌ی بیضی است.

مثال ۲۰: مکان هندسی مجموعه تمام z های در صفحه مختلط که در شرط $|z - 1| + |z + 1| = 1$ صدق می‌کنند کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۶)

۱) پاره‌خط
۲) مجموعه تهی
۳) بیضی
۴) دایره

پاسخ: گزینه «۲» به طور کلی معادله‌ی $|z - z_1| + |z - z_2| = a$ به شرطی که $|z_1 - z_2| > a$ باشد مجموعه‌ی تهی خواهد بود و اگر $|z_1 - z_2| < a$ معادله‌ی یک بیضی می‌باشد.

مثال ۲۱: در صفحه‌ی اعداد مختلط معادله $|z+3+4i|-|z-(2+i)|=75$ معرف چه شکلی است؟ (صنایع سیستم ـ سراسری ۸۶)

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) دو خط راست

پاسخ: هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

به طور کلی معادله‌ی $|z-z_1|-|z-z_2|=a$ به شرطی که $|z_1-z_2|>a$ باشد نمایش‌دهنده یک هذلولی می‌باشد و اگر $|z_1-z_2|<a$ مجموعه تهی خواهد بود. حال توجه کنید که: $|z_1-z_2|=|2+i+(3+4i)|=|5+5i|=\sqrt{50}<75 \Rightarrow$ تهی

به طور کلی اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، معادله‌ی $|z-z_1|-|z-z_2|=c$ معرف یک هذلولی است.

مثال ۲۲: نقاط $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ با فرض $z_1 \neq z_2$ در صفحه‌ی مختلط مفروض هستند. شرط اینکه نقطه‌ی مبدأ یعنی $z=0$ نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط واصل بین z_1 و z_2 باشد این است که: (دکترای برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۶)

۱) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ ۲) $|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|$ ۳) $||z_1|-|z_2||=|z_1-z_2|$ ۴) $|z_1|-|z_2|=|z_1-z_2|$

پاسخ: گزینه «۲» کافیست نقطه‌های z_1 و z_2 به شرطی که خط واصل بین آن‌ها از نقطه‌ی $z=0$ عبور کند را انتخاب کنیم و در گزینه‌ها قرار دهیم تا گزینه‌ی صحیح به‌دست آید: $z_1=1 \quad , \quad z_2=-2$

لذا این گزینه صحیح است. گزینه ۲ : $|1-(-2)|=|1|+|-2| \Rightarrow 3=3$

گزینه ۱ : $|1-2|=|1|+|-2| \Rightarrow 1=3$ غ. ق. ق.

گزینه ۴ : $|1|-|-2|=|1-(-2)| \Rightarrow -1=3$ غ. ق. ق.

گزینه ۳ : $||1|-|-2||=|1-(-2)| \Rightarrow 1=3$ غ. ق. ق.

مثال ۲۳: مجموعه A شامل نقاطی از صفحه است که عدد مختلط متناظر با آنها یعنی z در نابرابری $\left|\frac{z+i-1}{z-i}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ صدق می‌کند. کدام نقطه به A تعلق دارد؟ (آمار ـ سراسری ۸۷)

۱) $(-2,1)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(2,-1)$ ۴) $(1,-1)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\left|\frac{x+iy+i-1}{x+iy-i}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(x-1)^2+2(y+1)^2 \geq x^2+(y-1)^2$$

$$x^2+y^2-4x+6y+3 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 \geq 10$$

مثال ۲۴: مکان اعداد مختلط $z=x+iy$ که در نامساوی $\left|\frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}\right| \leq \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ صدق کند کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۸۷)

۱) محیط دایره‌ای به مرکز (۰ و ۳) و شعاع ۴
۲) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز (۳- و ۰) و شعاع $2\sqrt{2}$
۳) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز (۰ و ۳+) و شعاع $2\sqrt{2}$
۴) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز (۳ و ۰) و شعاع $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $\left|\frac{\sqrt{2}(1+i)}{1-i}\right|=\sqrt{2}$، بنابراین رابطه داده شده به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}\right| \leq \sqrt{2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2 \leq 2(x^2+(y+1))^2 \Rightarrow x^2+y^2+6y+1 \geq 0 \Rightarrow x^2+(y+3)^2 \geq 8$$

مثال ۲۵: معادله $|z-1|+|z+1|=3$ در صفحه مختلط نمایش دهنده .... است. (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۸)

۱) خط ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) مجموعه تهی

پاسخ: گزینه «۳» بطور کلی $|z-a|+|z-b|=R$ معادله یک بیضی در صفحه مختلط می‌باشد به شرطی که $R<|a-b|$ باشد. در حالیکه $|a-b|=R$ معادله فوق نمایش یک پاره‌خط و در حالت $|a-b|>R$ مجموعه تهی خواهد بود.

مثال ۲۶: مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در شرط $\operatorname{Arg}\frac{z-i}{z-2}=\frac{\pi}{4}$، (Arg اشاره به آرگومان اصلی است.) صدق می‌کنند کدام یک از خم‌هاست؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) شاخه‌ای از یک هذلولی که از دو نقطه i و ۲ می‌گذرد.
۲) پاره خطی که از دو نقطه i و ۲ می‌گذرد.
۳) قسمتی از یک بیضی که از دو نقطه i و ۲ می‌گذرد.
۴) قسمتی از دایره‌ای که از دو نقطه i و ۲ می‌گذرد.

پاسخ: گزینه «۴» قرار می‌دهیم $z=x+iy$، در این صورت:

$$\frac{z-i}{z-2}=\frac{x+iy-i}{x+iy-2}=\frac{x+(y-1)i}{(x-2)+iy}\times\frac{(x-2)-iy}{(x-2)-iy}=\frac{x(x-2)+y(y-1)+(2-x-2y)i}{(x-2)^2+y^2}$$

چون طبق فرض مسأله آرگومان برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، پس:

$$\frac{2-x-2y}{x^2-2x+y^2-y}=\tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x^2-2x+y^2-y=2-x-2y \Rightarrow x^2-x+y^2+y=2 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$$

مثال ۲۷: کدام نقطه درون نمودار $|\frac{z-3}{z+3}|=2$ در صفحه مختلط قرار دارد؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $10-i$ ۲) $-3+i$ ۳) $-10+i$ ۴) $3-i$

پاسخ : گزینه «۲» قرار می‌دهیم $z=x+iy$، در این صورت:

$$|\frac{z-3}{z+3}|=2 \Rightarrow |\frac{x+iy-3}{x+iy+3}|=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}=2$$

$$\Rightarrow (x-3)+y^2=4(x+3)^2+4y^2 \Rightarrow 3x^2+3y^2+30x+36=0 \Rightarrow x^2+y^2+10x+12=0 \Rightarrow (x+5)^2+y^2=13$$

بنابراین نمودار مورد نظر دایره به مرکز $(-5,0)$ و به شعاع $\sqrt{13}$ می‌باشد.

بنابراین درون ناحیه مورد نظر به‌صورت $(x+5)^2+y^2<\sqrt{13}$ می‌باشد که واضح است نقطه $-3+i$ در آن قرار دارد.

مثال ۲۸: کدام نقطه درون نمودار $|2z+5|=4$ قرار دارد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۸۹)

۱) $2-i$ ۲) $5-2i$ ۳) $-2+i$ ۴) $-5+2i$

پاسخ : گزینه «۳» نقطه $z=-2+i$ درون نمودار داده شده قرار دارد، زیرا داریم:

$$|2z+5|=|2(-2+i)+5|=|1+2i|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}<4$$

مثال ۲۹: در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که به ازای آن، $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}+2i)\le\frac{\mathrm{Im}(z-\bar{z})}{|z|^2}$ برابر است با: (صنایع سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $z=bi$ که $b\in\mathbb{R}$ و $b>0$

۲) $z=a$ که $a\in\mathbb{R}$ و $a<0$

۳) $z=a+bi$ که $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\le b$ و $(a,b)\ne(0,0)$

۴) $z=a+bi$ که $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\le 2b$ و $(a,b)\ne(0,0)$

پاسخ : گزینه «۴» با فرض $z=a+ib$، آن‌گاه $\bar{z}=a-ib$ و لذا داریم:

$$\frac{1}{z}+2i=\frac{1}{a+ib}+2i=\frac{a-ib}{a^2+b^2}+2i=\frac{a}{a^2+b^2}-i(\frac{b}{a^2+b^2}+2) \Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{1}{z}+2i)=\frac{a}{a^2+b^2} \qquad (1)$$

$$z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib \Rightarrow \mathrm{Im}(z-\bar{z})=2b$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |z|^2=a^2+b^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{Im}(z-\bar{z})}{|z|^2}=\frac{2b}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

اگر قرار باشد نامساوی داده شده برقرار باشد، داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{a}{a^2+b^2}\le\frac{2b}{a^2+b^2} \xrightarrow{(a,b)\ne(0,0)} a\le 2b$$

مثال ۳۰: در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که $\mathrm{Re}(\frac{1}{z+i}+2i)=\frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2}$، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $z=\frac{1}{2}+bi$ یا $z=-\frac{1}{2}+bi$ که $b\in\mathbb{R}$

۲) $z=bi$ یا $z=-\frac{1}{2}+bi$ که $b\in\mathbb{R}$ و $b\ne 0$

۳) $z=bi$ یا $z=a+\frac{1}{2}i$ که a و $b\in\mathbb{R}$ و $b\ne 0$ و $b\ne -1$

۴) $z=bi$ یا $z=a-\frac{1}{2}i$ که a و $b\in\mathbb{R}$ و $b\ne 0$ و $b\ne -1$

پاسخ : گزینه «۴» اگر $z=x+iy$، می‌دانیم $\mathrm{Re}(z)=x$ و همچنین $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{z+i}+2i=\frac{1}{x+(y+1)i}+2i=(\frac{1}{x+(y+1)i}\times\frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i})+2i=\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}+2i$$

$$\text{سمت چپ}=\mathrm{Re}(\frac{1}{z+i}+2i)=\frac{x}{x^2+(y+1)^2} \qquad (\mathrm{I}) \qquad\qquad \text{سمت راست}=\frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2}=\frac{\mathrm{Re}(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I},\mathrm{II})} \frac{x}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+y^2 \Rightarrow y^2+2y+1=y^2 \Rightarrow 2y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

با توجه به گزینه‌ها و این که $y=-\frac{1}{2}$، لذا گزینه (۴) درست است.