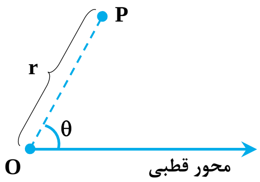
درسنامه: دستگاه مختصات قطبی و مفاهیم مرتبط به آن

تعریف دستگاه مختصات قطبی، ارتباط آن با دستگاه دکارتی، رسم نمودارهای قطبی و مفاهیم مرتبط با این دستگاه در این درسنامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف دستگاه مختصات قطبی

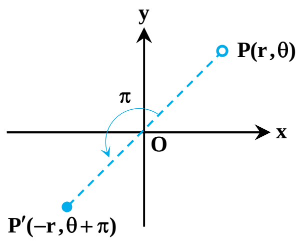


در دستگاه مختصات دکارتی، محل هر نقطه را با نوشتن مؤلفه‌های افقی و قائم آن به‌صورت (x, y) مشخص می‌کنیم، با این حال برای برخی از کاربردهای ریاضیات، استفاده از **دستگاه مختصات قطبی** مناسب‌تر است. این دستگاه نخستین بار توسط نیوتن مورد استفاده قرار گرفت. در این دستگاه نقطه‌ای به‌نام قطب (مبدأ) داریم که معادل همان نقطه‌ی $O(\circ,\circ)$ در دستگاه دکارتی است. یک نیم‌خط افقی که از O آغاز می‌شود و به سمت راست کشیده می‌شود، محور قطبی نام دارد. محور قطبی در واقع همان قسمت مثبت محور x هاست. حالا هر نقطه‌ی P از صفحه را به مبدأ وصل می‌کنیم. پاره‌خط OP به‌دست می‌آید. اندازه‌ی OP یعنی فاصله‌ی P از مبدأ را با r نشان می‌دهیم (برخی منابع به جای r از ρ استفاده می‌کنند) و زاویه‌ی OP با محور قطبی را θ می‌نامیم. بنابراین هر نقطه‌ی P در دستگاه قطبی با زوج مرتب (r,θ) نمایش داده می‌شود. اکنون به دو مورد زیر توجه کنید:

الف) هر نقطه از صفحه، فقط یک مقدار r دارد. برای مثال در نقطه‌ی $(x, y) = (۱,۱)$ می‌دانیم که $r = \sqrt{۲}$ است. اما θ در هر نقطه، بی‌شمار مقدار دارد. برای مثال در نقطه‌ی $(x, y) = (۱,۱)$ داریم $\theta = \frac{\pi}{۴} + ۲k\pi$ که k هر عدد صحیح می‌تواند باشد. در ضمن در نقطه‌ی مبدأ داریم $r = \circ$ و θ می‌تواند هر مقداری تعریف شود.

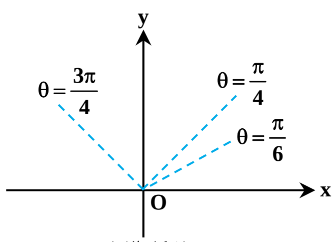
برای مثال نقاط $(r,\theta) = (\circ,\frac{\pi}{۴})$ و $(r,\theta) = (\circ,\frac{\pi}{۳})$ هر دو نشان‌دهنده‌ی مبدأ هستند.

ب) درست است که مفهوم هندسی r نمی‌تواند منفی باشد، اما در معادلات قطبی گاهی اوقات با مقادیر منفی r روبرو می‌شویم. برای مثال در معادله‌ی $r = ۱ - \frac{۴\theta}{\pi}$، به ازای $\theta = \frac{\pi}{۲}$ مقدار $r = -۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین لازم است مفهوم نقطه‌ی $(-r,\theta)$ و رابطه‌ی آن با (r,θ) را معرفی کنیم.



تعریف: هرگاه $r < \circ$ باشد، نمایش هندسیِ نقطه‌ی $P(r,\theta)$ نقطه‌ی $P'(-r,\theta+\pi)$ است. به عبارتی هرگاه مقدار r منفی به‌دست آمد از تساوی $(r,\theta) = (-r,\theta+\pi)$ استفاده می‌کنیم و به جای نقطه‌ی $P(r,\theta)$ نقطه‌ی $P'(-r,\theta+\pi)$ را مطابق شکل مشخص می‌کنیم.

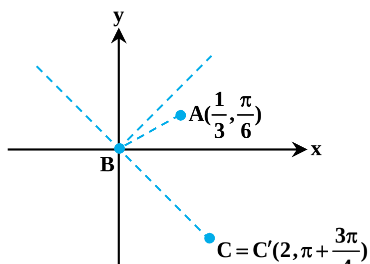
مثال ۱: نقاطی از منحنی $r = ۱ - \frac{۴}{\pi}\theta$ را که به ازای $\theta = \frac{\pi}{۶}$، $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و $\theta = \frac{۳\pi}{۴}$ به دست می‌آیند، مشخص کنید.



(شکل الف)

پاسخ: نیم‌خط‌های $\theta = \frac{\pi}{۶}$، $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و $\theta = \frac{۳\pi}{۴}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم روی هر کدام از آن‌ها چه نقطه‌ای به‌دست می‌آید. (شکل الف) جدول زیر را با جایگذاری این مقادیر در $r = ۱ - \frac{۴}{\pi}\theta$ تشکیل می‌دهیم.

θ	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۴}$
r	$\frac{۱}{۳}$	$\circ$	-۲



(شکل ب)

نقاط $A(\frac{۱}{۳},\frac{\pi}{۶})$، $B(\circ,\frac{\pi}{۴})$ و $C(-۲,\frac{۳\pi}{۴})$ به‌دست آمده‌اند. نقطه‌ی A روی زاویه‌ی $\frac{\pi}{۶}$ و در فاصله‌ی $r = \frac{۱}{۳}$ از مبدأ قرار دارد. در نقطه‌ی B داریم $r = \circ$. پس این نقطه همان مبدأ مختصات است. اما در نقطه‌ی C مقدار r منفی شده است. پس نقطه‌ی C روی زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ قرار ندارد بلکه روی زاویه‌ی $\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ قرار دارد. در واقع به جای $C(-۲,\frac{۳\pi}{۴})$ باید $C'(۲,\pi + \frac{۳\pi}{۴})$ را نشان بدهیم.

نکته ۱: با توجه به توضیحات بالا، نقطه‌ی $P(r,\theta)$ دارای نمایش‌های مختلفی به‌صورت $((-۱)^k r,\theta + k\pi)$ برای هر $k \in \mathbb{Z}$ است.

مثال ۲: همه‌ی نمایش‌های ممکن برای نقطه‌ی $A(x,y) = (\circ,۲)$ را در مختصات قطبی بنویسید.

پاسخ: نقطه‌ی A روی محور y ها و در فاصله‌ی ۲ واحد از مبدأ قرار دارد. بنابراین در این نقطه $\theta = \frac{\pi}{۲}$ و $r = ۲$ است. پس طبق نکته‌ی فوق، همه‌ی نمایش‌های مختلف این نقطه در مختصات قطبی به‌صورت $((-۱)^k ۲,\frac{\pi}{۲} + k\pi)$ هستند.

مثال ۶: نقاط تقاطع $r=\text{tg}\theta\sec\theta$ و $r=\text{cosec}\theta$ عبارت است:

۱) $(-1,-1)$ و $(-1,1)$ در دستگاه دکارتی
۲) $(1,1)$ و $(-1,1)$ در دستگاه دکارتی
۳) $(-1,\frac{\pi}{4})$ و $(-1,-\frac{\pi}{4})$ در دستگاه قطبی
۴) $(1,\frac{\pi}{4})$ و $(1,-\frac{\pi}{4})$ در دستگاه قطبی

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است، معادلات را در دستگاه دکارتی بنویسیم و سپس نقاط تقاطع را تعیین کنیم:

$$\begin{cases} r=\text{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta} \Rightarrow r\sin\theta=1 \Rightarrow y=1 \\ r=\text{tg}\theta\sec\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow r\cos^2\theta=\sin\theta \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } r} r^2\cos^2\theta=r\sin\theta \Rightarrow y=x^2 \end{cases}$$

پس از تقاطع دادن دو معادله، به تساوی $x^2=1$ می‌رسیم که ریشه‌های آن $x=\pm1$ است، لذا نقاط $(1,1)$ و $(-1,1)$ نقاط تقاطع در مختصات دکارتی هستند.

مثال ۷: نزدیک‌ترین نقطه یا نقاط از منحنی $5x^2-6xy+5y^2=4$ به مبدأ را تعیین کنید.

پاسخ: سؤال دنبال نزدیک‌ترین نقطه از مبدأ، یعنی کمترین مقدار r است. بنابراین منحنی را به مختصات قطبی می‌بریم:

$$5x^2-6xy+5y^2=4 \Rightarrow 5(x^2+y^2)-6xy=4 \Rightarrow 5r^2-6(r\cos\theta)(r\sin\theta)=4 \Rightarrow 5r^2-6r^2\cos\theta\sin\theta=4$$

$$\Rightarrow r^2(5-3\sin2\theta)=4 \Rightarrow r^2=\frac{4}{5-3\sin2\theta}$$

مینیمم شدن r، معادل مینیمم شدن r^2 است و مینیمم شدن r^2 به معنی ماکزیمم شدن مخرج کسر، یعنی ماکزیمم عبارت $5-3\sin2\theta$ است. برای ماکزیمم شدن این عبارت باید $\sin2\theta=-1$ باشد. خُب حالا باید ببینیم به ازای چه مقادیری از θ، مقدار $\sin2\theta$ برابر با ۱- می‌شود: $2\theta=\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

که به ازای این مقادیر θ مقدار r برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود. حالا با قرار دادن θ و r در روابط $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ می‌توانیم به این نتیجه برسیم، نقاط $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ در مختصات دکارتی نزدیک‌ترین نقاط روی منحنی مذکور به مبدأ هستند.

مثال ۸: مجانب منحنی $r=a(\sec\theta+\cos\theta)$ کدام است؟

۱) $r=-\dfrac{1}{a\sin\theta}$
۲) $r=-\dfrac{1}{a}\sin\theta$
۳) $r=a\sec\theta$
۴) $r=a\cos\theta$

پاسخ: گزینه «۳» می‌توانیم منحنی را در دستگاه مختصات دکارتی نمایش داده و مجانب را از روش‌هایی که قبلاً یاد گرفته‌ایم، حساب کنیم:

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

با جایگذاری در معادله منحنی قطبی داده شده داریم:

$$r=a(\sec\theta+\cos\theta)=a(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta)=\frac{a(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta} \Rightarrow (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{a(1+\frac{x^2}{x^2+y^2})}{(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}})} \Rightarrow x=a(\frac{x^2+y^2+x^2}{x^2+y^2})$$

$$\Rightarrow\ x=a(\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}) \Rightarrow\ x(x^2+y^2)=a(y^2+2x^2)$$

$$\Rightarrow\ y^2(a-x)=x^2(x-2a) \Rightarrow\ y^2=\frac{x^2(x-2a)}{a-x} \Rightarrow\ y=\pm x\sqrt{\frac{x-2a}{a-x}}$$

دامنه تعریف این رادیکال به صورت $a<x<2a$ است. در نتیجه اگر حد راست y را وقتی x به سمت a میل می‌کند، حساب کنیم:

$$\lim_{x\to a^+} y=\lim_{x\to a^+} \pm x\sqrt{\frac{x-2a}{a-x}}=\pm\infty$$

پس خط $x=a$ مجانب قائم این منحنی است. البته $x=a$ را در مختصات قطبی می‌نویسیم: $x=a \Rightarrow r\cos\theta=a \Rightarrow r=\dfrac{a}{\cos\theta}=a\sec\theta$

توجه: همان‌طور که در مثال‌های قبل دیدید؛ رفت و آمد از دستگاه دکارتی و قطبی به یکدیگر با توجه به نیاز مسأله صورت می‌گیرد. گاهی حل مسأله در دستگاه دیگر آسان‌تر است، لذا ما بهترین انتخاب را باید انجام دهیم.

نکته ۲: فاصله‌ی بین دو نقطه $A(r_1,\theta_1)$ و $B(r_2,\theta_2)$ در مختصات قطبی از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$|AB|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

مثال ۹: مساحت مربعی که نقاط $A(۶,-۱۰۵^\circ)$ و $B(۴,۳۰^\circ)$ از دستگاه قطبی دو رأس متقابل آن هستند، کدام است؟

۱) $۵۲+۲۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲۶+۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱۳+۶\sqrt{۲}$ ۴) $۵۲+۶\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی A و B دو رأس متقابل از یک مربع باشند، در این‌صورت قطر مربع برابر با فاصله‌ی A تا B خواهد بود. با توجه به فرمول، در این مثال $r_A=۶$، $\theta_A=-۱۰۵^\circ$، $r_B=۴$ و $\theta_B=۳۰^\circ$ پس قطر مربع برابر است با:

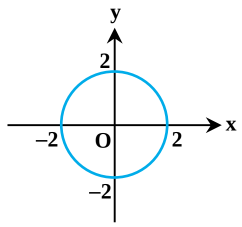
$$|AB|=\sqrt{۴^۲+۶^۲-۴۸\cos(۳۰^\circ+۱۰۵^\circ)}=\sqrt{۱۶+۳۶-۴۸\cos۱۳۵^\circ}=\sqrt{۵۲+۲۴\sqrt{۲}}$$

می‌دانیم که در هر مربع طول قطر، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع است، بنابراین داریم

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\text{طول قطر})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{۵۲+۲۴\sqrt{۲}}\Rightarrow \text{مساحت}=(\text{طول ضلع})^۲=\frac{۵۲+۲۴\sqrt{۲}}{۲}=۲۶+۱۲\sqrt{۲}$$

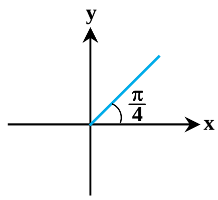
نمایش چند منحنی و ناحیه در مختصات قطبی

برای آشنایی بیشتر، وضعیت نمایش چند منحنی و ناحیه را در مختصات قطبی با هم بررسی می‌کنیم:
در واقع با رسم شکل می‌خواهیم مجموعه نقاطی که در ضابطه‌های تعریف شده از (الف) تا (د) صدق می‌کنند را نمایش دهیم:



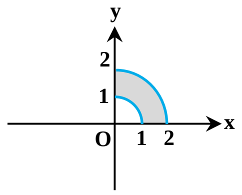
الف) نمودار $r=۲$

منحنی موردنظر تمام نقاطی به شکل (r,θ) را شامل می‌شود که در آن‌ها $r=۲$ است و محدودیتی روی θ نداریم. در واقع این نمودار، دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ را نمایش می‌دهد.
به‌طور کلی معادله‌ی $r=a$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع $|a|$ را نمایش می‌دهد.



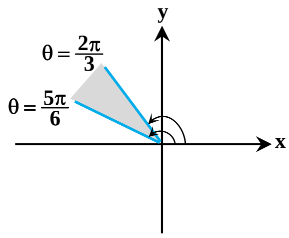
ب) نمودار $\theta=\frac{\pi}{۴}$

این نمودار شامل نقاطی است که در آن‌ها زاویه قطبی θ برابر با $\frac{\pi}{۴}$ رادیان است. یعنی نقاط واقع بر نیم‌خطی که از مبدأ می‌گذرد و با محور قطبی، زاویه‌ای به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ رادیان می‌سازد.



ج) ناحیه $۱\le r\le ۲$ برای $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$.

تمام نقاطی به‌صورت (r,θ) که مؤلفه‌ی r آن‌ها در نامساوی $۱\le r\le ۲$ و مؤلفه‌ی θ آن‌ها در نامساوی $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ صدق می‌کند، در این ناحیه قرار می‌گیرند. این مجموعه نقاط در شکل با سایه نشان داده شده‌اند.



د) ناحیه $\frac{۲\pi}{۳}\le\theta\le\frac{۵\pi}{۶}$

در این ناحیه روی r هیچ شرطی نداریم، در واقع r می‌تواند از صفر تا بی‌نهایت تغییر کند، فقط این نقاط باید دارای θهایی باشند که در نامساوی $\frac{۲\pi}{۳}\le\theta\le\frac{۵\pi}{۶}$ صدق می‌کنند. این مجموعه نقاط را در شکل با سایه نشان داده‌ایم.

خط مماس و قائم بر یک منحنی قطبی

فرض کنید بخواهیم معادله‌ی خط مماس بر منحنی $r=f(\theta)$ را در نقطه‌ی $\theta=\theta_0$ بنویسیم. برای این منظور مطابق آنچه از قبل می‌دانیم، معادله‌ی خط مماس به صورت مقابل نوشته می‌شود: $y-y_0=m_{\text{مماس}}(x-x_0)$

اما $m_{\text{مماس}}$ به چه صورت حساب می‌شود؟ دقت کنید که شیب خط مماس برای یک منحنی قطبی با رابطه‌ی $r'=\frac{df}{d\theta}$ تعیین **نمی‌شود!** بلکه شیب باید از رابطه‌ی $\frac{dy}{dx}$ محاسبه شود. برای پیدا کردن شیب خط مماس، می‌توانیم منحنی قطبی را به صورت یک منحنی پارامتری تعریف کنیم. در واقع نمایش منحنی به صورت مقابل می‌شود:

$$r=f(\theta)\Rightarrow\begin{cases}x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta\\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$$

حالا به راحتی $\frac{dy}{dx}$ را مطابق آنچه در مورد مشتق منحنی‌های پارامتری گفته بودیم به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta}\qquad(*)$$

یافتن نقاط برخورد نمودارهای قطبی

یکی از مهم‌ترین مباحث در این فصل، پیدا کردن نقاط برخورد دو منحنی است. در مختصات دکارتی معمولاً هر x که از معادله‌ی تلاقی دو منحنی بدست می‌آمد، به طور قطعی، محل تلاقی دو منحنی را نشان می‌داد و دیگر نمی‌شد احتمال داد که دو منحنی در نقاط دیگری هم تلاقی کرده‌اند. اما در مختصات قطبی وقتی دو منحنی $r=f(\theta)$ و $g(\theta)$ را با هم تلاقی می‌دهیم، هر θ که به دست بیاید، به این معنی نیست که این دو منحنی **فقط** در این θها برخورد کرده‌اند و در θهای دیگر نیز با هم تلاقی نکرده‌اند!! در واقع در مختصات قطبی ممکن است برخی نقاط تلاقی از معادله‌ی برخورد داده دو منحنی، معلوم نشود.

■ **دو پیشنهاد برای پیدا کردن نقاط پنهان تلاقی:**

اگر می‌خواهیم نقاط برخورد دو منحنی قطبی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ را به طور کامل به دست آوریم، دو دستور زیر را انجام می‌دهیم:

۱) همواره کنترل کنید که آیا هر دو منحنی از مبدأ $(r=0)$ می‌گذرند یا نه؟

در این روند، ممکن است دو مقدار مختلف θ، یکی $f(\theta)$ را و دیگری $g(\theta)$ را صفر کند. مثلاً دو منحنی $r=1-\cos\theta$ و $r^2=4\cos\theta$ را در نظر بگیرید، منحنی اول به ازای $\theta_1=0$ برابر با صفر می‌شود و منحنی دوم به ازای $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ برابر با صفر می‌شود، یعنی نقطه‌ی مبدأ با مختصات $(0,0)$ روی منحنی اول و نقطه‌ی مبدأ با مختصات $(0,\frac{\pi}{2})$ روی منحنی دوم قرار دارد و به هر حال مبدأ محل تلاقی این دو منحنی است.

۲) پس از حل معادله‌ی $f(\theta)=g(\theta)$ باید $f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi)$ را هم حل کنید و جواب‌های مربوط به این معادله را نیز به دست آورید. احتمالاً برخی از θهایی که از معادله‌ی $f(\theta)=g(\theta)$ به دست نیامده‌اند، از این معادله به دست خواهند آمد.

مثال ۲۲: منحنی‌های $r=3\sin\theta$ و $r=1+\sin\theta$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

☑ **پاسخ:** منحنی‌های $f(\theta)=1+\sin\theta$ و $g(\theta)=3\sin\theta$ هر دو از مبدأ مختصات عبور می‌کنند. برای مثال منحنی $g(\theta)$ به ازای $\theta=0$ و منحنی $f(\theta)$ به ازای $\theta=-\frac{\pi}{2}$ از مبدأ عبور می‌کنند. حالا به معادله‌ی $f(\theta)=g(\theta)$ می‌پردازیم:

$$1+\sin\theta=3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

پس دو نقطه‌ی برخورد هم از این معادله به‌دست می‌آید. در پایان معادله‌ی $f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi)$ را برای یافتن سایر برخوردهای احتمالی حل می‌کنیم:

$$1+\sin\theta=(-1)^n 3\sin(\theta+n\pi)$$

می‌دانیم که $\sin(\theta+n\pi)=(-1)^n\sin\theta$ پس داریم $1+\sin\theta=(-1)^n(-1)^n 3\sin\theta=3\sin\theta$، یعنی به همان معادله‌ی $f(\theta)=g(\theta)$ رسیدیم در نتیجه نقطه‌ی برخورد دیگری وجود ندارد. با در نظر گرفتن مبدأ مختصات، **۳ نقطه** برخورد به‌دست می‌آید.

مثال ۲۳: منحنی‌های $r=\sin 3\theta$ و $r=\cos 3\theta$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

☑ **پاسخ:** فرض کنیم $f(\theta)=\cos 3\theta$ و $g(\theta)=\sin 3\theta$ باشد. اولاً هر دو منحنی از مبدأ عبور می‌کنند، برای مثال $f(\theta)$ به ازای $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $g(\theta)$ به ازای $\theta=0$ به مقدار $r=0$ می‌رسند. در ادامه می‌خواهیم معادله‌ی $f(\theta)=g(\theta)$ و سپس معادله‌ی $f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi)$ را حل کنیم.

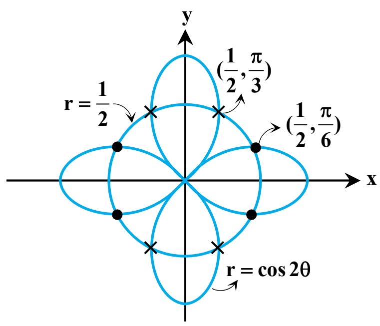
اگر در معادله‌ی اخیر $n=0$ را در نظر بگیرید می‌بینید که $f(\theta)=g(\theta)$ یک حالت خاص از آن است. یعنی شما می‌توانید از مرحله‌ی دوم چشم‌پوشی کرده و مستقیماً به حل معادله‌ی $f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi)$ بپردازید:

می‌دانیم که $\sin 3(\theta+n\pi)=(-1)^{3n}\sin 3\theta$، پس داریم:

$$\cos 3\theta=(-1)^n(-1)^{3n}\sin 3\theta \Rightarrow \cos 3\theta=\sin 3\theta \Rightarrow tg 3\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{9\pi}{12}$$

بنابراین به همراه مبدأ، **۴ نقطه‌ی** برخورد به‌دست می‌آید.

مثال ۲۴: همه‌ی نقطه‌های برخورد منحنی‌های $r=\cos 2\theta$ و $r=\frac{1}{2}$ را پیدا کنید.



☑ **پاسخ:** منحنی $r=\frac{1}{2}$ از مبدأ عبور نمی‌کند، پس در این نقطه با هم تلاقی نمی‌کنند. حالا با حل معادله‌ی زیر سایر نقاط برخورد را به‌دست می‌آوریم (جواب‌های $f(\theta)=g(\theta)$ هم مشخص می‌شوند):

$$f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi) \Rightarrow \frac{1}{2}=(-1)^n\cos 2(\theta+n\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=(-1)^n\cos(2\theta+2n\pi) \Rightarrow \frac{1}{2}=(-1)^n\cos(2\theta) \Rightarrow \cos 2\theta=\pm\frac{1}{2}$$

در زوایای $\pm\frac{\pi}{3}$ مقدار کسینوس $\frac{1}{2}$ است و در زوایای $\pm\frac{2\pi}{3}$ مقدار کسینوس $-\frac{1}{2}$ است، پس داریم:

$$\cos 2\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \quad ; \quad \cos 2\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

اگر جواب‌های به‌دست آمده در بازه‌ی $[0,2\pi]$ را بنویسیم، جواب‌های $\theta=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ عبارتند از: $\frac{\pi}{6}$، $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ که با نقاط مشکی در شکل مشخص شده‌اند، جواب‌های $\theta=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ عبارتند از: $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ که با علامت $(\times)$ در شکل مشخص شده‌اند.

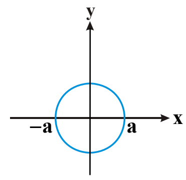
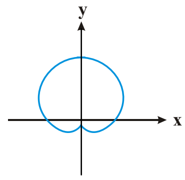
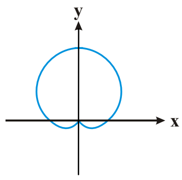
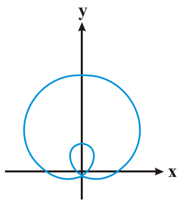
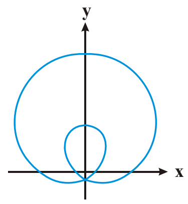
نمایش نمودارهای مهم در مختصات قطبی

برای حل بسیاری از مسائل این فصل نیاز داریم شکل کلی نمودارها را بدانیم. همان‌طور که گفتیم؛ ترسیم نمودارهای قطبی، خصوصاً در روز آزمون، کار عاقلانه‌ای نیست و اصولاً زمان این کار را هم نداریم! بنابراین در این قسمت شکل نمودارهایی که معمولاً در آزمون‌ها مورد نیاز است را آورده‌ایم. پیشنهاد می‌کنیم آن‌ها را به ذهن بسپارید.

لیماسیون

هر منحنی با معادلات $r = a \pm b\sin\theta$ و یا $r = a \pm b\cos\theta$ (با فرض $a > ۰$ و $b > ۰$) در حالت کلی یک **لیماسیون** خوانده می‌شود. برای یادگیری راحت‌تر، ابتدا منحنی $r = a \pm b\sin\theta$ را بررسی می‌کنیم. این منحنی با توجه به مقادیر مختلف a و b می‌تواند، به دلوار یا دایره هم تبدیل شود.

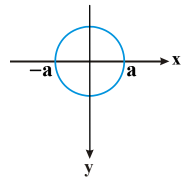
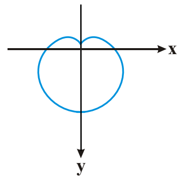
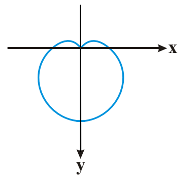
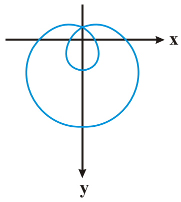
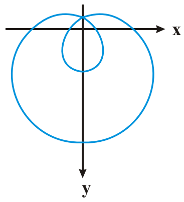
اگر $b = ۰$ باشد، آنگاه این معادله به صورت $r = a$ می‌شود که می‌دانیم نشان‌دهنده‌ی یک دایره به شعاع a است (شکل ۱). اگر $a = b$ باشد، آنگاه لیماسیون به دلگون (دلوار) تبدیل می‌شود (شکل ۳) و در سایر حالات، همان منحنی معروف به لیماسیون را داریم (شکل‌های ۲، ۴ و ۵).

شکل (۱): $b = ۰$ | **شکل (۲):** $b < a$ | **شکل (۳):** $a = b$ | **شکل (۴):** $b > a$ | **شکل (۵):** $b > a$

در شکل‌های فوق، منحنی‌ها، دارای معادله‌ی $r = a + b\sin\theta$ هستند، (یعنی علامت + را در نظر گرفته‌ایم) همان‌طور که می‌بینید؛ شکل (۱) دایره است. شکل (۲)، از فرم دایره تقریباً خارج شده و شبیه دلوار است و البته هنوز لیماسیون خوانده می‌شود. در شکل (۳) به شکل دلوار رسیده‌ایم (چون شبیه قلب است دلگون و یا دلوار نامیده می‌شود) و همان‌طور که گفتیم به ازای $a = b$ حاصل می‌شود. در شکل (۴)، دوباره از فرم دلگون خارج می‌شویم و به یک لیماسیون می‌رسیم با این تفاوت که حلقه‌ی داخلی ایجاد می‌شود. دقت کنید مقدار b از سمت راست به چپ افزایش می‌یابد و زمانی که b از a بزرگتر باشد، حلقه‌ی داخلی لیماسیون تشکیل می‌شود و هر چه نسبت $\frac{b}{a}$ بزرگتر باشد، حلقه‌ی داخلی بزرگ‌تر تشکیل می‌شود (شکل ۵).

اما شکل منحنی $r = a - b\sin\theta$ به صورت زیر تغییر می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید روند تغییرات همانند حالت قبل است و با افزایش b روند تشکیل دلگون و لیماسیون شکل می‌گیرد و تنها تفاوت این است که قسمت بزرگ‌تر منحنی‌ها، پایین محور x ها قرار می‌گیرد.

شکل (۱): $b = ۰$ | **شکل (۲):** $b < a$ | **شکل (۳):** $a = b$ | **شکل (۴):** $b > a$ | **شکل (۵):** $b > a$

■ **بررسی معادله‌ی $r = a \pm b\cos\theta$**

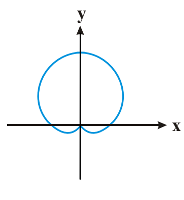
اگر نمودار منحنی‌های $r = a \pm b\sin\theta$ را $\frac{\pi}{۲}$ بچرخانیم، نمودار منحنی‌های $r = a \pm b\cos\theta$ حاصل می‌شود. بنابراین روند بررسی، دقیقاً مانند منحنی‌های فوق است؛ فقط شکل‌ها را $\frac{\pi}{۲}$ در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید. در واقع همان‌طور که می‌دانید برای رسم منحنی $r = f(\theta - \theta_۰)$ کافی است منحنی $r = f(\theta)$ را حول مبدأ به اندازه $\theta_۰$ درجه بچرخانیم، اگر $\theta_۰ > ۰$، آن‌گاه باید $f(\theta)$ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و اگر $\theta_۰ < ۰$، آن‌گاه باید $f(\theta)$ را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم. در اینجا قصد نداریم، تمام منحنی‌های فوق را بچرخانیم! اما برای هر دو حالت دلگون یعنی حالتی که در معادله‌ی $r = a \pm b\sin\theta$ مقادیر a و b مساویند، داریم:

$$r = a + b\sin\theta \xrightarrow{a=b} r = a\sin\theta + a = a(۱+\sin\theta)$$

حالا اگر منحنی فوق را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ بچرخانیم، داریم:

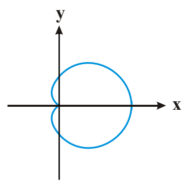
$$r = a[۱+\sin(\theta+\frac{\pi}{۲})] \Rightarrow r = a(۱+\cos\theta)$$

همان‌طور که می‌بینید با چرخاندن به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ به منحنی $r = a(۱+\cos\theta)$ رسیدیم و چون $\theta_۰ = -\frac{\pi}{۲}$ عددی منفی است، باید دلگون شکل (۳) (که ابتدا رسم کردیم) را در **جهت حرکت عقربه‌های ساعت** بچرخانیم:



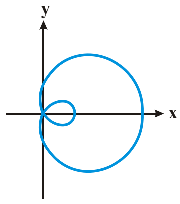
$\mathbf{r = a(۱+\sin\theta)}$

$\xrightarrow{\text{چرخش } \frac{\pi}{2} \text{ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت}}$



$\mathbf{r = a(۱+\cos\theta)}$

مثال۲۵: معادله‌ی قطبی منحنی شکل زیر کدام گزینه است؟



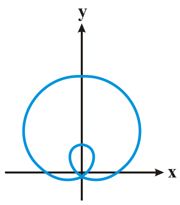
۱) $r=۱+۲\cos\theta$

۲) $r=۱-۲\cos\theta$

۳) $r=۱+\frac{۱}{۲}\cos\theta$

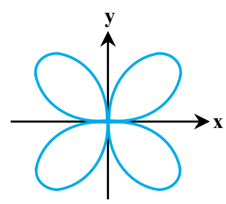
۴) $r=۱+\frac{۱}{۲}\sin\theta$

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید که چون لیماسیون افقی است، پس گزینه (۴) نمی‌تواند جواب باشد، از طرفی واضح است چون حلقه داخلی تشکیل شده، پس b باید از a بزرگ‌تر باشد، پس گزینه (۳) هم غلط است. بین گزینه‌های (۱) و (۲) تفاوت بین علامت پشت $۲\cos\theta$ است. واضح است معادله‌ی منحنی باید به شکل گزینه (۱) باشد. چون منحنی شکل مقابل که منحنی $r=a+b\sin\theta$ $(b>a)$ است، $\frac{\pi}{۲}$ در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است.

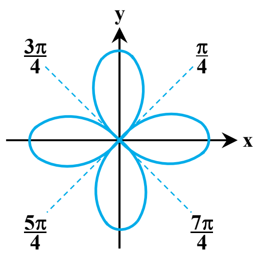


رُز چند برگ

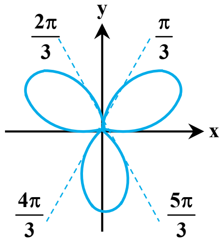
به‌طور کلی نمودار منحنی‌های $r=a\sin(n\theta)$ و $r=a\cos(n\theta)$ با فرض این‌که $a>0$ و n عددی طبیعی است به رُز n برگ معروفند. در این منحنی‌ها اگر n **زوج** باشد، رُز **۲n برگ** دارد و اگر **n فرد** باشد، رُز **n برگ** دارد. برای مثال منحنی $r=\cos۴\theta$ دارای ۸ برگ و منحنی $r=\sin۳\theta$ دارای ۳ برگ است. به شکل‌های زیر توجه کنید.



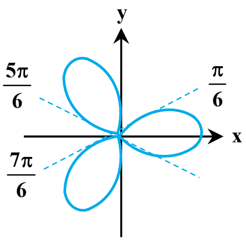
$r=a\sin۲\theta$
(رُز ۴ برگ)



$r=a\cos۲\theta$
(رُز ۴ برگ)



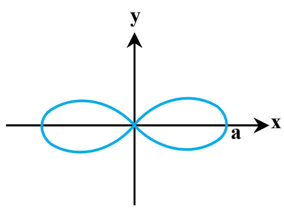
$r=a\sin۳\theta$
(رُز ۳ برگ)



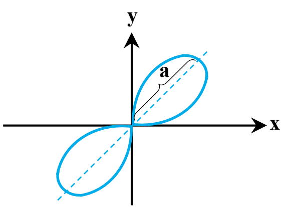
$r=a\cos۳\theta$
(رُز ۳ برگ)

لمنیسکات (یا پروانه)

به‌طور کلی نمودار منحنی‌های $r^۲=a^۲\cos(n\theta)$ و یا $r^۲=a^۲\sin(n\theta)$ با فرض این‌که $a>0$ و n عددی طبیعی است به لمنیسکات یا پروانه معروفند. این نمودارها از خیلی جهات شبیه رُز هستند و البته تفاوت‌هایی هم با یکدیگر دارند. اولاً چون $r^۲>0$ است، بنابراین نصف برگ‌ها حذف می‌شوند. یعنی برای **n های زوج**، این منحنی‌ها دارای **n برگ** و برای **n های فرد**، این منحنی‌ها دارای **۲n برگ** است. **(دقیقاً برعکس منحنی رُز)** به نمودارهای زیر توجه کنید:



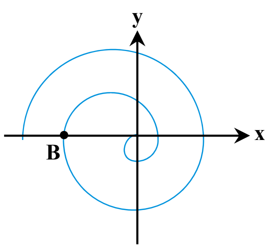
$r^۲=a^۲\cos۲\theta$ ، $a>0$



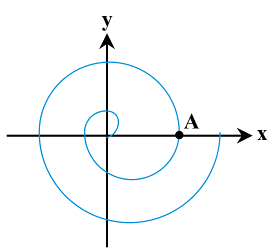
$r^۲=a^۲\sin۲\theta$ ، $a>0$

مارپیچ ارشمیدس

به‌طور کلی نمودار منحنی $r=a\theta$ مارپیچ ارشمیدس را نشان می‌دهد. اگر $a>0$ باشد، نمودار (الف) را خواهیم داشت. به ازای $\theta=0$ داریم $r=0$، یعنی مبدأ مختصات به‌دست می‌آید. سپس همراه با افزایش مقدار θ، مقدار r هم بیشتر می‌شود. وقتی یک دور کامل را طی می‌کنیم و به $\theta=۲\pi$ می‌رسیم، مقدار $r=۲a\pi$ به‌دست می‌آید (نقطه‌ی A). به همین ترتیب با افزایش مقدار θ و r دورهای بعدی به‌دست می‌آیند. اگر $a<0$ باشد، حرکت مارپیچ به‌جای ربع اول از ربع سوم آغاز می‌شود و منحنی به‌صورت شکل (ب) تغییر می‌کند. باز هم در $\theta=0$ داریم $r=0$ ولی این‌بار با طی کردن یک دور کامل به نقطه B می‌رسیم.



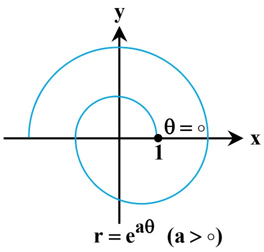
$r=a\theta(a<0)$
(ب)



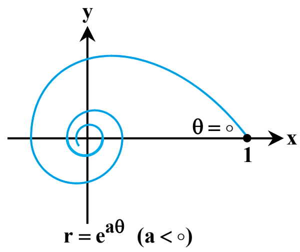
$r=a\theta(a>0)$
(الف)

مارپیچ لگاریتمی

به‌طور کلی نمودار منحنی $r=e^{a\theta}$ مارپیچ لگاریتمی را نشان می‌دهد. برخلاف مارپیچ ارشمیدس که از مبدأ آغاز می‌شود، این مارپیچ به ازای $\theta=۰$ مقدار $r=۱$ را دارد، پس از نقطه‌ای روی محور x های مثبت آغاز می‌شود. حالا اگر $a>۰$ باشد (شکل الف). این مارپیچ با افزایش θ بزرگ‌تر می‌شود یعنی با هر دور از مبدأ دورتر می‌شود. اما اگر $a<۰$ باشد، (شکل ب) با افزایش θ، مقدار r کوچک‌تر شده و این مارپیچ به‌صورت حلزونی شروع به جمع شدن می‌کند.



(الف)



(ب)

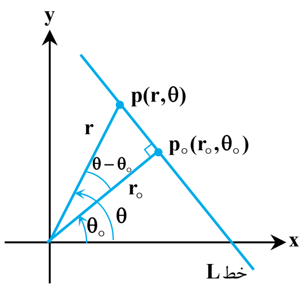
نمایش خطوط و مقاطع مخروطی در مختصات قطبی

مختصات قطبی در ستاره‌شناسی و مهندسی هوا فضا کاربرد و اهمیت فراوانی دارد. چون حرکت ماهواره‌ها، سیارات و ستاره‌های دنباله‌دار تقریباً به صورت بیضی، سهمی و هذلولی است. در این قسمت می‌خواهیم معادلات قطبی این مقاطع مخروطی را معرفی کنیم. ابتدا معادله‌ی قطبی خط را بررسی می‌کنیم:

۱ـ معادله‌ی خط در مختصات قطبی

به شکل مقابل توجه کنید؛ اگر نقطه‌ی $p_۰(r_۰,\theta_۰)$ پای خط عمود از مبدأ به خط L باشد و $r_۰\geq ۰$ در نظر گرفته شود، آنگاه معادله‌ی خط L به صورت زیر خواهد بود:

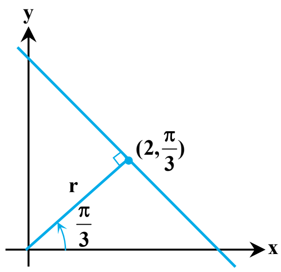
$$\boxed{r\cos(\theta-\theta_۰)=r_۰}$$



توجه: اگر بخواهیم معادله‌ی یک خط که در مختصات قطبی به صورت فوق داده شده را به صورت دکارتی نمایش دهیم، می‌توانیم از فرمول مثلثاتی مقابل استفاده کنیم: $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

برای مثال فرض کنید معادله‌ی قطبی خطی به شکل $r\cos(\theta-\frac{\pi}{۳})=۲$ داده شده باشد (همان‌طور که در شکل زیر نشان داده‌ایم)، اگر بخواهیم معادله‌ی دکارتی این خط را بنویسیم، داریم:

$$r(\cos\theta\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{۳})=۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}r\cos\theta+\frac{\sqrt{۳}}{۲}r\sin\theta=۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=۲\Rightarrow x+\sqrt{۳}y=۴$$



نکته ۵: هر خط مانند $ax+by=c$، با جایگزینی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، در مختصات قطبی به صورت $r=\frac{c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$ نیز نمایش داده می‌شود $(a^۲+b^۲\neq۰,\ c\neq۰)$.

۲ـ دایره‌ها در مختصات قطبی

به طور کلی معادله‌ی قطبی یک دایره با شعاع a و به مرکز $(r_۰,\theta_۰)$ به صورت زیر است:

$$\boxed{r^۲-۲r_۰r\cos(\theta-\theta_۰)+r_۰^۲=a^۲}$$

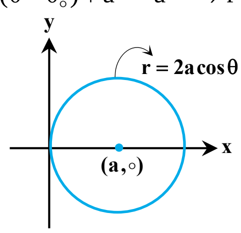
اگر مرکز دایره بر مبدأ مختصات منطبق باشد، آنگاه $r_۰=۰$ و لذا $r^۲=a^۲$ و به عبارت دیگر $r=a$ به دست می‌آید که معادله‌ی دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ است. اما اگر دایره از مبدأ عبور کند، آنگاه $r_۰=a$ و لذا معادله‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$r^۲-۲ar\cos(\theta-\theta_۰)+a^۲=a^۲\Rightarrow r^۲=۲ar\cos(\theta-\theta_۰)\Rightarrow\boxed{r=۲a\cos(\theta-\theta_۰)}$$

خُب! حالا اگر مرکز دایره در جهت مثبت محور x ها قرار گیرد، آنگاه $\theta_۰=۰$ و لذا معادله‌ی فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boxed{r=۲a\cos\theta}$$

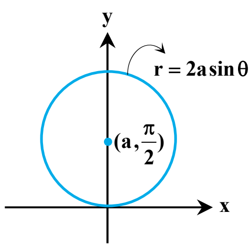
و نمودار آن به‌صورت شکل مقابل است.



اگر مرکز دایره روی جهت مثبت محور y ها قرار گیرد، آنگاه $\theta_۰=\frac{\pi}{۲}$ و لذا معادله‌ی اصلی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boxed{r=۲a\sin\theta}$$

و نمودار آن به‌صورت شکل مقابل است.



همان‌طور که گفتیم می‌خواهیم مساحت واقع در ربع اول را حساب کنیم، بنابراین حدود انتگرال از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{6}$ است.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta-1)d\theta=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos 2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\right)=\frac{1}{2}\left[2\times\frac{1}{2}\sin 2\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$$

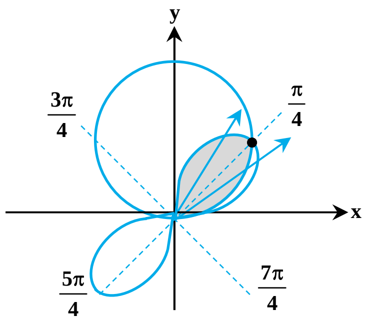
اکنون مساحت به دست آمده را باید ۴ برابر کنیم چون در صورت سؤال کل مساحت از ما خواسته شده است.

$$S=4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

مثال ۲۱: مساحت ناحیه‌ی داخل $r=\sqrt{2}\sin\theta$ و داخل لمنیسکات $r^2=\sin 2\theta$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» ضابطه‌ی $r=\sqrt{2}\sin\theta$ نمودار دایره‌ای قائم به مرکز $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ و با شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و ضابطه‌ی $r^2=\sin 2\theta$ نمودار لمنیسکات را نشان می‌دهد. اکنون هر دو نمودار را با هم رسم می‌کنیم تا ناحیه‌ی مشترک آنها مشخص شود.



با توجه به شکل، هدف سؤال محاسبه‌ی مساحت رنگ شده است. برای به دست آوردن نقاط تقاطع داریم:

$$\sin 2\theta=2\sin^2\theta\ \Rightarrow 2\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)=0\ \Rightarrow \sin\theta=0\ ,\ \ tg\theta=1\ \Rightarrow \theta=0,\frac{\pi}{4}$$

وقتی خطوط شعاعی را از مبدأ به سمت بیرون رسم می‌کنیم، در $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$، از $r=0$ وارد و از $r=\sqrt{2}\sin\theta$ خارج می‌گردد و برای $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$، از $r=0$ وارد و از $r^2=\sin 2\theta$ خارج می‌شود، بنابراین داریم:

$$\text{مساحت}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{8}$$

مثال ۲۲: مساحت داخل دلگون $r=a(1-\cos\theta)$ و داخل دایره $r=a$، کدام است؟

۱) $(\frac{5\pi}{4}-2)a^2$ ۲) $(\frac{5\pi}{4}+2)a^2$ ۳) $(\frac{5\pi}{8}-1)a^2$ ۴) $(\frac{5\pi}{8}+1)a^2$

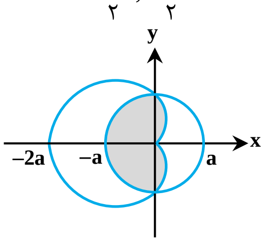
پاسخ: گزینه «۱» با توجه به شکل، باید مساحت ناحیه هاشورخورده را بدست بیاوریم، برای این منظور تقاطع دو منحنی را محاسبه می‌کنیم. ناحیه‌ی موردنظر را می‌توانیم به این صورت تفکیک کنیم:

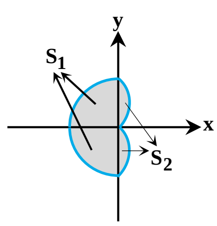
قسمتی از این ناحیه که در سمت چپ محور y ها قرار دارد، یک نیم‌دایره به شعاع a است. این قسمت را S_1 می‌نامیم.

$$S_1=\text{مساحت نیم‌دایره}=\frac{1}{2}\pi a^2$$

اما در سمت راست محور y ها ناحیه‌ی موردنظر یعنی S_2 از دو تکه‌ی متقارن تشکیل شده است. برای محاسبه‌ی مساحت S_2 کافی است مساحت نیمه‌ای که در ربع اول قرار دارد را نوشته و دو برابر کنیم.

$$a(1-\cos\theta)=a\ \Rightarrow\cos\theta=0\ \Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}$$





$$S_2=2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}d\theta=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-\cos\theta)^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2+a^2\cos^2\theta-2a^2\cos\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\cos 2\theta-2a^2\cos\theta\right)d\theta$$

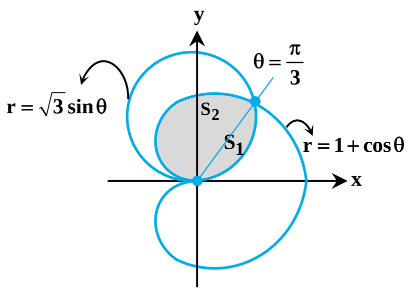
$$S_2=\left[a^2\theta+\frac{a^2}{2}\theta+\frac{a^2}{4}\sin 2\theta-2a^2\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}a^2-2a^2$$

$$\Rightarrow\text{مساحت ناحیه هاشورخورده}=S_1+S_2=\frac{\pi a^2}{2}+\frac{3\pi}{4}a^2-2a^2=\frac{5\pi}{4}a^2-2a^2=\left(\frac{5\pi}{4}-2\right)a^2$$

مثال ۲۳: **مساحت ناحیه‌ای از دلوار $r=۱+\cos\theta$ که به‌وسیله‌ی دایره‌ی $r=\sqrt{۳}\sin\theta$ قطع می‌شود، کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۴}(\pi-\sqrt{۳})$ ۲) $\pi-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}(\pi-\sqrt{۳})$ ۴) $\frac{۳}{۸}(\pi-\sqrt{۳})$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا نقاط تلاقی دو منحنی را تعیین می‌کنیم:



$$\begin{cases} r=۱+\cos ۲\theta \\ r=\sqrt{۳}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow ۱+\cos\theta=\sqrt{۳}\sin\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳} \text{ و } \pi$$

مساحت بین دو منحنی از دو بخش $S_۱$ و $S_۲$ تشکیل می‌شود.

$S_۱$ بخشی از دایره‌ی $r=\sqrt{۳}\sin\theta$ است که در محدوده‌ی از $\theta=۰$ تا $\theta=\frac{\pi}{۳}$ قرار دارد.

$$S_۱=\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{r^۲}{۲}d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۳\sin^۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۳}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۳}{۴}[\theta-\frac{\sin ۲\theta}{۲}]_۰^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۳}{۴}[\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}]$$

$S_۲$ به منحنی $r=۱+\cos\theta$ محدود شده است و در بازه‌ی $\theta=\frac{\pi}{۳}$ تا $\theta=\pi$ قرار دارد.

$$S_۲=\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}\frac{r^۲}{۲}d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+\cos\theta)^۲d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+۲\cos\theta+\cos^۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}(۱+۲\cos\theta+\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲})d\theta=\frac{۱}{۲}[\frac{۳}{۲}\theta+۲\sin\theta+\frac{\sin ۲\theta}{۴}]_{\frac{\pi}{۳}}^{\pi}$$

$$=\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۸}]=\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۹}{۸}\sqrt{۳}]$$

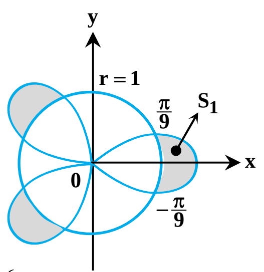
با جمع کردن مساحت‌ها داریم:

$$S_۱+S_۲=\frac{۳}{۴}[\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}]+\frac{۱}{۲}[\pi-\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}]=\frac{۳}{۴}[\pi-\sqrt{۳}]$$

مثال ۲۴: **مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $r=۲a\cos ۳\theta$ که خارج دایره‌ی $r=a$ قرار می‌گیرد، چند برابر $\frac{a^۲}{۹}$ است؟**

۱) $۳(\pi-\sqrt{۳})$ ۲) $۳\pi+\frac{۹}{۲}\sqrt{۳}$ ۳) $۳\pi-\frac{۹}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) $۲(\pi-\sqrt{۳})$

پاسخ: گزینه «۲» دوره‌ی تناوب منحنی $r=۲a\cos ۳\theta$ برابر با $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین در بازه‌های $۰\le\theta\le\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}\le\theta\le\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}\le\theta\le\frac{۶\pi}{۳}$ مقادیر یکسانی برای r به‌دست می‌آید. از اینجا متوجه می‌شویم که این منحنی دارای ۳ گلبرگ یکسان در این ۳ محدوده است. دایره‌ی $r=a$ را نیز رسم می‌کنیم. مساحت یکی از بخش‌هایی که خارج از دایره و درون منحنی $r=۲a\cos ۳\theta$ قرار دارد را حساب کرده و ۳ برابر می‌کنیم. ناحیه‌ی $S_۱$ را در نظر بگیریم. برای تعیین حدود θ منحنی‌ها را برخورد می‌دهیم:



$$\begin{cases} r=۲a\cos ۳\theta \\ r=a \end{cases} \Rightarrow ۲a\cos ۳\theta=a \Rightarrow \cos ۳\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳\theta=\pm\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{۹}$$

$$S_۱=\int_{-\frac{\pi}{۹}}^{\frac{\pi}{۹}}(\frac{(۲a\cos ۳\theta)^۲}{۲}-\frac{a^۲}{۲})d\theta=\frac{a^۲}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۹}}^{\frac{\pi}{۹}}(۴\cos^۲ ۳\theta-۱)d\theta=\frac{a^۲}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۹}}^{\frac{\pi}{۹}}[\frac{۴}{۲}(۱+\cos ۶\theta)-۱]d\theta=\frac{a^۲}{۲}[\theta+\frac{\sin ۶\theta}{۳}]_{-\frac{\pi}{۹}}^{\frac{\pi}{۹}}$$

$$=\frac{a^۲}{۲}[\frac{۲\pi}{۹}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}]=a^۲(\frac{\pi}{۹}+\frac{\sqrt{۳}}{۶}) \Rightarrow S=۳S_۱=a^۲(\frac{\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{a^۲}{۹}[۳\pi+\frac{۹}{۲}\sqrt{۳}]$$

توجه داشته باشید که تابع زیر انتگرال زوج است و می‌توانستیم به‌جای $\int_{-\frac{\pi}{۹}}^{\frac{\pi}{۹}}$ انتگرال $۲\int_۰^{\frac{\pi}{۹}}$ را حساب کنیم.

مثال ۲۵: **مساحت ناحیه‌ای که درون هر دو دایره‌ی $r=۲\sin\theta$ و $r=\sin\theta+\cos\theta$ قرار دارد، چند برابر $\frac{۱}{۲}$ است؟**

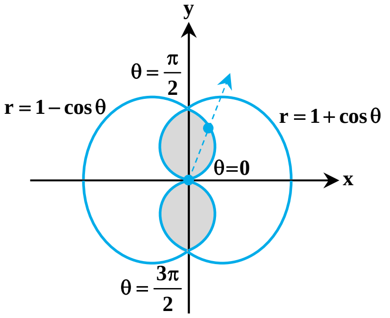
۱) $۲\pi-۱$ ۲) π ۳) $\pi-۱$ ۴) $\pi-۲$

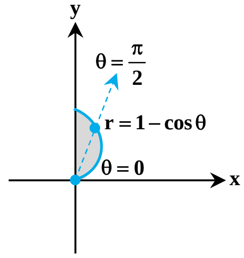
پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به توضیحاتی درباره‌ی رسم این دایره‌ها توجه کنید. برای رسم این دایره‌ها اگر شکل آنها را به خاطر ندارید، بهتر است از مختصات دکارتی استفاده کنید:

$$\begin{cases} r=۲\sin\theta \\ r=\sin\theta+\cos\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین تساوی‌ها ضرب در r}} \begin{cases} r^۲=۲r\sin\theta \\ r^۲=r\sin\theta+r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+y^۲=۲y \\ x^۲+y^۲=y+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+(y-۱)^۲=۱ \\ (x-\frac{۱}{۲})^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$S=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^{2}d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\theta+\cos^{2}\theta)d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)]d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta)d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\cos\theta+\cos2\theta)d\theta=[3\theta-4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}-4$$





مساحت و حجم حاصل از دوران منحنی‌های قطبی

اگر ناحیه‌ی محصور بین منحنی قطبی $r=f(\theta)$ را حول محوری دوران دهیم و بخواهیم **مساحت** یا **حجم** جسم حاصل از این دوران را حساب کنیم، آنگاه برای اینکه نخواهیم روابط جدیدی را حفظ کنیم، بهتر است همان فرمول‌های مربوط به فصل کاربرد انتگرال در مختصات دکارتی را به یاد بیاوریم و جایگزینی‌های لازم را انجام دهیم. مثلاً در محاسبه‌ی سطح حاصل از دوران منحنی، به جای x، y و dL روابط مناسب را با توجه به ضابطه‌ی نمودار قطبی جایگزین کنیم:

فرض کنید بخواهیم مساحت حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به منحنی قطبی را برای $\alpha\le\theta\le\beta$ حساب کنیم:

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور x ها $=2\pi\int ydL=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r\sin\theta\sqrt{r^{2}+r'^{2}}d\theta=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^{2}(\theta)+f'^{2}(\theta)}d\theta$

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور y ها $=2\pi\int xdL=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}r\cos\theta\sqrt{r^{2}+r'^{2}}d\theta=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)\cos\theta\sqrt{f^{2}(\theta)+f'^{2}(\theta)}d\theta$

و یا مثلاً در فرمول محاسبه‌ی حجم به روش دیسک، وقتی حجم حاصل حول محور x ها را می‌خواهیم، فرمول $V=\pi\int_{a}^{b}y^{2}dx$ را داشتیم، که در این حالت می‌توانیم به جای y، همان $f(\theta)\sin\theta$ و به جای dx با توجه به ضابطه‌ی $x=r\cos\theta$ و $x=f(\theta)\cos\theta$ مقدار مناسب را قرار دهیم.

مثال ۲۸: ناحیه‌ی واقع در ربع اول را که در مختصات قطبی به $0\le r\le 2-\cos\theta$ نمایش داده می‌شود، حول محور y ها در فضای سه‌بُعدی 360° دوران می‌کند و جسمی حاصل می‌شود. حجم این ناحیه از کدام انتگرال زیر به دست می‌آید؟

۱) $\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos\theta)^{2}d\theta$

۲) $\frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin\theta)^{3}\sin\theta d\theta$

۳) $\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin\theta)^{2}\sin\theta d\theta$

۴) $4\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}\theta\cos\theta(2-\cos\theta)^{2}(1-\cos\theta)d\theta$

پاسخ: گزینه «۴» طبق فرمول حجم حاصل از دوران به روش پوسته استوانه‌ای داریم: $V=2\pi\int_{x=a}^{x=b}xf(x)dx=2\pi\int_{x=a}^{x=b}xydx$

حالا باید با جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و $r=2-\cos\theta$ تمام زیر انتگرال را بر حسب θ بنویسیم. ابتدا dx را حساب می‌کنیم:

$$x=r\cos\theta\Rightarrow x=(2-\cos\theta)\cos\theta$$

$$dx=[\sin\theta\cos\theta-\sin\theta(2-\cos\theta)]d\theta=2\sin\theta(\cos\theta-1)d\theta$$

بنابراین داریم:

$$xydx=[(2-\cos\theta)\cos\theta][(2-\cos\theta)\sin\theta][2\sin\theta(1-\cos\theta)]d\theta=2\sin^{2}\theta\cos\theta(2-\cos\theta)^{2}(1-\cos\theta)d\theta$$

اگر عبارت فوق را در زیر انتگرال جایگزین کنیم، متوجه می‌شویم که گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۲۹: مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $r^{2}=a^{2}\cos2\theta$، حول محور $\theta=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) πa^{2} ۲) $2\pi a^{2}$ ۳) $4\pi a^{2}$ ۴) $8\pi a^{2}$

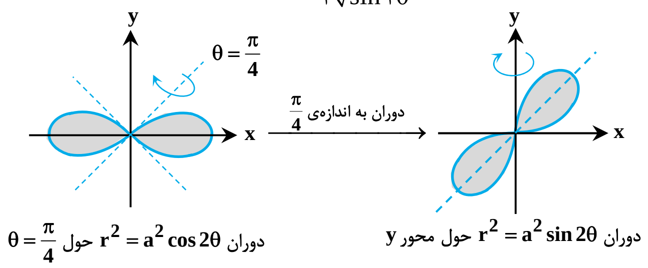
پاسخ: گزینه «۳» محور دوران، نیم‌خط $\theta=\frac{\pi}{4}$ است. می‌توانیم منحنی داده شده و محور دوران را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی دوران بدهیم تا نیم‌خط $\theta=\frac{\pi}{4}$ تبدیل به محور y ها شود. در این صورت در معادله‌ی منحنی هم باید به جای θ، $\theta-\frac{\pi}{4}$ قرار بدهیم. دقت داشته باشید که وقتی $r=f(\theta)$ را به اندازه‌ی θ_{0} در جهت مثلثاتی دوران دهیم، معادله‌ی آن $r=f(\theta-\theta_{0})$ می‌شود.

$$r^{2}=a^{2}\cos2\theta\xrightarrow{\text{دوران به اندازه‌ی } \frac{\pi}{4} \text{ در جهت مثلثاتی}}r^{2}=a^{2}\cos2(\theta-\frac{\pi}{4})\Rightarrow r^{2}=a^{2}\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})\Rightarrow r^{2}=a^{2}\sin2\theta$$

حالا مساحت حاصل از دوران این منحنی حول محور y ها را حساب می‌کنیم. منحنی جدید به دست آمده دو بخش متقارن در نواحی اول و سوم دارد. مساحت حاصل از دوران ناحیه‌ی اول را محاسبه و دو برابر می‌کنیم.

مساحت سطح دوار حول محور y ها از رابطه $2\pi\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\cos\theta\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\,d\theta$ به دست می‌آید.

$$f(\theta)=a\sqrt{\sin 2\theta}\Rightarrow f'(\theta)=a\frac{2\cos 2\theta}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\Rightarrow f^2(\theta)+f'^2(\theta)=a^2\sin 2\theta+\frac{a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{a^2\sin^2 2\theta+a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{a^2}{\sin 2\theta}$$



بنابراین $\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}=\frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ و در نتیجه مساحت سطح دوار برابر است با:

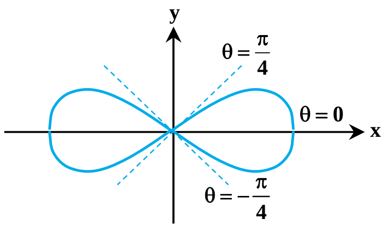
$$S=2\times 2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\sin 2\theta}.\cos\theta.\frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=4\pi a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta=4\pi a^2$$

تذکر: گاهی اوقات در سؤالات به جای اینکه بگویند **«دوران حول محور x ها»** از عبارت **«دوران حول محور قطبی»** و به جای اینکه بگویند **«دوران حول محور y ها»** از عبارت **«دوران حول خط $\theta=\frac{\pi}{2}$»** استفاده می‌کنند.

مثال ۳۰ (سخت): مساحت رویه‌ی حاصل از دوران پروانه $r^2=\cos 2\theta$ حول محور قطبی را S_1 و مساحت رویه‌ی حاصل از دوران همین منحنی حول خط $\theta=\frac{\pi}{2}$ را S_2 می‌نامیم. در این صورت $\frac{S_2}{S_1}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $2-\sqrt{2}$　۲) $2+\sqrt{2}$　۳) $\sqrt{2}+1$　۴) $\sqrt{2}-1$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا به تقارن‌های این منحنی توجه می‌کنیم. اگر در ترسیم نمودار مشکل دارید، از معادله‌ی دکارتی آن کمک بگیرید که تقارن‌ها را بهتر نشان می‌دهد:



$$r^2=\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta\Rightarrow r^2=\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\Rightarrow r^4=x^2-y^2\Rightarrow (x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

معادله‌ی این منحنی به ازای $\pm x$ و $\pm y$ تغییری نمی‌کند، بنابراین نسبت به هر دو محور x و y تقارن دارد.

اکنون مساحت رویه‌ی حاصل از دوران حول محور قطبی (یا همان محور x ها) را حساب می‌کنیم. طبق فرمول داریم $S_1=2\pi\int_{x=a}^{x=b} y\,ds$ البته این فرمول در مختصات قطبی چنین نوشته می‌شود: $S_1=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

با توجه به تقارن این منحنی نسبت به محورهای مختصات، کافی است مساحت حاصل از دوران ناحیه‌ی واقع در ربع اول را حول محور x ها حساب کرده و حاصل را دو برابر کنیم (برای توضیح بیشتر، ابتدا با توجه به تقارن نسبت به محور y ها، تصمیم می‌گیریم مساحت حاصل از دوران نیمه‌ی سمت راست را حساب کرده و نتیجه را دو برابر کنیم. حالا به نیمه‌ی سمت راست که دقت می‌کنیم، نسبت به محور x ها تقارن دارد. ولی چون محور x ها، محور دوران است، کافی است قسمت واقع در ربع اول را دوران بدهیم، با دوران این قسمت، نیمه‌ی پایینی هم ایجاد خواهد شد).

موضوع مهم، تشخیص حدود انتگرال است. چون دوران حول محور x انجام می‌شود، نقاط برخورد با این محور را در نظر می‌گیریم:

$$y=0\Rightarrow r\sin\theta=0\Rightarrow\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0,\frac{\pi}{4}$$

البته فقط زوایایی که در ربع اول قرار دارند را لحاظ کرده‌ایم. پس حدود انتگرال $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ هستند. حالا $\sqrt{r^2+r'^2}$ را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\sqrt{\cos 2\theta+\left(\frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}=\sqrt{\cos 2\theta+\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}=\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\Rightarrow S_1=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\times 2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=4\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\, d\theta=\left[-4\pi\cos\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=4\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

حالا به محاسبه‌ی S_2 می‌پردازیم. این بار محور دوران، محور y هاست. باز هم منحنی نسبت به محور دوران تقارن دارد، کافی است نیمه‌ی سمت راست را دوران دهیم و نیازی به دو برابر کردن جواب هم نداریم؛ زیرا جسمی که از دوران نیمه‌ی سمت راست ایجاد می‌شود، همان جسمی است که از دوران نیمه‌ی سمت چپ ایجاد خواهد شد. برای تشخیص حدود انتگرال، منحنی را با محور y ها (محور دوران) برخورد می‌دهیم.

$$x=0\Rightarrow r\cos\theta=0\Rightarrow\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta=0\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}$$

توجه داشته باشید که $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ قابل قبول نیست؛ زیرا زیر رادیکال منفی می‌شود. حالا سطح حاصل از دوران حول محور y با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S_2=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\, d\theta=2\pi\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{2\pi\sqrt{2}}{4\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$$

آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۱۵ | **مدت زمان پاسخگویی:** ۵۰ دقیقه | **سطح آزمون :** A

۱ــ در مورد مماس‌های منحنی قطبی $r = 2(1-\sin\theta)$، کدام گزینه درست نیست؟

۱) منحنی در نقاط $(4,-\frac{\pi}{2})$ و $(1,\frac{\pi}{6})$ مماس افقی دارد.

۲) منحنی در نقاط $(3,-\frac{\pi}{6})$ و $(1,-\frac{5\pi}{6})$ مماس قائم دارد.

۳) منحنی در نقاط $(1,\frac{\pi}{6})$ و $(1,\frac{5\pi}{6})$ مماس افقی دارد.

۴) تابع در سه نقطه مماس افقی و در دو نقطه دارای مماس قائم است.

۲ــ مساحت ناحیه محدود به منحنی $r = 4\cos^3\theta$ چند برابر $\frac{\pi}{2}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳ــ مساحت محدود به خطوط $\theta = \pi$ و $\theta = r - \sin r$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\pi(1-\frac{\pi^2}{3})$ ۲) $\pi(1-\frac{\pi^2}{6})$ ۳) $\pi(1+\frac{\pi^2}{6})$ ۴) $\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

۴ــ مساحت محدود به لمنیسکات $(x^2+y^2)^2 = 8xy$، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۵ــ حجم حاصل از دوران منحنی $r = a^2\cos^2\theta$، حول محور قطبی کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{7}a^6$ ۲) $\frac{3}{8}\pi a^6$ ۳) $\frac{4}{3}\pi^2 a^6$ ۴) $\frac{6\pi a^6}{7}$

۶ــ مساحت محدود درون حلقه $x^5+y^5 = 5ax^2y^2$ چقدر است؟ $(a>0)$

۱) $2a^2$ ۲) $\frac{5}{2}a^2$ ۳) $\frac{4}{3}a^2$ ۴) $\frac{a^2}{6}$

۷ــ مساحت محصور به یکی از حلقه‌های منحنی $(x^2+y^2)(2ay-x^2-y^2) = 4ay^3$ چند برابر $\frac{\pi}{12}$ است؟

۱) $2a^2$ ۲) a^2 ۳) $4a^4$ ۴) $\frac{a^2}{2}$

۸ــ طول قوس منحنی قطبی $r^n = a^n\cos n\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{2n}\beta(\frac{1}{2n},\frac{1}{2})$ ۲) $\frac{a}{n}\beta(\frac{1}{2n},\frac{1}{2})$ ۳) $\frac{a}{n}\beta(\frac{1}{n},\frac{1}{2})$ ۴) $\frac{a}{n}\beta(\frac{1}{n},1)$

۹ــ مساحت قسمتی از لمنیسکات $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ که داخل دایره $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$، قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۰ــ مساحت بین نمودار منحنی پارامتری $x = \sin t$ و $y = \frac{1}{2}\sin 2t$ در بازه $0 \le t \le 2\pi$ و منحنی قطبی $r^2 = \cos 2\theta$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۱ــ مساحت محدود به منحنی $x^4+y^4 = x^2+y^2$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{2\pi^2}{3}$ ۳) $\pi 2\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{2}$

۱۲ــ مختصات مرکز ثقل سطح محدود به منحنی $r = a\cos^3\theta\ (a>0)$ کدام است؟

۱) $(0,\frac{21}{40}a)$ ۲) $(\frac{21}{40}a,0)$ ۳) $(0,\frac{21}{20})$ ۴) $(\frac{21}{20},0)$

۱۳ــ مساحت ناحیه‌ای که درون منحنی $r = 2+\cos 2\theta$ و خارج منحنی $r = 2+\sin\theta$ قرار دارد، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۱) $\frac{49}{16}$ ۲) $\frac{51}{16}$ ۳) $\frac{51}{32}$ ۴) $\frac{49}{32}$