پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» راه‌حل کلاسیک برای حل این نوع سؤالات، مساوی قرار دادن دو تابع است. اما اگر بدون ساده کردن ضابطه‌ی اول این کار را انجام دهیم، حل معادله‌ها سخت خواهد بود، پس اول ضابطه‌ی این تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\mathrm{Ln}\sqrt{\cosh x+\sinh x}=\mathrm{Ln}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{۲}+\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}(e^x)=\frac{x}{۲}$$

حالا ضابطه‌ی دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲-\frac{۷}{۲}x=\frac{x}{۲}\Rightarrow x^۲=۴x\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

بنابراین نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۴,۲)$، محل تلاقی دو نمودار هستند.

$$AB=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

۲ـ گزینه «۲» از ضابطه‌ی $y=f(x)$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم.

$$y=۲^{\frac{x}{x-۱}}\Rightarrow \log_۲ y=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow x\log_۲ y-\log_۲ y=x\Rightarrow x\log_۲ y-x=\log_۲ y\Rightarrow x(\log_۲ y-۱)=\log_۲ y\Rightarrow x=\frac{\log_۲ y}{\log_۲ y-۱}$$

پس $f^{-۱}(y)=\frac{\log_۲ y}{\log_۲ y-۱}$. البته می‌توانیم ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ را هم با جایگذاری x به جای y بنویسیم.

۳ـ گزینه «۱»

$$y=\frac{x+۶}{x}=۱+\frac{۶}{x}$$

به ازای $x>۶$ همواره عبارت $\frac{۶}{x}$ عددی غیرطبیعی (کسری) خواهد بود و مقدار y متعلق به مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ نخواهد بود، لذا به ازای $۱\le x\le ۶$ که $x\in\mathbb{N}$ بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌گردد در ۴ مورد مقدار y نیز عدد طبیعی خواهد بود، لذا تابع چهار عضو دارد.

$$\begin{cases}x=۱\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۱}=۷\in\mathbb{N}\\ x=۲\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۲}=۴\in\mathbb{N}\\ x=۳\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۳}=۳\in\mathbb{N}\\ x=۴\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۴}=\frac{۵}{۲}\notin\mathbb{N}\\ x=۵\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۵}=\frac{۱۱}{۵}\notin\mathbb{N}\\ x=۶\Rightarrow y=۱+\frac{۶}{۶}=۲\in\mathbb{N}\end{cases}$$

۴ـ گزینه «۲» برای محاسبه‌ی $f(\sqrt{\log_۲ ۱۰۲۴})$ چون تابع چندضابطه‌ای است، باید ابتدا مقدار $\sqrt{\log_۲ ۱۰۲۴}$ را تعیین کنیم تا معلوم شود که از چه ضابطه‌ای باید استفاده کنیم:

$$\log_۲ ۱۰۲۴=\log_۲ ۲^{۱۰}=۱۰\log_۲ ۲=۱۰\Rightarrow\sqrt{\log_۲ ۱۰۲۴}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{\sqrt{۱۰}>۳}$$ باید از ضابطه‌ی سوم استفاده کنیم

$$f(\sqrt{۱۰})=۲\times\sqrt{۱۰}-۵\simeq ۲\times ۳/۲-۵=۶/۴-۵=۱/۴$$

۵ـ گزینه «۳» در گزینه (۱) هر چند دو ضابطه با هم برابرند، اما دامنه‌ها با هم برابر نیست. زیرا:

$$D_g:\mathbb{R}-\{۰\},D_f=\mathbb{R}$$

در گزینه (۲) نیز دامنه‌ی دو تابع برابر نیست.

$$D_f:x\ge ۱\ \text{یا}\ x\le -۱,D_g:x\ge +۱\Rightarrow D_g\ne D_f\Rightarrow f(x)\ne g(x)$$

در گزینه (۳) هم دامنه‌ها و هم ضابطه‌ها با هم برابر هستند.

در گزینه (۴) دامنه دو تابع با هم برابر است:

$$D_f:\mathbb{R}-\{x\,|\,x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$D_g:\mathbb{R}-\{x\,|\,x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}\ (k\in\mathbb{Z})$$

اما دو ضابطه با هم برابر نیستند، زیرا داریم:

$$f(\pi+\frac{\pi}{۳})=۲,g(\pi+\frac{\pi}{۳})=-۲\Rightarrow f(\pi+\frac{\pi}{۳})\ne g(\pi+\frac{\pi}{۳})$$

۶ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $-۱\le\cos ۴x\le ۱$ است. بنابراین داریم:

$$۲\ge -۲\cos(۴x)\ge -۲\Rightarrow ۵\ge ۳-۲\cos ۴x\ge ۱\Rightarrow\frac{۱}{۵}\le\frac{۱}{۳-۲\cos ۴x}\le ۱$$

یعنی: $\frac{۱}{۵}\le f(x)\le ۱$، پس برد تابع f برابر است با $\left[\frac{۱}{۵}\ ,\ ۱\right]$.

۷ـ گزینه «۴»

$$T_{k+1}=(-1)^k.\binom{10}{k}(\sqrt[3]{x})^{10-k}.(\frac{1}{2\sqrt{x}})^k=(-1)^k.\binom{10}{k}\frac{1}{2^k}.x^{\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}}$$

برای اینکه جمله فاقد x باشد، باید توان x را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{10-k}{3}=\frac{k}{2}\to 20=5k\to k=4$$

$$\text{جمله مورد نظر}=(-1)^4.\binom{10}{4}.\frac{1}{2^4}=\frac{10!}{4!\times 6!}\times\frac{1}{16}=\frac{105}{8}$$

۸ـ گزینه «۱» می‌دانیم دامنه‌ی توابع $y=\operatorname{Arcsin} f(x)$ به شکل $-1\le f(x)\le 1$ می‌باشد، اما چون خود $\operatorname{Arcsin}\operatorname{Log}_2^x$ زیر رادیکال است، لذا باید داشته باشیم: $\operatorname{Arcsin}\log_2^x\ge 0$، پس داریم:

$$\begin{cases}\operatorname{Log}_2^x\ge 0\Rightarrow x\ge 1\\ \operatorname{Log}_2^x\le 1\Rightarrow x\le 2\end{cases}\Rightarrow 1\le x\le 2$$

۹ـ گزینه «۴» تساوی (۱) هنگامی برقرار است که a و b هم‌علامت باشند. اگر هر دو مثبت باشند، داریم:

$$a>0\ ,\ b>0\ \Rightarrow\ a+b>0\ \Rightarrow\ |a|=a\ ,\ |b|=b\ ,\ |a+b|=a+b$$

و اگر هر دو منفی باشند، داریم:

$$a<0\ ,\ b<0\ \Rightarrow\ a+b<0\ \Rightarrow\ |a|=-a\ ,\ |b|=-b\ ,\ |a+b|=-a-b$$

در مورد تساوی (۲) هرگاه a و b هم علامت باشند، داریم: $|a-b|=||a|-|b||$ حالا اگر $|a|>|b|$ باشد، داریم:

$$|a|-|b|>0$$

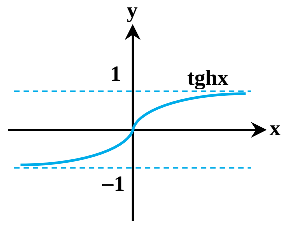
پس داریم:

$$|a-b|=||a|-|b||=|a|-|b|$$

۱۰ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $0\le|x|<\infty$ بنابراین: $\lfloor|x|\rfloor=0,1,2,3,\cdots$ در نتیجه داریم:

$$y=2^{\lfloor|x|\rfloor}=2^0,2^1,2^2,2^3,\cdots\ \Rightarrow\ y=1,2,4,8,\cdots$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱ـ گزینه «۴» بازه‌ی تغییرات tghx، $(-1,1)$ می‌باشد، به عبارتی $-1<\text{tghx}<1$. تابع Arctgx نیز صعودی است، پس می‌توانیم از طرفین نامساوی، Arctg بگیریم و در نتیجه داریم:

$$\text{Arctg}(-1)<\text{Arctg}(\text{tghx})<\text{Arctg}(1)\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\text{Arctg}(\text{tghx})<\frac{\pi}{4}$$

۲ـ گزینه «۴» ابتدا با تقسیم صورت بر مخرج در براکت دوم، ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left\lfloor\frac{a+2}{9-4x}\right\rfloor+\left\lfloor-4+\frac{7}{4x+9}\right\rfloor\Rightarrow f(x)=\left\lfloor\frac{a+2}{9-4x}\right\rfloor-4+\left\lfloor\frac{7}{4x+9}\right\rfloor$$

چون تابع زوج است، باید $f(x)-f(-x)=0$ باشد، لذا داریم:

$$\left\lfloor\frac{a+2}{9-4x}\right\rfloor-4+\left\lfloor\frac{7}{4x+9}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a+2}{4x+9}\right\rfloor+4-\left\lfloor\frac{7}{9-4x}\right\rfloor=0$$

با توجه به گزینه‌ها به سادگی ملاحظه می‌شود به ازای $a=5$ تساوی فوق برقرار است.

۳ـ گزینه «۳» با فرض $a=b=0$ داریم:

$$f(0+0)+f(0-0)=2f(0)+2f(0)\Rightarrow 2f(0)=4f(0)\Rightarrow f(0)=0$$

اما با فرض $b=x$ و $a=0$ داریم:

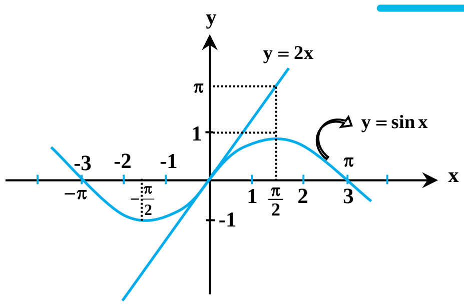
$$f(0+x)+f(0-x)=2f(0)+2f(x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

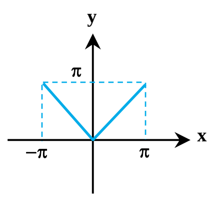
۴ـ گزینه «۳» می‌دانیم که در هر تابع معکوس‌پذیر، $fof^{-1}(x)=x$ است. بنابراین خط $y=x$ به‌دست می‌آید. فقط باید دامنه‌ی تابع $fof^{-1}(x)$ را تشخیص دهیم. طبق صورت سؤال $f:[-1,1]\to[1,2]$ پس $f^{-1}:[1,2]\to[-1,1]$ و با ترکیب آن‌ها خواهیم داشت:

$$[1,2]\xrightarrow{f^{-1}}[-1,1]\xrightarrow{f}[1,2]$$

به عبارتی دامنه و برد تابع $f^{-1}of$ همان بازه‌ی $[1,2]$ است، پس گزینه (۳) صحیح است.

۵ـ گزینه «۳»
با رسم نمودار دو تابع $y=2x$ و $y=\sin x$ و مشاهده محل تلاقی دو منحنی ملاحظه می‌شود که تنها ریشه‌ی معادله، $x=0$ می‌باشد.





۶ـ گزینه «۱» کافی است نمودار را در فاصله‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم کنیم و در سایر فاصله‌ها به روش مشابه نمودار قابل رسم می‌باشد.

$$0<x<\pi\to y=\arccos(\cos x)=x$$

$$-\pi<x<0\Rightarrow 0<-x<\pi\ ,\ \cos x=\cos(-x)\Rightarrow \arccos(\cos(-x))=-x$$

در سایر فاصله‌ها نیز شکل به همین ترتیب قابل رسم می‌باشد.

۷ـ گزینه «۴» دامنه‌ی تابع f، $x\ge 1$ است و به ازای $x=1$، حداقل f برابر ۱۴ بدست می‌آید، در نتیجه $R_f=[14,+\infty)$ خواهد بود.

۸ـ گزینه «۳» برای این‌که تابع زوج باشد، باید $c+2=0$ و $a=-b$ باشد. در نتیجه $a+b+c=-2$ خواهد بود.

۹ـ گزینه «۴»

$$y=\frac{1}{x^2-2x}\Rightarrow yx^2-2yx-1=0\Rightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+y}}{y}\Rightarrow y^2+y\ge0\Rightarrow y(y+1)\ge0\Rightarrow y\le-1\ \text{یا}\ y\ge0$$

توجه شود چون وقتی $y=0$ است، مقدار x نیز برابر صفر می‌شود و می‌دانیم $x=0$ جزء دامنه نیست، پس داریم:

$$R_f=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$$

۱۰ــ گزینه «۴»

روش اول: عدد صحیح می‌تواند از جزء صحیح خارج شود و $\lfloor a \rfloor$ یک عدد صحیح است، بنابراین داریم: $\lfloor a+\lfloor a \rfloor \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor a \rfloor = ۲\lfloor a \rfloor$

با استفاده از این نکته داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lfloor a+\lfloor a \rfloor \rfloor = ۲\lfloor a \rfloor \\ \left\lfloor a+۲\underbrace{\lfloor a+\lfloor a \rfloor \rfloor}_{۴\lfloor a \rfloor} \right\rfloor = ۵\lfloor a \rfloor \\ \left\lfloor a+۳\underbrace{\lfloor a-۲\lfloor a \rfloor \rfloor}_{-\lfloor a \rfloor} \right\rfloor = -۲\lfloor a \rfloor \end{array}\right\} \Rightarrow A = ۳\left\lfloor a-\frac{۲\lfloor a \rfloor}{۲}+\frac{۵\lfloor a \rfloor}{۵}-\frac{۲\lfloor a \rfloor}{۲} \right\rfloor = ۳\lfloor a-\lfloor a \rfloor \rfloor = ۰$$

روش دوم: به ازای $a=۱$ حاصل عبارت برابر صفر خواهد شد و در گزینه‌های ۱، ۲ و۳ حاصل هیچ‌کدام از گزینه‌ها به ازای $a=۱$ برابر صفر نمی‌شود.

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{۱}{x+۱}) = f(۰) = \frac{\sqrt{۰+۹}}{۳} = ۱$$

۲ـ گزینه «۳» ابتدا تکلیف جزء صحیح را معلوم می‌کنیم:

$$x \to ۰^- \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor ۰^- \rfloor = -۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\lfloor x \rfloor \sqrt{۹x^۲+۴}\,(\sin ۲x)}{(x^۲+۱)tg۳x} \sim \lim_{x\to ۰^-} \frac{(-۱)(۲)(۲x)}{(۱)(۳x)} = \frac{-۴}{۳}$$

۳ـ گزینه «۴» با توجه به حاصل حد باید بیشترین توان صورت را انتخاب کنیم، لذا داریم:

$$\Rightarrow n+۳=۵ \Rightarrow n=۲ \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-x^۵}{ax^۵} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۲}{۳}$$

$$۲n=۵ \Rightarrow n=\frac{۵}{۲} \Rightarrow n+۳>۲n \text{ تناقض}$$

بنابراین داریم:

$$a+n = ۲-\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

۴ـ گزینه «۳» تابع $g(x)$ را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$g(x) = (x-۱)^۲(x+۲)f(x)$$

چون تابع f کراندار است، لذا حد تابع $g(x)$ در نقاط $x=۱$ و $x=-۲$ برابر صفر است. پس تا اینجا $g(x)$ در ۲ نقطه حد دارد. از طرفی تابع $f(x)$ در نقطه $x=۲$ حد دارد و لذا حد تابع $g(x)$ در این نقطه برابر با $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۴\times \lim_{x\to ۲} f(x)$ می‌باشد (یعنی g در این نقطه هم حد دارد)، پس $g(x)$ دقیقاً در ۳ نقطه حد دارد.

۵ـ گزینه «۱» حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. برای محاسبه حد از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sinh x \sim x+\frac{x^۳}{۶} \ , \ \sin x \sim x-\frac{x^۳}{۶} \ , \ \cos x \sim ۱-\frac{x^۲}{۲} \ , \ \cosh x \sim ۱+\frac{x^۲}{۲}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x}) = \lim_{x\to ۰}(\frac{x+\frac{x^۳}{۶}-x+\frac{x^۳}{۶}}{۱+\frac{x^۲}{۲}-۱+\frac{x^۲}{۲}}) = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۳}{۳}}{x^۲} = \lim_{x\to ۰}\frac{x}{۳} = ۰$$

۶ـ گزینه «۴» حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است، برای محاسبه حد از هم‌ارزی‌های مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\sin x \sim x-\frac{x^۳}{۶} \ , \ tg^{-۱}x \sim x-\frac{x^۳}{۳}$$

در این صورت:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲(۳x-\frac{(۳x)^۳}{۶})-۳(۲x-\frac{(۲x)^۳}{۶})}{ax-(ax-\frac{(ax)^۳}{۳})} = \lim_{x\to ۰}\frac{-۵x^۳}{\frac{a^۳x^۳}{۳}} = \frac{-۱۵}{a^۳}$$

از معادله $\frac{-۳}{۲۵} = \frac{-۱۵}{a^۳}$، مقدار $a=۵$ به‌دست می‌آید.

۷ـ گزینه «۲» حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ است، از هم‌ارزی‌های مقابل استفاده می‌کنیم:

$$e^x \sim ۱+x+\frac{x^۲}{۲} \ , \ Ln(۱+x) \sim x-\frac{x^۲}{۲}$$

در این صورت:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x+\frac{x^۲}{۲}-۱-x)^۲}{x^۲-x^۲+\frac{x^۴}{۲}} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۴}{۴}}{\frac{x^۴}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۸ـ گزینه «۲»

$$\lim_{t\to ۰}(\frac{۱}{t}-\frac{۱}{te^{at}}) = \lim_{t\to ۰}\frac{e^{at}-۱}{te^{at}} \sim \lim_{t\to ۰}\frac{at}{te^{at}} = a \Rightarrow \text{حد اول}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}(\operatorname{cosec} x)^{\sin^۲ x} = \lim_{x\to ۰^+} e^{\sin^۲ x Ln \operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to ۰^+} e^{\sin^۲ x(\operatorname{cosec} x-۱)} = \lim_{x\to ۰^+} e^{\sin^۲ x(\frac{۱-\sin x}{\sin x})} = \lim_{x\to ۰^+} e^{\sin x(۱-\sin x)} = e^{۰(۱)} = ۱$$

از آنجایی که حاصل حد اول، دو برابر حاصل حد دوم است، بنابراین $a = ۲\times ۱ = ۲$ خواهد بود.

۹ـ گزینه «۲» با جایگذاری $x=0$ در عبارت به حالت مبهم 1^∞ می‌رسیم. می‌دانیم حاصل رفع ابهام این حالت خاص به‌صورت e^L می‌شود و داریم:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\left(\frac{1+\text{tg}x}{1+\sin x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\cancel{1}+\text{tg}x-\cancel{1}-\sin x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\text{tg}x-\sin x}{x^3(1+x)}\xrightarrow{\text{بنابر هم‌ارزی مناسب}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ حاصل حد $=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

۱۰ـ گزینه «۳» حالت $\frac{0}{0}$ است، بنابراین از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم:

$$x\to0\Rightarrow\sin x\sim x-\frac{x^3}{6}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(x\sin x)^{\frac{3}{2}}}\sim\lim_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{6})}{(x(x-\frac{x^3}{6}))^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}}{(x^2-\frac{x^4}{6})^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3(1-\frac{x^2}{6})^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}}{(1-\frac{x^2}{6})^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{6}$$

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا مخرج مشترک گرفته و صورت را تا جایی بسط می‌دهیم تا به توان مخرج برسیم.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-2(1-\cos x)}{2x^2(1-\cos x)}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2(1-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!})}{2x^2(1-1+\frac{x^2}{2})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^4}{4!}}{x^4}=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$$

۱۲ـ گزینه «۳» از اولین جمله بسط مک‌لورن $\text{tgh}(u)$ استفاده کنیم. وقتی $u\to0$ داریم: $\text{tgh}(u)\simeq u$. حد مورد نظر فرم 1^∞ دارد، پس بـه ایـن ترتیـب آن را ساده‌تر کرده و سپس حل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^+}(1-\text{tgh}^2(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}(1-\sqrt{x}^{\,2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}}\sim\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}x}=e^{-1}$$

۱۳ـ گزینه «۳» از دو جمله اول بسط مک‌لورن $\sinh(x)$ استفاده کنیم:

$$\sinh(x)\simeq x+\frac{x^3}{3!}$$

سپس با توجه به آن که فرم 1^∞ رخ می‌دهد از قاعده $(1+u)^v\simeq e^{vu}$ کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+\frac{1}{6}x^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{6}\right)^{\frac{1}{x^2}}\sim\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}(\frac{x^2}{6})}=e^{\frac{1}{6}}$$

۱۴ـ گزینه «۴» هرگاه حد نمایی $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=1^\infty$ قسمتی از یک حد بزرگتر باشد، بهترین راه این است که آن را به صورت $e^{g(x)\text{Ln}f(x)}$ بنویسیم و سپس از هم‌ارزی $\text{Ln}(1+u)=u-\frac{u^2}{2}$ و هم‌ارزی $e^u\simeq1+u$ استفاده کنیم. البته شرط استفاده از هم‌ارزی این است که $u\to0$ برود. در مخرج کسر داریم:

$$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^x=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\text{Ln}(1+\frac{1}{x})}$$

وقتی $x\to\infty$ داریم $\frac{1}{x}\to0$ پس می‌توان از هم‌ارزی Ln استفاده کرد:

$$\text{مخرج کسر}\simeq e^{x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})}=e^{x-\frac{1}{2}}$$

حالا می‌توانیم مقدار حد را به سادگی محاسبه کنیم:

$$\text{جواب حد}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}}=\sqrt{e}$$

سؤال دانشجو: چرا در این سؤال، با آن که $(1+\frac{1}{x})^x$ دارای فرم 1^∞ است، نمی‌توانیم از هم‌ارزی $(1+\frac{1}{x})^x\simeq e^{\frac{1}{x}\times x}$ استفاده کنیم و در مخرج کسر به این صورت بنویسیم:

$$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^x\simeq e^{\frac{1}{x}.x.x}=e^x\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{((1+\frac{1}{x})^x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

پاسخ: هرگاه حد نمایی به صورت 1^∞ داشته باشیم که بخشی از یک حد بزرگ‌تر باشد؛ استفاده از فرمول $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)(f(x)-1)}$ ممکن است ما را به جـواب نادرست برساند. در این نمونه از سؤالات همیشه از فرمول $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)\text{Ln}f(x)}$ استفاده می‌کنیم و سپس از هم‌ارزی $\text{Ln}(1+u)\simeq u-\frac{u^2}{2}$ مسأله را حـل می‌کنیم. اگر از هم‌ارزی $e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده کنیم ممکن است با حذف برخی از جملات به جواب نادرست برسیم.

۱۵ـ گزینه «۱» حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. با توجه به هم‌ارزی‌های $\sin x \sim x$ ، $\sinh x \sim x$ ، $e^x - 1 = x$ و این که $\text{Arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$ و $\text{Arcsec}\,\infty = \frac{\pi}{2}$ ، لذا داریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2.x.\frac{\pi}{2}}{x.2x.\frac{\pi}{2}} = 0$$

۱۶ـ گزینه «۱» وقتی دیدید تابع $f(x)$ بین دو تابع گیر افتاده! و حد آن مورد سؤال است مطمئن باشید، با یک تست ساندویچی روبه‌رو هستید:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{x} = 2 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+5x}{x^2} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

۱۷ـ گزینه «۴» تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{(۱) گزینه}: \lim_{x\to+\infty}(1+\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}[1+\cos(\frac{1}{+\infty})]=1+\cos(0)=1+1=2$$

می‌دانیم در ∞ مقدار $\lfloor x\rfloor$ هم‌ارز با x است، پس داریم:

$$\text{(۲) گزینه}: \lim_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor\sim\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

چون x منفی است، پس $|x|=-x$ می‌باشد:

$$\text{(۳) گزینه}: \lim_{x\to-\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}(-x)=-(-\infty)=+\infty$$

چون x منفی است پس $|x|=-x$ می‌باشد:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}\sim\lim_{x\to 0^-}-(\frac{x}{x})=-1$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x})=\lim_{x\to\infty}\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که $x=1$ ریشه مخرج کسر است، بهتر است حدود چپ و راست را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to1^+}\operatorname{Arctg}\frac{1}{1-x}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{1-(1+\varepsilon)}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{-\varepsilon}=\operatorname{Arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}\operatorname{Arctg}(\frac{1}{1-x})=\operatorname{Arctg}\frac{1}{1-(1-\varepsilon)}=\operatorname{Arctg}(\frac{1}{+\varepsilon})=\operatorname{Arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع حد ندارد.

۲۰ـ گزینه «۴»

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1-1-\varepsilon)^2}=\frac{1}{+\varepsilon^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1-1+\varepsilon)^2}=\frac{1}{+\varepsilon^2}=+\infty\end{cases}$$

باید حدود چپ و راست برابر مقدار تابع شوند، یعنی A باید برابر $+\infty$ گردد و چون بی‌نهایت عددی حقیقی نیست، پس A را نمی‌توان طوری انتخاب کرد که تابع فوق پیوسته شود.

۲۱ـ گزینه «۲» تابع فقط دو خط مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arccos}(\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{1+2x})=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{Arccos}\frac{x+\left|x+\frac{4}{2}\right|}{1+2x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty & \Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arccos}\frac{x+x+2}{1+2x}=\operatorname{Arccos}1=0\\ x\to-\infty & \Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{Arccos}\frac{x-x-2}{2x+1}=\operatorname{Arccos}(0)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$y=\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3\sin x+4\sin^3 x}{2\sin x\cos x}=\frac{3+4\sin^2 x}{2\cos x}\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

۲۳ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌ی A از هم‌ارزیِ $1^2+2^2+\cdots+n^2\simeq\frac{n^3}{3}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^3}{3})^{\frac{1}{n}}$$

اگرچه می‌دانیم که برای هر چندجمله‌ای مانند p(n) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$$

اما برای کامل بودن اثبات، چنین ادامه می‌دهیم:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}(\frac{n^3}{3})}{n}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{3}n^3}=0$$

بنابراین: $A=e^0=1$ است. در مورد B به این دقت کنیم که $\sin(n^2)$ و $\cos(n)$ هر دو توابعی کران‌دار هستند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج بر n خواهیم داشت:

$$B=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\sin n^2}{n}}{1+\frac{\cos n}{n}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

۲۴ــ گزینه «۲» تابع f در a مشتق‌پذیر است پس در این نقطه پیوسته هم هست پس $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ حالا اگر فرض کنیم $x=a+\frac{1}{n}$ آن‌گاه وقتی $n\to\infty$ داریم $x\to a$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n})=f(a)$ بنابراین حد داده شده دارای فرم 1° است که مبهم نیست و مقدارش برابر با ۱ می‌شود.

۲۵ــ گزینه «۳» برای این‌که منحنی $f(x)$ پایین مجانب مایل خود باشد، باید تفاضل «مجانب مایل ـ $f(x)$» کوچکتر از صفر باشد. پس باید مجانب مایل را حساب کنیم:

$$\frac{x^3+a-2}{ax^2}=\frac{x}{a}+\frac{(a-2)}{ax^2}$$

بنابراین مجانب مایل $y=\frac{x}{a}$ است؛ پس داریم:

$$\frac{x^3+a-2}{ax^2}-\frac{x}{a}<0 \Rightarrow \frac{x^3+a-2-x^3}{ax^2}<0 \Rightarrow \frac{a-2}{ax^2}<0 \Rightarrow \frac{a-2}{a}<0 \Rightarrow 0<a<2$$

۲۶ــ گزینه «۱» با توجه به این که $\lim\limits_{x\to\pi}(1+\cos x)=0$ ، و توجه به این که عبارت داده شده در سمت چپ نامساوی فوق، بزرگتر یا مساوی صفر است (چون داخل قدرمطلق است)، لذا داریم:

$$0\le \lim_{x\to\pi}\left|\frac{1-f(x)}{1+f(x)}-1\right|\le 0$$

بنابراین بر طبق قضیه ساندویچ داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\left|\frac{1-f(x)}{1+f(x)}-1\right|=0 \Rightarrow \lim_{x\to\pi}\left|\frac{-2f(x)}{1+f(x)}\right|=0 \Rightarrow \lim_{x\to\pi} f(x)=0$$

۲۷ــ گزینه «۲» برای محاسبه حد A و B با توجه به هم‌ارزی $1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ داریم:

$$A=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{2!}}}{\frac{x}{2}}\ \underset{\text{بنابر هم‌ارزی برنولی}}{=}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-(1-\frac{x^2}{4})}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{x^4}{2}}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{x^2}}{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A-2B=0-2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

۲۸ــ گزینه «۳» ابتدا لازم است عبارت را ساده کنیم، بدین منظور عبارت مقابل حد را در $(1-x)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم و سپس به طور متوالی از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{(1-x^2)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

حال توجه کنید که در عبارت به‌دست آمده $x=\cos 20^\circ$ را جایگزین کرده و حد می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\cos 20)^{2^{n+1}}}{1-\cos 20}=\frac{1}{1-\cos 20}=\frac{1}{2\sin^2 10}=\frac{1}{2}(1+\text{cotg}^2 10)$$

۲۹ــ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x+2|}{\text{tg}^{-1}(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(x+2)}{\text{tg}^{-1}(x+2)}\ \underset{\text{هم‌ارزی}}{=}\ 1$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\left(\frac{|x+2|}{\text{tg}^{-1}(x+2)}\right)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x+2)}{\text{tg}^{-1}(x+2)}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} f(x)-\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=1-(-1)=2$$

۳۰ــ گزینه «۳» چون درون براکت به سمت ∞ میل می‌کند، می‌توانیم براکت را برداریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{2^n}-x^{2^n}}{3x^{2^n}-x^{2^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2^n}}{2x^{2^n}}=\frac{1}{2}$$

۳۱ـ گزینه «۲» مجانب افقی تابع $y=\frac{1}{a}$ می‌باشد، پس $a=-2$ به‌دست می‌آید، یعنی $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{-2x^2+5x-3}$. مقدار $f(1)$ باید برابر با حد f در $x=1$ باشد:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{-2x^2+5x-3}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{-4x+5}=-3 \Rightarrow f(1)=-3$$

۳۲ـ گزینه «۱» ابتدا منحنی را مرتب می‌کنیم به طوری که y بر حسب x به‌دست بیاید و سپس مجانب‌های آن را می‌یابیم:

$$x^2y^2=x^2+y^2 \Rightarrow x^2y^2-y^2=x^2 \Rightarrow y^2(x^2-1)=x^2 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{x^2-1} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

مجانب قائم : $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \rightarrow$ دو مجانب قائم دارد.

$\lim_{x\to\pm\infty} y=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \rightarrow$ دو مجانب افقی دارد.

پس منحنی داده شده دارای ۴ مجانب است.

۳۳ـ گزینه «۲» حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای محاسبه حد از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad , \qquad e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots$$

برای $tg^{-1}x$ از دو جمله بسط فوق و برای e^{2x} نیز از دو جمله بسط استفاده می‌کنیم، زیرا جملات اول حذف می‌شوند. در این صورت حد به شکل زیر در می‌آید:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x+\frac{x^3}{3})(1+2x-1)}{2x^2-1+\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{2x^2-1+\cos ax}$$

برای اینکه حد اخیر برابر عدد شود، لازم است درجه x در مخرج کسر با درجه x درصورت کسر برابر باشد. می‌دانیم بسط مک‌لورن $\cos ax$ به‌صورت زیر است:

$$\cos ax=1-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^4x^4}{4!}-+\cdots$$

بنابراین لازم است جمله $2x^2$ در مخرج با جمله $-\frac{a^2}{2}x^2$ در بسط $\cos ax$ حذف شود، یعنی $2-\frac{a^2}{2}=0$ پس $a=\pm 2$ به‌دست می‌آید. در این صورت حد مورد نظر برابر ۱ به‌دست می‌آید.

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{2x^2-1+(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4}{\frac{2}{3}x^4}=1$$

۳۴ـ گزینه «۴» حد به‌صورت مبهم 1^∞ است، برای رفع ابهام از فرمول $u^v\sim e^{v(u-1)}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\coth x}=\lim_{x\to 0}e^{\coth x\left(\frac{1+e^x}{2}-1\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{tghx}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)}\ \underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\ \lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

توضیح: در محاسبات فوق از هم‌ارزی $tghx\sim x$ استفاده کردیم.

۳۵ـ گزینه «۳» با قراردادن $x=0$ در عبارت به حالت مبهم 1^∞ می‌رسیم. حاصل رفع ابهام این حالت خاص e^L می‌شود و فقط باید L را به روش زیر محاسبه نمود:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\text{Arc}\sinh x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arc}\sinh x-x}{x^3}$$

بجای $\text{Arc}\sinh x$ هم‌ارزی مناسب را قرار می‌دهیم (توجه کنید چون مخرج هم‌ارز x^3 است کافی است بسط مک‌لورن صورت آن را تا توان ۳ بنویسیم.)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3})-x}{x^3}=-\frac{1}{6} \Rightarrow \text{حاصل حد}=e^{-\frac{1}{6}}$$

۳۶ـ گزینه «۱» در محاسبات زیر از تساوی‌های $\frac{1}{0^-}=-\infty$ و $\frac{1}{0^+}=+\infty$ استفاده کرده‌ایم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} 7^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} 7^{\frac{1}{0^-}} = 7^{-\infty} = 0 \Rightarrow A_1 = 3+\frac{1}{1+0} = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 7^{\frac{1}{1-x}} = 7^{\frac{1}{0^+}} = 7^{\infty} \Rightarrow A_2 = 3+\frac{1}{1+\infty} = 3\end{array}\right\} \Rightarrow A_1 - A_2 = 4-3 = 1$$

۳۷ـ گزینه «۳» باید نقطه انفصال توابع را از درون به بیرون تعیین کنیم:

نقطه انفصال $f(x)$: $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $1-x=0 \Rightarrow x=1$ نقطه انفصال

نقطه انفصال $f(f(x))$: $f(f(x)) = f(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-(\frac{1}{1-x})} = \frac{1-x}{-x} = 1-\frac{1}{x} \Rightarrow x=0$ نقطه انفصال

نقطه انفصال $f(f(f(x)))$: $f(f(f(x)) = f(1-\frac{1}{x}) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})} = x \Rightarrow$ نقطه انفصال ندارد

۳۸ـ گزینه «۳» برای درک بهتر فرض می‌کنید $\text{Arccot}\, gx = u$، وقتی $x\to+\infty$ آن‌گاه $u\to 0^+$، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\lfloor \text{Arccot}\, gx\rfloor = \lim_{u\to 0^+}\lfloor u\rfloor = \lfloor 0^+\rfloor = 0$$

۳۹ـ گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی $\sin x \simeq x$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^a \sin^b x}{\sin x^c} = \lim_{x\to 0}\frac{x^a x^b}{x^c} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{a+b}}{x^c}$$

اکنون ۳ حالت داریم. اگر $a+b>c$، درجه‌ی صورت بیشتر است و با ساده کردن کسر داریم $\lim\limits_{x\to 0} x^{a+b-c}=0$. اگر $a+b<c$، درجه‌ی مخرج بیشتر است و با ساده کردن کسر داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{c-a-b}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

پس در این دو حالت مقدار حد یا صفر است یا بی‌نهایت. تنها زمانی‌که $a+b=c$، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{a+b}}{x^c} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

پس باید $a+b=c$.

۴۰ـ گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+x+2x^2)(1+3x)-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x+9x^2+2x^2+6x^3-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^3+11x^2+6x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(6x^2+11x+6)}{x} = \lim_{x\to 0}(6x^2+11x+6) = 6$$

توضیح: البته با کمی دقت از همان ابتدا چون در $x\to 0$ در صورت کسر باید کوچکترین توان را انتخاب کردیم، پس باید ضریب x را برداریم (البته دقت کنید اگر عدد ثابت ۱ در صورت باقی می‌ماند باید آن را به عنوان کمترین درجه می‌گرفتیم ولی در این مثال ۱ از صورت حذف می‌شود).

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۳» با استفاده از مفهوم هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$e^x - x - \frac{x^2}{2} \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - x - \frac{x^2}{2} \cong 1 + \frac{x^3}{3!}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x - x - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{tg^3 x}} \cong \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)^{\frac{1}{x^3}} = 1^\infty = e^{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^3}{3!}-1\right)\frac{1}{x^3}} = e^{\frac{1}{3!}} \Rightarrow A = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

۲ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0} Ln(x+1)^{1395} = \lim_{x\to 0} 1395.Ln(x+1) = 1395.Ln(1) = 0$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ ملاحظه می‌شود تابع $e^{f(x)}$ کراندار می‌باشد، لذا جواب مورد نظر برابر صفر خواهد بود.

یادآوری:

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{f(x)}_{0} \; . \underbrace{g(x)}_{\text{تابع کراندار}} = 0$$

۳ـ گزینه «۳» از بسط مک‌لورن استفاده می‌کنیم، چون مخرج کسر هم ارز x^4 است، پس بسط مک‌لورن توابع صورت را تا درجه چهار می‌نویسیم.

$$Ln(\cos x) \sim Ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\right) \sim \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\right)^2}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(\cos x)-\sqrt{1-x^2}+1}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}-1+\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+1}{x^4} = \frac{1}{24}$$

۴ـ گزینه «۱» با قرار دادن $x=0$ در کسر، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. چون $x\to 0$، لذا می‌توان به جای $\sinh(tgx)$ از بسط مک‌لورن آن استفاده نمود:

$$tgx = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \quad , \quad \sinh u \overset{u\to 0}{=\!=} u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\frac{u^7}{7!}+\cdots$$

$$\Rightarrow \sinh(tgx) = \sinh\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)+\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^3+\cdots$$

دقت کنید، چون مخرج کسر x^3 می‌باشد، کافی است بسط مک‌لورن صورت را فقط تا جمله x^3 بنویسیم.

توجه: لازم نیست $\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^3$ را کامل به توان برسانیم؛ زیرا ما فقط تا جمله x^3 را به کار می‌بریم، بنابراین می‌توان به جای آن جمله‌ی هم‌ارز مناسب، $\frac{1}{3!}x^3$ را جایگزین کرد:

$$\sinh(tgx)-x \sim x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)x^3-x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(tgx)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

۵ـ گزینه «۴» با قرار دادن $x=0$ در عبارت، به حالت مبهم 1^∞ می‌رسیم. حاصل رفع ابهام این حالت خاص e^L می‌شود و فقط باید L را به روش مقابل محاسبه نمود:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cosh x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x-\cosh x}{\cosh x}\right)$$

ابتدا هم‌ارزی مناسب برای مخرج را می‌نویسیم؛ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cosh x}{x^2}$، چون مخرج هم‌ارز x^2 شد، پس کافی است بسط‌های مک‌لورن صورت برای $\cos x$ و $\cosh x$ نیز تا x^2 نوشته شود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}-1-\frac{x^2}{2!}}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow \text{حد} = e^{-1}$$

۶ـ گزینه «۱» با قراردادن $x=0$ در کسر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای صورت از هم‌ارزی $Ln(x+1) \xrightarrow{x\to 0} x$ و برای مخرج ابتدا هم‌ارزی $\cosh x$ را نوشته، سپس از هم‌ارزی برنولی استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{2!}}-\sqrt{1+\frac{x^2}{2!}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2!}-1}{\left(1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!}} = -6$$

۷ـ گزینه «۴» با قراردادن $x=۱$ در کسر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم و داریم:

$$y=x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Lny=xLnx \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y}=۱+Lnx \Rightarrow y'=x^x(۱+Lnx)$$

$$\text{حد}=\lim_{x\to ۱}\frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^x(۱+Lnx)-۱}{\frac{۱}{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{دوباره از Hop استفاده می‌کنیم}}\lim_{x\to ۱}\frac{x^x(۱+Lnx)^۲+x^x(\frac{۱}{x})}{-\frac{۱}{x^۲}}=\frac{۱+۱}{-۱}=-۲$$

۸ـ گزینه «۳» برای رفع ابهام صورت و مخرج را **دو بار** در مزدوج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^۳}(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x}-۲\sqrt{x+۱})\times\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x}+۲\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x}+۲\sqrt{x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^۳}\frac{x+۲+x+۲\sqrt{x(x+۲)}-۴(x+۱)}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x}+۲\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^۳}\frac{۲(\sqrt{x(x+۲)}-(x+۱))}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x}+۲\sqrt{x+۱}}\times\frac{\sqrt{x(x+۲)}+(x+۱)}{\sqrt{x(x+۲)}+(x+۱)}$$

حالا می‌دانیم که $\sqrt{x+۲}\simeq\sqrt{x}$ و $\sqrt{x(x+۲)}=\sqrt{x^۲+۲x}\simeq|x+\frac{۲}{۲}|$ که این جمله هم وقتی $x\to +\infty$ با x هم‌ارز است، پس داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^۳}\frac{۲[x(x+۲)-(x+۱)^۲]}{(۴\sqrt{x})(۲x)}\Rightarrow \text{حد}=\lim\frac{-۲x\sqrt{x}}{۸x\sqrt{x}}=-\frac{۱}{۴}$$

۹ـ گزینه «۴» حالت کسر $\frac{۰}{۰}$ است. همچنین مخرج کسر $x^۴$ است لذا صورت کسر را تا جمله‌ی $x^۴$ بسط می‌دهیم.

با توجه به هم‌ارزی $\cos x$ در صفر داریم:

$$u\to ۰\Rightarrow \cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}\xrightarrow{u=\sin x}\cos(\sin x)\sim ۱-\frac{\sin^۲ x}{۲}$$

هم‌ارزی $\sin x$ در $x=۰$ برابر است با $\sin x\sim x-\frac{x^۳}{۳!}$. با توجه به موارد گفته شده داریم:

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^۴})\sim\lim_{x\to ۰}(\frac{(۱-\frac{\sin^۲ x}{۲})-(۱-\frac{x^۲}{۲})}{x^۴})=\lim_{x\to ۰}(\frac{\frac{x^۲}{۲}-\frac{\sin^۲ x}{۲}}{x^۴})=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^۴}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}(x-(x-\frac{x^۳}{۶}))(x+x-\frac{x^۳}{۶})}{x^۴}\sim\frac{\frac{۱}{۲}(\frac{x^۳}{۶})(۲x)}{x^۴}=\frac{۱}{۶}$$

توضیح: در کسر ما قبل آخر، $\frac{x^۳}{۶}$ را برابر صفر در نظر گرفتیم؛ چون وقتی $x\to ۰$ آن‌گاه $\frac{x^۳}{۶}$ نسبت به x خیلی کوچکتر است و می‌توان آن را صفر در نظر گرفت.

۱۰ـ گزینه «۱» حالت مبهم $۰\times\infty$ است. در اولین قدم از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم تا متغیر به سمت صفر میل کند. $t=\frac{۱}{x}$ که اگر $x\to\infty$، آن‌گاه $t\to ۰^+$ می‌باشد.

$$C=\lim_{x\to +\infty}x^۴(\cos\frac{۱}{x}-۱+\frac{۱}{۲x^۲})\overset{t=\frac{۱}{x}}{\underset{t\to ۰^+}{=\!=\!=}}\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{t^۴}(\cos t-۱+\frac{۱}{۲}t^۲)$$

وقتی $t\to ۰$ باشد، برای تابع $\cos t$ می‌توانیم از بسط مک‌لورن تابع به عنوان هم‌ارز استفاده کنیم و با توجه به درجه ۴ مخرج، بسط را تا توان ۴ می‌نویسیم.

$$\cos t=۱-\frac{t^۲}{۲!}+\frac{t^۴}{۴!}=۱-\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۴}{۲۴}$$

$$C=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{t^۴}(۱-\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۴}{۲۴}-۱+\frac{۱}{۲}t^۲)=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{t^۴}(\frac{t^۴}{۲۴})=\frac{۱}{۲۴}$$

۱۱ـ گزینه «۱» با جایگذاری $x=0$ به حالت مبهم $\infty-\infty$ می‌رسیم. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم. دانشجو باید توجه داشته باشد که هنگـام اسـتفاده از هم‌ارزی $\sin u$ اگر جملات یکدیگر را حذف کنند، **هم‌ارزی معتبر نیست** و باید به جملات، آنقدر اضافه کرد تا حاصل صفر نشود.

$$\text{حد}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}-\sin^2 x}{(\sin^2 x)(4\sin^2\frac{x}{2})}\sim\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin\frac{x}{2}-\sin x)(2\sin\frac{x}{2}+\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2(\frac{x}{2})-2\frac{(\frac{x}{2})^3}{3!}-x+\frac{x^3}{3!}\right)(2x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{24}-x+\frac{x^3}{6})(2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}\frac{3x^3}{24}=\frac{1}{4}$$

تذکر: چون مخرج هم‌ارزی x^4 شد، بسط صورت را تا رسیدن به x^4 ادامه می‌دهیم.

۱۲ـ گزینه «۱» هم‌ارزی‌ها را تا جمله‌ی x^2 می‌نویسیم زیرا جملات قبلی حذف می‌شوند:

$$\sqrt{1-x}\sim 1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2$$ هم‌ارزی برنولی:

بسط‌های مک لورن:
$$\left.\begin{array}{l}\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\to\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}\\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}\end{array}\right\}$$

$$\to\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!})-(1+x)}{(1-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2)-(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4!})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2!}}{-\frac{1}{12}x^2}=-6$$

۱۳ـ گزینه «۳» از هم‌ارزی $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$ و $\cosh x\sim 1+\frac{x^2}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{\pi^2}{2n^2}}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\left(\frac{1+\frac{\pi^2}{2n^2}}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^2(\frac{\pi^2}{n^2})}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}}}=e^{\pi^2}$$

۱۴ـ گزینه «۴» وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $t=(x-\frac{\pi}{2})\to 0$ و خواهیم داشت:

$$\sin(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(t)\simeq 1-\frac{t^2}{2}$$

علاوه براین تغییر متغیر، وقتی که $t\to 0$ می‌توانیم از هم‌ارزی $(1-\frac{t^2}{2})^m\sim e^{m\operatorname{Ln}(1-\frac{t^2}{2})}\sim e^{-\frac{mt^2}{2}}\sim 1-\frac{m}{2}t^2$ نیز استفاده کنیم. به این ترتیب داریم:

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{1-(1-\frac{t^2}{2})^{\alpha+\beta}}{\sqrt{[1-(1-\frac{t^2}{2})^{\alpha}][1-(1-\frac{t^2}{2})^{\beta}]}}=\lim_{t\to 0}\frac{1-1+\frac{\alpha+\beta}{2}t^2}{\sqrt{[1-1+\frac{\alpha}{2}t^2][1-1+\frac{\beta}{2}t^2]}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}t^2}{\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}t^2}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

چون قرار است حاصل این حد $\sqrt{3}$ شود، باید $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{3}$، پس $\alpha+\beta=\sqrt{3\alpha\beta}$، و اگر طرفین را به تـوان دو برسـانیم، آن‌گـاه $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=3\alpha\beta$، و لذا $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$.

۱۵ـ گزینه «۳» فرض کنیم $y=x^{\sin x}$ باشد. وقتی $x\to 0$، هم‌ارزی $\sin x\simeq x$ را داریم:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{Ln}y=\lim_{x\to 0}x\operatorname{Ln}x=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{x})=0\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}y=e^0=1$$

اما در حد دوم، یعنی: $B=\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x)^x$، چون $\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$، لذا فرم 1^∞ رخ خواهد داد. می‌دانیم که $\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$، پس داریم:

$$B=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{1}{x}))^x$$

وقتی $x\to\infty$ داریم $\frac{1}{x}\to 0$ پس $\text{arctg}(\frac{1}{x})\simeq\frac{1}{x}$ بنابراین داریم: $B=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{\pi x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\exp(\frac{-2x}{\pi x})=e^{-\frac{2}{\pi}}$

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{e^{-\frac{2}{\pi}}}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

۱۶ـ گزینه «۳» حدِ A دارای فرم مبهم 1^{∞} است. چون $x\to\infty$ پس $t=\frac{1}{x}\to 0$. دو جمله اول بسط $\sin^{-1}(t)$ وقتی که $t\to 0$ به‌صورت $t+\frac{t^3}{3!}$ است بـه این ترتیب خواهیم داشت:

$$A=\lim_{x\to\infty}(x(\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}))^{x^2}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{6x^2})^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\frac{1}{6x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$$

اما B فرم مبهم ندارد، در واقع: $B=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^{tg(x)}=1^{0}=1$، پس $\frac{A}{B}=e^{\frac{1}{6}}$.

۱۷ـ گزینه «۴» حد مورد نظر دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ است. اگرچه می‌توان با استفاده از هوپیتال محاسبه حد را انجام داد، اما این روش قدری وقت‌گیـر اسـت و بـا توجه به آن که $x=0$ ریشه‌ی مضاعف صورت است، باید دو بار هوپیتال گرفت. به این دلایل سعی می‌کنیم با استفاده از بسط مک‌لورن حد را ساده‌تر کنیم.

کار را با استفاده از هم‌ارزی‌های $\sin(u)\simeq u$ و $\cos(u)\simeq 1-\frac{u^2}{2}$ آغاز می‌کنیم و سپس با هم‌ارزی $Ln(1+u)\simeq u$ ادامه می‌دهیم (همه این هم‌ارزی‌هـا زمـانی معتبر هستند که $u\to 0$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{Ln[\cos(2x^2-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{Ln[1-\frac{(2x^2-x)^2}{2}]}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-\frac{1}{2}(2x^2-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x^2}{x^2(2x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6}{(2x-1)^2}=-6$$

۱۸ـ گزینه «۲» از آنجا که $x\to 0$ از بسط مک‌لورن به این شکل استفاده کنیم:

$$(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{2}{x}(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)}=e^{(2-x+\cdots)}\simeq e^{2-x}=e^2e^{-x}\simeq e^2(1-x)$$

همچنین با طی کردن مراحل مشابه:

$$(1+x)^{\frac{3}{x}}=e^{\frac{3}{x}\ln(1+x)}\simeq e^{3-\frac{3}{2}x}=e^3e^{-\frac{3}{2}x}\simeq e^3(1-\frac{3}{2}x)$$

با جایگذاری در حد خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^2(1-x)-e^2}{e^3(1-\frac{3}{2}x)-e^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^2x}{-\frac{3}{2}e^3x}=\frac{2}{3e}$$

۱۹ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم و حد را به‌صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم: $\text{حاصل حد}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}(1+2+3+\cdots+[|t|])$

چون $t\to\infty$، لذا $[|t|]=|t|$ و بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{t\to\infty}(\frac{1+2+\cdots+|t|}{t^2})=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{|t|(|t|+1)}{2}}{t^2}\simeq\lim_{t\to\infty}\frac{|t|^2}{2t^2}=\lim_{t\to\infty}(\frac{t^2}{2t^2})=\frac{1}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۴» به دو روش به این تست جواب می‌دهیم:

روش اول: فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد. می‌توانیم هوپیتال بگیریم یا از بسط مک‌لورن استفاده کنیم. <u>اولین جمله بسط مک‌لورن</u> توابع موجود بـرای یـافتن حـد کـافی است؛ زیرا مقدار حد را جملات با کمترین درجه تعیین می‌کنند. یادآوری کنیم که وقتی $u\to 0$ داریم: $Ln(1+u)\simeq u$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+2\,\text{arctg}(3x)+3x^2}{Ln(\sin^2x+3x+1)+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2(3x)+3x^2}{Ln(x^2+3x+1)+x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+6x+3x^2}{(x^2+3x)+x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=2$$

روش دوم: با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+2\,\text{arctg}(3x)+3x^2}{Ln(\sin^2x+3x+1)+xe^x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)+\frac{6}{1+9x^2}+6x}{\frac{2\sin x\cos x+3}{\sin^2x+3x+1}+e^x(x+1)}=\frac{2+6}{3+1}=\frac{8}{4}=2$$

۲۱ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم: $A=(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{4}{n^2})\cdots(1+\frac{2n}{n^2})$، در این صورت داریم:

$$LnA=Ln(1+\frac{2}{n^2})+Ln(1+\frac{4}{n^2})+\cdots+Ln(1+\frac{2n}{n^2})$$

با استفاده از هم‌ارزی $Ln(1+x)\sim x$ وقتی $x\to 0$ نتیجه می‌شود:

$$LnA\sim\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\cdots+\frac{2n}{n^2}=\frac{2+4+\cdots+2n}{n^2}\Rightarrow LnA\sim\frac{2(\frac{n(n+1)}{2})}{n^2}=\frac{n^2+n}{n^2}$$

وقتی $n\to\infty$، عبارت $\frac{n^2+n}{n^2}$ هم‌ارز ۱ است، بنابراین $LnA\to 1$ و در نتیجه $A\to e$.

۲۲ـ گزینه «۳» حد به‌صورت مبهم 1^∞ است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^n})^x=\lim_{x\to\infty}e^{x.\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{x^n}}$$

اگر $n>1$، رشد مخرج بیشتر و حد کسر برابر صفر می‌شود و حاصل حد برابر با ۱ به‌دست می‌آید.

اگر $n=1$، واضح است که حد برابر e به‌دست می‌آید.

اگر $-\infty<n<1$، رشد صورت بیشتر و حد کسر ∞ و حاصل حد e^∞ یا ∞ می‌شود.

۲۳ـ گزینه «۳» چون α و β ریشه‌های معادله ax^2+bx+c هستند، بنابراین داریم: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos a(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)^2}$$

طبق فرمول هم‌ارزی در $u\to 0$، $1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}$، داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{[a(x-\alpha)(x-\beta)]^2}{2}}{(x-\alpha)^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{a^2(x-\beta)^2}{2}=\frac{a^2(\alpha-\beta)^2}{2}$$

۲۴ـ گزینه «۴»

$$\text{حاصل حد}=e^{\lim_{x\to\infty}(\frac{\sinh x-1+x}{\sinh x+2}-1)(2\sinh x-1)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(-3+x)(2\sinh x-1)}{\sinh x+2}}$$

برای راحتی در محاسبات، ابتدا حاصل حد را حساب کرده و در نهایت عدد به‌دست آمده را در توان قرار می‌دهیم، اما در محاسبه‌ی حاصل حد دقت کنید که $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ و چون $x\to+\infty$، لذا $\sinh x=\frac{1}{2}e^x$. با جایگزین کردن این مقدار به جای $\sinh x$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{(-3+x)(2\sinh x-1)}{\sinh x+2})\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{(-3+x)(2\frac{e^x}{2})}{(\frac{e^x}{2})}=\lim_{x\to+\infty}(-3+x)\times 2=\lim_{x\to+\infty}(2x-6)=+\infty$$

و لذا حاصل حد برابر با $e^{+\infty}=+\infty$ است.

۲۵ـ گزینه «۴» یادآوری می‌کنیم، تابع علامت $sgn(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x=0\\ -1 & ;\ x<0\end{cases}$$

حالا حد چپ و راست تابع را با هم حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}sgn(x^2+x-2)=\lim_{x\to(-2)^+}sgn(x-1)(x+2)=(-1)\times 1=-1$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}sgn(x^2+x-2)=\lim_{x\to(-2)^-}sgn(x-1)(x+2)=(-1)\times(-1)=1$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد.

دقت کنید، مقدار $sgn(x-1)$ برای $x>1$ برابر ۱ و برای $x<1$ برابر -1 است، پس در هر دو حالت $x\to(-2)^+$ و $x\to(-2)^-$ مقدار $sgn(x-1)$ برابر -1 می‌شود. مقدار $sgn(x+2)$ برای $x>-2$ برابر ۱ و برای $x<-2$ برابر -1 است، پس مقدار $sgn(x+2)$ برای $x\to(-2)^+$ برابر ۱ و برای $x\to(-2)^-$ برابر -1 است.

۲۶ـ گزینه «۲» در هر دو حد خواسته می‌توانیم فرض کنیم $\theta=\sin^{-1}x$ و حد را برحسب θ نوشته و حل کنیم. در این صورت $x=\sin\theta$ است،

وقتی $x\to 0$ آن‌گاه: $\theta\to 0$ و لذا داریم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}\,(\sin^{-1}x)^3}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta(1-\sqrt{1-\sin^2\theta})}{\theta^3\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

می‌دانیم که $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|$ است البته در این مثال $\theta\to 0$ میل می‌کند و $\cos(0)=1$ مثبت است پس قدرمطلق لازم نیست.

در نتیجه داریم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}\,(\sin^{-1}x)^3}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3\cos\theta}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta(\frac{\theta^2}{2})}{\theta^3(1-\frac{\theta^2}{2})}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\theta^2}{2}}=\frac{1}{2}$$

محاسبه A: می‌دانیم اگر $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to 0$. در نتیجه $\sqrt[m]{1+f(x)}-1\approx\frac{1}{m}f(x)$

$$1-\sqrt{1-x^2}=-(\sqrt{1+(-x)^2}-1)\approx-(\frac{1}{2}(-x^2))=\frac{1}{2}x^2$$

(اگر $x\to 0$، آن‌گاه $x^2\to 0$)

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+(-x^2)}\approx\frac{1}{2}(-x^2)+1$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{1}{2}x^2)}{(-\frac{1}{2}x^2+1)x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(-\frac{1}{2}x^2+1)x^3}=\frac{1}{2}$$

(اگر $x\to 0$، آن‌گاه $\text{Arcsin}\,x\approx x$)

در محاسبه‌ی B هم از آن‌جا که کمانِ کسینوس و کتانژانت در صورت و مخرج $\sin^{-1}x$ است، بهتر است با تغییر متغیر $\theta=\sin^{-1}x$ این حد را ساده‌تر کنیم.

$$\theta=\sin^{-1}x\ \Rightarrow x=\sin\theta$$

می‌دانیم که $\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است بنابراین وقتی $x\to\frac{1}{\sqrt{2}}$، آن‌گاه $\theta\to\frac{\pi}{4}$، لذا داریم:

$$B=\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x-\cos(\sin^{-1}x)}{1-\text{cotg}(\sin^{-1}x)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta-\cos\theta}{1-\text{cotg}\,\theta}\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{1+\text{cotg}^2\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

محاسبه B:

$$\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}\qquad |x|\le 1\qquad\qquad \text{cot}\,g(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad x\ne 0,\ |x|\le 1$$

$$B=\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x-\sqrt{x-x^2}}{1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}=\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه با تقسیم A بر B داریم:

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۷ـ گزینه «۲» برای این‌که تابع در نقطه $x=0$، پیوسته باشد، باید در این نقطه حد داشته باشد، با توجه به قوانین هم‌ارزی چون مخرج جمله x^3 را دارد، باید هم‌ارزی را تا جمله x^3 نوشت:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{A\sin x+B\cos x+\sin 2x}{x^3})=\lim_{x\to 0}\frac{A(x-\frac{x^3}{6})+B(1-\frac{x^2}{2})+(2x-\frac{(2x)^3}{6})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{A}{6}-\frac{8}{6})x^3-\frac{B}{2}x^2+(A+2)x+B}{x^3}$$

حال صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}[(\frac{-A-8}{6})-\frac{B}{2x}+\frac{(A+2)}{x^2}+\frac{B}{x^3})]$$

صورت کسرهایی که در مخرج آنها x وجود دارد باید برابر صفر شود چون در غیر اینصورت به حالت ابهام $\frac{\text{عدد}}{0}=\infty$ می‌دهیم و با فرض مسأله که تابع پیوسته است تناقض دارد:

$$B=0,A+2=0\Rightarrow A=-2$$

مقدار $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم که برابر حدود چپ و راست تابع می‌باشد یعنی داریم:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{-A-8}{6}=\frac{+2-8}{6}=-1$$

۲۸ـ گزینه «۴» استفاده از هم‌ارزی $(\sqrt[n]{1+u} \underset{u\to 0}{\sim} 1+\frac{u}{n})$ بهترین روش حل این تست است:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{2})-(1-\frac{x}{2})}{(1+\frac{x}{3})-(1-\frac{x}{3})}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2x}{2}}{\frac{2x}{3}}\right)=\frac{3}{2}$$

۲۹ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}\right)+\left(\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{[x(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})]^n}{x^n}+\frac{[x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})]^n}{x^n}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^n(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n}{x^n}+\frac{x^n(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n}{x^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}[(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n+\lim_{x\to +\infty}(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n]=(1-1)^n+(1+1)^n=2^n$$

۳۰ـ گزینه «۳» ابتدا حد عبارت پرانتز جلوی $\operatorname{Arc}\cos$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|-x\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{x^2+x}-x)=\operatorname{Arc}\cos(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$$

۳۱ـ گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها باید حدود چپ و راست در نقطه $x=k^2$ را با مقدار تابع مقایسه کنیم، برای این منظور داریم:

حال اول برای بررسی حد چپ در نقطه $x=k^2$ فرض کنیم: $(k-1)^2<x<k^2$، پس داریم: $(k-1)<\sqrt{x}<k \Rightarrow \lfloor \sqrt{x}\rfloor=k-1$

پس حد چپ تابع در نقطه $x=k^2$ برابر است با: $\lim_{x\to (k^2)^-}(\sqrt{x}-\lfloor \sqrt{x}\rfloor)=\sqrt{x}-(k-1)=\sqrt{k^2}-k+1\overset{k>0}{=\!=}k-k+1=1$

اما برای بررسی حد راست تابع در نقطه $x=k^2$، فرض کنیم $k^2<x<(k+1)^2$، داریم: $k^2<x<(k+1)^2 \Rightarrow k<\sqrt{x}<k+1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{x}\rfloor=k$

پس حد راست تابع در نقطه $x=k^2$ برابر است با: $\lim_{x\to (k^2)^+}(\sqrt{x}-\lfloor \sqrt{x}\rfloor)=\sqrt{k^2}-k=k-k=0$

مقدار تابع در نقطه $x=k^2$ برابر $f(k^2)=\sqrt{k^2}-\lfloor \sqrt{k^2}\rfloor=k-k=0$ می‌باشد، پس تابع در هر نقطه مانند $x=k^2$ فقط پیوستگی راست دارد.

تذکر: البته در کنکور تست فوق را با بررسی عددی مثلاً $x=(1)^2$ یا $x=2^2$ به راحتی و در زمان بسیار کمتری می‌توانید پاسخ دهید!

۳۲ـ گزینه «۴» تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱):

$$\left.\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{0^+}=\operatorname{Arctg}+\infty=+\frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to 0^-}\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{Arctg}\frac{1}{0^-}=\operatorname{Arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow$$ تابع در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

بررسی گزینه (۲): با توجه به نمودار و تعریف تابع علامت $\operatorname{sgn}(x)$ فقط در نقطه $x=0$ ناپیوسته است.

بررسی گزینه (۳): $\lim_{x\to 0}\cos^2(\frac{1}{x})=\cos^2(\frac{1}{0})=\cos^2\infty=$ عددی غیرمشخص

در $x=0$ تابع اصلاً حد ندارد چه برسد که بخواهد پیوسته هم باشد.

بررسی گزینه (۴): در تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor\sin\pi x$، $\sin\pi x$ که همه‌جا پیوسته است، پس این $\lfloor x\rfloor$ است که ممکن است باعث ناپیوستگی تابع شود. از طرفی می‌دانیم $\lfloor x\rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، اما چون در نقاط صحیح همواره مقدار $\sin\pi x=0$ می‌شود، پس تابع پیوسته است.

نکته: تابع $y=g(x)\lfloor f(x)\rfloor$ به شرط پیوسته است که ریشه‌های معادله $f(x)=0$، مقدار $g(x)$ را همزمان صفر کند.

(در این تست $f(x)=x$ و $g(x)=\sin\pi x$ در نظر بگیرید)

۳۳ـ گزینه «۱» با استفاده از فرمول تبدیل حاصل‌جمع به حاصل‌ضرب $\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$ تست حل می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x+۱}-\cos\sqrt{x-۱})=\lim_{x\to+\infty}-۲\sin\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}{۲}\sin\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}{۲}$$

حد عبارتی را که کمان sin هستند، حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}{۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}{۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+۱)-(x-۱)}{۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{۲(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}\overset{\text{هم‌ارزی}}{\approx}\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=۰\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\sin(\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}{۲})$$

حد اول برابر صفر شد، اما برای عبارت دوم داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}{۲})=\sin(\infty)=-۱\le\text{عدد}\le۱$$

پس حد کل عبارت برابر با ۰ = عدد کراندار × ۰ است.

۳۴ـ گزینه «۳» اگر به توان کسر توجه کنیم، می‌توانیم حد آن را به سادگی به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to۱}(\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}})=\lim_{x\to۱}(\frac{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})})=\lim_{x\to۱}(۱+\sqrt{x})=۲$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to۱}[\frac{a(۱-x)+\sin(x-۱)}{x-۱+\sin(x-۱)}]^{۲}\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{x\to۱}[\frac{a(۱-x)+(x-۱)}{(x-۱)+(x-۱)}]^{۲}$$

$$=\lim_{x\to۱}[\frac{(۱-a)^{۲}(x-۱)^{۲}}{۲^{۲}(x-۱)^{۲}}]=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{(۱-a)^{۲}}{۴}-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow۱-a=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\a=۰\end{cases}$$

۳۵ـ گزینه «۲» برای حل حد مذکور ابتدا تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم و محدوده میل کردن حد را هم تعیین می‌کنیم و سپس به ساده‌سازی تابع مربوطه می‌پردازیم:

$$x-\frac{\pi}{۲}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}+t\Rightarrow\lim_{t\to۰}\frac{[۱-tg(\frac{\pi}{۴}+\frac{t}{۲})].[۱-\sin(\frac{\pi}{۲}+t)]}{[۱+tg(\frac{\pi}{۴}+\frac{t}{۲})].[-۲t]^{۳}}$$

حالا توجه داریم که $\sin(\frac{\pi}{۲}+t)=\cos t$ و $tg(\frac{\pi}{۴}+\frac{t}{۲})=\frac{۱+tg(\frac{t}{۲})}{۱-tg(\frac{t}{۲})}$ است. با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\lim_{t\to۰}\frac{[۱-\frac{۱+tg(\frac{t}{۲})}{۱-tg(\frac{t}{۲})}].[۱-\cos(t)]}{[۱+\frac{۱+tg(\frac{t}{۲})}{۱-tg(\frac{t}{۲})}].[-۸t^{۳}]}=\lim_{t\to۰}\frac{[-۲tg(\frac{t}{۲})].[۲\sin^{۲}(\frac{t}{۲})]}{-۱۶t^{۳}}$$

حالا از هم‌ارزی‌های زیر می‌خواهیم استفاده کنیم تا حد مذکور را ساده‌تر کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to۰}\sin(t)\sim t\\\lim\limits_{t\to۰}tg(t)\sim t\end{cases}\Rightarrow\lim_{t\to۰}\frac{(-t).(\frac{t^{۲}}{۲})}{(-۱۶t^{۳})}=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{t^{۳}}{۲}}{-۱۶t^{۳}}=\frac{۱}{۳۲}$$

۳۶ـ گزینه «۳» برای عامل $(\cos x-۱)$ استفاده از هم‌ارزی $\cos x\sim۱-\frac{x^{۲}}{۲!}$ مناسب است. حالا که بسط $\cos x$ را تا $x^{۲}$ نوشتیم، بسط e^{x} را هم تا $x^{۲}$ ادامه می‌دهیم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{(\cos x-۱)(\cos x-e^{x})}{x^{n}}\sim\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\frac{x^{۲}}{۲!}-۱)[(۱-\frac{x^{۲}}{۲!})-(۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!})]}{x^{n}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۰}\frac{(-\frac{x^{۲}}{۲})(-x)}{x^{n}}\simeq\lim_{x\to۰}\frac{\frac{۱}{۲}x^{۳}}{x^{n}}$$

فقط اگر $n=۳$ باشد مقدار حد $\frac{۱}{۲}$ است. در غیر این صورت یا مقدار حد $\pm\infty$ است یا صفر.

۳۷ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{e^{-x}}{2x\sinh(x)}\right)\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{e^{-x}}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+e^{-x}-1}{2x^2}\right)=\frac{0}{0}\to \text{مبهم}$$

$$\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-x}}{4x}\right)=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})\ \overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{+e^{-x}}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

۳۸ـ گزینه «۳» با استفاده از هم ارزی‌های $\sin u\simeq u$ و $tg(u)\simeq u$ داریم:

$$\begin{cases} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+|x|)^{\frac{a}{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{|x|\frac{a}{|x|}}=e^a \\ f(0)=b \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{2x}{3x}}=e^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

بنابراین $e^{\frac{2}{3}}=e^a=b$، یعنی $a=\frac{2}{3}$ و $b=e^{\frac{2}{3}}$ و در نتیجه $ab=\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}$.

۳۹ـ گزینه «۲» هرگاه مقدار داخل جزء صحیح به $\pm\infty$ میل کند داریم $\lfloor u\rfloor\simeq u$.

وقتی $x\to 0$ میل می‌کند داریم $\frac{1}{x}\to\pm\infty$ پس: $\lim\limits_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{a}{x}\right\rfloor=\lim\limits_{x\to 0}x\times\frac{a}{x}=a$ پس مجموع خواسته شده برابر است با:

$$A=\lim_{x\to 0^+}x\left(\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor\frac{1394}{x}\right\rfloor\right)=1+2+3+\dots+1394$$

برای محاسبه جمع اعداد ۱ تا ۱۳۹۴ با توجه به رابطه گاوس داریم:

$$\sum_{n=1}^{m}n=1+2+\dots+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

پس حاصل A برابر است با:

$$A=\frac{1394(1395)}{2}=1395\times 697$$

۴۰ـ گزینه «۱» با قرار دادن $x=0$ در کسر، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای e^x و $\sin x$ باید از هم‌ارزی‌های مرتبط استفاده نمود. لازم به ذکر است چون درجه x در مخرج کسر ۳ می‌باشد، کافی است هر یک از هم‌ارزی‌ها را فقط تا جایی که جمله‌ی x^3 تولید می‌شود، ادامه دهیم و داریم:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\qquad,\qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$e^x\sin x\sim\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)=x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^4-\frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{36}$$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3-\frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{36}-x-x^2}{x^3}\sim\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» طبق فرمول، حجم هرمی که مساحت قاعده آن s و ارتفاع آن h باشد، برابر با $v=\frac{۱}{۳}sh$ می‌باشد. با توجه به‌صورت سؤال اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، با توجه به این که تغییرات مساحت نسبت به زمان، یعنی $\frac{ds}{dt}$ و همچنین تغییرات حجم نسبت به زمان، یعنی $\frac{dv}{dt}$ داده شده است، لذا داریم:

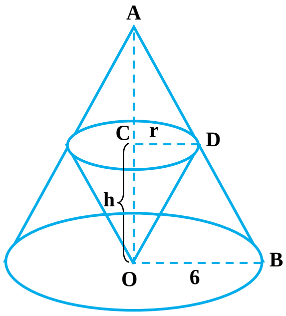
$$V=\frac{۱}{۳}sh \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{۱}{۳}\left(s\frac{dh}{dt}+h\frac{ds}{dt}\right) \Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{۳}\left(۱۰۰\frac{dh}{dt}+۸\times ۵\right) \Rightarrow ۹۰-۴۰=۱۰۰\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{cm}{s}\right)$$

۲ـ گزینه «۳» برای یافتن نقطه بحرانی باید از تابع مشتق بگیریم و حاصل آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$y=x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Lny=xLnx \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y}=۱+Lnx \Rightarrow y'=x^x(۱+Lnx)=۰$$

x^x هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود، پس کافیست حاصل $۱+Lnx=۰$ را بیابیم:

$$Lnx=-۱ \Rightarrow x=e^{-۱}$$



۳ـ گزینه «۲» در شکل مقابل دو مثلث ACD و AOB متشابه‌اند، بنابراین داریم:

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{۱۲}{۶}=\frac{۱۲-h}{r} \Rightarrow h+۲r=۱۲$$

حجم مخروط مورد نظر $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h$ می‌باشد، که چون $h=۱۲-۲r$، بنابراین $V=\frac{\pi}{۳}(۱۲r^۲-۲r^۳)$ است. برای یافتن ماکزیمم V مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dv}{dr}=\frac{\pi}{۳}(۲۴r-۶r^۲)=۰ \Rightarrow r=۴ \text{ و } h=۴$$

۴ـ گزینه «۲» طبق تعریف مشتق داریم:

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(f(x))}{x^۲}$$

با توجه به پیوستگی تابع f و این که $f(۰)=۰$ است فرم مبهم $\frac{۰}{۰}$ رخ می‌دهد، پس قاعده هوپیتال را به کار می‌گیریم.

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f'(x)\cos(f(x))}{۲x}$$

که $f'(۰)=۰$، پس دوباره فرم مبهم $\frac{۰}{۰}$ رخ داده است:

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f''(x)\cos(f(x))-f'(x)f'(x)\sin(f(x))}{۲}=\frac{۱}{۲}(f''(۰)\cos(۰)-۰)=\frac{۱}{۲}$$

۵ـ گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}=۰ \;,\; \lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}=۰ \;,\; f(۰)=۰ \Rightarrow \text{پیوسته}$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{x}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}}{x}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}=\begin{cases} ۰ & x\to ۰^+ \\ ۱ & x\to ۰^- \end{cases}$$

بنابراین مشتق راست در $x=۰$ برابر ۰ و مشتق چپ در $x=۰$ برابر ۱ است.

۶ـ گزینه «۴» اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه nام برحسب x باشند، آن‌گاه مشتق مرتبه nام uv، از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\binom{n}{۰}u^{(۰)}v^{(n)}+\binom{n}{۱}u^{(۱)}v^{(n-۱)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v^{(۰)}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

در این تست $u=x$ و $v=\sin x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$y^{(۱۰)}=\binom{۱۰}{۰}x.(\sin x)^{(۱۰)}+\binom{۱۰}{۱}۱.(\sin x)^{(۹)}=۱\times x.\sin(۵\pi+x)+۱۰\times\sin\left(\frac{۹\pi}{۲}+x\right)=۱۰\cos x-x\sin x$$

توضیح: از جمله دوم به بعد چون مشتق u برابر صفر است، لذا دیگر نوشتن بقیه عبارات لازم نبود.

۷ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l} x=-۱ \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} y=e \to A(-۱,e) \\ y'=۲xe^{-x}-x^۲.e^{-x} \xrightarrow{x=-۱} m=-۳e \end{array}\right\} \text{خط مماس}: y-e=-۳e(x+۱)$$

در نقطه A (نقطه برخورد با محور xها) داریم $y=۰$، لذا داریم:

$$۰-e=-۳e(x+۱) \to x=-\frac{۲}{۳}$$

با توجه به این‌که تصویر نقطه تماس روی محور xها نقطه $x=-۱$ می‌باشد، لذا فاصله مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۸ـ گزینه «۱» ابتدا ضابطه عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$y=\cot g^{-1}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)=\cot g^{-1}\left(\frac{1+\cot g x}{1-\cot g x}\right)=\cot g^{-1}\left(\cot g x\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=x+\frac{3\pi}{4}$$

بنابراین $y'=1$ بدست می‌آید.

۹ـ گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی داده شده برای $f(x)$ داریم:

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}-2\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}}-\frac{1}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{2}{2\sqrt{x-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=0$$

با توجه به این که مشتق برابر صفر است، لذا قطعاً f تابعی ثابت است. اما دقت کنید در این لحظه گزینه (۴) را انتخاب نکنید، چون f تابعی ثابت است به ازای هر مقدار که به x بدهیم، مقدار $f(x)$ فرقی نمی‌کند و همیشه یکسان است. لذا با قرار دادن عدد مناسب صفر به جای x (برای راحتی در محاسبات)، مقدار ثابت f حساب می‌شود:

$$f(0)=\operatorname{Arc}\sin(-1)-\operatorname{Arc}\sin(0)=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$$

بنابراین $f(x)$ همواره برابر $-\frac{\pi}{2}$ است و در نتیجه حاصل $f'(x)-f(x)$ برابر $0-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ می‌شود.

۱۰ـ گزینه «۱» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f(1)=0$ است، پس $x-1$ عامل صفرکننده می‌باشد و برای مشتق‌گیری کافیست فقط از این عامل مشتق گرفته و در مابقی جملات تابع، $x=1$ را جایگزین کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}f'(1)=1\times\frac{2(-1)(-2)}{2(3)(4)}=\frac{1}{6}$$

۱۱ـ گزینه «۱» در این سؤال ابتدا از $y=2$ مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$y=2\Rightarrow 2=\frac{4x^3}{x^2+1}\Rightarrow x=1$$

حالا از فرمول مشتق تابع معکوس استفاده می‌کنیم:

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}\ ,\ f'(x)=\frac{12x^2(x^2+1)-(2x)(4x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{16}{4}=4\Rightarrow(f^{-1})'(2)=\frac{1}{4}$$

۱۲ـ گزینه «۱» در ابتدا باید مقدار $g'(0)$ و $f'(0)$ را بیابیم. با توجه به شرطهای سؤال داریم:

$$6f(0)=3\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}\quad,\quad f(0)g(0)=2\Rightarrow g(0)=\frac{2}{f(0)}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$f'(0)=4g(0)=4\times4=16\quad,\quad 2g'(0)=4g(0)\Rightarrow g'(0)=2g(0)=2\times4=8$$

با توجه به مقادیر ناصفر $f'(0)$ و $g'(0)$ داریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{g'(0)}{f'(0)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۴» یک دانشجوی باهوش باید بداند که مشتق‌گیری از این تابع با استفاده از قواعد معمولی مشتق نظیر مشتق حاصل‌ضرب و تقسیم کار پیچیده و وقت‌گیری است، لذا برای راحتی کار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{\sqrt{(1+x)^7}\cos^9x}{(x^2-4)^5}\xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}\operatorname{Ln}y=\operatorname{Ln}\frac{(1+x)^{\frac{7}{2}}\cos^9x}{(x^2-4)^5}\Rightarrow\operatorname{Ln}y=\frac{7}{2}\operatorname{Ln}(1+x)+9\operatorname{Ln}\cos x-5\operatorname{Ln}(x^2-4)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{y'}{y}=\frac{\frac{7}{2}}{1+x}+\frac{-9\sin x}{\cos x}-5\frac{2x}{x^2-4}\Rightarrow y'(0)=y(0)\left[\frac{\frac{7}{2}}{1+0}+\frac{-9(0)}{1}-5\frac{2(0)}{0-4}\right]$$

$$\Rightarrow y'(0)=y(0)\left(\frac{7}{2}\right)\Rightarrow y'(0)=\frac{1}{(-4)^5}\times\frac{7}{2}\Rightarrow y'(0)=-\frac{14}{4^6}$$

۱۴ـ گزینه «۲» مساله همان مشتق‌گیری پارامتری است، یعنی داریم:

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\quad,\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

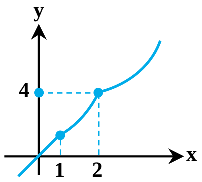
$$x'_t=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)\qquad y'_t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\cos t+\sin t)$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}\right)'}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{۲}{e^t(\cos t-\sin t)^۳}$$

۱۵ـ گزینه «۱»

با توجه به نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که این تابع در $\mathbb{R}$ پوشاست و چون یک به یک است، پس معکوس‌پذیر نیز می‌باشد.



۱۶ـ گزینه «۲» با توجه به ضابطه $f(x)$ واضح است که محاسبه مشتق به کمک Ln ساده‌تر است:

$$Lnf(x)=\frac{۱}{۲}(Ln(۴x+۲)-Lnx-Ln(x+۱)-Ln(x+۲))$$

از طرفین رابطه اخیر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۴x+۲}-\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x+۲}\right)$$

حال به جای xها در دو طرف تساوی $x=۱$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{f'(۱)}{f(۱)}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۶}-۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{-۷}{۱۲}$$

با توجه به این‌که $f(۱)=\sqrt{\frac{۴\times۱+۲}{۱\times۲\times۳}}=۱$ می‌باشد، پس $f'(۱)=\frac{-۷}{۱۲}$ بدست می‌آید.

۱۷ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که $\sin\alpha=\frac{\pm۱}{\sqrt{۱+\cot g^۲\alpha}}$ می‌باشد، با انتخاب علامت مثبت داریم:

$$\sin(Arc\cot gx)=\frac{۱}{\sqrt{۱+\cot g^۲(Arc\cot gx)}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

همچنین با توجه به اینکه $\cos\alpha=\frac{\pm۱}{\sqrt{۱+tg^۲\alpha}}$ می‌باشد، با انتخاب علامت مثبت داریم:

$$f(x)=\cos\left(Arctg\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^۲\left(arctg\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{۱+x^۲}}}=\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{x^۲+۲}}=\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}}$$

بنابراین با جایگذاری $x=\sqrt{۱۳۹۵}$ خواهیم داشت:

$$f(\sqrt{۱۳۹۵})=\sqrt{\frac{۱۳۹۵+۱}{۱۳۹۵+۲}}=\sqrt{\frac{۱۳۹۶}{۱۳۹۷}}$$

۱۸ـ گزینه «۴» با توجه به آن که $۵۱۲=۲^۹$، داریم:

$$\log_۲(۵۱۲)=۹$$

بنابراین $x=\sqrt{۱+\log_۲(۵۱۲)}=\sqrt{۱۰}$. حال می‌دانیم که $۳\le x$، پس $f(x)=x^۳-۶x$ و $f'(x)=۳x^۲-۶$ و با جایگذاری $x=\sqrt{۱۰}$ داریم:

$$f'(\sqrt{۱۰})=۳۰-۶=۲۴$$

۱۹ـ گزینه «۴» چون ضابطه داده شده ضمنی است، برای مشتق‌گیری، همه جملات را به یک طرف برده و طرف دیگر را برابر صفر قرار می‌دهیم، سپس به کمک $-\frac{f'x}{f'y}$ از رابطه مشتق می‌گیریم:

$$e^{xy}Ln\left(\frac{x}{y}\right)-x-\frac{۱}{y}=۰$$

$$\text{مشتق}=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{ye^{xy}Ln\left(\frac{x}{y}\right)+e^{xy}\left(\frac{۱}{x}\right)-۱}{xe^{xy}Ln\left(\frac{x}{y}\right)-e^{xy}\left(\frac{۱}{y}\right)+\frac{۱}{y^۲}}=-\frac{e^{-۱}e^{e^۱.e^{-۱}}Ln\left(\frac{e}{e^{-۱}}\right)+\frac{۱}{e}e^{e^۱.e^{-۱}}-۱}{ee^{e^۱.e^{-۱}}Ln\left(\frac{e}{e^{-۱}}\right)-\frac{e^{e^۱.e^{-۱}}}{e^{-۱}}+\frac{۱}{e^{-۲}}}=-\frac{۲e^{-۱}e^۱}{۲e^۲-e^۲+e^۲}=-\frac{۱}{e^۲}=-e^{-۲}$$

۲۰ـ گزینه «۴» ابتدا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y=\sqrt{tgx+\sqrt{tgx+\sqrt{tgx+\cdots}}}\Rightarrow y^2=tgx+y$$

با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$y^2-tgx-y=0\Rightarrow y'=-\frac{-(1+tg^2x)}{2y-1}=\frac{1+tg^2x}{2y-1}\qquad(1)$$

$$tg^2x=\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\Rightarrow tgx=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\xrightarrow{x=\sin^{-1}(\frac{3}{5})}tgx=\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}=\frac{3}{4}$$

حال با جایگزینی $tgx=\frac{3}{4}$ در رابطه $y^2=tgx+y$ نتیجه می‌شود:

$$y^2=\frac{3}{4}+y\Rightarrow 4y^2-4y-3=0\Rightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\frac{4\pm 8}{8}=\begin{cases}\frac{3}{2} & :\text{ق ق}\\ \frac{-1}{2} & :\text{غ ق ق}\end{cases}$$

با جایگزینی $y=\frac{3}{2}$ و $tgx=\frac{3}{4}$ در رابطه (۱) داریم:

$$y'=\frac{1+\frac{9}{16}}{3-1}=\frac{25}{32}$$

۲۱ـ گزینه «۴» نقطه تماس دو منحنی بر روی محور y ها است یعنی $x=0$. با جایگذاری $x=0$ در دو معادله داده شده داریم:

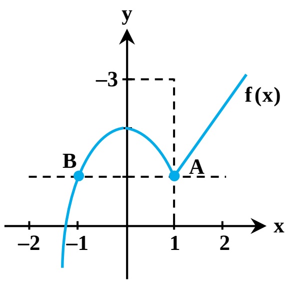
$$\left.\begin{aligned}y=\frac{1}{a+x}&\xrightarrow{x=0}y=\frac{1}{a}\\ y=\frac{1+x}{b-x}&\xrightarrow{x=0}y=\frac{1}{b}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Rightarrow a=b$$

همچنین، چون دو منحنی بر هم مماس هستند. در نتیجه شیب دو منحنی در نقطه‌ی تماس یعنی $x=0$ با هم برابر است.

$$\begin{cases}y=\frac{1}{a+x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{(a+x)^2}\xrightarrow{x=0}m=\frac{-1}{a^2}\\ y=\frac{1+x}{b-x}\Rightarrow y'=\frac{b+1}{(b-x)^2}\xrightarrow{x=0}m=\frac{b+1}{b^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{a^2}=\frac{b+1}{b^2}\xrightarrow{a=b}-1=b+1\Rightarrow b=-2\Rightarrow a=-2$$

پس $a+b$ برابر ۴− می‌باشد.

۲۲ـ گزینه «۳» چون رسم این نمودار ساده است، بهترین راه برای حل این مسأله استفاده از شکل تابع می‌باشد. با توجه به نمودار، نقطه‌ی مینیمم نسبی f نقطه‌ی $A(1,1)$ می‌باشد، لذا خطی موازی محور x ها که از A هم بگذرد، خطِ $y=1$ است. از برخورد دادن $y=1$ با $y=2-x^2$ نقطه‌ی $B(-1,1)$ به دست می‌آید.



۲۳ـ گزینه «۱» با توجه به شکل تابع که به‌صورت می‌باشد، باید a مثبت باشد و با توجه به گزینه‌ها $a=1$ می‌باشد و داریم:

$$y=x^3+bx^2+3x$$

همچنین با توجه به شکل تابع، مشتق تابع باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد (چون نمودار تابع اکسترمم نسبی ندارد و از طرفی شیب تابع در یک نقطه با طول مثبت صفر است). پس داریم:

$$y'=3x^2+2bx+3$$

$$\Delta=0\Rightarrow b^2-4ac=0\Rightarrow(2b)^2-4(3)(3)=0\Rightarrow 4b^2-36=0\Rightarrow b^2=9\Rightarrow b=\pm 3$$

به ازای $b=-3$ داریم:

$$y'=3x^2-6x+3=0\Rightarrow 3(x^2-2x+1)=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$$

چون به ازای $b=-3$ طول ریشه‌ی مضاعف مثبت شده است، پس فقط $b=-3$ قابل قبول است چرا که با توجه به شکل ریشه مضاعف دارای طول مثبت است.
پس دوتایی مرتب (a,b) برابر $(1,-3)$ می‌شود.

۲۴ـ گزینه «۱» با توجه به‌صورت سوال، می‌خواهیم سود ماهانه شرکت را ماکزیمم کنیم، به این منظور، تابع هدف را حاصل ضرب سود هر اتومبیل (با در نظر گرفتن تخفیف) در تعداد اتومبیل‌های فروخته شده در ماه فرض می‌کنیم و برای حداکثر ساختن این تابع، مشتق را برابر صفر قرار می‌هیم:

$$\text{Max}\ \text{سود ماهانه}=\text{Max}\ (\text{سود هر اتومبیل})\times(\text{تعداد اتومبیل‌های فروخته شده در ماه})=\text{Max}(1000-50n)(2000+200n)$$

$$=2\times10^6-10^5 n+2\times10^5 n-10^4 n^2$$

$$\text{مشتق}=0\Rightarrow 100000-20000n=0\Rightarrow n=5\ (\text{تعداد بهینه تخفیف‌ها})$$

بنابراین تخفیف کل برای رسیدن به حداکثر سود ماهانه باید، $50\times5=250$ دلار باشد.

۲۵ـ گزینه «۱» تابع $y=x^3-2x^2+3x-1$ چندجمله‌ای است، در نتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد و داریم:

$f(0)=-1<0 \quad , \quad f(1)=1>0 \Rightarrow$ تابع $f(x)$ بر بازه $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد

با توجه به این که علامت تابع مشتق $y'=3x^2-4x+3$ همواره مثبت است، پس تابع f صعودی اکید است و **دقیقاً یک ریشه** دارد.

۲۶ـ گزینه «۲» ابتدا ضابطه داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم و داریم:

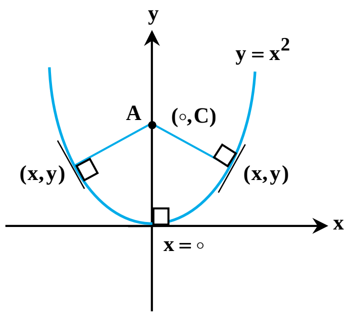
$$x^2y^4=1\xrightarrow{\sqrt{\ }}xy^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{x}}$$

فاصله از مبدأ برابر با $\sqrt{x^2+y^2}$ است و برای محاسبه کوتاه‌ترین فاصله باید از این عبارت مشتق گرفت، ولی برای راحتی کار، می‌توان فقط از عبارت زیر رادیکال مشتق گرفت:

$$(x^2+\frac{1}{x})'=0\Rightarrow 2x-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow 2x^3=1\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\text{کوتاه‌ترین فاصله}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt[6]{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

بنابراین $a=3$ و $b=2$ لذا $a-b=1$.



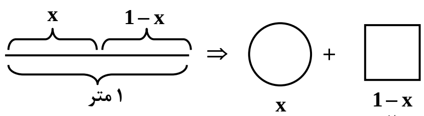
۲۷ـ گزینه «۴» فرض می‌کنیم نقطه‌ی (x,y) نقطه‌ای روی منحنی $y=x^2$ باشد که خط عمود بر منحنی در آن نقطه، از $(0,C)$ عبور می‌کند. شیب خط قائم بر منحنی برابر با $m=-\frac{1}{f'(x)}$ است. از طرفی شیب خطی که از نقاط (x,y) و $(0,C)$ می‌گذرد برابر با $m=\frac{y-C}{x-0}$ است. پس داریم:

$$-\frac{1}{f'(x)}=\frac{y-C}{x}\Rightarrow -\frac{1}{2x}=\frac{x^2-C}{x}\Rightarrow -x=2x^3-2Cx$$

$$\Rightarrow 2x^3-(2C-1)x=0\Rightarrow x(2x^2-(2C-1))=0\Rightarrow x=0\ ,\ x^2=\frac{2C-1}{2}$$

با توجه به شرط $C>\frac{1}{2}$ داریم $\frac{2C-1}{2}>0$ پس نقاط $x=0$ و $x=\pm\sqrt{\frac{2C-1}{2}}$ به دست می‌آیند. در نتیجه ۳ نقطه روی منحنی دارای این ویژگی هستند.

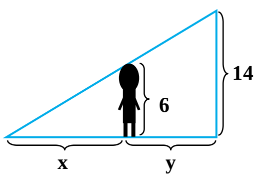
۲۸ـ گزینه «۱» قطعه‌ای که با آن دایره ساخته‌ایم را x و قطعه‌ای را که با آن مربع ساخته‌ایم را $1-x$ فرض می‌کنیم و داریم:



$$\text{محیط دایره}: 2\pi r=x\Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}\quad ,\quad \text{مساحت دایره}: \pi r^2=\pi\frac{x^2}{4\pi^2}=\frac{x^2}{4\pi}$$

$$\text{محیط مربع}: 4a=1-x\Rightarrow a=\frac{1-x}{4}\quad ,\quad \text{مساحت مربع}: a^2=\frac{1}{16}(1-x)^2$$

$$Min(\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{1}{16}(1-x)^2)\xrightarrow{\text{مشتق}=0}\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{8}(1-x)=0\Rightarrow(\frac{4+\pi}{8\pi})x=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4+\pi}\Rightarrow 1-x=1-\frac{\pi}{4+\pi}=\frac{4}{4+\pi}$$



۲۹ـ گزینه «۳» قضیه تالس: $\frac{6}{14}=\frac{x}{x+y}\Rightarrow 3x+3y=7x\Rightarrow 3y=4x$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان بدست می‌آید: $3\frac{dy}{dt}=4\frac{dx}{dt}\xrightarrow{\frac{dy}{dt}=4}\frac{dx}{dt}=3$

۳۰ـ گزینه «۲» اگر جمعیت اولیه کشور A باشد پس از یک سال جمعیت کل برابر است با: $A+\frac{A}{100}\times 2=(1+\frac{1}{50})A$

بعد از ۲ سال جمعیت برابر است با: $A(1+\frac{1}{50})^2$

بعد از ۱۰۰ سال جمعیت برابر است با: جمعیت پس از ۱۰۰ سال $A(1+\frac{1}{50})^{100}\Rightarrow((1+\frac{1}{50})^{50})^2$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\to((1+\frac{1}{50})^{50})^2=e^2=7/245$$

۳۱ـ گزینه «۳» چون بحث صعودی مطرح است از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=2\sin x-3x+tgx \to f'(x)=2\cos x-3+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

چون مجموع ضریب در صورت کسر صفر است می‌توانیم $(1-\cos x)$ را از آن فاکتور بگیریم:
$$f'(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-2\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

حالا به علامت $f'(x)$ توجه می‌کنیم. در مخرج کسر، $\cos^2 x$ مثبت است. همچنین عامل $1-\cos x$ بزرگتر یا مساوی صفر است زیرا $-1\le \cos x\le 1$ است. به عبارت $-2\cos^2 x+\cos x+1$ توجه کنید. با تعیین علامت این معادله مانند یک معادله‌ی درجه‌ی دو داریم $\Delta=1+8=9$ و $\cos x=\frac{-1\pm 3}{-4}=-\frac{1}{2},1$ در فاصله‌ی بین دو ریشه؛ یعنی در بازه‌ای که $-\frac{1}{2}<\cos x<1$ علامت این عبارت؛ مثبت می‌شود. پس هر جا که $-\frac{1}{2}<\cos x<1$ باشد، داریم $f'(x)>0$ و $f(x)$ اکیداً صعودی می‌شود. این ناحیه شامل $-\frac{2\pi}{3}<x<0$ و $0<x<\frac{2\pi}{3}$ است.

۳۲ـ گزینه «۱» تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع:
$$y=\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)$$

از تابع مشتق می‌گیریم:
$$y'=\frac{1}{2}(3\sin 3x-\sin x)=0 \Rightarrow x=0, x=\pi, x=\text{Arc}\cos(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$y(0)=y(\pi)=0$$

$$y(\text{Arc}\cos(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}))=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}} \Rightarrow y_{max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

۳۳ـ گزینه «۴»

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\sqrt{4+0/41}-\sqrt{4}=2/1-2=0/1$$

$$dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{4}}(0/41)=0/1025$$

$$dy-\Delta y=0/1025-0/1=0/0025$$

۳۴ـ گزینه «۱» برای آن که تقعر منحنی رو به پایین باشد، باید $f''(x)\le 0$ باشد، پس داریم:

$$y'=\frac{2x}{x^2+c} \Rightarrow y''=\frac{2(x^2+c)-2x(2x)}{(x^2+c)^2}\le 0 \Rightarrow 2x^2+2c-4x^2\le 0 \Rightarrow -2x^2+2c\le 0$$

ما می‌خواهیم $-2x^2+2c$ همواره منفی باشد، عبارت $-2x^2$ همواره منفی یا صفر است. پس لازم است مقدار c هم کوچکتر یا مساوی صفر باشد.

به بیان دقیق‌تر، شرط لازم برای آن که یک عبارت درجه‌ی دو تغییر علامت ندهد آن است که $\Delta\le 0$ باشد. در چندجمله‌ای $-2x^2+2c$ داریم $\Delta=0+16c$ پس باید $c\le 0$ باشد.

۳۵ـ گزینه «۳» $\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=f'(\sqrt{7}) \Rightarrow \frac{b^3-b+1-1}{b-1}=3(\sqrt{7})^2-1 \Rightarrow \frac{b^3-b}{b-1}=20 \Rightarrow \frac{b(b+1)(b-1)}{b-1}=20 \Rightarrow b(b+1)=20 \Rightarrow b=4$

۳۶ـ گزینه «۳» ابتدا تابع معکوس یعنی $y=f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)}-1 \Rightarrow (f(x)+1)^3=x+1 \to x=-1+(f(x)+1)^3 \Rightarrow y=f^{-1}(x)=-1+(x+1)^3$$

$$\lim_{h\to 0}(\frac{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}{h})=y'(a) \Rightarrow \frac{d}{dx}[-1+(x+1)^3]_{x=a}=12 \Rightarrow 3(a+1)^2=12$$

$$(a+1)^2=4 \to a=-1\pm 2=\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=+1 \end{cases}$$

۳۷ـ گزینه «۱» کافیست با استفاده از فرمول مشتق ضمنی ابتدا y' را حساب کنیم:

$$y'_x = -\frac{۲x-y}{-x+۳y^۲} = \frac{۲x-y}{x-۳y^۲}$$

خُب حالا باید مقدار y را به ازای $x=۱$ از روی معادله‌ی داده شده، حساب کنیم:

$$x^۲ - xy + y^۳ = ۱ \xrightarrow{x=۱} ۱ - y + y^۳ = ۱ \Rightarrow y^۳ - y = ۰ \Rightarrow y(y^۲-۱) = ۰ \Rightarrow y = ۰, y = +۱, y = -۱$$

پس در نقطه‌ای به طول $x=۱$، سه عرض مختلف روی منحنی داریم: $(۱,۰),(۱,۱),(۱,-۱)$

حالا باید مقدار y' را به ازای این سه نقطه حساب کنیم:

$$y'_x(۱,۰) = \frac{۲\times۱-۰}{۱-۳(۰)^۲} = ۲ \qquad y'_x(۱,۱) = \frac{۲\times۱-۱}{۱-۳(۱)^۲} = -\frac{۱}{۲} \qquad y'_x(۱,-۱) = \frac{۲\times۱-(-۱)}{۱-۳(-۱)^۲} = -\frac{۳}{۲}$$

واضح است y'_x هر یک از سه مقدار گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ را می‌تواند اختیار کند و در نقطه‌ی $x=۱$ هیچ‌گاه برابر با $\frac{۳}{۴}$ نمی‌شود.

۳۸ـ گزینه «۱» از صورت سؤال نتیجه می‌گیریم، ظرف مدت یک ماه فقط $\frac{۱}{۴}$ ماده باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$y(t) = Ce^{kt} \Rightarrow \frac{۱}{۴}C = Ce^k \Rightarrow e^k = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = -۲\text{Ln}۲ \Rightarrow \text{نیمه عمر} = \frac{-\text{Ln}۲}{k} = \frac{-\text{Ln}۲}{-۲\text{Ln}۲} = \frac{۱}{۲}\,(\text{ماه}) = ۱۵\,(\text{روز})$$

۳۹ـ گزینه «۲» $f'(۲)=۰$ است، بنابراین $x=۲$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع $f(x)$ است. حالا از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم؛ $f''(۲)=-۵$ است؛ لذا $f''(۲)$ منفی است و این نشان می‌دهد که $x=۲$ نقطه‌ی ماکزیمم موضعی است.

۴۰ـ گزینه «۱»

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲} \Rightarrow h'(۰) = \frac{f'(۰)g(۰)-g'(۰)f(۰)}{g^۲(۰)}$$

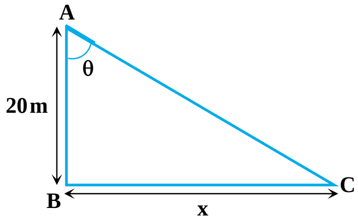
با توجه به شرط‌های صورت سؤال داریم:

$$۶f(۰) = ۳ \Rightarrow f(۰) = \frac{۱}{۲} \quad , \quad f(۰)g(۰) = ۲ \Rightarrow g(۰) = \frac{۲}{f(۰)} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$f'(۰) = ۴g(۰) = ۴\times۴ = ۱۶ \quad , \quad ۲g'(۰) = ۴g(۰) \Rightarrow g'(۰) = ۲g(۰) = ۲\times۴ = ۸$$

$$\Rightarrow h'(۰) = \frac{۱۶\times۴ - ۸\times\frac{۱}{۲}}{۱۶} = \frac{۶۴-۴}{۱۶} = \frac{۱۵}{۴}$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱ـ گزینه «۴» در شکل مقابل فاصله فرد تا پای نورافکن را x فرض می‌کنیم، در این صورت طبق قضیه فیثاغورس $AC=\sqrt{x^۲+۴۰۰}$ است. در مثلث قائم‌الزاویه مورد نظر $\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۴۰۰}}$، بنابراین با مشتق‌گیری از طرفین رابطه اخیر داریم:

$$\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{x^۲+۴۰۰}-\dfrac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۴۰۰}}}{x^۲+۴۰۰}\cdot\frac{dx}{dt}$$

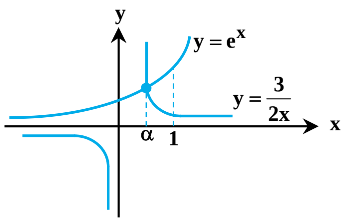
چون سرعت حرکت فرد ۴ متر بر ثانیه است، بنابراین $\dfrac{dx}{dt}=۴$. در لحظه $x=۱۵$، مقدار $\sin\theta=\dfrac{۱۵}{\sqrt{۱۵^۲+۴۰۰}}=\dfrac{۱۵}{۲۵}=\dfrac{۳}{۵}$ و در نتیجه $\cos\theta=\dfrac{۴}{۵}$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\frac{۴}{۵}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{۲۲۵+۴۰۰}-\dfrac{۲۲۵}{\sqrt{۲۲۵+۴۰۰}}}{۲۲۵+۴۰۰}\times ۴\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=۰/۱۲۸$$

۲ـ گزینه «۲»

روش اول: فرض کنید $f(x)=۲xe^x-۳$. ابتدا به علامت f در دو سر بازه توجه کنید $f(۰)=۰-۳<۰$ و $f(۱)=۲e-۳>۰$. با توجه به تغییر علامت f در این بازه، قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک ریشه را تضمین می‌کند. از طرفی در این بازه داریم $f'(x)=۲e^x+۲xe^x>۰$، پس f اکیداً صعودی است. در نتیجه f نمی‌تواند دو ریشه داشته باشد (هر تابع اکیداً یکنوا حداکثر یک ریشه دارد).

روش دوم (روش ترسیمی): $f(x)=۰\Rightarrow e^x=\dfrac{۳}{۲x}$



رسم نمودارهای $y=\dfrac{۳}{۲x}$ و $y=e^x$ نشان می‌دهد این دو منحنی دقیقاً یک نقطه برخورد در بازه $(۰,۱)$ دارند. دقت کنید که در $x=۱$ مقدار e^x از $\dfrac{۳}{۲x}$ بیشتر است. پس $\alpha<۱$.

۳ـ گزینه «۳» تابع $y=\cosh(\sqrt{x})$ در ناحیه $x>۰$ و تابع $y=\cos(\sqrt{-x})$ بر ناحیه $x<۰$ پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. پس کافیست نقطه $x=۰$ را مورد بررسی قرار دهیم. پیوستگی f در $x=۰$ واضح است، زیرا $f(۰)=۱$ و $f(۰^+)=\cosh(۰)=۱$ و $f(۰^-)=\cos(۰)=۱$.
اکنون مشتق‌های چپ و راست را بررسی کنیم:

$$f'(۰^+)=\lim_{x\to۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^+}\frac{\cosh(\sqrt{x})-۱}{x}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to۰^+}\frac{\sinh(\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to۰^+}\frac{\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\cosh(\sqrt{x})}{\dfrac{۲}{۲\sqrt{x}}}=\frac{۱}{۲}$$

و در مورد مشتق چپ:

$$f'(۰^-)=\lim_{x\to۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\cos(\sqrt{-x})-۱}{x}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to۰^-}\frac{\sin\sqrt{-x}}{۲\sqrt{-x}}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to۰^-}\frac{-\dfrac{۱}{۲\sqrt{-x}}\cos(\sqrt{-x})}{-\dfrac{۲}{۲\sqrt{-x}}}=\frac{۱}{۲}$$

پس f در مبدأ نیز پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

توجه ۱: تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ و $t=\sqrt{-x}$ می‌تواند محاسبه حدها را ساده‌تر کند. برای مثال در محاسبه مشتق چپ داریم $t=\sqrt{-x}$ پس $t^۲=-x$ و وقتی $x\to۰^-$ داریم $t\to۰^+$. حال می‌توان نوشت:

$$f'(۰^-)=\lim_{t\to۰^+}\frac{\cos(t)-۱}{-t^۲}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sin(t)}{۲t}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\cos(t)}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

توجه ۲: استفاده از بسط مک‌لورنِ $\cosh(\sqrt{x})$ و $\cos(\sqrt{-x})$ سریع‌ترین راه برای محاسبه حدهای مورد نظر است:

$$\cosh(\sqrt{x})=۱+\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۴!}+\cdots\quad x>۰\qquad;\qquad\cos(\sqrt{-x})=۱+\frac{x}{۲!}+\frac{x^۲}{۴!}+\cdots\quad x<۰$$

۴ـ گزینه «۲» حل سوال به روش تشریحی خیلی طولانی می‌شود اما دانشجوی باهوش باید کمی زرنگ‌تر از این حرف‌ها باشد. ابتدا توابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\operatorname{arctgh}\sqrt{\frac{۲\sinh^۲\dfrac{x}{۲}}{۲\cosh^۲\dfrac{x}{۲}}}=\operatorname{arctgh}(\operatorname{tgh}\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}$$

$$g(x)=Ln\sqrt{\frac{۱+\operatorname{tgh}x}{۱-\operatorname{tgh}x}}=Ln\left(\frac{۱+\dfrac{\sinh x}{\cosh x}}{۱-\dfrac{\sinh x}{\cosh x}}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}Ln\left(\frac{\cosh x+\sinh x}{\cosh x-\sinh x}\right)=\frac{۱}{۲}Ln\left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right)=\frac{۱}{۲}Lne^{۲x}=\frac{۲x}{۲}Lne=x$$

حال به راحتی $f'(x)=\dfrac{۱}{۲}$ و $g'(x)=۱$ را بدست آوردیم. بنابراین داریم:

$$g'(x)-f'(x)=\frac{۱}{۲}$$

۵ـ گزینه «۲» از آن‌جا که $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$، داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{Ln}(1+e^{-\frac{1}{x^2}}) = \mathrm{Ln}(1+e^{-\infty}) = \mathrm{Ln}(1) = 0$$

پس f در $x=0$ پیوسته است. اکنون مشتق‌پذیری f را در صفر بررسی کنیم:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+e^{-\frac{1}{x^2}})}{x}$$

اکنون با توجه به آن که عبارت $e^{-\frac{1}{x^2}}$ به صفر میل می‌کند، می‌توانیم از بسط عبارت $\mathrm{Ln}(1+t)$ به ازای $t=e^{-\frac{1}{x^2}}$ استفاده کنیم. در واقع وقتی $x\to 0$ داریم $\mathrm{Ln}(1+e^{-\frac{1}{x^2}}) \simeq e^{-\frac{1}{x^2}}$. پس محاسبه حد به این شکل ادامه می‌یابد:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

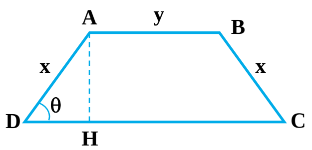
با معرفی $z=\frac{1}{x^2}$ داریم $x=\frac{1}{\sqrt{z}}$ و وقتی $x\to 0$، آن‌گاه داریم: $z\to\infty$.

$$L = \lim_{z\to\infty}\frac{e^{-z}}{\frac{1}{\sqrt{z}}} = \lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{z}}{e^z} \overset{HOP}{=} \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{z}e^z} = 0$$

بنابراین $f'(0)=0$ است.

توجه: تغییر متغیر $z=\frac{1}{x}$ نیز مسأله را حل می‌کند اما در این صورت وقتی $x\to 0$ داریم $z\to\pm\infty$.

۶ـ گزینه «۳» بدون کاسته شدن از کلیت مساله اندازه قاعده بزرگ را ۱ در نظر می‌گیریم، مساحت ذوزنقه برابر $S=\frac{1}{2}AH(y+1)$ خواهد بود و طبق فرض مسأله $2x+y=c$ پس $x=\frac{c-y}{2}$ است. چون $DH=\frac{1-y}{2}$، پس طبق قضیه فیثاغورس $AH=\sqrt{x^2-(\frac{1-y}{2})^2}=\sqrt{(\frac{c-y}{2})^2-(\frac{1-y}{2})^2}$، بنابراین $S^2=\frac{1}{4}AH^2(y+1)^2=\frac{1}{16}((c-y)^2-(y-1)^2)(y+1)^2$ برای یافتن ماکزیمم S می‌توانیم مشتق S^2 را برابر صفر قرار دهیم:



$$\frac{dS^2}{dy}=\frac{1}{8}(y+1)((c-y)^2-(y-1)^2)+\frac{1}{16}(-2(c-y)-2(y-1))(y+1)^2=0$$

از معادله فوق $y=\frac{c}{3}$ و در نتیجه $x=\frac{c}{3}$ بدست می‌آید.

حال مساحت ذوزنقه را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$S=\frac{(AB+CD)\times AH}{2}=\frac{(\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+2\times\frac{c}{3}\cos\theta)\times\frac{c}{3}\sin\theta}{2}=\frac{c^2}{9}(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{c^2}{9}(-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta)=0 \Rightarrow \cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta=0 \Rightarrow 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

۷ـ گزینه «۳»

$$f(x)=2\mathrm{Ln}(1+\frac{x}{2})=2\mathrm{Ln}(\frac{2+x}{2})=2\mathrm{Ln}(2+x)-2\mathrm{Ln}2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2+x}$$

حال لازم است از عبارت $\frac{2}{2+x}$، ۹ بار دیگر مشتق بگیریم. می‌دانیم اگر $y=\frac{1}{ax+b}$، آن‌گاه $y^{(n)}=\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. بنابراین داریم:

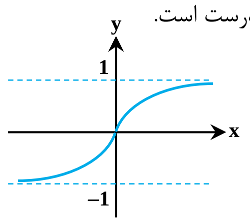
$$f^{(10)}(x)=(f')^{(9)}(x)=2\times\frac{(-1)^9 9!}{(2+x)^{10}} \Rightarrow f^{(10)}(-3)=2\times\frac{(-1)^9 9!}{(2-3)^{10}}=-2(9!)$$

۸ـ گزینه «۳»

روش اول: واضح است $-1<\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}<1$ است لذا برد تابع $(-1,1)$ است. همچنین

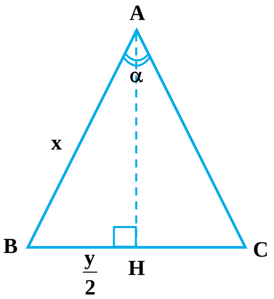
$$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

بنابراین $f'(x)>0$ است پس f تابعی صعودی است و چون برای هر x، $e^x+e^{-x}\neq 0$ پس دامنه f، $\mathbb{R}$ است. لذا گزینه (۳) نادرست است.



روش دوم: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\mathrm{tgh}\,x$

با توجه به نمودار $\mathrm{tgh}\,x$ گزینه (۳) نادرست است.



۹ـ گزینه «۲» طول ساق مثلث متساوی‌الساقین را x و طول قاعده را y فرض می‌کنیم، در این صورت در مثلث ABH می‌توان نوشت $BH = AB\sin\frac{\alpha}{2}$ و یا $BC = 2AB\sin\frac{\alpha}{2}$. می‌دانیم شعاع دایره محاطی مثلث برابر با $r=\frac{2S}{P}$ است کـه S مسـاحت و P محیط مثلث است. طبق فرض مساحت مثلث مقداری ثابت است، یعنی $S=\frac{1}{2}x^2\sin\alpha = c$. محیط این مثلث برابر است با $AB+AC+BC = 2x+2x\sin\frac{\alpha}{2}$. بنابراین داریم:

$$r=\frac{2c}{2x+2x\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{c}{x+x\sin\frac{\alpha}{2}}$$

می‌خواهیم عبارت فوق با قید $x^2\sin\alpha = 2c$ بهینه شود، از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\left|\begin{array}{l} x^2\sin\alpha = 2c \\ 1+\sin\frac{\alpha}{2}=\dfrac{x^2\cos\alpha}{\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}=x^2\cos\alpha+x^2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x^2(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2})=x^2\cos\alpha \Rightarrow x^2.\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})=x^2\cos\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$$

۱۰ـ گزینه «۳» از رابطهٔ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ استفاده می‌کنیم:

فرض کنید $\operatorname{Arcsin} x=\alpha \Rightarrow x=\sin\alpha \Rightarrow y=\sin 3\alpha \Rightarrow y=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3x-4x^3$

$$y=3x-4x^3 \Rightarrow y'=3-12x^2 \ , \ y''=-24x$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با: $(1-x^2)y''-xy'+9y=(1-x^2)(-24x)-x(3-12x^2)+9(3x-4x^3)=0$

۱۱ـ گزینه «۴» مشتق‌گیری با استفاده از قواعد مشتق‌گیری حاصل‌ضرب، کار پیچیده و وقت‌گیری است. اما می‌توان آن را به کمک Ln، به راحتی حل کرد:

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}}$$

$$\operatorname{Ln}y=\operatorname{Ln}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \Rightarrow \operatorname{Ln}y=\operatorname{Ln}(x-1)+\operatorname{Ln}(x-2)+\operatorname{Ln}(x-3)+\operatorname{Ln}(x-4)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$$

$$\Rightarrow y'=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}]$$

$$\Rightarrow y'(0)=(-1)(-2)(-3)(-4)[\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-3}+\frac{1}{-4}]=24(\frac{-12-6-4-3}{12})=-50$$

۱۲ـ گزینه «۲» با استفاده از ویژگی‌های Ln داریم:

$$\operatorname{Ln}F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x)+\frac{1}{3}\operatorname{Ln}(1-x)-\frac{4}{5}\operatorname{Ln}(1+5x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{3(1-x)}-\frac{4\times 5}{5(1+5x)}$$

حالا با جایگذاری $x=0$ در $F(x)$ و $F'(x)$ داریم:

$$F(0)=1\ ,\ \frac{F'(0)}{F(0)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{20}{5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-4=-\frac{23}{6} \Rightarrow F'(0)=-\frac{23}{6}$$

۱۳ـ گزینه «۴» در $x=\frac{\pi}{2}$ داریم $\cos\frac{\pi}{2}=0$ پس در تابع $f(x)=x^2\cos x(1+x^4)^{-7}$ عامل $\cos x$، صفرشونده است و کافیست از همین عامل مشتق گرفته در سایر عوامل ضرب کنیم.

$$f'(\frac{\pi}{2})=x^2(-\sin x)(1+x^4)^{-7}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}(-1)(1+\frac{\pi^4}{16})^{-7}=-\frac{\pi^2}{4(1+\frac{\pi^4}{16})^7}$$

۱۴ـ گزینه «۲»

$$k(x)=f(x)g(x)\sin x \Rightarrow k'(x)=f'(x)g(x)\sin x+f(x)g'(x)\sin x+f(x)g(x)\cos x$$

$$\Rightarrow k'(0)=f'(0)g(0)\sin(0)+f(0)g'(0)\sin(0)+f(0)g(0)\cos(0)=0+0+f(0)g(0)=f(0)g(0) \qquad (1)$$

با توجه به شرط‌های صورت سؤال باید $f(0)$ و $g(0)$ را بیابیم:

$$\left.\begin{array}{l} 6f(0)=3 \Rightarrow f(0)=\frac{1}{2} \\ f(0)g(0)=2 \Rightarrow g(0)=\frac{2}{f(0)}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با توجه به (۱)}} k'(0)=f(0)g(0)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

یادآوری: اگر $f(x)=u_1(x)u_2(x)u_3(x)$، آن‌گاه مشتق $f(x)$ برابر است با: $f'(x)=u_1'(x)u_2(x)u_3(x)+u(x)u_2'(x)u_3(x)+u_1(x)u_2(x)u_3'(x)$

۱۵ـ گزینه «۲» اگر فرض کنیم $g(x)=\sqrt{۵x+۶}$، آن‌گاه نسبت تغییر y به $\sqrt{۵x+۶}$ برابر $\frac{y'_x}{g'_x}$ تعریف می‌شود. پس داریم:

$$g(x)=\sqrt{۵x+۶}\Rightarrow g'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۶}}\overset{x=۲}{=}\frac{۵}{۲\sqrt{۱۶}}=\frac{۵}{۸}$$

از طرفی برای محاسبه y'_x بهتر است x'_y را حساب کرده و آن‌گاه با توجه به رابطه $y'_x=\frac{۱}{x'_y}$ مقدار y'_x را معلوم کنیم:

$$x=y^۳+y\Rightarrow x'_y=۳y^۲+۱\Rightarrow y'_x=\frac{۱}{۳y^۲+۱}$$

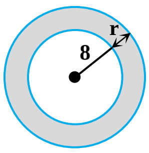
$$x=y^۳+y\xrightarrow{x=۲}y^۳+y=۲\Rightarrow y=۱\Rightarrow y'_x=\frac{۱}{۳(۱)^۲+۱}=\frac{۱}{۴}$$

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۸}}=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$$

۱۶ـ گزینه «۱» با توجه به این که حجم کره برابر است با $V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$، داریم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi(۸+r)^۳$$

و مساحت کره برابر است با $S=۴\pi R^۲$ داریم:



$$S=۴\pi(۸+r)^۲$$

$$V'_t=۴\pi(۸+r)^۲\times r'(t)$$

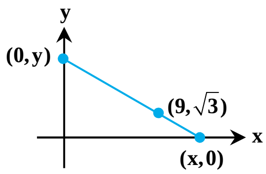
$$S'_t=۸\pi(۸+r)\times r'(t)$$

از تقسیم $\frac{V'_t}{S'_t}$ داریم:

$$\frac{V'_t}{S'_t}=\frac{(۸+r)}{۲}\xrightarrow[r=۲]{V'_t=۱۰}\frac{۱۰}{S'_t}=\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow S'_t=۲$$

سطح خارجی یخ با سرعت ۲ واحد کم می‌شود.

۱۷ـ گزینه «۳» با توجه به شکل، باید طول پاره‌خط یعنی $\sqrt{x^۲+y^۲}$ را می‌نیمم کنیم. بدین منظور باید تابع را بر حسب یک متغیر (x یا y) نوشته و از آن مشتق بگیریم و حاصل را برابر صفر قرار دهیم:



شیب خط $m=\frac{\sqrt{۳}-۰}{۹-x}=\frac{\sqrt{۳}-y}{۹-۰}\Rightarrow ۹\sqrt{۳}=۹\sqrt{۳}-۹y-\sqrt{۳}x+xy\Rightarrow y(x-۹)=\sqrt{۳}x\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}x}{x-۹}$

اگر مقدار $x^۲+y^۲$ را حداقل کنیم، مقدار جذر آن نیز کمینه می‌شود:

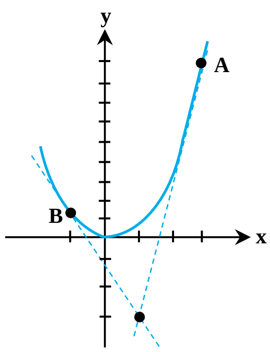
$$\text{Min}\left[x^۲+y^۲\right]=\text{Min}\left[x^۲+(\frac{\sqrt{۳}x}{x-۹})^۲\right]$$

مشتق $=۲x+۲(\frac{\sqrt{۳}x}{x-۹})(\frac{-۹\sqrt{۳}}{(x-۹)^۲})=۰\Rightarrow x(۱-\frac{۲۷}{(x-۹)^۳})=۰\Rightarrow x=۰$ یا $(x-۹)^۳=۲۷\Rightarrow x-۹=۳\Rightarrow x=۱۲$

اما $x=۰$ نمی‌تواند باشد، زیرا در این صورت پاره‌خطی تشکیل نمی‌شود و نمایشگر مبدأ مختصات است و به ازای $x=۱۲$ داریم:

$$\sqrt{۱۲^۲+(\frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳})^۲}=\sqrt{۱۴۴+۴۸}=\sqrt{۱۹۲}=\sqrt{۳\times ۶۴}=۸\sqrt{۳}$$

۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به ضابطه، نقطه $(۱,-۳)$ روی منحنی قرار ندارد مختصات نقطه‌ی تماس را به‌صورت $(\alpha,\alpha^۲)$ نشان می‌دهیم.



معادله خط: $y-\alpha^۲=۲\alpha(x-\alpha)\xrightarrow{\text{با جایگذاری}}-۳-\alpha^۲=۲\alpha-۲\alpha^۲\Rightarrow\alpha^۲-۲\alpha-۳=۰\Rightarrow\alpha=-۱,۳$

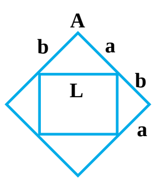
پس دو نقطه تماس به‌دست می‌آید: مختصات نقطه تماس: $A\begin{vmatrix}۳\\۹\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$

شیب خط مماس در هر نقطه از منحنی برابر است با: $y'=۲x$. پس در A شیب خط مماس ۶ و در B شیب خط مماس ۲- است.

(۱) معادله خط: $y-۹=۶(x-۳)\Rightarrow y=۶x-۹$

(۲) معادله خط: $y-۱=-۲(x+۱)\Rightarrow y=-۲x-۱$

۱۹ـ گزینه «۴»



مطابق شکل روبرو طول هر ضلع مربع مورد نظر برابر $a+b$ می‌باشد و طبق قضیه فیثاغورس باید $a^۲+b^۲=L$ باشد.

برای این که $a+b$ ماکسیمم شود لازم است a و b با هم برابر باشند که در این صورت $a^۲=b^۲=\frac{L}{۲}$، لذا داریم $a+b=\sqrt{۲L}$.

۲۰ـ گزینه «۳» چون ارتفاع، تابعی خطی از شعاع است، بنابراین $h = ar + b$. از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. در این صورت $\frac{dh}{dt} = a\frac{dr}{dt}$، و چون در سؤال سرعت تغییر ارتفاع سه برابر شعاع است، بنابراین $a = 3$. وقتی شعاع برابر یک است ارتفاع برابر ۶ می‌باشد، بنابراین $a + b = 6$ و لذا $b = 3$ بدست می‌آید. پس در این استوانه $h = 3r + 3$، که با جایگزینی در فرمول حجم استوانه نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow V = 3\pi(r^3 + r^2) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3\pi(3r^2 + 2r)\frac{dr}{dt}$$

چون در سؤال وقتی شعاع برابر ۶ می‌باشد تغییر حجم برابر ۱ داده شده است، بنابراین داریم:

$$3\pi(3\times 36 + 12)\frac{dr}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{360\pi}$$

در نتیجه وقتی شعاع ۳۶ باشد تغییر حجم برابر است با:

$$n = 3\pi(3\times 36^2 + 72)\frac{1}{360\pi} = \frac{36(108+2)}{120} = \frac{3(110)}{10} = 33 \Rightarrow n = 33$$

۲۱ـ گزینه «۲» می‌خواهیم با رد گزینه این سؤال را پاسخ دهیم. در ابتدا حالت $x > 0$ را در نظر بگیرید و x به سمت صفر از راست میل می‌کند. وقتی $x \to 0^+$ آن‌گاه هم‌ارز $Ln(1+x)$ را می‌نویسیم:

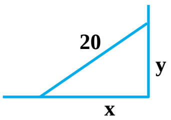
$$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \Rightarrow x - Ln(1+x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \cdots = I$$

حال باید بررسی کنیم I کوچکتر از $\frac{x^2}{2}$ است یا خیر. چون $x \to 0$ لذا $-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} < 0$ و همچنین $-\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} < 0$. بنابراین هر چه بیشتر بسط I را بنویسیم، آن‌گاه I برابر $\frac{x^2}{2}$ منهای یک سری اعداد می‌شود. بنابراین $I < \frac{x^2}{2}$.

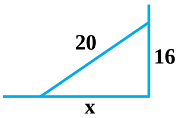
$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots < \frac{x^2}{2} \Rightarrow x - Ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

که با توجه به نامساوی بالا، گزینه (۲) صحیح است.

۲۲ـ گزینه «۲»



$$x^2 + y^2 = 400 \xrightarrow{y=16} x = 12$$



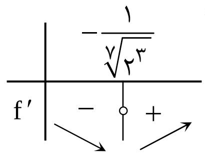
$$x^2 + y^2 = 400 \xrightarrow{\text{مشتق به زمان}} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \xrightarrow[x=12]{y=16,\ \frac{dy}{dt}=-1/5} 12\frac{dx}{dt} - 24 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

۲۳ـ گزینه «۲»

روش اول: برای محاسبه‌ی تعداد ریشه‌های معادله $x^8 + x - 1 = 0$، از آنجا که این تابع چندجمله‌ای است (در نتیجه در کل $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد). برای دو بازه $[0,1]$ و $[-2,-1]$ بررسی را انجام می‌دهیم:

تابع f در بازه $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد $\Leftarrow$ $f(0) = -1 < 0 \ ,\ f(1) = 1 > 0$

$$f'(x) = 8x^7 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$$



چون تابع f بر بازه $[0,1]$ صعودی اکید است، پس دقیقاً یک ریشه در این بازه دارد.

تابع f بر بازه $[-2,-1]$ حداقل یک ریشه دارد $\Leftarrow$ $f(-2) = (-2)^8 + (-2) - 1 > 0$ و $f(-1) = (-1)^8 - 1 - 1 < 0$

چون تابع f بر بازه $[-2,-1]$ نزولی اکید است، پس دقیقاً یک ریشه نیز در این بازه دارد.

در نتیجه در کل $\mathbb{R}$ دقیقاً دو ریشه موجود است.

روش دوم: قرار می‌دهیم $f(x) = x^8 + x - 1$، در این صورت معادله $f'(x) = 8x^7 + 1 = 0$ فقط یک ریشه دارد. پس معادله $f(x) = 0$ حداکثر دو ریشه دارد. از طرفی داریم:

f حداقل دو ریشه دارد $\Leftarrow$ $f(-2) > 0 \ ,\ f(0) < 0 \ ,\ f(2) > 0$

از بحث فوق نتیجه می‌شود معادله مورد نظر دقیقاً دو ریشه دارد.

۲۴ـ گزینه «۱» تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است و دامنه آن $D: \mathbb{R} - \{0\}$ است و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l} \{8f(x) + 6f(\frac{1}{x}) = 5 + x\}\times 8 \\ (x \to \frac{1}{x}): \{8f(\frac{1}{x}) + 6f(x) = 5 + \frac{1}{x}\}\times -6 \end{array}\right\} \Rightarrow (64 - 36)f(x) = [(40 - 30) + (8x - \frac{6}{x})]$$

$$\Rightarrow 28f(x) = [10 + 8x - \frac{6}{x}] \Rightarrow 28f'(x) = [0 + 8 + \frac{6}{x^2}] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{28}[8 + \frac{6}{x^2}]$$

اگر y را برابر با $y = x^2 f(x)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$y = x^2 f(x) \Rightarrow y'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

در نتیجه مقدار $y'(-1)$ را می‌توانیم از رابطه روبرو پیدا کنیم:

$$y'(-1) = -2f(-1) + f'(-1) = -2\times[\frac{10 - 8 + 6}{28}] + (\frac{8+6}{28}) = \frac{-16 + 14}{28} = -\frac{1}{14}$$

۲۵ـ گزینه «۴» حد داده شده از نوع $\frac{\circ}{\circ}$ بوده و مبهم می‌باشد؛ پس برای حل آن می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(a).g(x)-f(a)-g(a)f(x)+g(a)}{g(x)-f(x)}\right]=۴ \Rightarrow \overset{\text{مبهم}}{\left(\frac{\circ}{\circ}\right)} \overset{H}{\equiv} \lim_{x\to a}\left[\frac{f(a)g'(x)-g(a)f'(x)}{g'(x)-f'(x)}\right]=۴$$

$$\xrightarrow{f(a)=g(a)=k} \lim_{x\to a}\frac{kg'(x)-kf'(x)}{g'(x)-f'(x)}=k\Big(\underbrace{\cancel{\lim_{x\to a}\frac{g'(x)-f'(x)}{g'(x)-f'(x)}}}_{=۱}\Big)=۴ \Rightarrow k=۴$$

۲۶ـ گزینه «۱» ابتدا y را برابر x قرار می‌دهیم و معادله تابعی (Functional Equation) را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)+f(y)+f(x)f(y)=۱\ ; \\ f(x)>\circ\ ; \end{cases} \xrightarrow{y=x} f(x)+f(x)+f(x).f(x)=۱ \Rightarrow (f(x))^۲+۲(f(x))=۱$$

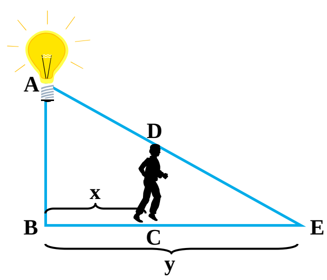
$$\Rightarrow (f(x)+۱)^۲=۲ \Rightarrow f(x)=-۱\pm\sqrt{۲} \xrightarrow{f(x)>\circ} f(x)=-۱+\sqrt{۲}$$

مشتق تابع $f(x)$ برابر صفر است.

۲۷ـ گزینه «۳»

$$f^{-۱}(۱)=\circ \Rightarrow ۲x+\cos x=۱ \Rightarrow x=\circ \Rightarrow (f^{-۱})''(۱)=-\frac{f''(\circ)}{(f'(\circ))^۳}=+\frac{۱}{۸}$$

$$f'(x)=۲-\sin x \quad , \quad f''(x)=-\cos x$$



۲۸ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات تست و شکل مقابل $AB=۵۴\circ$ را ارتفاع تیر، $DC=۱۸\circ$ را قد این مرد، و E را نوک سایه این مرد روی زمین در نظر می‌گیریم، اگر فاصله این مرد از تیر (یعنی BC) را برابر x و فاصله سایه این شخص از تیر (یعنی BE) را برابر y فرض کنیم. طبق صورت مسئله، مقدار $\frac{dx}{dt}=۲۴\circ$ داده شده و هدف سؤال تعیین مقدار $\frac{dy}{dt}$ می‌باشد. طبق قضیه تالس در مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ رابطه زیر را داریم:

$$\frac{DC}{AB}=\frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{۱۸\circ}{۵۴\circ}=\frac{y-x}{y} \Rightarrow \frac{y-x}{y}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳y-۳x=y \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{۳}{۲}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{۳}{۲}\times ۲۴\circ=۳۶\circ\left(\frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ثانیه}}\right)$$

۲۹ـ گزینه «۴» مقدار مشتق یک منحنی در یک نقطه دلخواه برابر ضریب زاویه مماس بر آن منحنی در آن نقطه دلخواه است. پس باید مشتق چپ و راست را برای تابع در نقطه $x=۱$ بیابیم:

$$\begin{cases} m_۱=f'(۱^+)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\left(\dfrac{(-۱)^{[x]}.\left(\frac{x-۱}{x}\right)-\circ}{x-۱}\right)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{۱-x}{x(x-۱)}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{-۱}{x}=-۱ \\[2ex] m_۲=f'(۱^-)=\lim\limits_{x\to ۱^-}-\left(\dfrac{(-۱)^{[x]}.\left(\frac{x-۱}{x}\right)-\circ}{x-۱}\right)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\left(\dfrac{\left(\frac{x-۱}{x}\right)}{\left(\frac{x-۱}{۱}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{۱}{x}=+۱ \end{cases}$$

از آنجایی که بین شیب‌ها رابطه‌ی $m_۱\times m_۲=-۱$ برقرار است، پس دو مماس بر هم عمودند و زاویه بین آن‌ها $\frac{\pi}{۲}$ است.

۳۰ـ گزینه «۳» با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$\text{Ln}y=\text{Ln}\left[\frac{(x+۱)^۲(x+۲)^۳}{(x+۴)^{\frac{۱}{۲}}(x+۸)^{\frac{۱}{۳}}}\right]=\text{Ln}(x+۱)^۲(x+۲)^۳-\text{Ln}(x+۴)^{\frac{۱}{۲}}(x+۸)^{\frac{۱}{۳}}=\text{Ln}(x+۱)^۲+\text{Ln}(x+۲)^۳-\text{Ln}(x+۴)^{\frac{۱}{۲}}-\text{Ln}(x+۸)^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}y=۲\text{Ln}(x+۱)+۳\text{Ln}(x+۲)-\frac{۱}{۲}\text{Ln}(x+۴)-\frac{۱}{۳}\text{Ln}(x+۸)$$

حالا از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=\frac{۲}{x+۱}+\frac{۳}{x+۲}-\frac{۱}{۲(x+۴)}-\frac{۱}{۳(x+۸)}$$

$$y'(\circ)=y(\circ)\left[\frac{۲}{\circ+۱}+\frac{۳}{\circ+۲}-\frac{۱}{۲(\circ+۴)}-\frac{۱}{۳(\circ+۸)}\right] \Rightarrow y'(\circ)=y(\circ)\left[۲+\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲۴}\right]=y(\circ)\left[\frac{۴۸+۳۶-۳-۱}{۲۴}\right]=y(\circ)\left(\frac{۸\circ}{۲۴}\right)=y(\circ)\left(\frac{۱\circ}{۳}\right)$$

حالا کافیست مقدار $y(۰)$ را حساب کنیم که این کار به راحتی و با قرار دادن $x=۰$ در تساوی داده شده در صورت سؤال، صورت می‌گیرد:

$$y(۰)=\frac{(۰+۱)^۲(۰+۲)^۳}{(۰+۴)^{\frac{۱}{۲}}(۰+۸)^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱\times ۸}{۲\times ۲}=\frac{۸}{۴}=۲$$

بنابراین $y'(۰)=۲\times\frac{۱۰}{۳}=\frac{۲۰}{۳}$.

۳۱ـ گزینه «۲» مشتق‌های اول و دوم y نسبت به x را حساب می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t}{e^t}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{-e^t\sin t-e^t\cos t}{e^{۳t}}=\frac{-(\sin t+\cos t)}{e^{۲t}}$$

با توجه به آن‌که $e^{۲t}>۰$ است، مخرج این کسرها هیچ‌جا صفر نمی‌شود و مشتق‌های اول و دوم در هر نقطه وجود دارند. ریشه‌های معادله‌ی $y''=۰$ را پیدا می‌کنیم.

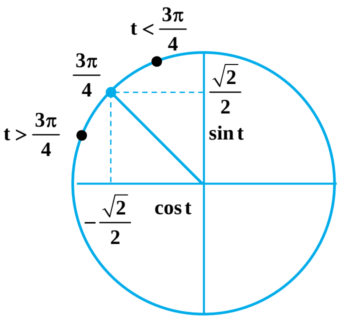
$$y''=\sin t+\cos t=۰\Rightarrow \sin t=-\cos t\Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t}=-۱\Rightarrow tgt=-۱\Rightarrow t=\frac{۳\pi}{۴}\pm k\pi$$

این نقاط ریشه‌های y'' هستند. البته باید اطمینان یابیم که علامت y'' در این نقاط تغییر می‌کند. نقطه‌ی $t=\frac{۳\pi}{۴}$ را به عنوان نماینده‌ی این نقاط در نظر بگیرید.

می‌دانیم که $e^{۲t}=-\frac{\sin t+\cos t}{e^{۲t}}$ است. $e^{۲t}$ همواره مثبت است. بنابراین به علامتِ عبارت $\sin t+\cos t$ توجه کنید. برای توضیح بهتر، زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان داده‌ایم. مقدار $\sin t$ روی محور عمودی و مقدار $\cos t$ روی محور افقی بدست می‌آید. وقتی $t>\frac{۳\pi}{۴}$ باشد $\sin t<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos t<-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است در نتیجه $\sin t+\cos t<۰$ و $y''>۰$ می‌شود.

وقتی $t<\frac{۳\pi}{۴}$ باشد، $\sin t>\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos t>-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است پس $\sin t+\cos t>۰$ و در نتیجه $y''<۰$ می‌شود.

پس علامت y'' در این نقطه عوض می‌شود. به این ترتیب مطمئن شدیم که نقاط $t=\frac{۳\pi}{۴}+k\pi$ نقاط عطف منحنی هستند.



۳۲ـ گزینه «۲» مجانب مایل تابع داده شده به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\sqrt[۳]{۲x^۲-x^۳}\ \underset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}\ f(x)=\sqrt[۳]{-۱}(x+\frac{۲}{۳(-۱)})=-x+\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=-x+\frac{۲}{۳}$$ مجانب مایل

$$f(x)=\sqrt[۳]{۲x^۲-x^۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x-۳x^۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x^۲-x^۳)^۲}}=۰\Rightarrow ۴x-۳x^۲=۰\Rightarrow x(۴-۳x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\ x=\frac{۴}{۳}$$

نقطه $x=۰$ نقطه می‌نیمم تابع است.

$$\left|\begin{array}{l} f(۰)=۰\\ f(\frac{۴}{۳})=\sqrt[۳]{۲(\frac{۴}{۳})^۲-(\frac{۴}{۳})^۳}=\sqrt[۳]{\frac{۳۲}{۲۷}}\end{array}\right.$$

بنابراین کافی است فاصله نقطه $(۰,۰)$ را از خط $y=-x+\frac{۲}{۳}$ یا $۳y+۳x=۲$ بدست آوریم.

$$d=\frac{c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۹+۹}}=\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

تذکر: فاصله خط $ax+by=c$ از مبدأ مختصات برابر $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

۳۳ـ گزینه «۳» ابتدا به ازای $x=y=۰$ مقدار $g(۰)$ را تعیین می‌کنیم:

$$g(۰)=g(۰+۰)=e^۰g(۰)+e^۰g(۰)=۲g(۰)\Rightarrow g(۰)=۰$$

حالا می‌خواهیم از معادله‌ی تابعیِ داده شده در صورت سؤال؛ کسرِ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ را به‌وجود آورده و با استفاده از تعریف مشتق، ضابطه‌ی $g'(x)$ را بدست آوریم. اگر در معادله‌ی داده شده، به جای y ها h قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$g(x+h)=e^hg(x)+e^xg(h)$$

بنابراین داریم:

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{e^xg(h)+e^hg(x)-g(x)}{h}$$

در این حد، h به صفر میل می‌کند، پس h متغیر ما است و x ثابت است. می‌توانیم این حد را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}[e^x(\frac{g(h)}{h})+g(x)(\frac{e^h-۱}{h})]=e^x[\lim_{h\to ۰}\frac{g(h)}{h}]+g(x)[\lim_{h\to ۰}\frac{e^h-۱}{h}]$$

از هوپیتال برای محاسبه‌ی حدها استفاده می‌کنیم:

$$g'(x)=e^x[\lim_{h\to ۰}\frac{g'(h)}{۱}]+g(x)[\lim_{h\to ۰}\frac{e^h}{۱}]=e^xg'(۰)+g(x)e^۰$$

در نتیجه $g'(x)=g(x)+g'(۰)e^x$، پس $C=g'(۰)=۲$.

راه کوتاه: ابتدا با فرض $x=y=۰$ مقدار $g(۰)=۰$ بدست می‌آید. سپس در تساویِ داده شده برای $g'(x)$ نیز $x=۰$ قرار دهیم، داریم $g'(۰)=g(۰)+Ce^۰$ پس $۲=۰+C$، لذا $C=۲$.

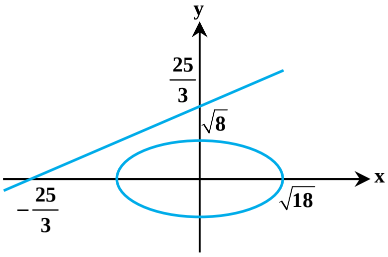
۳۴ـ گزینه «۲» می‌دانیم که فاصله نقطه $(x_۱,y_۱)$ تا خط $ax+by+c=۰$ به‌صورت روبرو است:

$$D=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

فرض کنید نقطه (x,y) روی بیضی قرار داشته باشد؛ در این صورت داریم:

$$\frac{x^۲}{۱۸}+\frac{y^۲}{۸}=۱\Rightarrow y^۲=۸-\frac{۸}{۱۸}x^۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}$$

اگر خط $۲x-۳y+۲۵=۰$ و بیضی $\frac{x^۲}{۱۸}+\frac{y^۲}{۸}=۱$ را رسم کنید (رسم آن‌ها ساده است، کافی است یک‌بار $x=۰$ قرار دهید، محل برخورد با محور y ها معلوم شود و یک بار هم $y=۰$ قرار دهید، محل برخورد با محور x ها معلوم شود)، متوجه می‌شوید که نیم بیضیِ بالایی که در بخش $y\geq۰$ قرار دارد، به این خط نزدیک‌تر است. بنابراین قسمت بالای بیضی یعنی مقدار + را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری در فرمول فاصله داریم:



$$D=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\left|۲x-۳\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}+۲۵\right|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}$$

برای خارج کردن صورت کسر از قدرمطلق، توجه کنید که اگر نقطه (x,y) دقیقاً روی خط باشد، داریم $ax+by+c=۰$، در بالای خط داریم $ax+by+c>۰$ و اگر (x,y) زیر خط قرار داشته باشد، $ax+by+c<۰$ است. ما نقطه‌ی (x,y) را روی بیضی فرض کرده‌ایم، بنابراین در این نقطه $ax+by+c<۰$ می‌شود و داریم $|ax+by+c|=-(ax+by+c)$. در نتیجه ضابطه‌ی $D(x)$ چنین است:

$$D(x)=-\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۲x-۳\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}+۲۵)$$

حالا مینیمم این تابع را می‌خواهیم. ابتدا مشتق را حساب می‌کنیم:

$$D'(x)=-\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۲-۳\frac{\frac{-۸}{۹}x}{۲\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}})$$

مشتق را مساوی صفر قرار داده تا مینیمم‌های موضعی را پیدا کنیم.

$$D'(x)=۰\Rightarrow ۲-\frac{-\frac{۴}{۳}x}{\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}}=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}x^۲}=\frac{-۴}{۳}x\Rightarrow ۸-\frac{۴}{۹}x^۲=\frac{۴}{۹}x^۲\Rightarrow\frac{۸}{۹}x^۲=۸\Rightarrow x=\pm۳$$

چون نقطه در ربع دوم است، پس $x=-۳$، بنابراین داریم:

$$D(-۳)=\frac{\left|۲(-۳)-۳\sqrt{۸-\frac{۴}{۹}\times۹}+۲۵\right|}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}\times۱۳=\sqrt{۱۳}$$

۳۵ـ گزینه «۲» وقتی $A(a,b)$ بالاترین نقطه‌ی منحنی باشد، به این معناست که $f(a)=b$ است ولی در سایر نقاط $f(x)\leq b$. در واقع برای هر x در دامنه داریم $f(x)\leq f(a)$. پس $x=a$ محل ماکزیمم مطلق را نشان می‌دهد. به همین ترتیب پایین‌ترین نقطه‌ی هر منحنی، به معنای مینیمم مطلق آن است. بنابراین با پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌توانیم مختصات A و B را پیدا کنیم. ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

$$x^۲+xy+y^۲=۱۲\Rightarrow y'=-\frac{۲x+y}{x+۲y}$$

برای تعیین نقطه اکسترمم باید $y'=۰$ باشد، لذا $۲x+y=۰$ و به عبارت دیگر $y=-۲x$ است، با قرار دادن y برحسب x در ضابطه تابع داریم:

$$x^۲+x(-۲x)+(-۲x)^۲=۱۲\Rightarrow x^۲-۲x^۲+۴x^۲=۱۲\Rightarrow ۳x^۲=۱۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲$$

اگر $x=۲$، آن‌گاه $y=-۴$ و اگر $x=-۲$، آن‌گاه $y=۴$ بدست می‌آید. پس بالاترین نقطه $(-۲,۴)$ و پایین‌ترین نقطه $(۲,-۴)$ است و این یعنی $\frac{b-d}{a-c}=\frac{۴-(-۴)}{-۲-(۲)}=۲$.

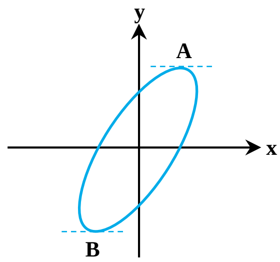
برای آن‌که مطمئن شویم در $x=۲$ و $x=-۲$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق بدست آمده‌اند؛ باید دامنه‌ی تابع را مشخص کرده و مقدار y را در دو سرِ دامنه هم بررسی کنیم. اگر از معادله‌ی ضمنی داده شده y را حساب کنیم داریم:

$$y^۲+xy+(x^۲-۱۲)=۰\xrightarrow{\Delta=x^۲-۴(x^۲-۱۲)=۳(۱۶-x^۲)}y=\frac{-x\pm\sqrt{۳(۱۶-x^۲)}}{۲}$$

در دامنه‌ی این تابع باید $۱۶-x^{۲}\ge ۰$ باشد، یعنی $-۴\le x\le ۴$ است. مقدار y را در دو سر دامنه یعنی $x=\pm ۴$ حساب می‌کنیم: $x=\pm ۴\Rightarrow y=\frac{\mp ۴\pm ۰}{۲}=\mp ۲$

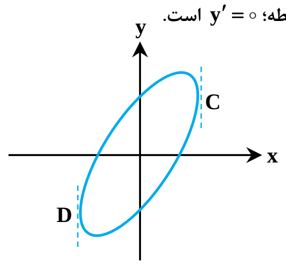
در حالی که در نقاط بحرانیِ $x=\pm ۲$ به مقادیر $y=\mp ۴$ رسیده‌ایم. حالا اطمینان داریم که مقادیر بدست آمده در $x=\pm ۲$، ماکزیمم و مینیمم مطلق y هستند.

توضیح: معادله‌ی $x^{۲}+xy+y^{۲}=c$ برای $c>۰$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضیِ مایل است. در بالاترین و پایین‌ترین نقطه از این منحنی، خط مماس بر منحنی افقی می‌شود یعنی $y'=۰$ می‌شود. به همین دلیل به دنبال نقاطی بودیم که در آن‌ها مشتق برابر با صفر می‌شود.



در بالاترین و پایین‌ترین نقطه؛ $y'=۰$ است.

در هر معادله‌ی ضمنی که دایره یا بیضی را نشان دهد، دو نقطه‌ی بحرانی دیگر هم وجود دارند که در آن‌ها y' وجود ندارد. ضابطه‌ی $y'=-\frac{۲x+y}{x+۲y}$ را در نظر بگیرید. اگر $x+۲y=۰$ باشد، نقاطی بدست می‌آیند که مشتق در آن‌ها وجود ندارد. اگر این دو نقطه را حساب کنید، می‌بینید که نقاط سمت راست و سمت چپ منحنی را پیدا کرده‌اید که در آن‌ها شیب خط مماس، $\pm\infty$ است.



در نقاط سمت چپ و راست؛ $y'=\pm\infty$ است.

۳۶ـ گزینه «۴» برای بررسی زاویه‌ی بین دو منحنی ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^{۲}-y^{۲}=۳\\ x^{۲}-۴x+y^{۲}+۳=۰\end{cases}\xrightarrow{y^{۲}=x^{۲}-۳}x^{۲}-۴x+(x^{۲}-۳)+۳=۰\Rightarrow ۲x^{۲}-۴x=۰\Rightarrow ۲x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۲$$

با جایگذاری $x=۰$ در ضابطه‌ی دو منحنی می‌بینیم که معادله‌ی غیرممکن $y^{۲}=-۳$ بدست می‌آید. در واقع $x=۰$ اصلاً در دامنه‌ی این دو منحنی قرار ندارد. اما به ازای $x=۲$ داریم $y^{۲}=۱$، پس $y=\pm ۱$ بدست می‌آید. تا این‌جا متوجه شدیم که منحنی‌های داده شده در دو نقطه‌ی $A(۲,۱)$ و $B(۲,-۱)$ با هم برخورد می‌کنند. اکنون شیب هرکدام از منحنی‌ها را در این نقاط حساب می‌کنیم و زاویه‌ی برخورد آن‌ها با هم را بدست می‌آوریم. با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$x^{۲}-y^{۲}=۳\Rightarrow y'=-\frac{۲x}{-۲y}\Rightarrow y'=\frac{x}{y}\qquad,\qquad x^{۲}-۴x+y^{۲}+۳=۰\Rightarrow y'=-\frac{۲x-۴}{۲y}\Rightarrow y'=\frac{۲-x}{y}$$

در نقطه‌ی $A(۲,۱)$؛ شیب منحنی‌ها به ترتیب $m_{۱}=\frac{x}{y}=\frac{۲}{۱}$ و $m_{۲}=\frac{۲-x}{y}=۰$ است. پس زاویه‌ی بین دو منحنی را به این صورت حساب می‌کنیم:

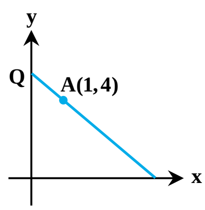
$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m_{۲}-m_{۱}}{۱+m_{۲}m_{۱}}\right|=۲\Rightarrow \alpha=\operatorname{tg}^{-۱}(۲)$$

در نقطه‌ی $B(۲,-۱)$ شیب منحنی‌ها عبارتند از: $m_{۱}=\frac{x}{y}=-۲$ و $m_{۲}=\frac{۲-x}{y}=۰$، در نتیجه داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m_{۲}-m_{۱}}{۱+m_{۲}m_{۱}}\right|=۲\Rightarrow \alpha=\operatorname{tg}^{-۱}(۲)$$

پس این دو منحنی در هر دو نقطه‌ی برخوردشان با یکدیگر، زاویه‌ای برابر با $\alpha=\operatorname{tg}^{-۱}(۲)$ دارند. با آن‌که محاسبه‌ی این زاویه به ماشین‌حساب نیاز دارد، اما واضح است که عددی بین ۶۰ تا ۹۰ است، زیرا $\operatorname{tg}^{-۱}(\sqrt{۳})=۶۰$ و $\operatorname{tg}^{-۱}(\infty)=۹۰^{\circ}$، پس $\operatorname{tg}^{-۱}(۲)$ بین این دو مقدار قرار دارد و فقط گزینه‌ی (۴) می‌تواند درست باشد.

۳۷ـ گزینه «۴» معادله خط گذرنده از نقطه $A(۱,۴)$ را می‌توان به‌صورت $y-۴=m(x-۱)$ در نظر گرفت. در این صورت این خط محور xها را در نقطه $P(۱-\frac{۴}{m},۰)$ و محور yها را در نقطه $Q(۰,۴-m)$ قطع می‌کند. مجموع قطعات مثبت جدا شده روی محورهای مختصات برابر $(۱-\frac{۴}{m}+۴-m)$ یا $(۵-m-\frac{۴}{m})$ است،



$$(۵-m-\frac{۴}{m})'=-۱+\frac{۴}{m^{۲}}=۰\Rightarrow m=\pm ۲$$

وقتی $m=۲$ باشد، محور xها در ربع اول قطع نمی‌شود، پس قابل قبول نیست. به ازای $m=-۲$، معادله خط به‌صورت $y-۴=-۲(x-۱)$ درمی‌آید و محور yها در نقطه $P(۰,۶)$ قطع می‌شود.

۳۸ـ گزینه «۱» نیمساز ناحیه اول خط $y=x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$x=y\Rightarrow y^{۲}=\operatorname{Arctg}(۱)=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{\pi}{۴}}\qquad(۱)$$

تابع $f(x,y)=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}-xy=۰$ را در نظر گرفته، با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\left(\frac{\dfrac{-\frac{y}{x^۲}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}-y}{\dfrac{\frac{۱}{x}}{۱+(\frac{y}{x})^۲}-x}\right)=-\left(\frac{\dfrac{-\frac{y}{x^۲}}{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲}}-y}{\dfrac{\frac{۱}{x}}{\frac{x^۲+y^۲}{x^۲}}-x}\right)=-\left(\frac{\dfrac{-y}{x^۲+y^۲}-y}{\dfrac{x}{x^۲+y^۲}-x}\right)$$

$$\xRightarrow{\underline{y=x}}\ \frac{y}{y}\left(\frac{\frac{۱}{y^۲+y^۲}+۱}{\frac{۱}{y^۲+y^۲}-۱}\right)=\frac{\frac{۱}{۲y^۲}+۱}{\frac{۱}{۲y^۲}-۱}\xrightarrow[\text{از (۱) داریم}]{y^۲=\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}}+۱}{\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}}-۱}=\frac{\frac{۲}{\pi}+۱}{\frac{۲}{\pi}-۱}=\frac{۲+\pi}{۲-\pi}$$

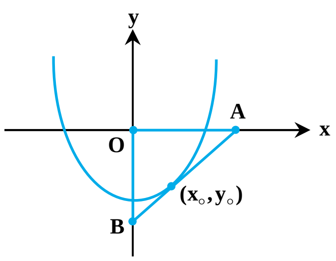
۳۹ـ گزینه «۳»

$x=t^۲-t$ و $y=t^۲+t$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{۲t+۱}{۲t-۱}\Rightarrow y''_{xx}=\frac{d^۲y}{dx^۲}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{۲(۲t-۱)-۲(۲t+۱)}{(۲t-۱)^۲}}{۲t-۱}=\frac{-۴}{(۲t-۱)^۳}$$

$$\frac{d^۳y}{dx^۳}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}=\frac{\frac{۲۴}{(۲t-۱)^۴}}{۲t-۱}=\frac{۲۴}{(۲t-۱)^۵}\xrightarrow{t=\frac{۳}{۲}}\frac{d^۳y}{dx^۳}(t=\frac{۳}{۲})=\frac{۲۴}{۳۲}=\frac{۳}{۴}$$

۴۰ـ گزینه «۱» نقطه‌ی تماس را با $(x_{\circ},y_{\circ})$ نشان می‌دهیم. شیب خط مماس برابر است با $f'(x_{\circ})=۲x_{\circ}$. معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم:



$$y-y_{\circ}=۲x_{\circ}(x-x_{\circ})\Rightarrow y=۲x_{\circ}x+y_{\circ}-۲x_{\circ}^۲$$

مختصات نقاط برخورد خط مماس با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم:

$$x=\circ\Rightarrow y=y_{\circ}-۲x_{\circ}^۲$$

$$y=\circ\Rightarrow x=-\frac{y_{\circ}-۲x_{\circ}^۲}{۲x_{\circ}}$$

مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_Ay_B|=\frac{۱}{۲}|\frac{(y_{\circ}-۲x_{\circ}^۲)^۲}{۲x_{\circ}}|=\frac{۱}{۴}\frac{(y_{\circ}-۲x_{\circ}^۲)^۲}{x_{\circ}}$$

نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ روی سهمی قرار دارد، پس داریم $y_{\circ}=x_{\circ}^۲-۱$، بنابراین داریم:

$$S=\frac{۱}{۴}\frac{(x_{\circ}^۲+۱)^۲}{x_{\circ}}$$

اکنون کمترین مقدار S را بدست می‌آوریم:

$$S'(x_{\circ})=\frac{۱}{۴}\frac{۴x_{\circ}^۲(x_{\circ}^۲+۱)-(x_{\circ}^۲+۱)^۲}{x_{\circ}^۲}=\circ\Rightarrow(x_{\circ}^۲+۱)[۴x_{\circ}^۲-x_{\circ}^۲-۱]=\circ\Rightarrow ۳x_{\circ}^۲-۱=\circ\Rightarrow x_{\circ}=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

دقت کنید که در ربع چهارم $x_{\circ}>\circ$ است.

$$\min S=\frac{۱}{۴}\frac{(\frac{۱}{۳}+۱)^۲}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=t^2$ استفاده می‌کنیم در این صورت $dx=2tdt$ و انتگرال به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2\frac{2tdt}{1+t}=\int_0^2\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=(2t-2Ln(1+t))\Big]_0^2=4-2Ln3=4-Ln9$$

به راه‌حل تستی سؤال فکر کنید! (در کمتر از ۱۰ ثانیه)

۲ـ گزینه «۳» ابتدا در زیر رادیکال از e^{2x} فاکتور می‌گیریم و از زیر رادیکال خارج می‌کنیم، حال ملاحظه می‌شود که عبارت زیر رادیکال برابر $1+e^x$ خواهد شد و مشتق آن e^xdx می‌باشد، لذا به آسانی قادر به حل انتگرال به‌صورت مقابل خواهیم بود:

$$\int_{Ln3}^{Ln8} e^x\sqrt{1+e^x}\,dx=\frac{2}{3}(1+e^x)\sqrt{1+e^x}\Big]_{Ln3}^{Ln8}=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

۳ـ گزینه «۲» با توجه به این که $tg(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-tgx}{1+tgx}$ بنابراین داریم:

$$f(x)=(1+tgx)\left(1+\frac{1-tgx}{1+tgx}\right)=(1+tgx)\left(\frac{2}{1+tgx}\right)=2$$

$$\int_0^1 x^3 gof(x)dx=\int_0^1 x^3 g[f(x)]dx=\int_0^1 x^3 g(2)dx=g(2)\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}g(2)$$

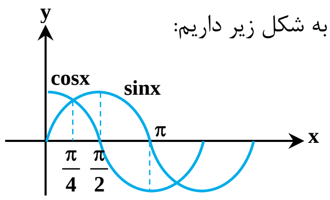
۴ـ گزینه «۴»

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}.\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{2}\ ,\ f(1)=0$$

بنابراین:

$$y=x^2f(x)\Rightarrow y'=2xf(x)+x^2f'(x)\Rightarrow y'(1)=2f(1)+f'(1)=\frac{-1}{2}$$

۵ـ گزینه «۲» ابتدا باید خودمان را از دست قدر مطلق خلاص کنیم! این کار را باید با شکستن بازه انجام دهیم با توجه به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases}|\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ |\sin x-\cos x|=\sin x-\cos x & \frac{\pi}{4}<x<\pi\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$$

۶ـ گزینه «۴» ملاحظه می‌شود که حد داده شده مبهم و از نوع $\frac{0}{0}$ است، لذا با استفاده از قضیهٔ هوپیتال و فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\int_2^x\sqrt{20-t^4}\,dt=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2}\frac{1\times\int_2^x\sqrt{20-t^4}\,dt+x\sqrt{20-x^4}}{1}=\int_2^2\sqrt{20-t^4}\,dt+2\sqrt{20-2^4}=0+2\sqrt{20-16}=2\sqrt{4}=4$$

۷ـ گزینه «۱» با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$u=Arctgx\to du=\frac{1}{1+x^2}dx\quad,\quad dv=xdx\to v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 xArctgx\,dx=\frac{x^2}{2}Arctgx\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}Arctgx\right)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» این انتگرال را می‌توان با استفاده از ایجاد مربع کامل زیر رادیکال و استفاده از فرمول $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=Arc\sin\frac{u}{a}$، حل کرد، اما روش راحت‌تر استفاده از تابع بتا می‌باشد، طبق متن درس داریم:

$$\int_a^b(x-a)^{-\frac{1}{2}}(b-x)^{-\frac{1}{2}}dx=(b-a)^0\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{1}=\pi$$

۹ـ گزینه «۴» برای حل انتگرال داده شده، باید کاری کنیم که توان e به‌صورت مجذور کامل در بیاید. برای اینکار توان e را به‌صورت $-x^2+2x=-(x-1)^2+1$ می‌نویسیم و داریم:

$$I=\int_1^{+\infty}e^{-x^2+2x}dx=\int_1^{+\infty}e^{-(x-1)^2+1}dx=\int_1^{+\infty}e^1.e^{-(x-1)^2}dx$$

حال از تغییر متغیر $u=x-1$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$du=dx\ ,\ x=1\Rightarrow u=0\ ,\ x=+\infty\Rightarrow u=+\infty$$

$$I=e\int_1^{+\infty}e^{-(x-1)^2}dx=e\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{e\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۱» یک انتگرال با ظاهری غلط انداز! که با تغییر متغیر راحت حل می‌شود. فرض می‌کنیم $u=\sin(Lnx)$، آن‌گاه $du=\frac{\cos(Lnx)}{x}dx$ لذا داریم:

$$\int\frac{\sin^3(Lnx)\cos^3(Lnx)}{x}dx=\int[\sin^3(Lnx)\cos^2(Lnx)]\frac{\cos(Lnx)}{x}dx=\int u^3(1-u^2)du=\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{6}u^6=\frac{1}{4}\sin^4(Lnx)-\frac{1}{6}\sin^6(Lnx)$$

$$I=[\frac{1}{4}\sin^4(Lnx)-\frac{1}{6}\sin^6(Lnx)]_1^e=\frac{1}{4}\sin^4(Lne)-\frac{1}{6}\sin^6(Lne)=\frac{1}{4}\sin^4(1)-\frac{1}{6}\sin^6(1)$$

۱۱ـ گزینه «۴» این انتگرال را می‌توانیم به دو روش زیر پاسخ دهیم:

روش اول: با استفاده از تغییر متغیر، $u=\sin x$، پس $du=\cos x\,dx$، در نتیجه $du=dx\sqrt{1-u^2}$ و برای حدود جدید به ترتیب داریم: $u=\sin 0=0$ و $u=\sin\frac{\pi}{2}=1$ می‌باشد و لذا داریم:

$$I=\int_0^1\sqrt{1-u}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+u}}du=\int_0^1(1+u)^{-\frac{1}{2}}du=[2\sqrt{1+u}]_0^1=2[\sqrt{2}-1]$$

روش دوم: می‌دانیم $1-\sin x=(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2$، بنابراین داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|dx$$

برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$ و در این بازه $\cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}$، پس با ضرب یک منفی در عبارت، قدر مطلق را برمی‌داریم و لذا داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin(\frac{x}{2})-\cos(\frac{x}{2})]dx=[2\cos\frac{x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}+[2\sin\frac{x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}=[2\cos\frac{\pi}{4}-2\cos(0)]+[2\sin(\frac{\pi}{4})-2\sin(0)]$$

$$\Rightarrow I=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times1+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$$

به راحل ۱۰ ثانیه‌ای سؤال بدون استفاده از خودکار فکر کنید.

۱۲ـ گزینه «۱» ابتدا تابع تحت انتگرال را به‌صورت $\frac{x.x}{(1+x^2)^2}$ می‌نویسیم، سپس با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $u=x$ و $dv=\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ داریم:

$$du=dx\quad ,\quad v=\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-2}dx=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^2})$$

$$F(x)=\int_0^a\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}]_0^a-\int_0^a(-\frac{1}{2})\frac{1}{1+x^2}dx=[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}Arctgx]_0^a$$

$$\lim_{a\to\infty}F(x)=0+\frac{1}{2}Arctg\infty-0=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

توضیح: البته از تغییر متغیر $x=tg\theta$ نیز می‌توان به سؤال فوق پاسخ داد.

۱۳ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری داریم:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\,dx=[Ln|\sec x+tgx|]_0^{(\frac{\pi}{2})^-}=Ln\infty-Ln1=\infty\Rightarrow$$ انتگرال I_1 واگراست

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}tgx\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=[-Ln|\cos x|]_0^{(\frac{\pi}{2})^-}=[Ln\frac{1}{|\cos x|}]_0^{(\frac{\pi}{2})^-}=Ln\infty-Ln1=\infty\Rightarrow$$ انتگرال I_2 واگراست

۱۴ـ گزینه «۱» ابتدا باید مقدار تابع sgnx را با توجه به بازه $(-1,1)$ تعیین کنیم. بدین منظور در بازه‌های $(-1,0)$ و $(0,1)$ که علامت آن متفاوت است، آن را می‌شکنیم و داریم:

$$I=\int_{-1}^0\frac{x(-1)}{x+2}dx+\int_0^1\frac{x(1)}{x+2}dx=\int_{-1}^0\frac{-x-2+2}{x+2}dx+\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_{-1}^0-1dx+2\int_{-1}^0\frac{dx}{x+2}+\int_0^1 1dx-2\int_0^1\frac{dx}{x+2}$$

$$=[-x+2Ln|x+2|]_{-1}^0+[x-2Ln|x+2|]_0^1=[-(0-(-1))+2Ln2-2Ln1]+[(1-0)-2Ln3+2Ln2]\Rightarrow$$

$$I=-1+2Ln2-2Ln1+1-2Ln3+2Ln2=4Ln2-2Ln3=Ln2^4-Ln3^2=Ln16-Ln9=\mathbf{Ln\frac{16}{9}}$$

۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا لازم است از تابع داده شده مشتق بگیریم:

$$F(x)=\int_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt \Rightarrow F'(x)=\sqrt{1-x^4}$$

واضح است که $F'(x)\ge 0$، پس F تابعی اکیداً صعودی است.

$$F''(x)=\frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} \xrightarrow{F''(x)=0} x=0$$

چون $x=0$، ریشه $F''(x)=0$ است و در دو طرف آن F'' تغییر علامت می‌دهد، پس $x=0$ طول نقطه‌ی عطف است.

۱۶ـ گزینه «۳» در نقطه $x=a$، شیب منحنی یعنی $f'(a)$ برابر $tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ و در نقطه b، شیب منحنی یعنی $f'(b)$ برابر $tg\frac{\pi}{4}=1$ است. بنابراین داریم:

$$I=\int_a^b f''(x)dx=f'(b)-f'(a)=1-\sqrt{3}$$

۱۷ـ گزینه «۱» ابتدا عبارت $(1-\frac{2}{x})^2$ را به توان می‌رسانیم و داریم:

$$I=\int_1^4 (1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x})e^x dx=\int_1^4 e^x dx+\int_1^4 \frac{4}{x^2}e^x dx+\int_1^4 -\frac{4}{x}e^x dx$$

قبل از محاسبه‌ی دو انتگرال اول، انتگرال سوم را از قاعده‌ی جزء به جزء به نحوی محاسبه می‌کنیم که در آن $u=-\frac{4}{x}$ و $dv=e^x dx$، پس $du=\frac{4}{x^2}dx$ و $v=e^x$.

بنابراین داریم:

$$\int_1^4 -\frac{4}{x}e^x dx=[-\frac{4}{x}e^x]_1^4-\int_1^4 (+\frac{4}{x^2})e^x dx \xrightarrow{\text{به جای انتگرال سوم قرار می‌دهیم}} I=[e^x]_1^4+\int_1^4 \frac{4}{x^2}e^x dx-[\frac{4}{x}e^x]_1^4-\int_1^4 (+\frac{4}{x^2})e^x dx$$

$$I=(e^4-e^1)+\int_1^4 \frac{4}{x^2}e^x dx+(-e^4+4e^1)-\int_1^4 \frac{4}{x^2}e^x dx=\mathbf{3e}$$

۱۸ـ گزینه «۱» اگر دقت کنیم، عبارت داخل انتگرال، مشتق x^x، می‌باشد، بنابراین داریم:

$$F(x)=\int x^x(\ln x+1)\,dx=x^x+c \xrightarrow{\text{ثابت انتگرال‌گیری صفر است}} F(x)=x^x$$

توضیح: برای درک بهتر از این‌که عبارت داخل انتگرال، مشتق x^x، است فقط کافیست از x^x مشتق بگیریم:

$$y=x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \ln y=x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+\frac{1}{x}\times x \Rightarrow y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

خب حالا به ادامه‌ی حل می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 0}F(x)=0^0 \xrightarrow{\text{مبهم}} \lim_{x\to 0}e^{x\ln x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{HOP} \text{حاصل حد}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{-x}=1$$

۱۹ـ گزینه «۲» با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases}u=x \Rightarrow du=dx\\ f''(x)dx=dv \Rightarrow f'(x)=v\end{cases} \Rightarrow I=[xf'(x)]_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=1\times f'(1)-0-\int_0^1 f'(x)dx$$

$$\mathbf{I=f'(1)-[f(x)]_0^1=f'(1)-f(1)+f(0)}$$

۲۰ـ گزینه «۴» با استفاده از روش تغییر متغیر به راحتی داریم:

$$\text{Arcsin}\sqrt{x}=u \Rightarrow \sqrt{x}=\sin u \Rightarrow x=\sin^2 u \quad,\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=\cos u\,du \quad,\quad x=0 \Rightarrow u=0 \quad,\quad x=1\,,\,u=\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int \frac{(u)2\sqrt{x}\cos u\,du}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-\sin^2 u}}=\int \frac{2u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}(\cos u)du=\int \frac{2u}{|\cos u|}\cos u\,du \xrightarrow[0\le u\le\frac{\pi}{2}]{0\le x\le 1} I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u\,du=[u^2]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

۲۱ـ گزینه «۴» در این گونه سؤالات باید انتگرال «خواسته شده» را برحسب انتگرال «داده شده» نوشت:

$$A=\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}dt$$

$$\begin{cases}u=\frac{1}{t+1} \Rightarrow du=-\frac{dt}{(1+t)^2}\\ dv=e^t dt \Rightarrow v=e^t\end{cases} \Rightarrow A=uv-\int v\,du=\frac{e^t}{t+1}\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{-e^t dt}{(1+t)^2}=(\frac{e}{2}-1)+\int_0^1 \frac{e^t dt}{(1+t)^2}$$

با توجه به این که $B=\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2}dt$، لذا داریم:

$$A=\frac{e}{2}-1+B \Rightarrow \mathbf{B-A=1-\frac{e}{2}}$$

۲۲ـ گزینه «۴» یک انتگرال بسیار ساده که به راحتی با استفاده از تغییر متغیر $u^2 = 4 - x^2$، خواهیم داشت:

$$u^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2udu = -2xdx \Rightarrow xdx = -udu \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & u \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}$$

در این صورت انتگرال به‌صورت مقابل در می‌آید:

$$I = \int_2^0 \frac{-udu}{u^2+u} = \int_0^2 \frac{du}{u+1} = Ln(u+1)\Big|_0^2 = \mathbf{Ln3}$$

۲۳ـ گزینه «۴» واضح است؛ ابتدا باید ضابطه‌ی $g(x)$ را به‌دست آوریم. برای این کار با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه‌ی $g'(x)$ را به‌دست می‌آوریم. در نظر بگیرید $u = x^2$، بنابراین $x = \sqrt{u}$ و $x^3 = u^{\frac{3}{2}}$ و لذا داریم:

$$g'(u) = u^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} g(u) = \int g'(u)du = \int u^{\frac{3}{2}}du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C$$

از صورت سؤال می‌دانیم $g(1) = 1$، بنابراین داریم:

$$g(1) = \frac{2}{5} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{5} \Rightarrow g(u) = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5}$$

خُب حالا به راحتی $g(4)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$g(4) = \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times 2^5 + \frac{3}{5} = \frac{\mathbf{67}}{\mathbf{5}}$$

۲۴ـ گزینه «۲» با مشتق‌گیری از طرفین رابطه داریم:

$$\int_1^{\cos x} \frac{f(t)}{t^2}dt = Ln(\cos x) + \frac{1}{\cos x} - 1$$

$$(-\sin x)\frac{f(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{طرفین را در } -\frac{\cos^2 x}{\sin x} \text{ ضرب می‌کنیم}} f(\cos x) = \cos x - 1 \xrightarrow{u=\cos x} f(u) = u - 1 \Rightarrow \mathbf{f'(u) = 1}$$

۲۵ـ گزینه «۱» با استفاده از فرمول طلایی $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ و با جایگذاری رابطه $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ و $\sec^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$، داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + tg^2\frac{x}{2})dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$= [tg\frac{x}{2} + 2Ln|\cos\frac{x}{2}|]_0^{\frac{\pi}{2}} = [(tg\frac{\pi}{4} - tg0) + (2Ln|\cos\frac{\pi}{4}| - 2Ln|\cos 0|)] = 1 + 2Ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{1 - Ln2}$$

۲۶ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده همان تعریف تبدیل لاپلاس است.

$$I = L[x^9]\Big|_{s=2} = \frac{9!}{s^{10}}\Big|_{s=2} = (\frac{1}{2})^{10} \times 9!$$

۲۷ـ گزینه «۳» ابتدا با توجه به این که $\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$، انتگرال را بازنویسی می‌کنیم.

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x}(\frac{1}{1+\sin x})dx \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در «} 1-\sin x \text{» ضرب می‌کنیم}} I = \int \frac{\cos x}{\sin x}(\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x})dx = \int (\frac{\cos x}{\sin x})\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\sin x\cos x}dx = \int (\frac{1}{\sin x\cos x} - \frac{\sin x}{\sin x\cos x})dx = \int \frac{dx}{\sin x\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dx}{\sin 2x} - \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= Ln|tg\frac{2x}{2}| - Ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + c = Ln|tgx| - Ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + c$$

۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا باید تعیین کنیم، $2\sin x$، در چه نقاطی از بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$، عددی صحیح می‌شود، واضح است در نقاط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{6}$ این اتفاق می‌افتد.

بنابراین داریم:

$$x = 0 \Rightarrow \lfloor 2\sin x \rfloor = \lfloor 2\sin(0) \rfloor = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lfloor 2\sin x \rfloor = \left\lfloor 2\sin\frac{\pi}{6} \right\rfloor = \left\lfloor 2 \times \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}^-} \lfloor 2\sin x \rfloor dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (0)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}^-} 1dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۲۹ـ گزینه «۲» با توجه به این که توان $\sin x$ فرد است، لذا داریم:

$$I=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{3}}\sin x(\frac{\sin^2 x}{\cos x})dx=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)(\frac{1-\cos^2 x}{\cos x})dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\cos x=u$ داریم:

$$\cos x=u \Rightarrow -\sin x dx=du \ , \ x=\circ \Rightarrow u=\cos(\circ)=1 \quad , \quad x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$I=-\int_{1}^{\frac{1}{2}}(\frac{1-u^2}{u})du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{u}-u)du=[Lnu-\frac{u^2}{2}]_{\frac{1}{2}}^{1}\Rightarrow Ln1-\frac{1}{2}-Ln\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\mathbf{Ln2-\frac{3}{8}}$$

۳۰ـ گزینه «۳» یک سؤال نه چندان سخت با ظاهری جدید و البته کمی جالب! کافیست حد تابع را در نقطه‌ی $x=\circ$ حساب کرده و مساوی $3k$ قرار دهیم:

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\int_{\circ}^{\sin x}(1+tg2t)dt}{tgx}=\frac{\circ}{\circ}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to\circ}\frac{\cos x[1+tg(2\sin x)]}{1+tg^2 x}=1$$

بنابراین $3k=1$ و لذا $\mathbf{k=\frac{1}{3}}$ است.

۳۱ـ گزینه «۳» آنچه از همان نگاه اول به نظر می‌رسد؛ انتگرال در بی‌نهایت ناسرگی دارد. برای بررسی وضعیت همگرایی بهتر است از قضیه اول استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}x^p(\frac{(Lnx)^\beta}{x^\alpha})=\lim_{x\to\infty}(\frac{(Lnx)^\beta}{x^{\alpha-p}})$$

اگر $\alpha-p>\circ$ باشد، حد فوق صفر می‌شود و اگر $p>1$، آن‌گاه انتگرال همگراست، پس داریم:

$$\alpha-p>\circ \Rightarrow \alpha>p\xrightarrow{p>1}\alpha>1$$

پس با شرط $\alpha>1$ انتگرال همگراست.

البته حل تمام نشده است! چون اگر β منفی باشد، آن‌گاه $x=1$ نیز نقطه‌ی ناسرگی است، چون داریم:

$$I=\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^\alpha(Lnx)^{-\beta}}$$

برای بررسی شرایط همگرایی دقت کنید؛ در همسایگی $x=1$، انتگرال فوق هم‌ارز با انتگرال $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^{-\beta}}$ است، که این انتگرال با شرط $-\beta<1$ و به عبارت دیگر با شرط $\beta>-1$ همگراست.

۳۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$، در این سؤال $y=\circ$، در نتیجه داریم:

$$\int_{\circ}^{x}[1+\sin(\sin t)]dt=\circ$$

$$x=\circ\Rightarrow(f^{-1})'(\circ)=\frac{1}{f'(\circ)}$$

حال به محاسبه‌ی مقدار $f'(\circ)$ می‌پردازیم:

$$f'(x)=1+\sin(\sin x)\Rightarrow f'(\circ)=1\Rightarrow \mathbf{(f^{-1})'(\circ)=\frac{1}{1}=1}$$

۳۳ـ گزینه «۳» با یک مشتق‌گیری پارامتری ساده روبه‌رو هستیم و به راحتی داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t}e^{Lnt}}{\frac{Lnt}{t}}=\frac{t}{Lnt}$$

۳۴ـ گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده! کافیست در انتگرال اول از رابطه‌ی $e^{Lnu}=u$ و درا نتگرال دوم از تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ استفاده کنیم:

$$I=\int\frac{e^{\ln\sqrt{x}}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c\xrightarrow{c=\circ}I=2\sqrt{x}$$

بنابراین $\mathbf{A=e^{2\sqrt{x}}}$ است، برای انتگرال B با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$، آن‌گاه $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$ و در نتیجه $dx=2udu$، پس داریم:

$$B=\int\frac{e^u}{u}(2udu)=2\int e^u du=2e^u+c=2e^{\sqrt{x}}+c\xrightarrow{c=\circ}\mathbf{B=2e^{\sqrt{x}}}$$

پس $B^2=4A$ است.

۳۵ـ گزینه «۳»

$$I=\int_{\sinh 2a}^{\sinh\frac{1}{a}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=[Arc\sinh x]_{\sinh 2a}^{\sinh\frac{1}{a}}=Arc\sinh(\sinh\frac{1}{a})-Arc\sinh(\sinh 2a)=\frac{1}{a}-2a=\mathbf{\frac{1-2a^2}{a}}$$

۳۶ـ گزینه «۳» ابتدا با تغییر متغیر فرم انتگرال را تغییر می‌دهیم:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^{۲} \Rightarrow dx=۲t\,dt \Rightarrow x=۰ \Rightarrow t=۰ \quad , \quad x=\frac{\pi^{۲}}{۴}\Rightarrow t=\frac{\pi}{۲}$$

$$I=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} t\sin t\,dt \xrightarrow{\text{روش جدول}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \oplus & t & \sin t \\ \hline \ominus & ۱ & -\cos t \\ & ۰ & -\sin t \\ \hline \end{array} \Rightarrow I=۲[-t\cos t+\sin t]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\mathbf{۲}$$

۳۷ـ گزینه «۱» تابع $tg^{۴}x$ تابعی زوج و تابع $Ln(\frac{۱+x}{۱-x})$ تابعی فرد می باشد، لذا حاصلضرب آنها تابعی فرد می‌باشد و می‌دانیم اگر $f(x)$ فرد باشد آن‌گاه: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=۰$ خواهد بود.

۳۸ـ گزینه «۴»

$$I=\int\frac{dx}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x}=\int\frac{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}{\sin^{۲}x\cos^{۲}x}dx=\int\frac{dx}{\cos^{۲}x}+\int\frac{dx}{\sin^{۲}x}=tgx-\cot gx+c$$

۳۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$ و لذا داریم:

$$I=\int(\frac{۱}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}+۱})dx=\int(\frac{۲}{e^{x}+e^{-x}+۲})dx \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } e^{x} \text{ ضرب می‌کنیم}} I=\int(\frac{۲e^{x}}{e^{۲x}+۲e^{x}+۱})dx$$

حالا از تغییر متغیر $u=e^{x}$، داریم:

$$du=e^{x}dx \Rightarrow du=udx \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$$

پس داریم:

$$I=\int(\frac{۲u}{u^{۲}+۲u+۱})\frac{du}{u}=\int(\frac{۲}{u^{۲}+۲u+۱})du=\int\frac{۲}{(u+۱)^{۲}}du=-\frac{۲}{u+۱}+c=-\frac{۲}{e^{x}+۱}+c$$

۴۰ـ گزینه «۳» برای تمرین بیشتر تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): انتگرال داده شده در این گزینه، در بی‌نهایت ناسرگی دارد. از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم، وقتی $x\to\infty$، داریم:

$$\frac{\sqrt[۷]{۳+۲x^{۲}}}{\sqrt[۵]{x^{۳}-۱}}\sim\frac{\sqrt[۷]{۲x^{۲}}}{\sqrt[۵]{x^{۳}}}=\frac{(۲x^{۲})^{\frac{۱}{۷}}}{x^{\frac{۳}{۵}}}=\frac{\sqrt[۷]{۲}}{x^{\frac{۳}{۵}-\frac{۲}{۷}}}=\frac{\sqrt[۷]{۲}}{x^{\frac{۱۱}{۳۵}}}$$

می‌دانیم انتگرال $\int_{۲}^{\infty}\frac{۱}{x^{\frac{۱۱}{۳۵}}}dx$، واگراست، چون $p=\frac{۱۱}{۳۵}<۱$.

بررسی گزینه (۲): وقتی $x\to+\infty$، عبارت مقابل انتگرال هم‌ارز با $\frac{x}{x^{۲}}$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\frac{۱}{x}$ است و چون انتگرال $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست، انتگرال داده شده در گزینه (۲) نیز واگراست.

بررسی گزینه (۳): انتگرال موردنظر دو نوع ناسرگی دارد، بنابراین انتگرال را به‌صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\int_{۲}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}}=\int_{۲}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}}+\int_{۳}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}}$$

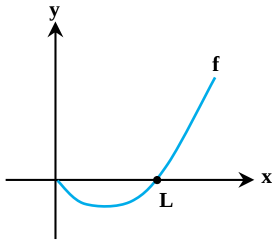
انتگرال اول را در همسایگی $x=۲$، می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$\int_{۲}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}}=\int_{۲}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{۲(۲-۱)(x-۲)}}=\int_{۲}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{۲(x-۲)}}$$

و چون این انتگرال همگراست، بنابراین انتگرال اولیه نیز همگراست. اما انتگرال دوم را در $x\to+\infty$ می‌توان هم‌ارز انتگرال $I=\int_{۳}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{۳}}}$ و به عبارت دیگر هم‌ارز $I=\int_{۳}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{۳}{۲}}}$ دانست و چون این انتگرال همگراست، پس قسمت دوم انتگرال داده شده نیز همگراست. و در نتیجه انتگرال گزینه (۳) همگراست.

بررسی گزینه (۴): برای این انتگرال داریم:

$$\int_{۰}^{+\infty}e^{۲x}dx=\frac{۱}{۲}[e^{۲x}]_{۰}^{+\infty}=+\infty \quad \text{انتگرال واگراست}$$



۴۱ـ گزینه «۲» فرض کنیم $F(x)$ پادمشتقِ $f(x)$ باشد. بنابراین $F'(x)=f(x)$ است. به نمودار مقابل کـه در آن فقط f را نشان داده‌ایم توجه کنید. محل برخورد f با محور xهای مثبت را L نامیده‌ایم.
در بازه‌ی $(۰,L)$ داریم: $f(x)<۰$ یعنی $F'(x)<۰$، پس نمودار $F(x)$ در این بازه باید نزولی باشد. از همین جا معلوم است که a و c نمی‌توانند جواب باشند. در ضمن در بازه‌ی (L,∞) نمودار f مثبت شده است؛ پس $F'(x)$ مثبت شده است. بنابراین نمودار پادمشتق در این بازه، صعودی است. تنها نموداری که این ویژگی‌ها را دارد b است.

۴۲ـ گزینه «۳» حالت ابهام به صورت $\frac{۰}{۰}$ است و بنابراین از قضیه هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\int_۰^x (۱+۱۳۹۶\sin t)^{\frac{۱}{t}}dt = \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+۱۳۹۶\sin x)^{\frac{۱}{x}}}{۱} = \lim_{x\to ۰}(۱+۱۳۹۶\sin x)^{\frac{۱}{x}} = e^{\lim_{x\to ۰}(۱+۱۳۹۶\sin x-۱)\frac{۱}{x}} = e^{\lim_{x\to ۰}(\frac{۱۳۹۶\sin x}{x})} = e^{۱۳۹۶}$$

۴۳ـ گزینه «۴» از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۱\times\sin(\pi x)+\pi x\cos(\pi x) = ۲xf(x^{۲}) \xrightarrow{x=۲} \sin ۲\pi + ۲\pi\cos(۲\pi) = ۲\times ۲f(۴) \Rightarrow ۲\pi = ۴f(۴) \Rightarrow f(۴)=\frac{\pi}{۲}$$

۴۴ـ گزینه «۲» اگر از تغییر متغیر $u = ۱+e^{-\sqrt{x}}$ استفاده کنیم، آنگاه $du = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$. لذا داریم:

$$I=\int\frac{-۲du}{(u-۱)u} = -۲\int(\frac{۱}{u-۱}-\frac{۱}{u})du = -۲Ln|u-۱|-Ln|u|+c$$

دقت کنید، چون $u=۱+e^{-\sqrt{x}}$، لذا u و $u-۱$ مثبت هستند، لذا داریم:

$$I = -۲Ln(\frac{u-۱}{u})+c = -۲Ln(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{۱+e^{-\sqrt{x}}})+c$$

۴۵ـ گزینه «۴» از روش جزءبه‌جزء کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} u = y \Rightarrow du = dy \\ dv = \sec^{۲} ydy \Rightarrow v = tgy \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = [ytgy]_۰^{\frac{\pi}{۴}} - \int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(tgy)dy = \frac{\pi}{۴}+[Ln|\cos y|]_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi}{۴}+(Ln\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱) = \frac{\pi}{۴}+Ln\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}Ln۲$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $e^x = t$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$I=\int \frac{1}{1+3t+2t^2}\left(\frac{dt}{t}\right)=\int\frac{dt}{t(t+1)(2t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}-\frac{4}{1+2t}\right)dt=\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{2dt}{1+2t}$$

$$\Rightarrow I=\mathrm{Ln}t+\mathrm{Ln}(t+1)-2\mathrm{Ln}(1+2t)=\mathrm{Ln}e^x+\mathrm{Ln}(e^x+1)-2\mathrm{Ln}(1+2e^x)=\mathbf{x+Ln(e^x+1)-2Ln(1+2e^x)}$$

۲ـ گزینه «۱»

$$I'(\beta)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos\beta x)\,dx=\int_0^\infty -xe^{-x^2}\sin\beta x\,dx$$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم:

$$u=\sin\beta x \Rightarrow du=\beta\cos\beta x \quad , \quad -xe^{-x^2}dx=dv \Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

بنابراین:

$$I'(\beta)=\int_0^\infty -xe^{-x^2}\sin\beta x dx=\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin\beta x\Big|_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\beta x dx\Rightarrow I'(\beta)=\frac{-\beta}{2}I(\beta)\Rightarrow I'(2)=\frac{-2}{2}I(2)=-I(2)$$

۳ـ گزینه «۳» در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$، انتگرال ناسره است، بنابراین قبل از هر چیزی باید بازه‌ی انتگرال را به دو قسمت تفکیک کنیم:

$$I=\int_0^\pi\frac{dx}{1+tg^4x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^4x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+tg^4x}\overset{*}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+tg^4x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+tg^4(\pi-t)}$$

در قسمت (*) برای محاسبه‌ی انتگرال دوم از تغییر متغیر $x=\pi-t$، استفاده کردیم و بنابراین $dx=-dt$ و حدود نیز بر حسب متغیر جدید تغییر کرد.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+tg^4x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+tg^4t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+tg^4x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+tg^4x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+tg^4x}dx$$

$$\Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{\sin^4x}{\cos^4x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4x}{\cos^4x+\sin^4x}dx$$

با توجه به نکته‌ی گفته شده؛ حاصل این انتگرال برابر با $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})$ است و لذا مقدار گزینه (۳) برابر با $2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ است.

۴ـ گزینه «۲» فارسی‌تر این سؤال! این است که حاصل $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$، کدام است؟ می‌دانیم $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{Arcsec}\,x+c$، بنابراین داریم:

$$F(\alpha)=\mathrm{Arcsec}2-\mathrm{Arcsec}\alpha\Rightarrow\lim_{\alpha\to1^+}F(\alpha)=\mathrm{Arcsec}2-\mathrm{Arcsec}1^+=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا مانند توابع مثلثاتی از توان tgh^3x، دو واحد کم کرده و $tghx$ را به انتگرال اضافه و کم می‌کنیم:

$$I=\int(tgh^3x+tghx-tghx)dx=\int tghxdx-\int tghx(1-tgh^2x)dx=\int\frac{\sinh x}{\cosh x}dx-\int\underbrace{tghx}_{u}\underbrace{(1-tgh^2x)dx}_{du}=\mathbf{Ln(\cosh x)-\frac{1}{2}tgh^2x+c}$$

۶ـ گزینه «۱» با استفاده از روش «تغییر متغیر» به سؤال جواب می‌دهیم:

$$\mathrm{Ln}(\cos x)=u\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx=du\Rightarrow -tgxdx=du\Rightarrow tgxdx=-du$$

$$-\int\frac{du}{u}=-\mathrm{Ln}u=-\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-[\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\cos\frac{\pi}{3})-\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\cos\frac{\pi}{6})]=-[\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\frac{1}{2})-\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}}{2})]=-\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{Ln}\frac{1}{2}}{\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=-\mathrm{Ln}(\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{2})=\mathrm{Ln}(\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{2})^{-1}=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{Ln}(\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2})=\mathrm{Ln}(\log_{2^{-1}}(\frac{2}{\sqrt{3}})^{-1})=\mathrm{Ln}(\log_2\frac{2}{\sqrt{3}})=\mathrm{Ln}(\log_2\frac{2\sqrt{3}}{3})$$

توجه داشته باشید در محاسبات فوق، برای ساده کردن حاصل انتگرال از قوانین $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$ و $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ استفاده کردیم.

۷ـ گزینه «۴» یک روش حل، استفاده از مطالب گفته شده در کتاب است. در واقع در این روش به دنبال این هستیم که مشتق مخرج را در صورت کسر ایجاد کنیم. این کار را باید با ترکیب خطی دو عبارت انجام دهیم، یکی خود عبارت مخرج کسر و دیگری مشتق عبارت مخرج کسر، می‌دانیم مشتق مخرج به‌صورت $\cos x - \sin x$ است اما اگر این عبارت را در صورت کسر قرار دهیم، باید طوری بنویسیم که مجموع در نهایت برابر $\sin x$ شود. لذا داریم:

$$\text{صورت کسر} = \sin x = \frac{1}{2}[\overbrace{(\cos x + \sin x)}^{\text{عبارت مخرج کسر}} - \overbrace{(\cos x - \sin x)}^{\text{مشتق مخرج کسر}}]$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}]dx = \frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \times dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx] = \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{6}} - [\mathrm{Ln}|\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}) - \mathrm{Ln}|\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}| + \mathrm{Ln}|\sin(0) + \cos(0)| = \frac{\pi}{12} - \mathrm{Ln}|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}| + \mathrm{Ln}1 = \mathbf{\frac{\pi}{12} - Ln|\frac{1+\sqrt{3}}{2}|}$$

روش دوم: اما یک راه‌حل ابتکاری و ساده‌تر برای محاسبه انتگرال داده شده به این شکل است. که انتگرال دیگری به‌صورت $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ را تعریف کرده و دو انتگرال $I + J$ و $J - I$ را حساب کنیم:

$$\begin{cases} I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + C_1 \\ J - I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \mathrm{Ln}|\sin x + \cos x| + C_2 \end{cases}$$

حالا برای رسیدن به I می‌توانیم طرفین روابط بالا را از هم کم کنیم:

$$(I+J) - (J-I) = x - \mathrm{Ln}|\sin x + \cos x| + C_1 - C_2 \Rightarrow 2I = x - \mathrm{Ln}|\sin x + \cos x| + C \Rightarrow \mathbf{I = \frac{1}{2}(x - Ln|\sin x - \cos x|) + C}$$

تله تستی: ممکن است برخی داوطلبان با توجه به انتگرال آشنای زیر با بی‌توجهی گزینه (۲) را در روز آزمون انتخاب کنند:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi}{4}$$

در واقع در این انتگرال گفته می‌شود؛ حاصل انتگرال با توجه به تابع تحت انتگرال برابر **نصف حد بالای انتگرال** است. اما دقت کنید، به این دلیل که $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ می‌شود، می‌توان از نکته فوق استفاده کرد و این در حالیست که $\cos x \neq \sin(\frac{\pi}{6} - x)$ و لذا انتخاب نصف حد بالای انتگرال در این سؤال غلط است.

۸ـ گزینه «۱» برای محاسبه $\int \sqrt{4 - x^2}dx$، از تغییر متغیر $x = 2\sin t$ استفاده می‌کنیم؛ و بنابراین $dx = 2\cos tdt$، در این صورت داریم:

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 tdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t)dt = [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}dx = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = [2t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\mathbf{I_2 - 2I_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}}$.

۹ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $u = -x^2$، $du = -2xdx$ استفاده می‌کنیم، در این صورت به ازای $x = 0$، $u = 0$ و به ازای $x = 1$، $u = -1$ حاصل می‌شود. با بکارگیری قاعده‌ی جزء به جزء (روش جدول) داریم:

علامت	مشتق	انتگرال
+	u^2	e^u
−	$2u$	e^u
+	2	e^u
	0	e^u

$$I = \int_0^1 \underbrace{x^4}_{(-x^2)^2}.xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^{-1} u^2e^udu = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 u^2e^udu = [\frac{1}{2}(u^2e^u - 2ue^u + 2e^u)]_{-1}^0$$

$$I = \frac{1}{2}[2 - (e^{-1} + 2e^{-1} + 2e^{-1})] = \mathbf{1 - \frac{5}{2}e^{-1}}$$

۱۰ـ گزینه «۳» با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء به شکل زیر داریم:

انتگرال	مشتق	علامت
$\sin x$	x^n	+
$-\cos x$	nx^{n-1}	−
$-\sin x$	$n(n-1)x^{n-2}$	+

$$I_n=[-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}n(n-1)x^{n-2}\sin x\,dx$$

$$=-(\frac{\pi}{2})^n\cos\frac{\pi}{2}+0+n(\frac{\pi}{2})^{n-1}(1)-0-n(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=n(\frac{\pi}{2})^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}$$

توضیح: چون سطر سوم در قاعده‌ی جزء به جزء جدولی، مضربی از سطر اول به‌دست آمد، در نتیجه همان جا متوقف می‌شویم و از حاصل ضرب دو ستون انتگرال می‌گیریم.

۱۱ـ گزینه «۲» برای محاسبه این انتگرال، فرض می‌کنیم $x=\operatorname{tg}\theta$ در نتیجه خواهیم داشت؛ $dx=(1+\operatorname{tg}^2\theta)d\theta=\sec^2\theta d\theta$، و برای حدود جدید نیز به ترتیب از $\operatorname{tg}\theta=0$، مقدار $\theta=0$ و از $\operatorname{tg}\theta=1$، مقدار $\theta=\frac{\pi}{4}$، حاصل می‌شود. به منظور آسان کردن انتگرال‌گیری از فرمول توان‌شکن $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\text{انتگرال}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^3}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^6\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta)^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)]^2d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{4}[\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\theta d\theta]$$

$$=\frac{1}{4}[\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\sin 4\theta+\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}[\frac{3}{2}(\frac{\pi}{4})+0+1]=\frac{1}{4}[\frac{3\pi}{8}+1]$$

۱۲ـ گزینه «۱» به راحتی واضح است؛ انتگرال I_1، هم‌ارز با $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ است که می‌دانیم انتگرالی واگراست، همچنین انتگرال I_2، هم‌ارز با $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3}dx$ است. که می‌دانیم انتگرالی همگراست. همین‌جا پاسخ به تست تمام است، اما اگر بخواهیم حاصل انتگرال‌ها را نیز به‌دست آوریم، می‌توانیم به شکل زیر ادامه دهیم. برای محاسبه انتگرال I_1، سعی می‌کنیم مشتق مخرج را در صورت بوجود آوریم، به این ترتیب حاصل انتگرال، برابر با $\ln$ مخرج می‌شود.

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{x}{2x^2+1}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{4x}{2x^2+1}dx=[\frac{1}{4}\operatorname{Ln}|2x^2+1|]_0^{\infty}=[\operatorname{Ln}\sqrt[4]{2x^2+1}]_0^{\infty}=\operatorname{Ln}\infty-\operatorname{Ln}1=\operatorname{Ln}\infty=\infty\Rightarrow\text{انتگرال } I_1 \text{ واگراست}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال I_2، سعی می‌کنیم **مشتق** «پایه‌ی عبارت توان‌دار» را بسازیم، مشتق پایه، برابر با $4x$ است، بنابراین داریم:

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}4x(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=[\frac{1}{4}\frac{(1+2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}]_0^{\infty}=[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}]_0^{\infty}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}\Rightarrow\text{انتگرال } I_2 \text{ همگراست}$$

۱۳ـ گزینه «۳» برای پاسخ به این سؤال بهتر است، هر چهار گزینه را بررسی کنیم:

بررسی گزینه (۱): نامساوی $\frac{e^x}{x+1}\geq\frac{1}{x+1}\geq 0$ را در نظر می‌گیریم، بنابر آزمون مقایسه، چون $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+1}$ واگراست در نتیجه $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{x+1}dx$ نیز واگراست.

بررسی گزینه (۲): بازه تحت انتگرال را به ۲ قسمت $(0,\frac{\pi}{2})$ و $(-\frac{\pi}{2},0)$ تقسیم‌بندی می‌کنیم، سپس بر اساس نامساوی $\sin x<x$ $(x<0)$ داریم؛ $\frac{1}{x}>\frac{1}{\sin x}$ و چون $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}dx$ واگراست، بنابر آزمون مقایسه $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$ نیز واگراست.

بررسی گزینه (۳): این انتگرال بیانگر تابع گاما می‌باشد، در نتیجه همگراست. با فرض $t=x^3$، در نتیجه $dt=3x^2dx$ داریم:

$$\int_0^{\infty}e^{-x^3}(x^3)^p(3x^2)dx=3\int_0^{\infty}e^{-x^3}x^{3p+2}dx\xrightarrow{p=-\frac{2}{3}}3\int_0^{\infty}e^{-x^3}dx=\Gamma(\frac{1}{3})\Rightarrow\int_0^{\infty}e^{-x^3}dx=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

بررسی گزینه (۴): می‌دانیم $1-\cos\sqrt{x}=2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$، و چون $2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\sim 2(\frac{\sqrt{x}}{2})^2$، بنابراین با استفاده از آزمون هم‌ارزی در $x=0$، هر دو انتگرال $\int\frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ و $\int\frac{2}{x}dx$، از نظر وضع همگرایی یکسان هستند. بنابراین چون $\int\frac{2}{x}dx$ واگراست، پس $\int\frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ نیز واگرا می‌شود.

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری، ضابطه‌ی $x(t)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt}=x(1-\frac{x}{10}) \Rightarrow \frac{dx}{x(1-\frac{x}{10})}=dt \Rightarrow \frac{10\,dx}{x(10-x)}=dt \xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} (\frac{1}{x}+\frac{1}{10-x})dx=dt \Rightarrow \int(\frac{1}{x}+\frac{1}{10-x})dx=\int dt$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}x-\mathrm{Ln}(10-x)=t+c \Rightarrow \mathrm{Ln}\frac{x}{10-x}=t+c \Rightarrow \frac{x}{10-x}=e^{t+c}$$

به ازای $t=0$ داریم $x=2$. با جایگذاری در معادله‌ی به دست آمده داریم: $\frac{2}{10-2}=e^c$، پس $e^c=\frac{1}{4}$. در نتیجه:

$$\frac{x}{10-x}=\frac{e^t}{4} \Rightarrow 4x=10e^t-xe^t \Rightarrow x(4+e^t)=10e^t \Rightarrow x=\frac{10e^t}{e^t+4}$$

با مشتق‌گیری از x داریم:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{40e^t}{(e^t+4)^2}>0$$

پس x همواره رشد می‌کند. در ضمن $\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}\frac{10e^t}{e^t+4}=10$، پس x به مقدار معینی میل می‌کند. تا اینجا می‌دانیم که (الف) برقرار است و (ب) نادرست است. برای بررسی گزاره‌های (ج) و (د) باید از نرخ رشد یعنی از $\frac{dx}{dt}$ مشتق بگیریم:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{40e^t(e^t+4)^2-2e^t(e^t+4)\times 40e^t}{(e^t+4)^4}=\frac{40e^t(e^t+4)-2e^t\times 40e^t}{(e^t+4)^3} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{40e^t(4-e^t)}{(e^t+4)^3}$$

$40e^t$ و $(e^t+4)^3$ همواره مثبت هستند، اما عامل $4-e^t$ برای مقادیر کوچک t (به بیان دقیق‌تر برای $t<\mathrm{Ln}4$) مقدار مثبت دارد؛ اما برای مقادیر بزرگ t، منفی می‌شود. پس نرخ رشد در ابتدا صعودی است، اما پس از مدتی نزولی می‌شود. بنابراین (د) هم صحیح است.

۱۵ـ گزینه «۲» در این سؤال در اصل به دنبال محاسبه‌ی انتگرال $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$ هستیم. اما تا آخرین مرحله انتگرال را از ۱ تا t در نظر می‌گیریم و در پایان $t=\infty$ قرار می‌دهیم. برای یافتن حاصل آن باید از روش تفکیک کسرها به‌صورت مقابل استفاده کنیم.

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$$

برای به‌دست آوردن B، دو طرف را در x ضرب کرده و سپس با میل دادن x به سمت بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{1+x^2})=A+\lim_{x\to+\infty}\frac{Bx^2+Cx}{x^2+1} \Rightarrow 0=A+B \xrightarrow{A=1} B=-1$$

حالا که مقادیر A و B، حساب شد، می‌توانیم با قرار دادن مقداری دلخواه برای x، (مثلاً $x=1$) C را نیز حساب کنیم:

$$\frac{1}{1(1+1^2)}=\frac{1}{1}+\frac{(-1)(1)+C}{1+1^2} \Rightarrow \frac{1}{2}=1+\frac{C-1}{2} \Rightarrow \frac{C-1}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow C-1=-1 \Rightarrow C=0$$

بنابراین انتگرال به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_1^t\frac{dx}{x+x^3}=\int_1^t\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int_1^t\frac{A}{x}dx+\int_1^t\frac{Bx+C}{x^2+1}dx=\int_1^t\frac{dx}{x}-\int_1^t\frac{x}{x^2+1}dx=[\mathrm{Ln}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^t=[\mathrm{Ln}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}]_1^\infty$$

$$I=\mathrm{Ln}1-\mathrm{Ln}\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=0-\mathrm{Ln}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\mathrm{Ln}2^{-\frac{1}{2}}=+\mathbf{Ln}\sqrt{\mathbf{2}}$$

۱۶ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\sin 2x=2\sin x\cos x$، بنابراین داریم:

$$3+\sin 2x=3+2\sin x\cos x=4-1+2\sin x\cos x=4-(1-2\sin x\cos x)=4-(\sin x-\cos x)^2$$

اگر فرض کنیم $\sin x-\cos x=u$، آن‌گاه $(\cos x+\sin x)dx=du$ و لذا داریم:

$$\int\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=\int\frac{du}{4-u^2}=\frac{1}{2\times 2}\mathrm{Ln}|\frac{u+2}{u-2}|=\frac{1}{2\times 2}\mathrm{Ln}|\frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x-2}|$$

بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{4}[\mathrm{Ln}|\frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x-2}|]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}[\mathrm{Ln}1-\mathrm{Ln}\frac{1}{3}]=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}(\frac{1}{3})^{-1}=\frac{1}{4}\mathrm{Ln}3 \Rightarrow b=3\,,\,a=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=\mathbf{12}$$

۱۷ـ گزینه «۲» ابتدا لازم است از طرفین مشتق بگیریم، از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$F'(x)=1\times e^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

نقاط بحرانی تابع ± 1 است که یکی از آن‌ها ماکزیمم و دیگری مینیمم تابع است. برای فهمیدن این که کدام ماکزیمم و کدام مینیمم است؟ لازم است یکبار دیگر از $F'(x)$ مشتق بگیریم:

$$F''(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)-2x(e^{-\frac{x^2}{2}})=(-3x+x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}&F''(-1)=[-3\times(-1)+(-1)^3]e^{-\frac{(-1)^2}{2}}=2e^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}>0 \Rightarrow \text{نقطه مینیمم است}\ ,\ x_2=-1\\ &F''(1)=[-3\times 1+(1)^3]e^{-\frac{1^2}{2}}=-2e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{e}}<0 \Rightarrow \text{نقطه ماکزیمم است}\ ,\ x_1=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1-x_2=1-(-1)=2$$

۱۸ـ گزینه «۴» برای حل این تست، بهتر است ابتدا از تغییر متغیر استفاده کنیم و سپس از قاعده‌ی جزء به جزء حاصل انتگرال را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases}u=\mathrm{Ln}x \Rightarrow x=e^u \Rightarrow dx=e^u du\\ x=1 \Rightarrow u=\mathrm{Ln}1=0\ ,\ x=e \Rightarrow u=\mathrm{Ln}e=1\end{cases}$$

علامت	مشتق	انتگرال
$\oplus$	u^3	e^u
$\ominus$	$3u^2$	e^u
$\oplus$	$6u$	e^u
$\ominus$	6	e^u
	0	e^u

$$I=\int_0^1 u^3e^u du \xrightarrow{\text{با استفاده از جدول}}$$

$$I=[u^3e^u-3u^2e^u+6ue^u-6e^u]_0^1$$

$$I=1\times e^1-3\times 1\times e^1+6\times 1\times e^1-6\times e^1+6=\mathbf{6-2e}$$

۱۹ـ گزینه «۳» واضح است باید از فرمول مشتق از انتگرال استفاده کنیم:

$$g'(x)=(2\sin x\cos x)\mathrm{Arc}\sin(\sqrt{\sin^2 x})-(2\sin x\cos x)\mathrm{Arc}\cos(\sqrt{\cos^2 x})=(2\sin x\cos x)x-(2\sin x\cos x)x=0$$

چون $g'(x)=0$، بنابراین $g(x)=c$ و برای به‌دست آوردن c، باید به جای x، یک عدد مناسب قرار دهیم. اگر $x=\frac{\pi}{4}$، قرار دهیم، آن‌گاه حد بالای دو انتگرال یکی می‌شود (هر دو برابر با $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ می‌شود) و می‌توانیم دو انتگرال را با هم جمع کنیم:

$$g(\frac{\pi}{4})=\int_0^{\sin^2(\frac{\pi}{4})}\mathrm{Arc}\sin\sqrt{t}dt+\int_0^{\cos^2(\frac{\pi}{4})}\mathrm{Arc}\cos\sqrt{t}dt$$

$$\Rightarrow g(\frac{\pi}{4})=\int_0^{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\underbrace{(\mathrm{Arc}\sin\sqrt{t}+\mathrm{Arc}\cos\sqrt{t})}_{\frac{\pi}{2}}dt \Rightarrow g(\frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})dt=[\frac{\pi}{2}t]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

چون $g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$، شده لذا $c=\frac{\pi}{4}$ و بنابراین $\mathbf{g(x)=\frac{\pi}{4}}$ خواهد بود.

۲۰ـ گزینه «۳» برای حل این سؤال می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

(اگر از تغییر متغیر $\pi-x=u$، استفاده کنیم، به این نتیجه به راحتی می‌رسید) برای حل انتگرال به‌دست آمده، می‌توانیم از تغییر متغیر $\mathrm{tg}x=u$ استفاده کنیم و داریم:

$$\mathrm{tg}x=u \Rightarrow (1+\mathrm{tg}^2x)dx=du \Rightarrow (1+u^2)dx=du$$

$$\mathrm{tg}^2x=u^2 \Rightarrow 1+\mathrm{tg}^2x=1+u^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=1+u^2 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{1+u^2} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}\ ,\ x=0 \Rightarrow u=\mathrm{tg}(0)=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ u=\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$$

$$I=2\int_0^{\infty}\frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+\frac{u^2}{1+u^2}}=2\int_0^{\infty}\frac{du}{1+2u^2}=\int_0^{\infty}\frac{du}{\frac{1}{2}+u^2}=\sqrt{2}[\mathrm{Arctg}\frac{u}{\frac{1}{\sqrt{2}}}]_0^{\infty}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۲۱ـ گزینه «۲» به راحتی واضح است؛ باید از قاعده‌ی «جزء به جزء» استفاده کنیم:

$$u=Ln(\frac{۱-x}{۱+x})\Rightarrow du=(-\frac{۱}{۱-x}-\frac{۱}{۱+x})dx=\frac{-۲dx}{۱-x^۲}$$

$$dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^۲}{۲}$$

$$\int xLn(\frac{۱-x}{۱+x})dx=\frac{x^۲}{۲}Ln(\frac{۱-x}{۱+x})-\int(\frac{x^۲}{۲})(\frac{-۲}{۱-x^۲})dx=\frac{x^۲}{۲}Ln(\frac{۱-x}{۱+x})+\int\frac{x^۲}{۱-x^۲}dx=\frac{x^۲}{۲}Ln(\frac{۱-x}{۱+x})-x-\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱-x}{۱+x})+c$$

$$=Ln(\frac{۱-x}{۱+x})(\frac{x^۲}{۲}-\frac{۱}{۲})-x+c=(\frac{x^۲-۱}{۲})Ln(\frac{۱-x}{۱+x})-x+c$$

۲۲ـ گزینه «۳» هدف به‌دست آوردن انتگرال $\int_۱^x\frac{e^t}{t+a}dt$ با استفاده از $F(x)$ است. از تغییر متغیر $t+a=u$ و در نتیجه $dt=du$ داریم:

$$I=\int_۱^x\frac{e^t}{t+a}dt\xrightarrow[dt=du]{t+a=u}I=\int_{۱+a}^{x+a}\frac{e^{u-a}}{u}du=e^{-a}\int_{۱+a}^{x+a}\frac{e^u}{u}du\qquad(۱)$$

در صورت سؤال داریم: $F(x)=\int_۱^x\frac{e^t}{t}dt$ با توجه به (۱) و رابطه‌ی $(\int_{۱+a}^{x+a}=\int_۱^{x+a}-\int_۱^{۱+a})$ می‌توانیم بنویسیم:

$$I=e^{-a}\int_{۱+a}^{x+a}\frac{e^u}{u}du=e^{-a}\int_۱^{x+a}\frac{e^u}{u}du-e^{-a}\int_۱^{۱+a}\frac{e^u}{u}du$$

با توجه به ضابطه‌ی $F(x)$ داریم: $F(x+a)=\int_۱^{x+a}\frac{e^t}{t}dt$ و در نتیجه به ازای $x=۱$ داریم:

$$F(۱+a)=\int_۱^{۱+a}\frac{e^t}{t}dt$$

با در نظر گرفتن موارد بالا می‌توان گفت:

$$I=e^{-a}\int_۱^{x+a}\frac{e^u}{u}du-e^{-a}\int_۱^{۱+a}\frac{e^u}{u}du=e^{-a}F(x+a)-e^{-a}F(۱+a)=\mathbf{e^{-a}[F(x+a)-F(۱+a)]}$$

۲۳ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از روش جزء به جزء انتگرال I را محاسبه می‌کنیم:

علامت	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x	$f''(۲x)$
$\ominus$	۱	$\frac{۱}{۲}f'(۲x)$
$\oplus$	۰	$\frac{۱}{۴}f(۲x)$

$$I=[\frac{x}{۲}f'(۲x)]_۰^۱-[\frac{۱}{۴}f(۲x)]_۰^۱+۰=\frac{۱}{۲}[f'(۲)-۰]-\frac{۱}{۴}[f(۲)-f(۰)]=\frac{۱}{۲}f'(۲)-\frac{۱}{۴}[f(۲)-f(۰)]$$

با توجه به شرط $f'(۲)=۵$ ، $f(۲)=۳$ ، $f(۰)=۱$، بنابراین داریم:

$$I=\frac{۱}{۲}(۵)-\frac{۱}{۴}(۳-۱)=\frac{۵}{۲}-\frac{۲}{۴}=\mathbf{۲}$$

۲۴ـ گزینه «۳» ظاهر انتگرال ما را به یاد استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال می‌اندازد! پس از طرفین تساوی برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d}{dx}\int_۰^{x^۲(۱+x)}f(t)dt=۱\Rightarrow[۲x(۱+x)+x^۲]f(x^۲(۱+x))=۱$$

حال برای به‌دست آوردن $f(۲)$ باید عددی را قرار دهیم که $x^۲(۱+x)$ را برابر ۲ کند، به راحتی با قرار دادن $x=۱$ به این خواسته می‌رسیم:

$$[۲\times۱(۱+۱)+۱^۲]f[۱(۱+۱)]=۱\Rightarrow ۵f(۲)=۱\Rightarrow\mathbf{f(۲)=\frac{۱}{۵}}$$

۲۵ـ گزینه «۳» با توجه به‌صورت سوال ابتدا $f'(x)$ و $g'(x)$ را تشکیل داده، سپس به سراغ حد می‌رویم:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_۰^x e^{۲t}(۳t^۲+۱)^{\frac{۱}{۲}}dt\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از انتگرال}}f'(x)=۱\times e^{۲x}(۳x^۲+۱)^{\frac{۱}{۲}}\ ,\ g'(x)=kx^{k-۱}e^{۲x}+۲x^ke^{۲x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{۲x}\sqrt{۳x^۲+۱}}{kx^{k-۱}e^{۲x}+۲x^ke^{۲x}}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{۲x}\sqrt{۳}x}{۲x^ke^{۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳}}{۲x^{k-۱}}$$

حال سه حالت متفاوت برای $k-۱$ می‌توان در نظر گرفت:

۱) اگر $k-۱>۰$، آن‌گاه $k>۱$ در این حالت حاصل کسر صفر می‌شود، که طبق فرض حاصل حد ناصفر است، پس این حالت قابل قبول نیست.

۲) اگر $k-۱=۰$، آن‌گاه $k=۱$ و در این حالت حاصل کسر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۳) اگر $k-۱<۰$، آن‌گاه $k<۱$ و در این حالت حاصل کسر ∞ می‌شود و چون طبق فرض حاصل حد مقداری متناهی است، پس این حالت قابل قبول نیست.

۲۶ـ گزینه «۲» ابتدا I را به فرم مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int_{0}^{1}\frac{(x+1-1)e^{x}}{(1+x)^{2}}dx=\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{1+x}dx-\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{(1+x)^{2}}dx$$

برای محاسبه‌ی انتگرال اول از قاعده‌ی «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم: با فرض $u=\frac{1}{1+x}$ که نتیجه می‌دهد؛ $du=\frac{-dx}{(1+x)^{2}}$ و فرض $dv=e^{x}dx$ که نتیجه می‌دهد $v=e^{x}$، داریم:

$$I=\frac{e^{x}}{1+x}\bigg|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{(1+x)^{2}}dx-\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{(1+x)^{2}}dx=\frac{e}{2}-1$$

روش جالب‌تر: نکته: گفتیم همواره حاصل $\int e^{x}[f(x)+f'(x)]dx$، همواره برابر با $e^{x}f(x)$ است. در این سؤال داریم:

$$\int_{0}^{1}e^{x}[\frac{x}{(1+x)^{2}}]dx=\int_{0}^{1}e^{x}[\frac{x+1-1}{(1+x)^{2}}]dx=\int_{0}^{1}e^{x}[(\frac{1}{1+x})-\frac{1}{(1+x)^{2}}]dx$$

اگر فرض کنیم $f(x)=\frac{1}{1+x}$، آن‌گاه $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^{2}}$ و لذا حاصل این انتگرال برابر با $e^{x}f(x)$ و به عبارت دیگر برابر با $e^{x}(\frac{1}{1+x})$ است:

$$I=[e^{x}(\frac{1}{1+x})]_{0}^{1}=e^{1}(\frac{1}{1+1})-e^{0}(\frac{1}{1+0})=\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$$

۲۷ـ گزینه «۱» اگر از تغییر متغیر $u=\cos x$، استفاده کنیم، آن‌گاه $-\sin x dx=du$، بنابراین داریم:

$$I=\int_{1}^{0}\frac{-udu}{u^{2}+3u+2}=\int_{0}^{1}\frac{udu}{u^{2}+3u+2}=\int_{0}^{1}(\frac{2}{u+2}-\frac{1}{u+1})du=2[\mathrm{Ln}|u+2|]_{0}^{1}-[\mathrm{Ln}|u+1|]_{0}^{1}=2\mathrm{Ln}3-2\mathrm{Ln}2-\mathrm{Ln}2+\mathrm{Ln}1$$

$$\Rightarrow I=2\mathrm{Ln}3-3\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}9-\mathrm{Ln}8=\mathrm{Ln}\frac{9}{8}$$

۲۸ـ گزینه «۴» همان‌طور که می‌بینید e^{x} در عبارتی بی‌ربط به خودش ضرب شده و احتمال استفاده از فرمول گفته شده در متن کتاب هست!

$$I=\int e^{x}[\frac{1-x^{2}+1}{(1-x)\sqrt{1-x^{2}}}]dx=\int e^{x}[\underbrace{\boxed{\frac{1+x}{\sqrt{1-x^{2}}}}}_{f(x)}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^{2}}}}}_{f'(x)}]dx=e^{x}(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^{2}}})+C\xrightarrow{I(0)=1}e^{0}(\frac{1+0}{\sqrt{1-0}})+C=1\Rightarrow C=0$$

پس داریم:

$$I(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}(\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}})=\sqrt{e}(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})=\sqrt{e}(\frac{3}{\sqrt{3}})=\sqrt{3e}$$

۲۹ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی انتگرال داده شده با استفاده از قاعده‌ی «جزء به جزء» به راحتی داریم:

$$x=u\Rightarrow dx=du\ ,\ f''(x)dx=dv\Rightarrow v=f'(x)$$

$$I=[xf'(x)]_{b}^{a}-\int_{b}^{a}f'(x)dx=[xf'(x)]_{b}^{a}-[f(x)]_{b}^{a}=af'(a)-bf'(b)-f(a)+f(b)$$

اینجاست که باید از دو جمله‌ی اول سؤال استفاده کنیم. وقتی در دو نقطه‌ی $x=a$ و $x=b$، تابع f دارای اکسترمم است، یعنی این که یا $f'(b)=f'(a)=0$ است و یا $f'(a)$ و $f'(b)$ وجود ندارند. و چون در سؤال گفته شده؛ $f''(x)$ پیوسته است، بنابراین $f'(x)$ هم پیوسته و در نتیجه $f'(a)$ و $f'(b)$ وجود دارند و مقدارشان صفر است. پس حاصل انتگرال برابر با $f(b)-f(a)$ می‌شود.

۳۰ـ گزینه «۱» در این سؤال، ابتدا عبارت درون رادیکال را به فرم $ax^{2}+bx+c$ می‌نویسیم:

$$(2-x)(x-1)=-x^{2}+3x-2\Rightarrow a=-1\ ,\ b=3$$

بنابراین تغییر متغیر مناسب $u=x+\frac{3}{2(-1)}$ می‌باشد که از آنجا $x=u+\frac{3}{2}$ می‌شود، لذا داریم:

$$-x^{2}+3x-2=-(x-\frac{3}{2})^{2}+\frac{1}{4}=-u^{2}+\frac{1}{4}$$

$$I=\int(\frac{u+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-u^{2}}})du=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{4}-u^{2}}}du+\frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}-u^{2}}}$$

انتگرال اول تابعی فرد است و چون بازه‌ی انتگرال‌گیری هم متقارن است، پس حاصل آن صفر می‌شود. از طرفی حاصل انتگرال دوم برابر با $\mathrm{Arcsin}(\frac{u}{\frac{1}{2}})$ و یا به عبارت دیگر $\mathrm{Arcsin}\,2u$ می‌باشد، پس داریم:

$$I=\frac{3}{2}\times[2\mathrm{Arcsin}\,2u]_{0}^{\frac{1}{2}}=3\mathrm{Arcsin}\,1=\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}$$

۳۱ـ گزینه «۲» واضح است انتگرال در بازه‌ی $[۰,۱]$، فقط یک ناسرگی در نقطه‌ی $x=۰$ دارد. پس برای تابع تحت انتگرال هم‌ارزی در $x=۰$ را می‌نویسیم، اما یک مشکل وجود و آن x^p است. بنابراین باید برای p سه حالت زیر را در نظر بگیریم.

حالت اول: فرض می‌کنیم $p<۱$ باشد: در این صورت هم‌ارزی مقابل را داریم:
$$x^p-\sin x\sim x^p \Rightarrow I=\int_۰^۱\frac{۱}{x^p}dx$$
و می‌دانیم این انتگرال به ازای $p<۱$ همگراست.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $p=۱$ باشد در این حالت داریم:
$$x^p-\sin x=x^۱-\sin x\sim\frac{x^۳}{۶}$$
پس انتگرال به‌صورت $I=\int_۰^۱\frac{۱}{\frac{۱}{۶}x^۳}dx$ نوشته می‌شود، که واضح است با توجه به وجود $x^۳$ در مخرج کسر، انتگرال واگراست.

حالت سوم: فرض می‌کنیم $p>۱$ باشد: در این حالت هم‌ارزی زیر را داریم:
$$x^p-\sin x\sim-\sin x\sim -x \Rightarrow I=\int\frac{۱}{-x}dx \Rightarrow \text{انتگرال واگراست}$$

۳۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم وقتی که $\sqrt{۳}<x<+\infty$، آن‌گاه $\frac{\pi}{۳}<\text{Arctg}x<\frac{\pi}{۲}$ و چون $\frac{\pi}{۳}$ عددی بزرگتر از یک و $\frac{\pi}{۲}$ عددی کوچکتر از ۲ می‌باشد، بنابراین داریم:
$$\lfloor\text{Arctg}x\rfloor=\lfloor\text{عددی بزرگتر از یک و کوچکتر از ۲}\rfloor=۱$$
بنابراین انتگرال با ظاهری جدید و زیباتر به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:
$$I=\int_{\sqrt{۳}}^{۳\sqrt{۳}}(۱)dx=[x]_{\sqrt{۳}}^{۳\sqrt{۳}}=۳\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

۳۳ـ گزینه «۳» بر طبق نکته‌ی گفته شده در متن کتاب رابطه‌ی مقابل را داریم:
$$\int_۰^{+\infty}e^{-ax}(\frac{\sin kx}{x})dx=tg^{-۱}(\frac{k}{a})$$
بنابراین داریم:
$$I=\int_۰^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\cos ec(kx)}dx=\int_۰^{+\infty}e^{-ax}(\frac{\sin kx}{x})dx-\int_۰^{+\infty}e^{-bx}(\frac{\sin kx}{x})dx=tg^{-۱}\frac{k}{a}-tg^{-۱}(\frac{k}{b})$$

۳۴ـ گزینه «۴» واضح است باید از تابع مشتق بگیریم:
$$f'(x)=(-\frac{۱}{x^۲})[\frac{۱}{(۱+\frac{۱}{x^۲})(۱+\frac{۱}{x^n})}]-(۱)\times\frac{۱}{(۱+x^۲)(۱+x^n)}=-\frac{۱}{x^۲}[\frac{۱}{(\frac{x^۲+۱}{x^۲})(\frac{۱+x^n}{x^n})}]-\frac{۱}{(۱+x^۲)(۱+x^n)}$$
$$=-\frac{x^n}{(x^۲+۱)(۱+x^n)}-\frac{۱}{(۱+x^۲)(۱+x^n)}=\frac{-(۱+x^n)}{(۱+x^۲)(۱+x^n)}=-\frac{۱}{۱+x^۲}$$
با توجه به این که $f'(x)=-\frac{۱}{۱+x^۲}$ به راحتی با انتگرال‌گیری از طرفین به ضابطه‌ی $f(x)$ می‌رسیم:
$$f(x)=-\int\frac{dx}{۱+x^۲}=-\text{Arctg}x+c$$
برای پیدا کردن ثابت c، می‌توانیم به جای x در تساوی صورت سؤال عدد ۱ قرار دهیم، (عدد ۱ به خاطر صفر شدن حاصل انتگرال و راحتی محاسبات انتخاب شد) در این صورت داریم:
$$f(۱)=\int_۱^۱\frac{dt}{(۱+t^۲)(۱+t^n)}=۰\Rightarrow f(۱)=-\text{Arctg}۱+c\Rightarrow ۰=-\frac{\pi}{۴}+c\Rightarrow c=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow f(x)=-\text{Arctg}x+\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow f(\sqrt{۳})=-\text{Arctg}\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۴}=-\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=-\frac{\pi}{۱۲}$$

۳۵ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید، انتگرال در بی‌نهایت و $x=۲$ ناسرگی دارد، بنابراین انتگرال را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم که هر کدام شامل یک ناسرگی است:
$$\int_۲^\infty\frac{dx}{(x^۴-۱۶)^p}=\int_۲^۳\frac{dx}{(x^۴-۱۶)^p}+\int_۳^\infty\frac{dx}{(x^۴-۱۶)^p}=I_۱+I_۲$$
انتگرال $I_۱$ در $x=۲$ ناسره است و در همسایگی این نقطه تابع زیر انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:
$$\frac{۱}{(x^۴-۱۶)^p}=\frac{۱}{[(x-۲)(x+۲)(x^۲+۴)]^p}\sim\frac{۱}{(x-۲)^p(x+۲)^p(x^۲+۴)^p}<\frac{۱}{(x-۲)^p}$$
چون انتگرال $\int_۲^۳\frac{۱}{(x-۲)^p}$، به ازای $p<۱$ همگراست، لذا انتگرال $I_۱$ نیز به ازای $p<۱$ همگراست (طبق آزمون مقایسه چون انتگرال بزرگتر همگراست، بنابراین انتگرال کوچکتر هم همگراست.)

حالا سراغ انتگرال $I_۲$ می‌رویم، در بی‌نهایت می‌توان عبارت $(x^۴-۱۶)^p$ را هم‌ارز با $(x^۴)^p$ در نظر گرفت، لذا داریم:
$$I_۲=\int_۳^\infty\frac{dx}{(x^۴-۱۶)^p}\sim\int_۳^\infty\frac{dx}{x^{۴p}}$$

می‌دانیم این انتگرال به ازای $۴p > ۱$ و به عبارت دیگر به ازای $p > \frac{۱}{۴}$ همگرا می‌شود، با توجه به محدودیت همگرایی انتگرال $I_۱$، شرط همگرایی دو انتگرال $I_۱$ و $I_۲$ با هم و به عبارت دیگر شرایط همگرایی I به‌صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۴} < p < ۱$$

۳۶ـ گزینه «۲» می‌دانیم انتگرال‌هایی به فرم $\int_{۰}^{\pi} xf(\sin x)dx$ را می‌توان برابر با $\frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi} f(\sin x)\,dx$ دانست، لذا از دست x با این نکته خلاص می‌شویم!

$$I = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}\left(\frac{۱}{۱+\sin x}\right)dx \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } ۱-\sin x \text{ ضرب می‌کنیم}} I = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}\frac{(۱-\sin x)}{۱-\sin^۲ x}dx = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\pi}\left[\frac{۱}{\cos^۲ x} - \frac{\sin x}{\cos^۲ x}\right]dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{۲}\left[\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{\cos^۲ x} + \int_{۰}^{\pi}(-\sin x)(\cos x)^{-۲}dx\right] = \frac{\pi}{۲}\left[tgx - (\cos x)^{-۱}\right]_{۰}^{\pi} = \frac{\pi}{۲}\left[\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{۱}{\cos x}\right]_{۰}^{\pi} = \frac{\pi}{۲}[۱+۱] = \pi$$

۳۷ـ گزینه «۳» مشتق عبارت زیر رادیکال، $۲x-۸$ است، اما در صورت کسر $۲x-۳$ داریم، بنابراین می‌توانیم صورت کسر را به‌صورت $(۲x-۸)+۵$ بنویسیم و انتگرال را به دو قسمت تفکیک کنیم:

$$I = \int\left(\frac{(۲x-۸)+۵}{\sqrt{x^۲-۸x+۱۲}}\right)dx = \int\frac{(۲x-۸)}{\sqrt{x^۲-۸x+۱۲}}dx + \int\frac{۵}{\sqrt{x^۲-۸x+۱۲}}dx = \int(۲x-۸)(x^۲-۸x+۱۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx + ۵\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۸x+۱۲}}$$

$$= ۲(x^۲-۸x+۱۲)^{\frac{۱}{۲}} + ۵\int\frac{dx}{\sqrt{(x-۴)^۲-۴}} = \mathbf{۲\sqrt{x^۲-۸x+۱۲} + ۵Ln\,|\,x-۴+\sqrt{(x-۴)^۲-۲^۲}\,| + c}$$

۳۸ـ گزینه «۳»

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin xdx}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin xdx}{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲}\underbrace{\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin xdx}{\sin x+\cos x}}_{I}$$

از طرفی می‌دانیم برای هر $n \in N$:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx = \frac{\pi}{۴}$$

لذا $I = \frac{\pi}{۴}$ و در نتیجه حاصل انتگرال خواسته شده برابر با $\frac{\pi}{۴}\sqrt{۲}$ است.

۳۹ـ گزینه «۲» اگر عبارت مخرج را به فرم $۲+\sin ۲x = ۱+(\sin x+\cos x)^۲$ بنویسیم، داریم:

$$I = \int\frac{\cos x-\sin x}{۱+(\sin x+\cos x)^۲}dx \Rightarrow (\sin x+\cos x) = u \Rightarrow (\cos x-\sin x)\,dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int\frac{du}{۱+u^۲} = Arc\,tgu + c = Arc\,tg(\sin x+\cos x) + c$$

۴۰ـ گزینه «۱» با توجه به ویژگی تابع Ln می‌توانیم توان را از آن خارج و به پشت Ln منتقل کنیم:

$$I = \int_{۰}^{۱} x^۳ \times ۴Ln\left(\frac{۱}{x}\right)dx$$

حالا با استفاده از تغییر متغیر $Ln\frac{۱}{x} = t$ داریم:

$$Ln\frac{۱}{x} = t \Rightarrow \frac{۱}{x} = e^t \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}dt$$

$$x \to ۰^+ \Rightarrow t \to \infty\ ,\ x = ۱ \Rightarrow t = ۰$$

$$I = \int_{\infty}^{۰} ۴e^{-۳t} \times t \times (-e^{-t})dt \Rightarrow I = -۴\int_{\infty}^{۰} te^{-۴t}dt = ۴\int_{۰}^{\infty} te^{-۴t}dt$$

با استفاده از رابطه‌ی $\int_{۰}^{\infty} t^n e^{-st}dt = \frac{\Gamma(n+۱)}{s^{n+۱}}$ داریم: (در اینجا $n = ۱$)

$$I = \frac{۴\Gamma(۲)}{(۴)^۲} = \frac{۴\times\Gamma(۱+۱)}{۱۶} = \frac{۴\times ۱!}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

۴۱ـ گزینه «۳» ابتدا با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$ خواهیم داشت: $x=\frac{1}{t}$ پس $dx=-\frac{dt}{t^2}$. در ضمن وقتی $x\to+\infty$ داریم $t\to 0$ و وقتی $x\to 0^+$ داریم $t\to+\infty$.

$$I=\int_0^\infty e^{-(\frac{1}{x^2}+x^2)}dx=-\int_\infty^0 e^{-(t^2+\frac{1}{t^2})}\frac{dt}{t^2}=\int_0^\infty \frac{1}{t^2}e^{-(t^2+\frac{1}{t^2})}dt$$

دقت کنید که در تساوی آخر با جابه‌جا کردن حدود انتگرال، حاصل آن قرینه شده است. از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$t^2+\frac{1}{t^2}=(t-\frac{1}{t})^2+2$$

پس $I=\int_0^\infty \frac{1}{t^2}e^{-[(t-\frac{1}{t})^2+2]}dt$ و اکنون با تغییر متغیر $u=t-\frac{1}{t}$ داریم: $(1+\frac{1}{t^2})dt=du$ در ضمن وقتی $t\to 0^+$ داریم: $u\to-\infty$ و وقتی $t\to+\infty$ داریم: $u\to+\infty$. برای آن‌که du را ایجاد کنیم کنار $\frac{1}{t^2}$ یک واحد کم و زیاد می‌کنیم:

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{t^2}e^{-(t-\frac{1}{t})^2-2}dt=\int_0^\infty (1+\frac{1}{t^2}-1)e^{-(t-\frac{1}{t})^2-2}dt=\int_0^\infty (1+\frac{1}{t^2})e^{-(t-\frac{1}{t})^2-2}dt-\int_0^\infty e^{-(t-\frac{1}{t})^2-2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-2}du-\int_0^\infty e^{-(t^2+\frac{1}{t^2})}dt$$

از انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-2}du$ ثابت e^{-2} را خارج کرده و از زوج بودن تابع زیر انتگرال هم استفاده می‌کنیم:

$$I=2e^{-2}\int_0^\infty e^{-u^2}du-I\Rightarrow I=2e^{-2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}-I\Rightarrow 2I=e^{-2}\sqrt{\pi}\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$$

۴۲ـ گزینه «۱» فرض کنید $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ باشد. در این صورت داریم $F'(x)=f(x)$ و $F''(x)=f'(x)$. حالا می‌خواهیم نمودارهای $F(x)$، $f(x)$ و $f'(x)$ را از بین نمودارهای a، b و c شناسایی کنیم. برای شروع دقت کنید که $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ است؛ پس نمودار $F(x)$ باید از مبدأ مختصات عبور کرده باشد. پس یکی از نمودارهای a یا b خواهد بود.

اگر نمودار $F(x)$ همان (b) باشد، این نمودار در ابتدا حالت صعودی دارد، بنابراین مشتق آن باید مثبت باشد؛ یعنی در ابتدای نمودار باید $F'(x)>0$ باشد در نتیجه در ابتدای نمودار، $f(x)>0$ است. اما نمودارهای a و c هر دو در ابتدا منفی هستند؛ چون زیر محور xها قرار دارند، پس اگر نمودار $F(x)$، همان (b) باشد، نمودار مشتق آن یعنی $f(x)$ نمی‌تواند هیچ‌کدام از منحنی‌های (a) و (c) باشد. از این‌جا متوجه می‌شویم که (b) نشان‌دهنده‌ی $F(x)$ نیست.

پس تا اینجا نتیجه گرفتیم که نمودار $F(x)$ باید منحنیِ (a) باشد. به ابتدای این نمودار یعنی نقاط نزدیک به مبدأ توجه کنید. این منحنی در ابتدا، نزولی است بنابراین مشتق آن باید منفی باشد. اما جهت تقعر منحنی (a) رو به بالاست، پس مشتق دوم آن باید مثبت باشد. در نتیجه با بررسی منحنی (a) در نقاط نزدیک به مبدأ می‌بینیم که باید داشته باشیم:

$$F'(x)<0\ ,\ F''(x)>0\Rightarrow f(x)<0\ ,\ f'(x)>0$$

پس منحنی (c) نشان‌دهنده‌ی $f(x)$ و منحنی (b) نشان‌دهنده‌ی $f'(x)$ است.

۴۳ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^5}<\frac{x}{x^5+1}<\frac{x+1}{(x+1)^5+1}<\frac{1}{(x+1)^4}$، بنابراین داریم:

$$n^3\int_n^{2n}\frac{dx}{(x+1)^4}<n^3\int_n^{2n}\frac{xdx}{x^5+1}<n^3\frac{dx}{x^4}$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_n^{2n}\frac{dx}{x^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3}{3}\times\frac{1}{x^3}\Big|_n^{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3}{3}(\frac{1}{8n^3}-\frac{1}{n^3})=\frac{7}{24}$$

به طور مشابه حد سمت چپ نیز برابر $\frac{7}{24}$ است، طبق قضیه ساندویچ حد موردنظر نیز $\frac{7}{24}$ است، طبق قضیه ساندویچ حد موردنظر نیز $\frac{7}{24}$ است.

۴۴ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $\sqrt[4]{x}=7$ یا $x=u^4$، آنگاه $dx=4u^3du$. لذا داریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}=\int\frac{4u^3du}{u^2(1+u)^3}=4\int\frac{udu}{(1+u)^3}=4\int\left[\frac{(u+1)-1}{(1+u)^3}\right]du=4\int\frac{du}{(1+u)^2}-4\int\frac{du}{(1+u)^3}=\frac{4(1+u)^{-1}}{-1}-\frac{4(1+u)^{-2}}{-2}+c$$

$$\Rightarrow I=\left[-\frac{4}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{2}{(\sqrt[4]{x}+1)^2}\right]_1^{16}=-\frac{4}{\sqrt[4]{16}+1}+\frac{2}{(\sqrt[4]{16}+1)^2}+\frac{4}{\sqrt[4]{1}+1}-\frac{2}{(\sqrt[4]{1}+1)^2}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{2}-\frac{2}{4}=\frac{-12+2}{9}+\frac{3}{2}=-\frac{10}{9}+\frac{3}{2}=\frac{-20+27}{18}=\frac{7}{18}$$

۴۵ـ گزینه «۲» با ضرب صورت و مخرج در «مزدوج مخرج» داریم:

$$I=\int_0^1\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)}dx=\int_0^1(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x})dx$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $1-x^2=u^2$ استفاده می‌کنیم، پس $-2xdx=2udu$ و یا $xdx=-udu$. لذا داریم:

$$\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}(xdx)=\int\frac{1-u}{1-u^2}(-udu)=-\int\frac{u}{1+u}du=-\int(1-\frac{1}{1+u})du=-u+Ln|1+u|+c$$

$$\Rightarrow I=\left[-\sqrt{1-x^2}+Ln(1+\sqrt{1-x^2})\right]_0^1=1-Ln2$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۴» با توجه به آن که ضابطه‌ی x را برحسب y داریم و حدود y نیز در این شکل مشخص هستند، از فرمول $V=2\pi\int_a^b|y-k|g(y)\,dy$ استفاده می‌کنیم. که در آن $k=1$ و $g(y)=12(y^2-y^3)$ داده شده است. چون در این ناحیه $0\le y\le 1$ است، بنابراین $|y-1|=1-y$ خواهد بود.

$$V=2\pi\int_0^1|y-1|g(y)\,dy=2\pi\int_0^1(1-y)\times 12(y^2-y^3)\,dx=24\pi\int_0^1(y^2-2y^3+y^4)\,dy=24\pi\left[\frac{y^3}{3}-\frac{2}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5\right]_0^1=24\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=4\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

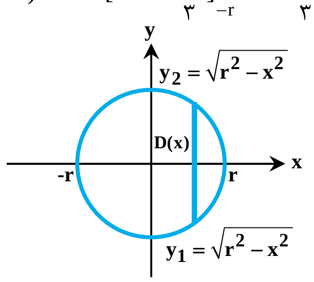
۲ـ گزینه «۴» دایره‌ای به شعاع r و مرکز مبدأ در نظر می‌گیریم. معادلات نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی به‌صورت $y_2=\sqrt{r^2-x^2}$ و $y_1=-\sqrt{r^2-x^2}$ هستند

بنابراین فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر است: $D(x)=y_2-y_1=2\sqrt{r^2-x^2}$

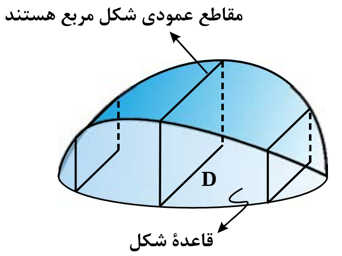
سطح مقطع شکل، مربع‌هایی با ضلع $D(x)$ هستند بنابراین مساحت آن‌ها برابر است با: $S(x)=D^2(x)=4(r^2-x^2)$

همچنین حدود x به شکل $-r\le x\le r$ می‌باشد، پس داریم:

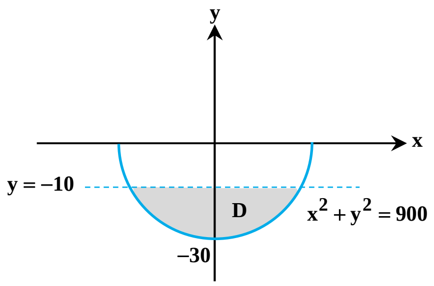
$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_{-r}^{r}4(r^2-x^2)\,dx=4\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=16\frac{r^3}{3}$$



قاعده شکل در صفحه x-y



۳ـ گزینه «۳»



روش اول: مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به شعاع $30\,cm$ را در نظر می‌گیریم که خط افقی $y=-10$ از آن عبور کرده است. می‌دانید که از دوران این نیم‌دایره حول محور y ها یک نیم‌کره به شعاع $30\,cm$ به‌دست می‌آید. اگر حجم حاصل از دورانِ ناحیه‌ی D (ناحیه‌ی بین نیم‌دایره و خط $y=-10$) حول محور y ها را حساب کنیم، حجم آبی که در این نیم‌کره جمع شده است را حساب کرده‌ایم. البته ناحیه‌ی D نسبت به محور y ها تقارن دارد، (زیرا در معادله‌ی $x^2+y^2=900$ تبدیل x به $-x$ تغییری ایجاد نمی‌کند.) بنابراین فقط نیمه‌ی سمت راستِ ناحیه‌ی D را حول محور y ها دوران می‌دهیم و نیازی به دو برابر کردن حجم به‌دست آمده هم نداریم.

حالا به یک نکته دقت کنید؛ در این مثال کران‌های y به سادگی مشخص شده‌اند. همان‌طور که می‌بینید حدود y به‌صورت $-30\le y\le -10$ است. به همین خاطر تصمیم می‌گیریم از انتگرال dy استفاده کنیم: $V=\pi\int_a^b f^2(y)\,dy$

خط $y=-10$ کران بالای انتگرال را مشخص می‌کند و از معادله‌ی دایره داریم: $x=f(y)=\sqrt{900-y^2}$. با قرار دادن در فرمول خواهیم داشت:

$$V=\pi\int_{-30}^{-10}(900-y^2)\,dy=\pi\left[900y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-30}^{-10}=\pi\left[-9000+\frac{1000}{3}+27000-\frac{27000}{3}\right]=\frac{28000}{3}\pi$$

روش دوم: فرض کنید بخواهیم همین مسأله را با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای حل کنیم. از معادله‌ی $x^2+y^2=900$، تابع $y=f(x)=-\sqrt{900-x^2}$ را به‌دست می‌آوریم. آیا می‌دانید چرا علامت منفی را پشت رادیکال قرار داده‌ایم؟ چون ناحیه موردنظر ما بخشی از نیم‌دایره‌ی پایینی است و در آن $y\le 0$ است.

ناحیه‌ی موردنظر بین خط $y_2=-10$ و منحنی $y_1=-\sqrt{900-x^2}$ قرار دارد و حول محور y ها دوران می‌کند.

$$V=2\pi\int_a^b x\,|y_2-y_1|\,dx=2\pi\int_a^b x\left(-10+\sqrt{900-x^2}\right)dx$$

حالا باید حدود x را مشخص کنیم. اما پیش از آن دقت کنید که معادله‌ی $f(x)=-\sqrt{900-x^2}$ با تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کند، پس ناحیه‌ی موردنظر نسبت به محور y تقارن دارد. به همین خاطر فقط نیمه‌ی سمت راست آن را حول محور دوران می‌دهیم و نیازی به دو برابر کردن جواب هم نداریم.

با این توضیح مشخص می‌شود که $x\ge 0$ است. کران بالای x هم از برخورد خط $y=-10$ با منحنی $y=-\sqrt{900-x^2}$ به‌دست می‌آید.

$$y=-\sqrt{900-x^2}=-10\Rightarrow 900-x^2=100\Rightarrow x=\sqrt{800}=10\sqrt{8}$$

پس $0\le x\le 10\sqrt{8}$ است.

$$V=2\pi\int_0^{10\sqrt{8}}x\left(-10+\sqrt{900-x^2}\right)dx=2\pi\left[-5x^2-\frac{1}{3}(900-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{10\sqrt{8}}=2\pi\left[-4000-\frac{1000}{3}+\frac{27000}{3}\right]=28000\frac{\pi}{3}$$

۴ـ گزینه «۲» منحنی $y=۴-x^۲$ در نقاط $x=\pm۲$ با محور xها برخورد می‌کند. با توجه به شرط $x\ge ۰$ که در صورت سؤال داریم، حدود x به‌صورت $۰\le x\le ۲$ خواهد بود.

$$\bar{x}=\frac{\int xydx}{\int ydx}=\frac{\int_۰^۲ x(۴-x^۲)dx}{\int_۰^۲(۴-x^۲)dx}=\frac{۴}{\frac{۱۶}{۳}}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

۵ـ گزینه «۳» طول قوس منحنی $y=f(x)$ از رابطهٔ $L=\int_a^b\sqrt{۱+(f'(x))^۲}dx$ به‌دست می‌آید.

$$۹y^۲=۴(x^۲+۱)^۳ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}(x^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow y'=۲x(x^۲+۱)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow L=\int_۰^۳\sqrt{۱+y'^۲}dx=\int_۰^۳\sqrt{۱+۴x^۲(x^۲+۱)}dx$$

$$\Rightarrow L=\int_۰^۳\sqrt{(۲x^۲+۱)^۲}dx=\int_۰^۳(۲x^۲+۱)dx=(\frac{۲}{۳}x^۳+x)\Big|_۰^۳=۲۱$$

۶ـ گزینه «۴» توجه کنید که حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_۱=f_۱(x)$ و $y_۲=f_۲(x)$ و دو خط $x=a$ و $x=b$ حول خط $x=k$ برابر است با:

$$V=۲\pi\int_a^b|x-k||f_۱(x)-f_۲(x)|dx$$

در این فرمول $x=a$ و $x=b$ هر دو باید در یک طرفِ محور دوران قرار داشته باشند. در این مثال محور دوران خط $x=۲$ است و حدود x به‌صورت $۰\le x\le ۲$ بـه‌دست می‌آیند زیرا از برخورد $y=x^۲$ و $y=۲x$ خواهیم داشت $x^۲=۲x$ و از اینجا دو مقدار $x=۰$ و $x=۲$ به‌دست می‌آیند.

$$V=۲\pi\int_۰^۲|x-۲|(۲x-x^۲)dx=۲\pi\int_۰^۲(۲-x)(۲x-x^۲)dx=۲\pi\int_۰^۲(۴x-۲x^۲-۲x^۲+x^۳)dx$$

$$\Rightarrow V=۲\pi(۲x^۲-\frac{۴}{۳}x^۳+\frac{x^۴}{۴})\Big|_۰^۲=\frac{۸\pi}{۳}$$

۷ـ گزینه «۱» در اولین جمله داریم $۱+\frac{۱}{n}=\frac{n+۱}{n}$، در دومین جمله $۱+\frac{۲}{n}=\frac{n+۲}{n}$ است و در جملهٔ آخر $۱+\frac{n}{n}=\frac{n+n}{n}=\frac{۲n}{n}$ است. پس می‌توانیم حد مجموع داده شده را به این شکل بنویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(\frac{۱}{\sqrt{۴-(۱+\frac{۱}{n})^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۴-(۱+\frac{۲}{n})^۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۴-(۱+\frac{n}{n})^۲}})=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n\frac{۱}{\sqrt{۴-(۱+\frac{i}{n})^۲}}$$

$$=\int_۰^۱\frac{۱}{\sqrt{۴-(۱+x)^۲}}dx=[\arcsin(\frac{۱+x}{۲})]_۰^۱=\arcsin(۱)-\arcsin(\frac{۱}{۲})=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

۸ـ گزینه «۴» طبق رابطه مقابل تست را حل می‌کنیم:

$$S=۲\pi\int_۰^۴ x\sqrt{۱+f'^۲(x)}\,dx$$

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{x}-\frac{۱}{۴\sqrt{x}}\Rightarrow f'^۲(x)=x+\frac{۱}{۱۶x}-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱+f'^۲(x)=x+\frac{۱}{۱۶x}+\frac{۱}{۲}=(\sqrt{x}+\frac{۱}{۴\sqrt{x}})^۲$$

$$\Rightarrow S=۲\pi\int_۰^۴ x(\sqrt{x}+\frac{۱}{۴\sqrt{x}})dx=۲\pi(\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+\frac{۱}{۶}x^{\frac{۳}{۲}})\Big|_۰^۴=۲\pi(\frac{۶۴}{۵}+\frac{۸}{۶})=۲\pi(\frac{۳۸۴+۴۰}{۳۰})=\frac{۴۲۴\pi}{۱۵}$$

۹ـ گزینه «۳» می‌دانیم اگر $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$، آن‌گاه طول قوس منحنی از $t_۱$ تا $t_۲$ از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$L=\int_{t_۱}^{t_۲}\sqrt{(x'_t)^۲+(y'_t)^۲}dt$$

بنابراین برای این سؤال داریم:

$$L=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{[(۲t)\sin t+(\cos t)t^۲]^۲+[(۲t)\cos t+(-\sin t)t^۲]^۲}dt=\int_۰^{۲\pi}\sqrt{t^۲(۲\sin t+t\cos t)^۲+t^۲(۲\cos t-t\sin t)^۲}dt$$

$$\Rightarrow L=\int_۰^{۲\pi}t\sqrt{۴\sin^۲t+t^۲\cos^۲t+۴t\sin t\cos t+۴\cos^۲t+t^۲\sin^۲t-۴t\sin t\cos t}\,dt$$

$$\int_۰^{۲\pi}t\sqrt{\underbrace{۴\sin^۲t+۴\cos^۲t}_{۴}+t^۲\underbrace{(\cos^۲t+\sin^۲t)}_{۱}}dt=\int_۰^{۲\pi}t\sqrt{۴+t^۲}\,dt$$

حالا با یک انتگرال ساده روبه‌رو هستیم که با تغییر متغیر داریم:

$$u=۴+t^۲\Rightarrow du=۲tdt\ ,\ \begin{cases}t=۰\Rightarrow u=۴\\t=۲\pi\Rightarrow u=۴+۴\pi^۲\end{cases}$$

$$L=\int_۴^{۴+۴\pi^۲}\frac{۱}{۲}\sqrt{u}du=\frac{۱}{۲}[\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}]_۴^{۴+۴\pi^۲}=\frac{۱}{۳}(۴+۴\pi^۲)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۳}(۴)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۸}{۳}\sqrt{(۱+\pi^۲)^۳}-\frac{۸}{۳}$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا حد موردنظر را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\mathrm{Ln}\left(1+\frac{2i}{n}\right)$$

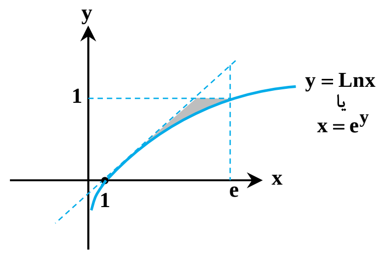
پشت سری $\frac{1}{n}$ را داریم و عبارت داخل آن برحسب $\frac{i}{n}$ است پس واضح است که برای محاسبه حد از فرمول حد مجموع باید استفاده کنیم. با قرار دادن x به جای $\frac{i}{n}$ به تابع $f(x)=2\mathrm{Ln}(1+2x)$ می‌رسیم.

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\mathrm{Ln}\left(1+2\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)=\int_0^1 2\mathrm{Ln}(1+2x)dx\xlongequal{u=2x,\ du=2dx}\int_0^2\mathrm{Ln}(1+u)du=\left[(1+u)\mathrm{Ln}(1+u)-u\right]_0^2=3\mathrm{Ln}3-2$$

۱۱ـ گزینه «۴» برای یافتن مساحت ناحیه موردنظر باید حاصل $\int_0^\pi ydx$ را به‌دست آوریم:

$$\int_0^\pi\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos\frac{x}{2}dx=2\int_0^\pi\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{x}{2}dx=\left[2\frac{\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^3}{3}\right]_0^\pi=\frac{2}{3}\left[\left(2+\sin\frac{\pi}{2}\right)^3-(2+\sin 0)^3\right]=\frac{2}{3}\left[3^3-2^3\right]=\frac{38}{3}$$

۱۲ـ گزینه «۲» مساحت موردنظر، همان مساحت سطح ناحیه‌ی هاشورخورده در شکل زیر است:



ابتدا معادله‌ی خط مماس را در $x=1$ به‌دست می‌آوریم. به ازای $x=1$ مقدار $y=0$ حاصل می‌شود و شیب خط مماس $y'=\frac{1}{x}|_{x=1}=1$ است. پس معادله خط مماس $y=x-1$ است. با توجه به نوع ناحیه بهتر است x را برحسب y به‌دست آورد. یعنی مساحت محدود مابین خط $x=y+1$ و منحنی $x=e^y$ را در فاصله $0\le y\le 1$ پیدا کنیم. در این صورت داریم:

$$S=\int_0^1\left(e^y-(y+1)\right)dy=\left(e^y-\frac{y^2}{2}-y\right)\Big|_0^1=e-\frac{5}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۱» ناحیه‌ی سمت راستِ خط $x=1$، یعنی ناحیه‌ای که در آن $1\le x<\infty$ است. بنابراین حدود انتگرال مشخص شده‌اند. از طرفی ناحیه‌ی داده شده بین خط $y_1=0$ و منحنی $y_2=\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x+2}$ قرار دارد.

$$\text{مساحت}=\int_1^\infty\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx=2\int_1^\infty\frac{2dx}{2x+1}-2\int_1^\infty\frac{dx}{x+2}=\left[2\mathrm{Ln}|2x+1|-2\mathrm{Ln}|x+2|\right]_1^\infty=\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2\right]_1^\infty=\mathrm{Ln}4-\mathrm{Ln}1=\mathrm{Ln}4$$

۱۴ـ گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم.

$$\mathrm{Ln}^2x=\mathrm{Ln}x\Rightarrow\mathrm{Ln}^2x-\mathrm{Ln}x=\mathrm{Ln}x(\mathrm{Ln}x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Ln}x=0\Rightarrow x=1\\ \mathrm{Ln}x=1\Rightarrow x=e\end{cases}$$

بنابراین حدود انتگرال به‌صورت $1\le x\le e$ هستند.

$$S=\int_1^e(\mathrm{Ln}x-\mathrm{Ln}^2x)dx$$

از تغییر متغیر $t=\mathrm{Ln}x$ استفاده می‌کنیم بنابراین $x=e^t$ و $dx=e^tdt$. داریم $1\le x\le e$ پس $0\le t\le 1$:

$$S=\int_0^1(t-t^2)e^tdt$$

از روش جدول استفاده می‌کنیم:

$t-t^2$	e^t
$1-2t$	e^t
-2	e^t
0	e^t

$$\Rightarrow S=\left[(t-t^2)e^t-(1-2t)e^t-2e^t\right]_0^1=(0+e-2e-0+1+2)=3-e$$

دقت کنید که $3-e>0$ است، اگر جواب به‌دست آمده منفی می‌شد، باید قدرمطلق آن را به عنوان جواب می‌پذیرفتیم.

۱۵ـ گزینه «۲» خط $y=0$ تنها مجانب تابع داده شده است.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}xe^{\frac{-x^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\xlongequal{\text{قانون رشد}}0\Rightarrow y=0\ \text{مجانب افقی}$$

بنابراین مساحت ناحیه‌ی بین $y=0$ و $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ را می‌خواهیم که برابر است با:

$$S=2\int_0^\infty\left(xe^{\frac{-x^2}{2}}-0\right)dx=-2e^{\frac{-x^2}{2}}\Big|_0^\infty=2$$

۱۶ــ گزینه «۴» برای محاسبه طول قوس از فرمول $\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$ استفاده می‌کنیم.

$$y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt \Rightarrow y'=\sqrt{\cos x} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

برای محاسبه‌ی حدود انتگرال I، باید منحنی y را با محور x برخورد دهیم: $y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt=0$

بدیهی است که یکی از جواب‌ها $x=-\frac{\pi}{2}$ باشد. همچنین چون $\cos t$ زیر رادیکال است و باید مثبت باشد، x حداکثر می‌تواند $\frac{\pi}{2}$ باشد. $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

بنابراین طول قوس برابر است با:

$$l=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$$

۱۷ــ گزینه «۴» واضح است که محل تلاقی دو منحنی $x=0$ و $x=1$ می‌باشد. حجم حاصل از دوران را به کمک فرمول $\pi\int(y_2^2-y_1^2)\,dx$ محاسبه می‌کنیم.

$$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}$$

۱۸ــ گزینه «۱» منحنی مورد نظر نسبت به محور xها تقارن دارد. از آنجا که $y^2=\frac{x(x-3)}{x-4}$، لازم است $\frac{x(x-3)}{x-4}\ge 0$ باشد. برای محاسبه‌ی حدود انتگرال، منحنی را با محور x برخورد می‌دهیم:

$$y^2=\frac{x(x-3)}{x-4}=0$$

پس منحنی بین دو خط $x=0$ و $x=3$ و محور xها محصور است و از آن‌جا $x=3$ و $x=0$ کسر $\frac{x(x-3)}{x-4}$ به ازای $0\le x\le 3$ مثبت می‌شود پس این ناحیه قابل قبول هم هست.

$$V=\pi\int_0^3 y^2dx=\pi\int_0^3\frac{x(x-3)}{x-4}dx=\pi\int_0^3\frac{x^2-3x}{x-4}dx=\pi\int_0^3(x+1+\frac{4}{x-4})dx=\pi(\frac{x^2}{2}+x+4\text{Ln}\,|x-4|)\Big|_0^3$$

$$=\pi(\frac{15}{2}-4\text{Ln}4)=\frac{\pi}{2}(15-16\text{Ln}2)$$

توضیح: برای محاسبه‌ی انتگرالِ $\int\frac{x^3-3x}{x-4}dx$ چون درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر است باید صورت را بر مخرج تقسیم کنیم. برای این‌کار می‌توانیم از تقسیم چند جمله‌ای‌ها استفاده کنیم یا آن‌که با اضافه و کم کردن یک عدد ثابت و استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک، در صورت کسر $(x-4)$ را ایجاد کنیم. در این سؤال به این صورت عمل کرده‌ایم:

$$\frac{x^3-3x}{x-4}=\frac{x^3-3x-4+4}{x-4}=\frac{(x+1)(x-4)+4}{x-4}=(x+1)+\frac{4}{x-4}$$

۱۹ــ گزینه «۴» ابتدا نقاط برخورد این منحنی با محور xها $(y=0)$ را تعیین می‌کنیم.

$$y=\frac{t}{3}(t^2-3)\xrightarrow{\text{تلاقی با محور xها}}\frac{t(t^2-3)}{3}=0\Rightarrow t=0,\ t=\pm\sqrt{3}$$

بنابراین طول قوس مورد نظر در دو بازه‌ی $-\sqrt{3}\le t\le 0$ و $0\le t\le\sqrt{3}$ قرار دارد. با محاسبه‌ی المانِ طول قوس خواهیم داشت:

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\sqrt{(2t)^2+(t^2-1)^2}\,dt=\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt=(t^2+1)dt$$

از آنجا که t^2+1 تابعی زوج است، مقدار انتگرال آن در بازه‌های $-\sqrt{3}\le t\le 0$ و $0\le t\le\sqrt{3}$ یکسان خواهد بود. می‌توانیم حاصل انتگرال را در بازه‌ی $0\le t\le\sqrt{3}$ محاسبه کرده و دو برابر کنیم:

$$L=2\int_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)dt=2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^{\sqrt{3}}=2\left[\sqrt{3}+\sqrt{3}\right]=4\sqrt{3}$$

۲۰ــ گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم. $x^2+\frac{3}{2}x=1\Rightarrow 2x^2+3x-2=0\Rightarrow x=-2,\frac{1}{2}$

البته از معادله‌ی $y^2=\frac{3}{2}x$ معلوم است که باید $x\ge 0$ باشد، پس $0\le x\le\frac{1}{2}$ قابل قبول است. بنابراین حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V=\pi(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)dx)=\pi((\frac{3}{4}x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1})=\pi(\frac{3}{16}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24})=\pi(\frac{9+48-16-24+2}{48})=\frac{19\pi}{48}$$

۲۱ـ گزینه «۳» در این حد جمله‌ی $\sin\frac{i\pi}{n^2}$ به کار رفته است و $1\le i\le n-1$ است. بنابراین حتی وقتی که $i=n-1$ باشد باز هم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i\pi}{n^2}=0$ می‌شود به همین خاطر می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin x\simeq x$ استفاده کنیم. پس از استفاده از این هم‌ارزی، $\frac{1}{n}$ را از کروشه خارج می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})\frac{(n-1)\pi}{n^2}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{n}+(1+\frac{2}{n})\frac{2\pi}{n}+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})\frac{(n-1)\pi}{n}]$$

در واقع جمله‌ی عمومی داخل کروشه به‌صورت $(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n}$ است. پس داریم:

$$f(\frac{i}{n})=(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n}\Rightarrow f(x)=(1+x)\pi x$$

$$\text{جواب حد}=\int_0^1 f(x)dx=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\pi[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{5\pi}{6}$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$x'=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\Rightarrow x'=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\ ,\ x'^2=\frac{16t^2}{(1+t^2)^4}$$

$$y'=\frac{2(1+t^2)-2t(2t)}{(1+t^2)^2}\xrightarrow{\text{پس از ساده‌سازی}}y'=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\ ,\ y'^2=\frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4}$$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{\frac{4(t^4+2t^2+1)}{(1+t^2)^4}}=\sqrt{\frac{4(t^2+1)^2}{(1+t^2)^4}}=\frac{2}{1+t^2}$$

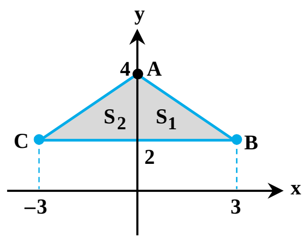
$$\text{طول منحنی}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=2\,\text{Arc}\,\text{tg}\,t\Big|_{-\infty}^{+\infty}=2[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=2\pi$$

۲۳ـ گزینه «۳» ابتدا فرمول حجم را نوشته و سپس با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء و به کمک جدول داریم:

$$\text{حجم}=2\pi\int_0^1 x\cosh x\,dx=2\pi[x\sinh x-\cosh x]_0^1=2\pi[\frac{e^1-e^{-1}}{2}-\frac{e^1+e^{-1}}{2}+1]=2\pi[-\frac{1}{e}+1]$$

علامت	مشتق	انتگرال
⊕	x	$\cos hx$
⊖	1	$\sin hx$
⊕	0	$\cos hx$

۲۴ـ گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



روش اول: معادله‌ی پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:

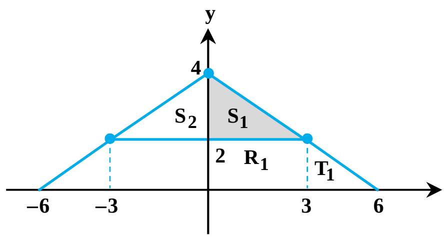
$$y-4=\frac{2-4}{3-0}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+4$$

فرض کنیم S_1 ناحیه‌ی محدود شده به محور yها و خط AB و خط $y=2$ باشد. چنانچه حجم حاصل از دوران S_1 حول محور xها را v_1 بنامیم. به علت تقارن موجود در شکل واضح است که $V=2v_1$ جواب است.

$$v_1=\pi\int_0^3[(-\frac{2}{3}x+4)^2-(2)^2]dx=\pi\int_0^3(\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{3}x+12)dx=\pi(\frac{4}{9}\frac{x^3}{3}-\frac{16}{3}\frac{x^2}{2}+12x)\Big|_0^3=16\pi$$

بنابراین $V=32\pi$ جواب است.

روش دوم: استفاده از فرمول‌های هندسی حجم:



وقتی معادله خط AB به‌صورت $y=-\frac{2}{3}x+4$ به‌دست آمد، محل برخورد آن با محور xها را مشخص می‌کنیم.

$$-\frac{2}{3}x+4=0\Rightarrow x=6$$

حجمی که از دوران کل ناحیه‌ی $S_1\cup R_1\cup T_1$ حول محور xها به‌دست می‌آید، مخروطی است با ارتفاع ۶ و شعاع ۴ حجم آن $\frac{1}{3}\pi r^2h=32\pi$ است. از دوران R_1 حول محور x استوانه‌ای به ارتفاع ۳ و شعاع ۲ به‌دست می‌آید. حجم آن $\pi r^2h=12\pi$ است. از دوران T_1 نیز مخروطی به ارتفاع ۳ و شعاع ۲ به‌دست می‌آید که حجم آن $\frac{1}{3}\pi r^2h=4\pi$ است. اکنون حجم حاصل از دوران S_1 به این شکل به‌دست می‌آید:

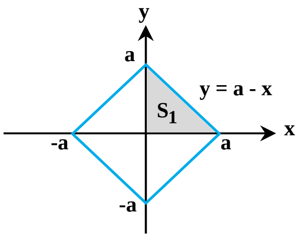
$$V_1=32\pi-12\pi-4\pi=16\pi$$

پس حجم ناحیه‌ی موردنظر $V=2V_1=32\pi$ است.

روش سوم: محور دوران یعنی محور x ها ناحیه‌ی درون مثلث ABC را قطع نکرده است، پس می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم. مختصات مرکز ثقل مثلث برابر است با میانگین مختصات رئوس آن: $(\bar{x},\bar{y})=\frac{A+B+C}{3}=\frac{1}{3}(0+3-3,4+2+2)=(0,\frac{8}{3})$

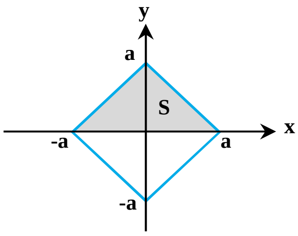
فاصله آن تا محور x ها برابر است با $d=\frac{8}{3}$. مساحت این مثلث نیز برابر است با $S=\frac{1}{2}\times2\times6=6$. طبق فرمول پاپوس داریم: $V=2\pi d\times S=(2\pi)(\frac{8}{3})(6)=32\pi$

۲۵ـ گزینه «۴»



روش اول: شکل منحنی $|x|+|y|=a$ به‌صورت روبرو می‌باشد. این ناحیه نسبت به محور x ها متقارن است. کافیست حجم حاصل از دوران نیمه‌ی بالایی را حساب کنیم و نیازی به ۲ برابر کردن هم نیست. پس می‌توانیم حجم حاصل از دوران S_1 را حساب کرده و دو برابر کنیم:

$$\Rightarrow V=2\pi\int_0^a(a-x)^2dx=2\pi\int_0^a(a^2+x^2-2ax)dx=2\pi(a^2x+\frac{x^3}{3}-ax^2)\Big|_0^a=\frac{2\pi a^3}{3}$$



روش دوم: ناحیه‌ی داده شده نسبت به محور دوران تقارن دارد. بنابراین کافیست حجم حاصل از دوران نیمه‌ی بالایی آن (S) را حول محور x ها محاسبه کنیم. محور دوران ناحیه‌ی S را قطع نمی‌کند و می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم:

مختصات مرکز ثقل = میانگین مختصات رئوس $=\frac{1}{3}(a+0-a,0+a+0)=(0,\frac{a}{3})$

پس فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور دوران $d=\frac{a}{3}$ است. مساحت S هم به راحتی محاسبه می‌شود $S=\frac{1}{2}(a)(2a)=a^2$.

در نتیجه داریم: $V=2\pi d\times S=(2\pi)(\frac{a}{3})(a^2)=\frac{2\pi a^3}{3}$

۲۶ـ گزینه «۳» صورت و مخرج کسر جلوی سری را بر n تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{(n+\frac{i^2}{n})}\xrightarrow{\text{در مخرج از n فاکتور می‌گیریم}}\text{حاصل حد}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\Big[\frac{1+\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\Big]\Rightarrow f(\frac{i}{n})=\frac{1+\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$$

حالا به راحتی می‌توان گفت حد فوق برابر با انتگرال $I=\int_0^1(\frac{1+x}{1+x^2})dx$ است و برای محاسبه‌ی آن باید آن را به دو انتگرال مجزا تفکیک کنیم:

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=[tg^{-1}x]_0^1+\frac{1}{2}[Ln(1+x^2)]_0^1=tg^{-1}(1)-tg^{-1}(0)+\frac{1}{2}[Ln2-Ln1]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}Ln2$$

۲۷ـ گزینه «۲» در این حد مجموع جمله‌ی $\sin(\frac{ia}{n^2})$ آمده است. می‌دانیم که n ≥ i ≥ 1 است، حتی وقتی که $i=n$ باشد، داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{ia}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n^2}=0$.

پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin(\frac{ia}{n^2})\simeq\frac{ia}{n^2}$ استفاده کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{ia}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{ia}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{ia}{n}\xrightarrow{f(\frac{i}{n})=\frac{ia}{n}}f(x)=ax\Rightarrow\text{جواب حد}=\int_0^1axdx=a\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{a}{2}$$

توجه: این مثال را با استفاده از فرمول $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ هم می‌توان حل کرد:

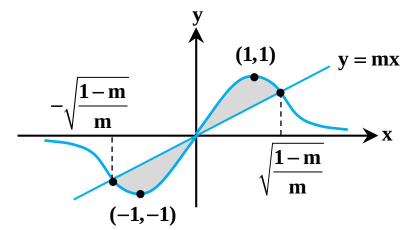
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{ia}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{ia}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{an(n+1)}{2n^2}=\frac{a}{2}$$

۲۸ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $\sin x\sim x$ (وقتی که $x\to0$) داریم: $\sin\frac{\pi}{n+k}\sim\frac{\pi}{n+k}\ ,\ n\to\infty\ ,\ \frac{\pi}{n+k}\to0\ ,\ k=0,1,\dots,n$

در نتیجه خواهیم داشت: $\lim_{n\to\infty}[\sin(\frac{\pi}{n+1})+\sin(\frac{\pi}{n+2})+\dots+\sin(\frac{\pi}{2n})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{n+2}+\dots+\frac{\pi}{2n}]$

حالا از n در مخرج فاکتور می‌گیریم تا $\frac{1}{n}$ را پشت کروشه ایجاد کنیم: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{\pi}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\pi}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\pi}{1+\frac{n}{n}}]$

واضح است که $f(\frac{i}{n})=\frac{\pi}{1+\frac{i}{n}}$ پس $f(x)=\frac{\pi}{1+x}$ و داریم: $\text{جواب حد}=\int_0^1\frac{\pi}{1+x}dx=\pi Ln(1+x)\Big|_0^1=\pi Ln2$



۲۹ــ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از نقاط اکسترمم تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ و با توجه به این که مجانب آن خط $y=0$ می‌باشد، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم و داریم:

$$y'=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1$$

پس تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ دارای دو نقطه‌ی اکسترمم در $(1,1)$ و $(-1,-1)$ است. مطابق شکل می‌خواهیم خط $y=mx$ با تابع داده شده در سه نقطه برخورد کند. از برخورد آنها با یکدیگر داریم:

$$\frac{x}{x^2+1}=mx \Rightarrow mx^3+mx-x=0 \Rightarrow x(mx^2+m-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\frac{1-m}{m}} \xrightarrow{\text{باید}} \frac{1-m}{m}>0 \Rightarrow 0<m<1 \end{cases}$$

به دلیل این‌که $y=mx$ و $y=\frac{x}{1+x^2}$ هر دو فرد هستند ناحیه‌ی به دست آمده نسبت به مبدأ تقارن دارد. پس مساحت واقع در ربع اول (از $x=0$ تا $x=\sqrt{\frac{1-m}{m}}$) را به دست می‌آوریم و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

$$S_1=\int_0^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}}\left(\frac{x}{x^2+1}-mx\right)dx=\left[\frac{1}{2}Ln(x^2+1)-\frac{mx^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}}=\frac{1}{2}\left(Ln\left(\frac{1-m}{m}+1\right)-Ln1\right)-\frac{1-m}{2}$$

$$\Rightarrow S_1=\frac{1}{2}Ln\frac{1}{m}-\frac{1-m}{2}=\frac{1}{2}(-Lnm+m-1) \Rightarrow S_{\text{کل}}=2S_1=2\times\frac{1}{2}(-Lnm+m-1)=-Lnm+m-1$$

۳۰ــ گزینه «۱» چون با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله تغییر نمی‌کند، پس منحنی نسبت به محور xها و محور yها متقارن است. بنابراین مساحت شکل را در ربع اول محاسبه و حاصل را چهار برابر می‌کنیم. منحنی در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ محور xها را قطع می‌کند. بنابراین داریم:

$$y^2=x^2-x^4 \Rightarrow y=x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow S=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{-4}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۳» طبق فرمول طول قوس برای تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $0\le x\le 1$ داریم:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

از طرفی از نامساوی $\sqrt{1+a^2}\le 1+|a|$ که برای هر عدد حقیقی a برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt{1+f'^2}\le 1+|f'|$ است. بنابراین داریم:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+f'^2}\,dx\le\int_0^1(1+|f'|)\,dx$$

برای انتگرال‌گیری از $|f'|$ باید ریشه‌های معادله‌ی $f'=0$ را بررسی کنیم. لازم است به دو مورد توجه کنیم. اولاً چون $f(0)=f(1)=0$ است، طبق قضیه‌ی رُل حتماً یک $0<c<1$ وجود دارد که $f'(c)=0$ باشد. پس معادله‌ی $f'=0$ لااقل یک جواب مانند c دارد. ثانیاً طبق فرض، $f''(x)\le 0$ است. از آنجا که $f''(x)$ مشتقِ $f'(x)$ است، نتیجه می‌گیریم که $f'(x)$ تابعی نزولی است. اکنون می‌توانیم علامت f' را در هر بازه تعیین کنیم. نمودار f' نزولی است و در نقطه‌ی $x=c$ مقدارش صفر است پس برای $0\le x\le c$ داریم: $f'\ge 0$ و برای $c\le x\le 1$ داریم $f'\le 0$.

$$L\le\int_0^1(1+|f'|)\,dx=\int_0^1 dx+\int_0^c f'\,dx+\int_c^1 -f'\,dx=[x]_0^1+[f(x)]_0^c-[f(x)]_c^1=1+f(c)-f(0)-f(1)+f(c)$$

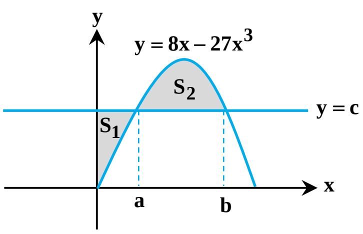
طبق فرض $f(0)=f(1)=0$ است. بنابراین داریم:

$$L\le 1+2f(c)$$

از آنجا که $f:[0,1]\to[0,1]$ داده شده است، برای هر $x\in[0,1]$ داریم $f(x)\in[0,1]$ یعنی $0\le f(x)\le 1$، پس به ازای $x=c$ هم داریم $0\le f(c)\le 1$، به این ترتیب نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$L\le 1+2(1)=3$$

۲ـ گزینه «۲» با توجه به آن که حل معادله‌ی $8x-27x^3=c$ مقدور نیست؛ در ابتدا نمی‌توانیم محل‌های برخورد خط و منحنی را به دست آوریم، به همین علت آن‌ها را با $x=a$ و $x=b$ نشان می‌دهیم:



اکنون مساحت هر ناحیه را با استفاده از انتگرال یگانه می‌نویسیم:

$$S_1=S_2\Rightarrow\int_0^a(c-8x+27x^3)dx=\int_a^b(8x-27x^3-c)\,dx\Rightarrow[cx-4x^2+\frac{27}{4}x^4]_0^a=[4x^2-\frac{27}{4}x^4-cx]_a^b$$

$$\Rightarrow ca-4a^2+\frac{27}{4}a^4=4b^2-\frac{27}{4}b^4-bc-4a^2+\frac{27}{4}a^4+ca\Rightarrow 4b^2-\frac{27}{4}b^4-bc=0\Rightarrow b(4b-\frac{27}{4}b^3-c)=0$$

می‌دانیم که $b\ne 0$ است. پس داریم:

$$c=4b-\frac{27}{4}b^3\quad,\ (I)$$

از طرفی، نقطه‌ی (b,c) روی منحنی $y=8x-27x^3$ قرار دارد. پس داریم:

$$8b-27b^3=c\quad,\ (II)$$

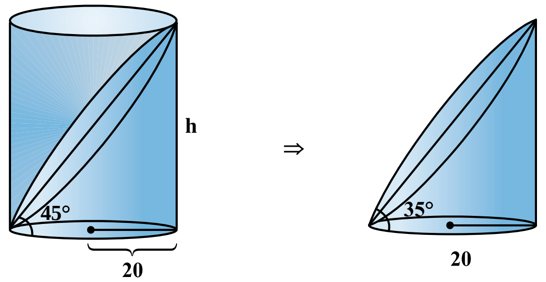
از معادلات (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$8b-27b^3=4b-\frac{27}{4}b^3\Rightarrow 4b-\frac{81}{4}b^3=0\Rightarrow b(4-\frac{81}{4}b^2)=0\xrightarrow{b\ne 0}\frac{81}{4}b^2=4\Rightarrow b^2=\frac{16}{81}\xrightarrow{b>0}b=\frac{4}{9}$$

حالا با جایگذاری $b=\frac{4}{9}$ در معادله‌ی (II) داریم:

$$c=8(\frac{4}{9})-27(\frac{4}{9})^3=\frac{32}{9}-\frac{27\times 64}{9^3}\Rightarrow c=\frac{32}{9}-\frac{64}{3\times 9}=\frac{96-64}{27}=\frac{32}{27}$$

۳ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



روش اول: قطر این استوانه برابر با $40\,cm$ است. وقتی یک برش با زاویه‌ی 45° از آن داشته باشیم، چون ارتفاع مطابق شکل مقابل و به‌صورت زیر حساب می‌شود:

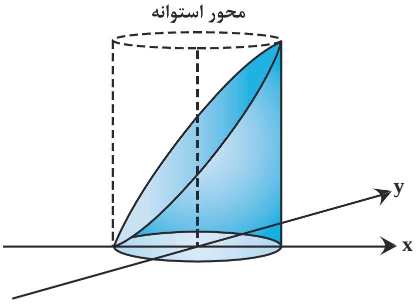
$$tg(45^\circ)=\frac{h}{40} \Rightarrow \frac{h}{40}=1 \Rightarrow h=40$$

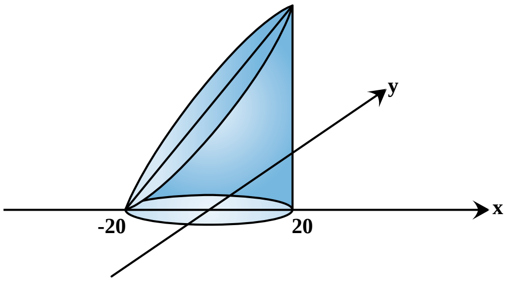
حجم کل این استوانه اگر آن را برش نمی‌دادیم برابر بود با:

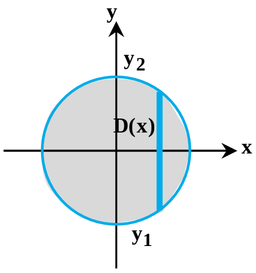
$$V_1=\pi R^2 h=\pi(20)^2(40)=16000\pi$$

برش با زاویه‌ی 45° این استوانه را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند، پس حجم قسمت بریده شده نصف مقدار فوق است: $V=\frac{1}{2}(16000\pi)=8000\pi$

روش دوم (با استفاده از انتگرال): برای آن که منظور این سؤال را بهتر متوجه شوید، ابتدا استوانه‌ای به شعاع $20\,cm$ را تصور کنید. آن را طوری برش می‌دهیم که یکی از برش‌ها بر محور استوانه عمود باشد (کفِ شکل) و برش دوم با زاویه‌ی ۴۵ درجه آن را قطع کند.







قاعده‌ی این استوانه دایره‌ای به شعاع ۲۰ است. مبدأ مختصات را در مرکز آن تصور کنید.

از آنجا که زاویه‌ی این برش، ۴۵ درجه است، وقتی از روبرو به این جسم نگاه کنیم بین خط $y=x+20$ و محور xها قرار می‌گیرد. همچنین چون شعاع استوانه $20\,cm$ است خواهیم داشت $-20\le x\le 20$.

هر کدام از برش‌های عرضی این شکل، یک مستطیل به ارتفاعِ $y=x+20$ و عرضِ قاعده‌ی این شکل (کف) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲۰ است. معادله‌ی این دایره، $x^2+y^2=20^2$ است و از اینجا $y=\pm\sqrt{400-x^2}$ به‌دست می‌آید. اگر به کف این شکل نگاه کنیم بین نیم‌دایره‌های $y_2=\sqrt{400-x^2}$ و $y_1=-\sqrt{400-x^2}$ در فاصله‌ی $-20\le x\le 20$ قرار دارد که فاصله‌ی این منحنی‌ها از یکدیگر برابر است با:

$$D(x)=y_2-y_1=2\sqrt{400-x^2}$$

پس سطح مقطع این جسم مستطیلی با ابعاد $D(x)$ و $x+20$ است.

$$S(x)=(x+20)D(x)=2(x+20)\sqrt{400-x^2}$$

می‌توانیم حجم جسم را حساب کنیم:

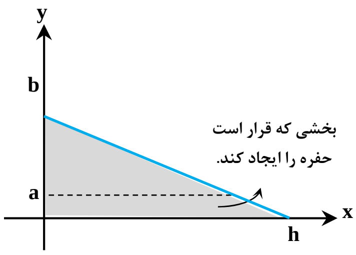
$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_{-20}^{20}2(x+20)\sqrt{400-x^2}\,dx=2\int_{-20}^{20}[x\sqrt{400-x^2}+20\sqrt{400-x^2}]dx$$

تابع $x\sqrt{400-x^2}$ فرد است و انتگرالش در این بازه صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$V=40\int_{-20}^{20}\sqrt{400-x^2}\,dx$$

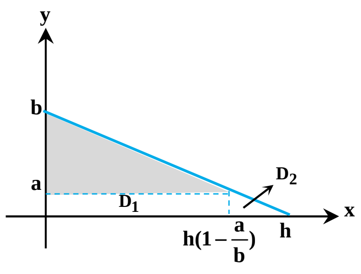
با تغییر متغیر $x=20\sin\theta$ داریم $dx=20\cos\theta\,d\theta$. وقتی $-20\le x\le 20$ باشد داریم $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$V=40\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{400-400\sin^2\theta}\;20\cos\theta\,d\theta=16000\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{16000}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=8000[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8000\pi$$



۴ـ گزینه «۱» ابتدا خطی را در نظر بگیرید که از نقاط $(h,0)$ و $(0,b)$ می‌گذرد. معادله‌ی این خط به‌صورت $\frac{x}{h}+\frac{y}{b}=1$ نوشته می‌شود. اگر ناحیه‌ی محدود به این خط و محور xها را در بازه‌ی $0\le x\le h$ حول محور x دوران دهید، مخروط مورد نظر ایجاد می‌شود. حجم این مخروط برابر است با: $V=\frac{1}{3}\pi b^2 h$

حالا فرض کنید $0<a<b$ و خط افقی $y=a$ را رسم کنید. اگر ناحیه‌ی محدود به محور xها، خط $y=a$ و خط $\frac{x}{h}+\frac{y}{b}=1$ را حول محور x دوران دهیم، حفره‌ای به شعاع a درون مخروط ایجاد می‌شود. محل برخورد این دو خط را مشخص می‌کنیم:

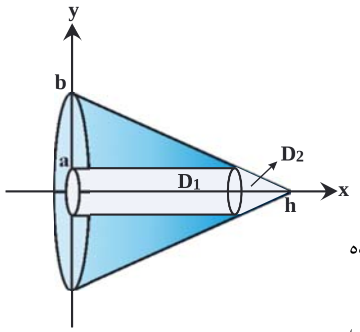


از دوران ناحیه‌ی سفید حفره ایجاد می‌شود.

$$\begin{cases} y=a \\ \frac{x}{h}+\frac{y}{b}=1 \end{cases} \Rightarrow x=h(1-\frac{a}{b})$$

از دوران D_1 حول محور xها استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع $h(1-\frac{a}{b})$ ایجاد می‌شود. حجم آن برابر است با:

$$V_1=\pi a^2 h(1-\frac{a}{b})$$

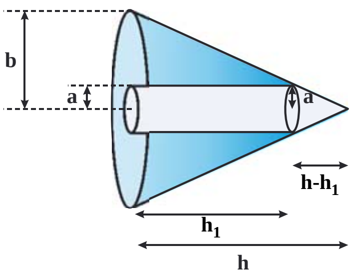


از دوران D_2 حول محور xها مخروطی با شعاع قاعده‌ی a و ارتفاع $h-h(1-\frac{a}{b})=\frac{a}{b}h$ ایجاد می‌شود. حجم این مخروط برابر است با:

$$V_2=\frac{1}{3}\pi a^2(\frac{a}{b}h)=\frac{1}{3}(\frac{\pi a^3}{b}h)$$

بنابراین حجم حفره‌ی ایجاد شده در مخروط برابر است با V_1+V_2 و حجمی از مخروط که باقی می‌ماند برابر است با: $V-(V_1+V_2)$.

$$\text{حجم قسمت باقیمانده}=V-(V_1+V_2)=\frac{1}{3}\pi b^2h-\pi a^2h(1-\frac{a}{b})-\frac{1}{3}\pi(\frac{a^3}{b}h)=\frac{\pi}{3}h(b^2-3a^2+2\frac{a^3}{b})$$

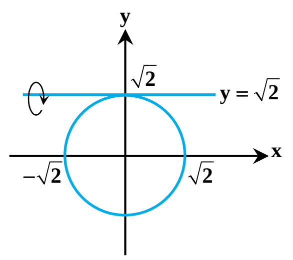


روش دیگر: بعد از آن که شکل ناحیه را تشخیص دادیم؛ متوجه می‌شویم که از یک مخروط به شعاع b و ارتفاع h باید یک مخروط کوچک به شعاع a و ارتفاع $h-h_1$ همچنین یک استوانه به شعاع a و ارتفاع h_1 را حذف کنیم. پس بدون استفاده از انتگرال می‌توانیم از فرمول‌های هندسی حجم استفاده کنیم. ابتدا با استفاده از تناسب، h_1 را به دست می‌آوریم.

$$\frac{h_1}{h}=\frac{a}{b}\Rightarrow h_1=\frac{a}{b}h$$

$$V_{\text{باقی مانده}}=\frac{1}{3}\pi b^2h-\pi a^2(h-h_1)-\frac{1}{3}\pi a^2h_1=\frac{1}{3}\pi h(b^2-3a^2(1-\frac{a}{b})-a^2.\frac{a}{b})=b^2-3a^2+\frac{3a^3}{b}-\frac{a^3}{b}$$

۵ـ گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



روش اول « قضیه پاپوس »: دایره‌ی $x^2+y^2=2$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$ است. به همین دلیل محور دوران که خط افقی $y=\sqrt{2}$ است، با این منحنی تماس دارد اما آن را قطع نمی‌کند. در نتیجه می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم.
مرکز ثقل این دایره، در وسط آن یعنی نقطه‌ی $(0,0)$ قرار دارد. فاصله‌ی این نقطه تا محور دوران برابر با $\sqrt{2}$ است. طول قوس هر دایره برابر با محیط آن است. در این‌جا دایره‌ای با شعاع $R=\sqrt{2}$ داریم، پس محیط آن $2\pi R=2\sqrt{2}\pi$ است. طبق قضیه‌ی پاپوس برای محاسبه‌ی سطح حاصل از دوران داریم:

$$\text{سطح حاصل از دوران}=2\pi\times(\text{فاصله‌ی مرکز ثقل از محور دوران})\times(\text{طول قوس})=2\pi\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\pi=8\pi^2$$

روش دوم: در این مثال محور دوران خط $y=\sqrt{2}$ است، پس از فرمول $S=2\pi\int_a^b|y-k|\sqrt{1+y'^2}\,dx$ استفاده می‌کنیم. ابتدا باید ضابطه‌ی y، مقدار k و حدود انتگرال را مشخص کنیم. از معادله‌ی $x^2+y^2=2$ داریم $y=\pm\sqrt{2-x^2}$ پس در واقع با دو تابع $y=\sqrt{2-x^2}$ و $y=-\sqrt{2-x^2}$ سروکار داریم که همان نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی هستند. اما برای هر دوی آن‌ها حاصل $1+y'^2$ یکسان است:

$$1+y'^2=1+(\frac{\pm2x}{2\sqrt{2-x^2}})^2=1+\frac{x^2}{2-x^2}=\frac{2}{2-x^2}$$

برای تعیین حدود x دو راه داریم. می‌توانیم با توجه به شعاع دایره‌ی $x^2+y^2=2$ متوجه شویم که $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ یا می‌توانیم به دامنه‌ی توابع $y=\pm\sqrt{2-x^2}$ دقت کنیم که طبق آن $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ است. با توجه به آنکه $y=\sqrt{2}$ محور دوران است در فرمول، $k=\sqrt{2}$ خواهد بود. سطح حاصل از دوران نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی را به ترتیب S_1 و S_2 می‌نامیم. برای هر دوی آن‌ها عبارت زیرانتگرال $|y-\sqrt{2}|\sqrt{1+y'^2}$ است فقط ضابطه‌ی y در نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی تفاوت دارد.

$$S=S_1+S_2=2\pi\left[\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}|\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}|-\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}|\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx\right]$$

حالا می‌خواهیم عبارات را از قدرمطلق‌ها خارج کنیم. به وضوح $2-x^2\le2$ است، پس $\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{2}$ بوده و $\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}$ منفی می‌شود. به همین خاطر در انتگرال اول $|\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}$ است. در دومین انتگرال واضح است که $|-\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2}|=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2}$ خواهد بود. پس داریم:

$$S=2\pi\left[\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2})\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{2-x^2})\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx\right]$$

و با جمع کردن انتگرال‌ها خواهیم داشت:

$$S=2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,dx=8\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=8\pi\left[\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}})\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=8\pi\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=8\pi^2$$

توضیح: ملاحظه می‌کنید که روش پاپوس چه کمک بزرگی در این مسأله به ما می‌کند!

۶ـ گزینه «۴» برای به‌دست آوردن طول منحنی باید حاصل $\int_{x=a}^{x=b} dL$ را بیابیم که در آن $dL = \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

$$y = x^4 + \frac{1}{32x^2} \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} y' = 4x^3 - \frac{1}{16x^3} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} - 2(4x^3)\left(\frac{1}{16x^3}\right)$$

$$\Rightarrow y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} + \frac{1}{2} = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

$$\text{طول منحنی} = \int_{x=1}^{x=2} ds = \int_{x=1}^{x=2} \sqrt{\left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2}\,dx = \int_{x=1}^{x=2} \left|4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right| dx \overset{1 \le x \le 2}{=\!=\!=} \int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)dx$$

$$\Rightarrow L = \left[x^4 - \frac{1}{32x^2}\right]_1^2 = (16-1) - \frac{1}{32}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 15 - \frac{1}{128}(-3) = 15 + \frac{3}{128}$$

۷ـ گزینه «۴» طول منحنی پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ در بازه‌ی $a \le t \le b$ از رابطه‌ی $l = \int_a^b \sqrt{f'^2 + g'^2}\,dt$ به‌دست می‌آید. پس ابتدا به محاسبه عبارت زیر رادیکال می‌پردازیم:

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4t^2 + 4}{(1+t^2)^2} = \frac{4}{1+t^2}$$

بنابراین طول قوس برابر با $L = \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{1+t^2}}\,dt$ است.

برای یافتن مقدار انتگرال از تغییر متغیر $t = \operatorname{tg}\theta$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه $dt = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)d\theta$ همچنین حدود جدید به ترتیب به‌صورت زیر می‌شود:

$$t = 0 \Rightarrow \theta = 0 \ , \ t = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

و با بکارگیری رابطه‌ی $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$ داریم:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{1+t^2}}dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)d\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta \Rightarrow L = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta = 2[\operatorname{Ln}|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\operatorname{Ln}(\sqrt{2}+1)$$

۸ـ گزینه «۳» برای محاسبه سطح حاصل از دوران حول محور y ها، باید حاصل $2\pi\int |x|\,ds$ را محاسبه کنیم، دقت کنید از آنجائیکه نمودار موردنظر پارامتری است، بنابراین $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ و داریم:

$$x' = a - a\cos t \qquad , \qquad y' = a\sin t$$

$$ds = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos t}\,dt = \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$\text{مساحت} = 2\pi\int_0^{2\pi} (at - a\sin t)\left(2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right)dt \xRightarrow{0 \le t \le 2\pi} S = (2\pi)(2a^2)\left[\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\right]$$

برای محاسبه انتگرال اول از قاعده‌ی «جزء به جزء» و قاعده جدول داریم:

	مشتق	انتگرال
+	t	$\sin\frac{t}{2}$
−	1	$-2\cos\frac{t}{2}$
+	0	$-4\sin\frac{t}{2}$

$$\Rightarrow \text{انتگرال اول} = \left[-2t\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos\frac{t}{2}dt = 4\pi$$

حاصل انتگرال دوم به راحتی برابر با صفر به‌دست می‌آید و لذا داریم:

$$S = (2\pi)(2a^2)(4\pi) = 16\pi^2 a^2$$

۹ـ گزینه «۳» حدود t داده نشده‌اند. در این موارد معمولاً با حل معادله‌ی $y(t)=0$ می‌توانیم حدود t را مشخص کنیم.

$$y(t)=0 \Rightarrow (2+\sin t)\sin t=0 \Rightarrow t=0\ ,\ t=2\pi$$

$$S=\left|\int_a^b y(t)x'(t)\,dt\right|=\left|\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sin t(\cos^2 t-\sin t(2+\sin t))\,dt\right|=\left|\int_0^{2\pi}(2\sin t+\sin^2 t)(1-\sin^2 t-2\sin t-\sin^2 t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_0^{2\pi}(2\sin t+\sin^2 t)(1-2\sin t-2\sin^2 t)\,dt\right|=\left|\int_0^{2\pi}(2\sin t-3\sin^2 t-6\sin^3 t-2\sin^4 t)\,dt\right|$$

از توان‌های فرد سینوس به این صورت انتگرال می‌گیریم:

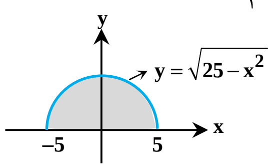
$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}]_0^{2\pi}=0\\ \int_0^{2\pi}\sin t\,dt=[-\cos t]_0^{2\pi}=0\end{cases}$$

برای توان‌های زوج از فرمول توان‌شکن استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\frac12\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\frac12[t-\frac{\sin 2t}{2}]_0^{2\pi}=\pi\\ \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac14(1-\cos 2t)^2\,dt=\frac14\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt=\frac14\int_0^{2\pi}(1-2\cos 2t+\frac12(1+\cos 4t))\,dt\\ \qquad=\frac14[t-\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}]_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

با جایگذاری نتایج به‌دست آمده در فرمول S داریم:

$$S=\left|2(0)-3(\pi)-6(0)-2(\frac{3\pi}{4})\right|=\frac{9\pi}{2}$$



۱۰ـ گزینه «۴» مختصات مرکز جرم را $(\bar{x},\bar{y})$ در نظر می‌گیریم. ناحیه موردنظر نیم‌دایره به شعاع ۵ می‌باشد. با توجه به تقارن شکل نسبت به محور y ها نتیجه می‌شود: $\bar{x}=0$. پس کافی است $\bar{y}$ را به‌دست آوریم.

می‌دانیم $\bar{y}=\frac{M_x}{M}$، چون در مسأله چگالی مطرح نشده پس چگالی را ۱ در نظر می‌گیریم و در این صورت M برابر مساحت ناحیه‌ای است که برابر مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ است، یعنی $M=\frac{25}{2}\pi$ است.

$$M_x=\frac12\int f^2(x)\,dx=\frac12\int_{-5}^{5}(25-x^2)\,dx=\frac12(25x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-5}^{5}=\frac{250}{3}$$

از محاسبات بالا نتیجه می‌شود $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{20}{3\pi}$.

۱۱ـ گزینه «۳» برای تعیین حدود t معادله‌ی $y(t)=0$ را حل می‌کنیم.

$$y=0 \Rightarrow t^3-t=0 \Rightarrow t(t^2-1)=0 \Rightarrow t=0,-1,1$$

بنابراین ناحیه‌ی موردنظر از دو بخش تشکیل می‌شود که در بازه‌های $-1\le t\le 0$ و $0\le t\le 1$ قرار دارند.

$$S=\left|\int_{-1}^{1}y(t)x'(t)\,dt\right|=\left|\int_{-1}^{1}(t^3-t)(2t)\,dt\right|=\left|\int_{-1}^{1}(2t^4-2t^2)\,dt\right|$$

حالا از زوج بودن تابع زیر انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$S=\left|2\int_0^1(2t^4-2t^2)\,dt\right|=\left|2[\frac25 t^5-\frac23 t^3]_0^1\right|=\frac{8}{15}$$

۱۲ـ گزینه «۲» خط $y=0$ مجانب افقی منحنی موردنظر است؛ زیرا $y=\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=0$. بنابراین مساحت محدود ما بین منحنی و محور x ها را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}\,dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}\,dx=\Gamma(\frac32)=\frac12\Gamma(\frac12)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

یادآوری: می‌دانیم $\int_0^{\infty}x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,dx=\frac12\Gamma(\alpha)$.

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac23(x-1)^3=\frac23(x-1) \Rightarrow (x-1)^3=x-1 \Rightarrow x=2\ ,\ x=1\ ,\ x=0$$

جواب $x=0$ قابل قبول نیست؛ زیرا با جایگذاری آن در معادله‌ی $y^2=\frac23(x-1)^3$ داریم $y^2=-\frac23$ که غیرممکن است. بنابراین $1\le x\le 2$ حال برای محاسبه‌ی طول قوس از فرمول $\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$ استفاده می‌کنیم.

$$y^2=\frac23(x-1)^3 \Rightarrow y=\sqrt{\frac23}(x-1)^{\frac32} \Rightarrow y'=\frac32\sqrt{\frac23}(x-1)^{\frac12} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac32(x-1)}=\sqrt{\frac{3x-1}{2}}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{\frac{3x-1}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt2}\int_1^2\sqrt{3x-1}\,dx=\frac{1}{\sqrt2}\times\frac29(3x-1)^{\frac32}\Big|_1^2=\frac{\sqrt2}{9}(5\sqrt5-2\sqrt2)=\frac49(\frac52\sqrt{\frac52}-1)$$

۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا معادله منحنی را به‌صورت $y=\operatorname{Arcsin} x\pm\sqrt{۱-x^۲}$ می‌نویسیم.

می‌دانیم طول قوس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ از رابطه‌ی $L=\int_a^b\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx$ حاصل می‌شود با توجه به اینکه دامنه‌ی تابع داده شده در بازه‌ی $[-۱,۱]$ است لذا داریم:

$$f(x)=\operatorname{Arcsin} x\pm\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\pm\frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱\mp x}{\sqrt{۱-x^۲}}\Rightarrow (f'(x))^۲=\frac{(۱\mp x)^۲}{۱-x^۲}=\begin{cases}\dfrac{(۱-x)^۲}{۱-x^۲}=\dfrac{۱-x}{۱+x}\\[2ex]\dfrac{(۱+x)^۲}{۱-x^۲}=\dfrac{۱+x}{۱-x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}L_۱=\int_{-۱}^{۱}\sqrt{۱+\dfrac{۱-x}{۱+x}}dx=\int_{-۱}^{۱}\sqrt{\dfrac{۱+x+۱-x}{۱+x}}dx=\sqrt{۲}\int_{-۱}^{۱}\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x}}dx=۲\sqrt{۲}\sqrt{۱+x}\Big]_{-۱}^{۱}\Rightarrow L_۱=۴\\[2ex]L_۲=\int_{-۱}^{۱}\sqrt{۱+\dfrac{۱+x}{۱-x}}dx=\int_{-۱}^{۱}\sqrt{\dfrac{۱-x+۱+x}{۱-x}}dx=\sqrt{۲}\int_{-۱}^{۱}\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x}}dx=-۲\sqrt{۲}\sqrt{۱-x}\Big]_{-۱}^{۱}\Rightarrow L_۲=-۲\sqrt{۲}(-\sqrt{۲})=۴\end{cases}\Rightarrow L=L_۱+L_۲=۴+۴=۸$$

۱۵ـ گزینه «۴» واضح است که خط $y=۰$ مجانب افقی منحنی است، زیرا داریم:

$$y=\lim_{x\to\infty}\sqrt{۲xe^{-۲x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{۲ex}}{\sqrt{e^{۲x}}}=۰$$

پس حجم موردنظر برابر حجم حاصل از دوران حول محور x ها می‌باشد.

$$V=\pi\int_۰^{\infty}y^۲dx=\pi\int_۰^{\infty}۲xe^{-۲x}dx=\frac{\pi e}{۲}$$

توضیح: برای محاسبه‌ی $\int xe^{-۲x}dx$ از روش جزء به جزء استفاده کرده‌ایم:

$$I=\int xe^{-۲x}dx=-\frac{۱}{۲}xe^{-۲x}-\frac{۱}{۴}e^{-۲x}+C$$

	مشتق	انتگرال
$+$	x	$e^{-۲x}$
$-$	۱	$-\frac{۱}{۲}e^{-۲x}$
	۰	$\frac{۱}{۴}e^{-۲x}$

$$\Rightarrow V=\pi\left[-\frac{۱}{۲}xe^{-۲x}-\frac{۱}{۴}e^{-۲x}\right]_۰^{\infty}=\pi\times۲e\times\frac{۱}{۴}=\pi\frac{e}{۲}$$

۱۶ـ گزینه «۲» مجانب منحنی $y=e^{-x^۲}$، خط $y=۰$ است.

$$V=\pi\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^۲})^۲dx=\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-۲x^۲}dx=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

توضیح: برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-۲x^۲}dx$ از تغییر متغیر $u=\sqrt{۲}x$، $du=\sqrt{۲}dx$ استفاده کردیم و سپس رابطه $\int_۰^{\infty}e^{-t^۲}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ را به کار بردیم.

۱۷ـ گزینه «۴» چون تابع زوج است پس $\bar{x}=۰$ است و می‌دانیم برای تابع $y=f(x)$ عرض مرکز ثقل از رابطه $\bar{y}=\dfrac{\int y\sqrt{۱+y'^۲}dx}{\int\sqrt{۱+y'^۲}dx}$ به‌دست می‌آید.

$$y=\cosh x\Rightarrow y'=\sinh x\Rightarrow ۱+y'^۲=۱+\sinh^۲x=\cosh^۲x$$

$$\int_{-۱}^{۱}y\sqrt{۱+y'^۲}dx=\int_{-۱}^{۱}\cosh x.\cosh x\,dx=۲\int_۰^{۱}\cosh^۲x\,dx=\int_۰^{۱}(\cosh۲x-۱)dx=(\frac{۱}{۲}\sinh۲x-x)\Big|_۰^{۱}=\frac{۱}{۲}\sinh۲-۱$$

$$\int\sqrt{۱+y'^۲}dx=\int_{-۱}^{۱}\cosh x\,dx=\sinh x\Big|_{-۱}^{۱}=۲\sinh۱\Rightarrow\bar{y}=\frac{\frac{۱}{۲}\sinh۲-۱}{۲\sinh۱}=\frac{e^۴-۴e^۲-۱}{۴e(e^۲-۱)}$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا دو نقطه‌ی متوالی از نقاط تلاقی را به‌دست می‌آوریم.

$$y=\operatorname{Ln}(۲\cos x)\xrightarrow{y=۰}\operatorname{Ln}(۲\cos x)=۰\Rightarrow۲\cos x=۱\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۳}$$

حالا به راحتی طول منحنی را حساب می‌کنیم:

$$l=\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}\sqrt{۱+(\frac{-۲\sin x}{۲\cos x})^۲}dx=۲\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\sqrt{۱+\operatorname{tg}^۲x}\,dx=۲\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{dx}{\cos x}=۲\operatorname{Ln}(\sec x+\operatorname{tg}x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}=۲\operatorname{Ln}(\sec\frac{\pi}{۳}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{۳})=\operatorname{Ln}(۲+\sqrt{۳})^۲$$

۱۹ـ گزینه «۴» چون با تبدیل y به $-y$ معادله عوض نمی‌شود، پس منحنی نسبت به محور x ها تقارن دارد. بنابراین مساحت بالای محور x ها را محاسبه و حاصل را دو برابر می‌کنیم:

$$x^۳ = ۴(x^۲ - y^۲) \Rightarrow y^۲ = x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۳ \Rightarrow y = x\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}x}$$

از تلاقی منحنی با محور x ها، $x=۰$ و $x=۴$ به‌دست می‌آید:

$$S = ۲\int_۰^۴ x\sqrt{\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۴}x}\,dx = \int_۰^۴ x\sqrt{۴-x}\,dx$$

از تغییر متغیر $u = ۴-x$ استفاده می‌کنیم. در این‌صورت $x = ۴-u$ و $dx = -du$ است؛ به ازای $x=۰$ داریم $u=۴$ و به ازای $x=۴$ مقدار $u=۰$ به‌دست می‌آید:

$$S = \int_۰^۴ x\sqrt{۴-x}\,dx = -\int_۴^۰ (۴-u)\sqrt{u}\,du = -\int_۴^۰ (۴u^{\frac{۱}{۲}} - u^{\frac{۳}{۲}})\,du = -\left[\frac{۸}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}}\right]_۴^۰ = \frac{۸}{۳}۴^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۵}۴^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۱۲۸}{۱۵}$$

۲۰ـ گزینه «۴» برای به‌دست آوردن مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول y ها باید از رابطه‌ی $۲\pi\int_a^b |x|\,ds$ استفاده کنیم، که برای منحنی پارامتری موردنظر، ds از فرمول $ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}\,dt$ محاسبه می‌شود:

$$x' = -۲e^{-t} \quad , \quad x'^۲ = ۴e^{-۲t} \quad , \quad y' = -۲e^{-۲t} \quad , \quad y'^۲ = ۴e^{-۴t} \quad , \quad ds = \sqrt{۴e^{-۲t} + ۴e^{-۴t}}\,dt = ۲e^{-t}\sqrt{۱+e^{-۲t}}\,dt$$

$$\text{مساحت} = ۲\pi\int_۰^{+\infty} (۲e^{-t})(۲e^{-t}\sqrt{۱+e^{-۲t}}\,dt) = ۲\pi\int_۰^{\infty} ۴e^{-۲t}\sqrt{۱+e^{-۲t}}\,dt$$

برای حل این انتگرال باید $u = e^{-۲t}$ در نتیجه $du = -۲e^{-۲t}dt$ پس $du = -۲u\,dt$

$$\text{مساحت} = ۲\pi\int ۴u\sqrt{۱+u}\,\frac{du}{-۲u} = -۴\pi(\frac{۲}{۳})(۱+u)^{\frac{۳}{۲}} = [-\frac{۸\pi}{۳}(۱+e^{-۲t})^{\frac{۳}{۲}}]_۰^{+\infty} = -\frac{۸\pi}{۳}[۱-۲\sqrt{۲}] = \frac{۸\pi}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$$

۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا ناحیه‌ی OAB را حول محور y ها دوران می‌دهیم.

برای محاسبه‌ی حجم OAB باید از فرمول $V = ۲\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx$ استفاده کنیم.

$$OAB\ \text{حجم} = ۲\pi\int_۰^۴ x\sqrt{x}\,dx = ۲\pi\int_۰^۴ x^{\frac{۳}{۲}}\,dx = [۲\pi(\frac{۲}{۵})x^{\frac{۵}{۲}}]_۰^۴ = [\frac{۴\pi}{۵}x^۲\sqrt{x}]_۰^۴ = \frac{۴\pi}{۵}(۳۲)$$

و برای محاسبه‌ی حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی OBC حول محور x ها، چون ناحیه محدود بین دو نمودار $y_۱ = ۲$ (سقف ناحیه) و $y_۲ = \sqrt{x}$ (کف ناحیه) است باید حاصل $\pi\int_a^b (y_۱^۲ - y_۲^۲)dx$ را به‌دست آوریم:

$$OBC\ \text{حجم} = \pi\int_۰^۴ (۴-x)dx = \pi[۴x - \frac{x^۲}{۲}]_۰^۴ = \pi(۱۶-۸) = ۸\pi$$

و در آخر داریم:

$$\frac{OAB\ \text{حجم}}{OBC\ \text{حجم}} = \frac{\frac{۴\pi}{۵}(۳۲)}{۸\pi} = \frac{۱۶}{۵}$$

۲۲ـ گزینه «۴» ابتدا نقاط اکسترمم منحنی را به‌دست می‌آوریم.

$$y = e^۲ + e^{-x}(x^۲+۳x+۱) \Rightarrow y' = -e^{-x}(x^۲+۳x+۱) + (۲x+۳)e^{-x} = e^{-x}(-x^۲-x+۲) = ۰$$

از معادله‌ی $-x^۲-x+۲=۰$، نقاط $x=۱$ و $x=-۲$ حاصل می‌شود. پس ما مساحت محدود بین منحنی و محور x ها در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ را به‌دست می‌آوریم.

$$S = \int_{-۲}^{۱} (e^۲ + e^{-x}(x^۲+۳x+۱))dx = \left[e^{-x}(-x^۲-۵x-۶)\right]_{-۲}^{۱} = \frac{۳(e^۳-۴)}{e}$$

توضیح: برای محاسبه $\int e^{-x}(x^۲+۳x+۱)\,dx$ از روش جزء به جزء و قاعده‌ی جدول استفاده کرده‌ایم:

	مشتق	انتگرال
+	$x^۲+۳x+۱$	e^{-x}
−	$۲x+۳$	$-e^{-x}$
+	۲	e^{-x}
	۰	$-e^{-x}$

$$\Rightarrow \int e^{-x}(x^۲+۳x+۱)dx = e^{-x}(-x^۲-۵x-۶) + C$$

۲۳ـ گزینه «۱» حجم موردنظر از رابطه‌ی $2\pi\int xydx$، به‌دست می‌آید: $\text{حجم} = 2\pi\int_{\sqrt{Ln3}}^{\sqrt{Ln8}} x\sqrt{1+e^{x^2}}\,dx$

برای حل این انتگرال تغییر متغیر $u=\sqrt{1+e^{x^2}}$ را استفاده می‌کنیم. داریم $\sqrt{Ln3}\le x\le\sqrt{Ln8}$ پس $2\le u\le 3$. همچنین $u^2=1+e^{x^2}$ پس $e^{x^2}=u^2-1$ و در نتیجه $x=\sqrt{Ln(u^2-1)}$، پس $dx=\dfrac{\frac{2u}{u^2-1}}{2\sqrt{Ln(u^2-1)}}$ به عبارتی $dx=\dfrac{2u}{2\sqrt{Ln(u^2-1)}(u^2-1)}$.

$$\int_{\sqrt{Ln3}}^{\sqrt{Ln8}} x\sqrt{1+e^{x^2}}\,dx=\int_2^3\sqrt{Ln(u^2-1)}\,u\frac{2u\,du}{2\sqrt{Ln(u^2-1)}(u^2-1)}=\int_2^3\frac{u^2}{u^2-1}du=\int_2^3\frac{u^2-1+1}{u^2-1}du=\int_2^3[1+\frac{1}{u^2-1}]du$$

$$=\int_2^3[1+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{u+1}]du=[u+\frac{1}{2}Ln(u-1)-\frac{1}{2}Ln(u+1)]\Big|_2^3=u+\frac{1}{2}Ln(\frac{u-1}{u+1})\Big|_2^3=3+\frac{1}{2}Ln\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}Ln(\frac{1}{3})$$

$$=1+\frac{1}{2}Ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Ln\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}Ln\frac{3}{2}$$

بنابراین داریم: $\text{حجم}=2\pi(1+\frac{1}{2}Ln\frac{3}{2})$

۲۴ـ گزینه «۴» مساحت رویه‌ی مورد نظر برابر است با $S=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$. از معادلات پارامتری داده شده داریم:

$$x'^2+y'^2=a^2(1-\cos t)^2+(a\sin t)^2=a^2[\sin^2t+\cos^2t+1-2\cos t]=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t)$$

بنابراین $S=2\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt$. پس $S=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$.

برای حل این انتگرال از فرمول مثلثاتی $1-\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$ استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که $0\le t\le 2\pi$ در نتیجه $0\le\frac{t}{2}\le\pi$، پس $\sin(\frac{t}{2})\ge 0$ است،

پس داریم:

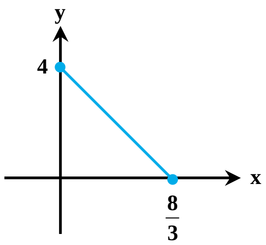
$$S=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(2\sin^2(\frac{t}{2}))^{\frac{3}{2}}dt=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin^3(\frac{t}{2})dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2(\frac{t}{2}))\sin(\frac{t}{2})dt=8\pi a^2(-2)\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})(-\frac{1}{2}\sin-\frac{t}{2})dt=8\pi a^2[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}]\Big|_0^{2\pi}$$

$$=8\pi a^2[2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}]=\frac{64}{3}\pi a^2$$

۲۵ـ گزینه «۱»

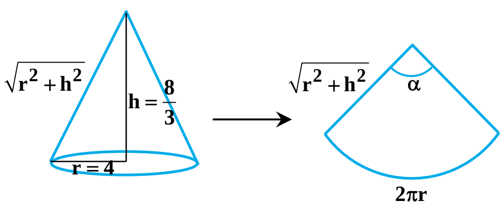
روش اول: از معادلات پارامتری داریم $3x=t^2$ و $2y=8-t^2$ پس $3x+2y=8$، به عبارتی معادلات پارامتری داده شده مربوط به خطِ $3x+2y=8$ هستند و چون $3x=t^2$ پس $x\ge 0$. محل‌های برخورد این خط با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم. اکنون از دوران این ناحیه حول محور x ها یک مخروط به‌دست خواهد آمد. $0\le x\le\frac{8}{3}$ پس $0\le t\le\sqrt{8}$ مساحت این مخروط برابر است با:



$$S=\int_0^{\sqrt{8}}2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'^2(t)}\,dt=\int_0^{\sqrt{8}}2\pi\frac{8-t^2}{2}\sqrt{\frac{4t^2}{9}+t^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{8}}\pi(8-t^2)\sqrt{\frac{13}{9}}t\,dt=\frac{\pi\sqrt{13}}{3}\int_0^{\sqrt{8}}(8t-t^3)dt=\frac{\pi\sqrt{13}}{3}(\frac{8}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4)\Big|_0^{\sqrt{8}}=\frac{\pi\sqrt{13}}{3}(32-16)=\frac{16\sqrt{13}}{3}\pi$$

روش دوم: مساحت حاصل از دوران این خط برابر با مساحت جانبی یک مخروط است. مساحت جانبی مخروطی به ارتفاع h و شعاع r از رابطه‌ی $S=\frac{\alpha}{2}(r^2+h^2)$ به دست می‌آید که α زاویه‌ی رأس مخروط است. در مخروط مورد نظر داریم:



$$S=\frac{\alpha}{2}\pi(r^2+h^2)=\frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{r^2+h^2}}\pi(r^2+h^2)=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi\times4\times\sqrt{16+\frac{64}{9}}=16\pi\frac{\sqrt{13}}{3}$$

۲۶ـ گزینه «۲» اگر فرض کنیم $t = 1 - x$، بنابراین $-dx = dt$، اگر $x = -1$، آن‌گاه $t = 2$ و اگر $x = 2$ آن‌گاه $t = -1$ و بنابراین داریم:

$$S_1 = \int_{-1}^{2} xf(x)dx = -\int_{2}^{-1}(1-t)f(1-t)dt = -\int_{2}^{-1} f(1-t)dt + \int_{2}^{-1} tf(1-t)dt \xrightarrow{f(1-t)=f(t)} \int_{-1}^{2} xf(x) = -\int_{2}^{-1} f(t)dt + \int_{2}^{-1} tf(t)dt$$

$$\xrightarrow{-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx} \int_{-1}^{2} xf(x) = \int_{-1}^{2} f(t)dt - \int_{-1}^{2} tf(t)dt \xrightarrow{t\to x} 2\int_{-1}^{2} xf(x) = \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x)$ و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ و محور xها برابر با $S_2 = \int_{-1}^{2} f(x)dx$ است پس تساوی $2S_1 = S_2$ را داریم.

۲۷ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که حد داده شده را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4\times 0)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4\times 1)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4\times 2)^3}} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4(n-1))^3}}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{پشت کروشه باید } \frac{1}{n} \text{ داشته باشیم}} \text{حاصل حد} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4\times 0)^3}} + \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4\times 1)^3}} + \cdots + \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{[n+4\times(n-1)]^3}}\right]$$

در داخل کروشه صورت و مخرج را بر $n\sqrt{n}$ و یا به عبارت دیگر بر $\sqrt{n^3}$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{4\times 0}{n})^3}} + \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{4\times 1}{n})^3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{4(n-1)}{n})^3}}\right]$$

حالا به راحتی می‌توان $f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{\sqrt{(1+4(\frac{i}{n}))^3}}$ را نوشت و داریم:

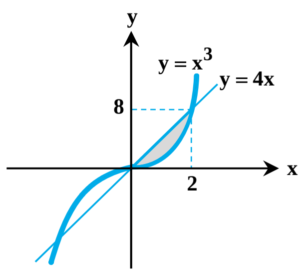
$$\text{حاصل حد} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

که $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+4x)^3}}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+4x)^3}} = \int_0^1 (1+4x)^{-\frac{3}{2}}dx = \left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+4x}}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4}} - \frac{1}{\sqrt{1+0}}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right] = -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{5}+5}{10} = \frac{1}{10}[5-\sqrt{5}]$$

۲۸ـ گزینه «۴»



$$\begin{cases} y = 4x \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

پس برای ناحیه‌ی واقع در ربع اول داریم $0 \le x \le 2$.

چون فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور y را خواسته فقط $\bar{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$M = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_0^2 (4x - x^3)dx = (2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = 8 - 4 = 4$$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))dx = \int_0^2 (4x-x^3)(4x+x^3)dx = \int_0^2 (16x^2 - x^6)dx = \frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{512}{21}$$

بنابراین داریم:

$$M = k\int_a^b (f(x)-g(x))dx = 4k$$

$$M_x = \frac{1}{2}k\int_a^b (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))dx = \frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx = \frac{256}{21}k$$

در نتیجه داریم:

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{21}k}{4k} = \frac{64}{21}$$

۲۹ـ گزینه «۲» با توجه به این که $1 \le i \le n$، بنابراین $\frac{1}{n^2} \le \frac{i}{n^2} \le \frac{n}{n^2}$ و وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) \le \lim_{n\to\infty}(\frac{i}{n^2}) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{i}{n^2} = 0$$

حالا که $\frac{i}{n^2} \to 0$، بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u} \sim 1+\frac{u}{n}$ (برای $u \to 0$) استفاده کنیم و لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{2n^2}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{i}{n}) = \int_0^1 \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

۳۰ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که داریم: $Lnn - Lnk = Ln(\frac{n}{k})$، از طرفی $\frac{۱}{\sqrt{nk}} = \frac{۱}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}$ و لذا حد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{Lnn - Lnk}{\sqrt{nk}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} Ln(\frac{n}{k})\sqrt{\frac{n}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{n=۰}^{n} Ln(\frac{۱}{\frac{k}{n}}) \times \frac{۱}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

حالا که به فرم $f(\frac{k}{n})$ رسیده‌ایم، می‌توانیم حد فوق را طبق مجموع ریمان حساب کنیم: $= \int_{۰}^{۱} Ln(\frac{۱}{x})(\frac{۱}{\sqrt{x}})dx = \int_{۰}^{۱} -Lnx(\frac{dx}{\sqrt{x}})$ حاصل حد

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u = \sqrt{x}$ استفاده می‌کنیم: $\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = ۲du \quad , \quad x \to ۰ \Rightarrow u \to ۰ \;,\; x = ۱ \Rightarrow u = ۱$

$$I = \int_{۰}^{۱} -Lnu^{۲}(۲du) = -۴\int_{۰}^{۱} Lnudu = -۴ \lim_{a\to ۰^+} \int_{a}^{۱} Lnudu = -۴ \lim_{a\to ۰^+} [uLnu - u]_{a}^{۱} = -۴ \lim_{a\to ۰^+} [۱\times Ln۱ - ۱ - aLna + a]$$

از فصل حد و پیوستگی می‌دانیم $\lim_{a\to ۰^+} aLna = ۰$ و لذا $I = -۴[-۱] = ۴$.

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲»

$$n=3k;\quad \Rightarrow \frac{2n-3}{3}=3 \Rightarrow 2n-3=9 \Rightarrow 2n=12 \Rightarrow n=6 \Rightarrow k=2$$ قابل قبول

$$n=3k+1;\quad \Rightarrow n^2+n+1=3 \Rightarrow n^2+n-2=0 \Rightarrow n=1, n=-2 \Rightarrow k=0,-1$$ غیر قابل قبول

$$n=3k+2;\quad \Rightarrow \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \le \frac{n+2}{3} < 4 \Rightarrow 7 \le n < 10 \Rightarrow n=7,8,9$$

در حالت سوم، از سه مقدار بەدست آمده فقط $n=8$ قابل قبول است، چون در این حالت، nها بەصورت $n=3k+2$ تعریف شده‌اند و فقط $n=8$ را می‌توان بەصورت $3k+2$ نوشت که در آن $k=2$ است. در نهایت دیدیم که فقط $n=6$ و $n=8$ قابل قبول هستند.

۲ـ گزینه «۲» ابتدا مخرج کسر جمله عمومی سری را تجزیه می‌کنیم:

$$n^4+2n^2+9=(n^2+3)^2-4n^2=(n^2+2n+3)(n^2-2n+3)=((n+1)^2+2)((n-1)^2+2)$$

لذا حاصل سری بەصورت روبرو خواهد بود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+2n^2+9}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{(n-1)^2+2}}_{f_n}-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2+2}}_{f_{n+2}}\Big)$$

ملاحظه می‌گردد یک سری تلسکوپی که اختلاف جملات ۲ است و داریم:

$$S=\frac{1}{(1-1)^2+2}+\frac{1}{(2-1)^2+2}-2\times\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{(n+1)^2+2}\Big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0=\frac{5}{6}$$

۳ـ گزینه «۲» با توجه به این که $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$، در این رابطه به جای xها x^2 قرار می‌دهیم و به رابطه $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{x^2}$ می‌رسیم. طرفین این رابطه را در x ضرب می‌کنیم تا در توان x عبارت $(2n+1)$ ظاهر شود.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=xe^{x^2}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$$

۴ـ گزینه «۲»

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2}\Big)^n \Rightarrow S=0+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+0+\Big(\frac{1}{2}\Big)^4+0+\cdots \Rightarrow S=\frac{1}{4}+\Big(\frac{1}{4}\Big)^2+\cdots$$

ملاحظه می‌کنید با بەدست آوردن جملات سری، مجموع سری بەصورت مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله اول $a_1=\frac{1}{4}$ و قدر نسبت $r=\frac{1}{4}$ است که مجموع این جملات از رابطه $S_n=\frac{a_1}{1-r}$ بەدست می‌آید.

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

۵ـ گزینه «۲» ابتدا حد جمله عمومی را بەدست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\simeq\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

حد جمله عمومی صفر است، اما این سری یک سری تلسکوپی است و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=-\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=(\sqrt{1}-\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1})=-1+\infty=+\infty=+\infty$$ پس سری واگراست.

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم رشد n در بی‌نهایت از $\log n$ بیشتر است یعنی $\frac{\log n}{2n^3-1}<\frac{n}{2n^3-1}$ از طرفی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3-1}$ که تقریباً معادل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ می‌باشد، همواره همگراست لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2n^3-1}$ نیز همگراست.

بررسی گزینه (۳): جمله قویتر در صورت کسر n می‌باشد و لذا می‌توان از $\sqrt{n}$ در مقابل n صرف‌نظر کرد و سری را معادل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3}$ در نظر گرفت و یا بـه عبـارت ساده‌تر معادل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ در نظر گرفت و طبق مطالب p سری این سری همواره همگراست.

بررسی گزینه (۴): دقت شود همواره $\log n<n$ است و اگر حتی $\log n=n$ هم بود آنگاه سری بەصورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}$ و یا به عبارت دیگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ می‌شد که می‌دانیم یک سری واگراست چون توان n برابر یک است اما چون $\log n<n$ لذا تفاضل توان n مخرج از صـورت کمـی از عـدد یـک بزرگتـر مـی‌شـود، پـس ایـن سـری همگراست. بطور کلی سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^P}$ با شرط $P>1$ همواره همگرا هستند.

۶ـ گزینه «۲» سری داده شده همان سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n!}$ می‌باشد. می‌دانیم $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ ، بنابراین سری را می‌توان به‌صورت $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ نوشت پس داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-2)!(n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}} S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e$$

۷ـ گزینه «۳»

بررسی گزینه «۱» بنابر آزمون ریشه (کوشی) داریم: $\sqrt[n]{\frac{\sinh n}{e^{2n}}}\sim\sqrt[n]{\frac{\frac{e^n}{2}}{e^{2n}}}\Rightarrow\frac{1}{e}=L<1\Rightarrow$ سری همگراست

بررسی گزینه «۲» چون تابع تحت انتگرال مثبت، پیوسته و نزولی است، بنابراین می‌توانیم برای بررسی وضعیت همگرایی یا واگرایی آن از آزمون انتگرال استفاده کنیم. تابع موردنظر برای انتگرال $\frac{1}{x(\text{Ln}x)^3}$ است با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln x$ ، داریم $du=\frac{dx}{x}$ و انتگرال موردنظر به $\int\frac{du}{u^3}$ تبدیل می‌شود. از آنجایی که این انتگرال همگراست، پس سری مذکور نیز همگرا می‌شود. البته با استفاده از نکته‌ی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p(\text{Ln}n)^q}$ می‌توانیم سریع این گزینه را بررسی کنیم.

بررسی گزینه «۴» بنابر آزمون ریشه داریم: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}}\sim\frac{1}{e}=L<1\Rightarrow$ سری همگراست

۸ـ گزینه «۳»

روش اول: نخست توجه کنید که به ازای هر $1\le k\le n$ داریم:

$$\frac{2n}{n^2+n}\le\frac{2n}{n^2+k}<\frac{2n}{n^2}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2}$$

از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2}=2$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ $\lim_{n\to\infty}S_n=2$.

روش دوم: وقتی $n\to\infty$ میل کند عبارت مقابل سیگما هم‌ارز $\frac{2n}{n^2}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}=\frac{2n}{n}=2$$

۹ـ گزینه «۲» برای رسیدن به مشتق مرتبه هشتم در این سؤال، فرمول مشخصی نداریم و از طرفی ۸ بار مشتق گرفتن هم کار عاقلانه‌ای نیست. برای همین از بسط مک‌لورن $\sin x$ در ابتدا استفاده می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً گفتیم هرگاه مشتق مراتب بالا را در $x=0$ خواسته باشند، می‌توانید بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ را نوشته و ضریب x^n را در آن بسط مشخص کنید. اگر بسط مک‌لورن $f(x)$ به صورت $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$f^{(n)}(0)=n!\times a_n$$

از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که مسأله مربوط به مشتق مراتب بالا در نقطه‌ی $x=0$ باشد و ما هم بسط مک‌لورن تابع داده شده را بدانیم.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\frac{x^{10}}{11!}+\cdots$$

$$x^8\ \text{ضریب}=a_8=\frac{1}{9!}\Rightarrow f^{(8)}(0)=8!\times\frac{1}{9!}=\frac{1}{9}$$

۱۰ـ گزینه «۳» ابتدا مشتق اول را حساب می‌کنیم: $f(x)=\text{Ln}(\frac{1}{\cos x})=\text{Ln}1-\text{Ln}(\cos x)=-\text{Ln}(\cos x)\Rightarrow f'(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\text{tg}\,x$

حالا دو راه پیش‌رو داریم؛ یا این‌که پنج بار از تابع مشتق بگیریم و به مشتق ششم برسیم یا این‌که از بسط مک‌لورن $\text{tg}\,x$ استفاده کنیم؛ راه دوم ساده‌تر است:

$$f'(x)=\text{tg}\,x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots\ ;\quad f(x)=C+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{2}{15}(\frac{x^6}{6})+\cdots$$

پس مشتق ششم در $x=0$ برابر است با:

$$x^6\ \text{ضریب}\times6!=\frac{2}{15\times6}\times6!=\frac{2\times5!}{15}=\frac{2\times4!\times5}{3\times5}=\frac{2\times4!}{3}=16$$

۱۱ــ گزینه «۳» با جایگزینی $x-\frac{\pi}{6}$، به جای x در بسط $\cos x$، خواهیم داشت:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=1-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^2}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})^4}{4!}-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^6}{6!}+\cdots$$

با ضرب کردن طرفین رابطه فوق در $x-\frac{\pi}{6}$ به‌دست می‌آید:

$$(x-\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=(x-\frac{\pi}{6})-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^3}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})^5}{4!}-\frac{(x-\frac{\pi}{6})^7}{6!}+\cdots$$

پس:

$$f(\frac{\pi}{3})=(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

۱۲ــ گزینه «۲» بسط مک‌لورن e^x به‌صورت مقابل است:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots$$

بنابراین بسط $tg^{-1}(e^x-1)$ به‌صورت مقابل است:

$$tg^{-1}(e^x-1)=tg^{-1}(x+\frac{x^2}{2}+\cdots)=(x+\frac{x^2}{2}+\cdots)-\frac{1}{3}(x+\frac{x^2}{2}+\cdots)^3+\cdots$$

فقط در جمله اول بسط فوق x^2 وجود دارد و ضریب آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۳ــ گزینه «۲»

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}((\frac{n}{e})^n)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{e})^{\frac{1}{n}}=1$$

در قسمت نهایی از رابطه‌ی $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f(n)}=1$ استفاده کردیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(n!)}{Ln(n^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ln(\frac{n}{e})^n}{Ln(n^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn-Lne}{Lnn}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{Lnn}{Lnn}=1$$

۱۴ــ گزینه «۲» با توجه به وجود توان و عبارت رادیکالی از آزمون ریشه کمک می‌گیریم، $a_n=\frac{\sqrt{n+5}}{2^n}$، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{n+5}}}{\sqrt[n]{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}\sqrt[2n]{n+5})$$

می‌دانیم حاصل $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[2n]{n+5}$ برابر با $\underline{1}$ است، لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow \text{سری همگراست}$$

۱۵ــ گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی $\cos(u)$ وقتی $u\to 0$ عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(nx)\simeq(1-\frac{x^2}{2})(1-\frac{(2x)^2}{2})\cdots(1-\frac{n^2x^2}{2})$$

حاصل‌ضرب این عوامل یک چند جمله‌ای شامل عباراتی با درجه زوج است. برای محاسبه حد کافیست دو جمله اول این حاصل‌ضرب به‌دست آیند؛ زیرا مخرج کسر داده شده از درجه ۲ است و در نتیجه برای هر $n>2$ داریم $\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^2}=0$. محاسبه دو جمله اولِ حاصل‌ضرب نیز کار ساده‌ای است:

$$(1-\frac{x^2}{2})(1-\frac{2^2x^2}{2})\cdots(1-\frac{n^2x^2}{2})=1-(\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2})x^2+\cdots$$

اکنون محاسبه حد به سادگی صورت می‌گیرد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(nx)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2})x^2}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

حل کوتاه‌تر: می‌توانیم مسأله را به ازای مقادیر کوچک n مثلاً $n=2$ حل کنیم. و در گزینه‌ها هم $n=2$ را در نظر بگیریم. دقت کنید که انتخاب $n=1$ عاقلانه نیست زیرا به ازای $n=1$ برخی از گزینه‌ها با هم برابر می‌شوند.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2})(1-\frac{2^2x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+(\frac{1}{2}+\frac{4}{2})x^2-x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2}+\frac{4}{2})x^2}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

که برابر است با گزینه (۲).

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}k^2=\frac{1}{2}(1+4)=\frac{5}{2}$$

۱۶ـ گزینه «۴» طبق آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-۱)^n||\frac{۲^n(n!)^۲}{(۲n+۱)!}|^k|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^k(\frac{n}{e})^{۲k}}{(\frac{۲n}{e})^{۲k}}|x|=\frac{|x|}{۲^k}<۱\Rightarrow|x|<۲^k$$

پس شعاع همگرایی برابر ۲^k است.

۱۷ـ گزینه «۴»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{تبدیل n به n+۱}}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+۲}}{a_{n+۱}}=\frac{۱}{۲}\quad,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+۲}}{a_n+۲a_{n+۱}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{a_{n+۲}}{a_{n+۱}}}{\frac{a_n}{a_{n+۱}}+۲(\frac{a_{n+۱}}{a_{n+۱}})}\right)=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲+۲}=\frac{۱}{۸}$$

۱۸ـ گزینه «۱»

روش تشریحی: ابتدا کسر داده شده را تفکیک می‌کنیم و سپس از قاعده تلسکوپی استفاده می‌کنیم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳n^۲+۳n+۱}{(n(n+۱))^۳}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(n+۱)^۳-n^۳}{n^۳(n+۱)^۳}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}-\frac{۱}{(n+۱)^۳}=\frac{۱}{۱^۳}-\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{(n+۱)^۳}=۱-۰=۱$$

روش تستی:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳n^۲+۳n+۱}{(n^۲+n)^۳}=\frac{۷}{۲^۳}+\frac{۱۹}{۶^۳}+\cdots=\frac{۷}{۸}+\frac{۱۹}{۲۱۶}+\cdots\simeq ۰/۹+۰/۰۹+\cdots$$

(در مورد کسر $\frac{۱۹}{۲۱۶}$ دقت کنید که مقدار آن از $\frac{۲۰}{۲۰۰}$ کمی کوچکتر است) بنابراین داریم:

$$۰/۹۹<\text{حاصل سری}<۰/۹۹+۲\times۰/۰۹$$

گزینه (۱) جوابه.

۱۹ـ گزینه «۳» در ابتدا باید بتوانیم کسر را تفکیک کنیم، کسر $\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}$ را می‌توان به شکل زیر تفکیک کرد:

$$\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\frac{A}{n+۱}+\frac{B}{n+۲}+\frac{C}{n+۳}$$

حال باید ضرایب A و B و C را به‌دست آوریم. از اینجا به بعد را با دقت بخوانید! برای به‌دست آوردن ضریب A، دو طرف معادله را در $(n+۱)$ ضرب می‌کنیم و به جای n، ۱ـ قرار می‌دهیم.

$$\frac{n(n+۱)}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=A+\frac{B(n+۱)}{n+۲}+\frac{C(n+۱)}{n+۳}\xrightarrow{n=-۱}\frac{-۱}{۱\times۲}=A+۰+۰\Rightarrow A=-\frac{۱}{۲}$$

به همین صورت برای به‌دست آوردن B، طرفین ضربدر $n+۲$ و به جای n، ۲ـ جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{n(n+۲)}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\frac{A}{n+۱}(n+۲)+B+\frac{C(n+۲)}{n+۳}\overset{n=-۲}{=\!=\!=}\frac{-۲}{-۱\times۱}=B+۰+۰\Rightarrow B=۲$$

و همین‌طور برای C داریم:

$$\frac{n(n+۳)}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\frac{A(n+۳)}{n+۲}+\frac{B(n+۳)}{n+۳}+C\overset{n=-۳}{=\!=\!=}\frac{-۳}{-۲\times-۱}=۰+۰+C\Rightarrow C=-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n+۱})+۲\frac{۱}{n+۲}-\frac{۳}{۲}\frac{۱}{n+۳})=\sum_{n=۱}^{\infty}(-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{n+۲}+\frac{۳}{۲}\frac{۱}{n+۲}-\frac{۳}{۲}\frac{۱}{n+۳})$$

$$=\sum_{n=۱}^{\infty}(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۲})+\frac{۳}{۲}(\frac{۱}{n+۲}-\frac{۱}{n+۳}))\xrightarrow{\text{سری تلسکوپی}}S=a_۱-a_\infty=(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\infty})+\frac{۳}{۲}(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{\infty}))=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۲۰ـ گزینه «۲» چند جمله از سری را می‌نویسیم:

$$a_۱=۲\ ,\ a_۲=\sqrt{۴-a_۱^۲}=\sqrt{۴-۲^۲}=۰\ ,\ a_۳=\sqrt{۴-a_۲^۲}=\sqrt{۴-۰}=۲\ ,\ a_۴=\sqrt{۴-۲^۲}=۰\ ,\ \ldots$$

$$S=\sum_{i=۱}^{۱۰۰}a_i=۲+۰+۲+۰+۲+\cdots$$

$a_{۲n}$ها برابر با صفر، و $a_{۲n+۱}$، برابر با ۲ می‌باشد و چون تعداد جملات $a_{۲n+۱}$ برابر با ۵۰ تاست، لذا حاصل سری برابر با $۵۰\times۲=۱۰۰$ می‌شود.

۲۱ـ گزینه «۱» با کمی دقت می‌توان فهمید با تفاضل دو سری هندسی روبه‌رو هستیم، اگر عبارت را بر حسب توان‌های k بنویسیم به هدف می‌رسیم:

$$S=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{12\times 2^1}{3^{-2}}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{15\times 3^1}{4^2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k=24\times 9\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\frac{45}{16}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

سری اول، یک سری هندسی با جمله‌ی اول $a_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ و قدر نسبت $q=\frac{2}{3}$ و سری دوم یک سری هندسی بـا جملـه‌ی اول $a_1=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ و قدرنسبـت $q=\frac{3}{4}$ است، لذا داریم:

$$S=24\times 9\left(\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}}\right)-\frac{45}{16}\left(\frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{3}{4}}\right)=24\times 9\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{45}{16}\left(\frac{9}{4}\right)=24\times 12-\frac{45\times 9}{64}=288-\frac{405}{64}$$

۲۲ـ گزینه «۱» واضح است حد جمله‌ی عمومی صفر است (چون رشد n از $\mathrm{Ln}(1+n^2)$ بیشتر است) بنابراین باید وضعیت همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1+\mathrm{Ln}(1+n^2)]}{n^2}$ را بررسی کنیم، واضح است صورت کسر هم‌ارز $2\mathrm{Ln}(1+n^2)$ و به عبارت دیگر هم‌ارز $2\mathrm{Ln}n^2$ است، بنابراین سری هم‌ارز با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{Ln}n^2}{n^2}$ و یـا بـه عبـارت دیگـر بـا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\mathrm{Ln}n}{n^2}$ هم‌ارز است و لذا طبق نکته سری همگراست.

۲۳ـ گزینه «۲» شعاع همگرایی را از رابطه $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ به‌دست می‌آوریم:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\cosh 3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{e^{3n}+e^{-3n}}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{e^{3n}+e^{-3n}}}\xrightarrow{\text{قانون رشد}}R=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{e^{3n}}}=\frac{1}{e^3}$$

بنابراین سری در فاصله $|x|<\frac{1}{e^3}$ یا $\frac{-1}{e^3}<x<\frac{+1}{e^3}$ همگرا است. (دقت کنید در نقاط $x=\pm\frac{1}{e^3}$ به راحتی مشخص می‌شود، سری واگراست.)

۲۴ـ گزینه «۳» با توجه به فرم سری‌ها، از آزمون ریشه کمک می‌گیریم:

$$a_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}}=\frac{1}{2}$$

چون حد $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ کوچکتر از ۱ است، پس سری همگرا است. اما برای سری S_2، جمله‌ی عمومی به‌صورت زیر است:

$$a_n=\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sqrt[n]{n^3}}_{1}\times\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3^n}\right)}_{0}=0$$

بنابراین سری همگرا است.

۲۵ـ گزینه «۴» در گزینه (۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ را مثال می‌زنیم که یک سری همگراست آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ نیز به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n}$ می‌باشد که این سری نیـز طبق توضیحات یک سری واگرای نامشخص می‌باشد و واگرا به بی‌نهایت نیست.

برای گزینه‌ی (۲) نیز سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را مثال می‌زنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ در آن به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ در می‌آید که این سری یک سری واگراست.

در مورد گزینه (۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را مثال می‌زنیم، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+\sqrt{na_n}}$ در این سری به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+\sqrt{n}}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}\rightarrow$$

که این سری با توجه به تعریف سری P یک سری واگراست.

برای گزینه (۱) نیز می‌توانیم این طور استدلال کنیم که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، حد a_n صفر است، پس $0<a_n<1$ می‌باشد و داریم:

$$0<a_n<1\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}0<a_n^2<1\Rightarrow a_n^2<a_n\Rightarrow\sum_{n=1}a_n^2<\sum_{n=1}a_n$$

۲۶ـ گزینه «۴» وقتی $n\to\infty$ میل می‌کند برای عدد n دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ـ n زوج باشد ($n-1$ فرد است): جمع هر دو جمله متوالی $-\frac{1}{n}$ است، تعداد $-\frac{1}{n}$ ها $\frac{n}{2}$ می‌شود پس حاصل حد: $(-\frac{1}{n})(\frac{n}{2})=-\frac{1}{2}$

۲ـ n فرد باشد ($n-1$ زوج است): جمع هر دو جمله متوالی $-\frac{1}{n}$ است و تعداد $-\frac{1}{n}$ ها $\frac{n-1}{2}$ می‌باشد و داریم: $(-\frac{1}{n})(\frac{n-1}{2})+\frac{n}{n}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

پس حد وجود ندارد.

۲۷ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$، بنابراین با مشتق گرفتن از طرفین داریم $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$، حالا اگر طرفین این تساوی را در x ضرب کنیم:

$$\xrightarrow{\text{با ضرب طرفین در } x}\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\ \xrightarrow{\text{با مشتق‌گیری از طرفین}}\ \frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$\Rightarrow\frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{1-x^2}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{با ضرب طرفین در } x}\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$$

۲۸ـ گزینه «۴» از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{Lnn}|-x^2|^n}<1$$

در صورتی که طبق قاعده‌ی سرعت رشد داریم $a^n+b^n\simeq a^n$. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$ در مخرج کسر می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{Lnn}=1$

(برای چندجمله‌ای‌ها و توابع لگاریتمی مانند Lnn داریم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$ و $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{Lnn}=1$) در نتیجه خواهیم داشت: $ax^2<1\Rightarrow x^2<\frac{1}{a}\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{a}}$

پس شعاع همگرایی $R=\frac{1}{\sqrt{a}}$ و بازه‌ی همگرایی $(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}})$ است.

۲۹ـ گزینه «۳» در واقع سری مورد نظر به صورت $\sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^i3^j})-1$ است (از مجموع ۱ واحد کم کرده‌ایم، چون وقتی i و j هر دو صفر باشند، جمله ۱ به دست می‌آید که جز مجموع موردنظر نیست).

$$\text{سری}=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^i3^j})-1=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\frac{1}{2^i}}{1-\frac{1}{3}})-1=(\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i})-1=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=3-1=2$$

۳۰ـ گزینه «۳» در مورد S_1 از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه اگر (a_n) همگرا به L باشد میانگین حسابی و هندسی آن هم به L همگراست. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n$$

برای دنباله‌ی $a_n=\frac{3n+1}{4n+1}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times4\times\cdots\times(3n+1)}{1\times5\times\cdots\times(4n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$$

چون توان x، برابر با ۲ است، پس شعاع همگرایی S_1 برابر است با:

$$R=\sqrt{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

همچنین با استفاده از مقایسه‌ی حدی می‌توانیم به جای S_1 سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^nx^{2n}$ را بررسی کنیم. این سری در ناحیه‌ی $(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$ همگراست ولی در هر دو نقطه‌ی $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ سری، واگرا می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n(\pm\frac{2}{\sqrt{3}})^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n$$

پس در لبه‌های این ناحیه، سری واگراست. در مورد S_2 با استفاده از قانون سرعت رشد داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}=3$$

پس شعاع همگرایی S_2، $R=\frac{1}{3}$ است و بر بازه‌ی $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ همگراست. به ازای $x=\frac{1}{3}$ سری واگرا بدست می‌آید زیرا: $\sum(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n})(\frac{1}{3})^n\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+(\frac{2}{3})^n\frac{1}{n}$

اما به ازای $x=-\frac{1}{3}$ سری همگرا بدست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n})(\frac{1}{3})^n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n}(\frac{2}{3})^n$$

پس بازه‌ی همگرایی بازه‌ی $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ است. البته برای بدست آوردن شعاع همگرایی سری S_1 می‌توانستیم از آزمون نسبت هم کمک بگیریم:

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=|\frac{\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n+1)}{1\times5\times9\times\cdots\times(4n+1)}}{\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n+1)(3n+4)}{1\times5\times9\times\cdots\times(4n+1)(4n+5)}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{4n+5}{3n+4}|=\frac{4}{3}$$

و ادامه حل همان‌طور که در روش اول گفته شد.

۳۱ـ گزینه «۴» با استفاده از بسط‌های مک‌لورن $\cos x$، $Ln(1-x^2)$ و بسط برنولی برای $\sqrt{1-x^2}$ داریم:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-+\cdots\quad,\quad Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\quad,\quad \sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{-1}{8}x^4+\cdots$$

بنابراین بسط مک لورن $f(x)$ به این صورت است:

$$f(x)=x(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots)(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots)$$

از ضرب x در پرانتز اول $-\frac{1}{8}x^5$ داریم و از ضرب دو پرانتز دیگر در هم و تأثیر علامت منفی جملات $-\frac{x^5}{5}$، $-\frac{x^5}{6}$ و $-\frac{x}{24}$ تولید می‌شود، لذا ضریب x^5 برابر است با:

$$\frac{-1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{-15-24+20-5}{120}=\frac{-24}{120}=\frac{-1}{5}$$

۳۲ـ گزینه «۱» با توجه به وجود فاکتوریل، در جمله‌ی عمومی سری، بهتر است از آزمون ریشه و هم‌ارزی استرلینگ استفاده کنیم. طبق این هم‌ارزی، وقتی $n\to\infty$ داریم $\sqrt[n]{(kn)!}\simeq(\frac{kn}{e})^k$. در سری داده شده داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^3}{(kn)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{e})^3}{(\frac{kn}{e})^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^kn^3}{e^3k^kn^k}$$

در این حد، k عددی ثابت و n متغیر است. اگر $k>3$ باشد مقدار حد صفر می‌شود و اگر $k=3$ باشد، مقدار حد $\frac{1}{27}$ است. اما اگر $k<3$ باشد، درجه‌ی صورت بیشتر است و مقدار حد ∞ می‌شود. پس شرط همگرایی آن است که $k\leq3$ باشد.

۳۳ـ گزینه «۲» می‌دانیم $\cos n\pi=(-1)^n$ و بنابراین سری به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{(2n+1)+(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}]$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^n}{2n-1}]=\underbrace{\frac{1}{4}(\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1})}_{\text{سری تلسکوپی}}=\frac{1}{4}(-1)=-\frac{1}{4}$$

۳۴ـ گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که a_n هر بار در عددی بزرگتر از یک ضرب می‌شود پس دنباله‌ای صعودی است. با توجه به ضابطه‌ی a_n با به توان ۲ رساندن داریم:

$$a_n=\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}}}\Rightarrow a_n^2=3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}}\Rightarrow a_n^4=9\underbrace{(2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}})}_{a_n}\Rightarrow a_n^4=18a_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n^4=\lim_{n\to\infty}18a_n$$

$$L^4=18L\Rightarrow L^4-18L=0\Rightarrow\begin{cases}L=0\\L=\sqrt[3]{18}\end{cases}$$

$L=0$ قابل قبول نیست زیرا دنباله‌ی a_n صعودی است پس $a_1\leq a_n$ در نتیجه $\sqrt{3\sqrt{2}}\leq L$، بنابراین جواب $\sqrt[3]{18}$ است.

۳۵ـ گزینه «۴» دنباله‌ی $a_n=(2+(-1)^n)^n$ به ازای n های زوج و فرد مقادیر متفاوتی دارد.

$$a_n=\begin{cases}3^n & ; n=2k\\1 & ; n=2k+1\end{cases}$$

بنابراین حد $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ نیز برای n های زوج و فرد به دو جواب مختلف می‌رسد:

برای n های زوج:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3\Rightarrow R=\frac{1}{3}$$

برای n های فرد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1\Rightarrow R=1$$

همان‌طور که گفتیم کوچکترین شعاع همگرایی باید در نظر گرفته شود و لذا $R=\frac{1}{3}$ و بنابراین بازه همگرایی به صورت $|x|<\frac{1}{3}$ و یا $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ است و چون خود سؤال گفته به صورت $(-a,a)$ است. لذا بررسی در نقاط مرزی لازم نیست و $a=\frac{1}{3}$ باید در نظر گرفته شود.

اکنون دنباله‌ی $b_n=(\frac{۲+(-۱)^n}{۵+(-۱)^{n+۱}})^n$ را در نظر می‌گیریم. با جدا کردن مقادیر زوج و فرد خواهیم داشت:

$$b_n=\begin{cases}(\frac{۳}{۴})^n & ;n=۲k\\ (\frac{۱}{۶})^n & ;n=۲k+۱\end{cases}$$

به این ترتیب حد $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ برای زیردنباله‌های زوج و فرد به ترتیب به مقادیر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۶}$ خواهد رسید. پس $R_۱=\frac{۴}{۳}$ و $R_۲=۶$ و چون $R_۱<R_۲$، پس شعاع همگرایی برابر با $R_۱$ یعنی $\frac{۴}{۳}$ است.

همانند سری اول بازه‌ی همگرایی سری دوم نیز به صورت $(-b\ ,\ b)=(-\frac{۴}{۳}\ ,\ \frac{۴}{۳})$ است و بنابراین $b=\frac{۴}{۳}$ است. دیدیم که $a=\frac{۱}{۳}$ و $b=\frac{۴}{۳}$ است، پس: **b = ۴a**.

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» لازم نیست حد جمله عمومی را حساب کنیم، چون با توجه به گزینه‌ها، حتماً سری همگراست یعنی حد جمله عمومی برابر صفر است، با این حال حد را حساب می‌کنیم:

در هردو حالت حد جمله عمومی برابر صفر است.

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \xrightarrow{n\ \text{زوج}} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\left[\dfrac{1}{n}\right] = \dfrac{1}{+\infty}\left[\dfrac{1}{+\infty}\right] = 0\times\left[0^+\right] = 0\times 0 = 0 \\ \xrightarrow{n\ \text{فرد}} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}\left[-\dfrac{1}{n}\right] = \dfrac{1}{+\infty}\left[\dfrac{-1}{+\infty}\right] = 0\times\left[0^-\right] = 0\times(-1) = 0 \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3}\right] + \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{5}\right] + \cdots$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{32} + \cdots = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \cdots$$

ملاحظه می‌شود یک سری هندسی با جمله اول $a_1 = -\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{4}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$$

۲ـ گزینه «۱» در واقع حد فوق را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$A = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^3}{n^4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1)}{n^4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{8\sum\limits_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum\limits_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum\limits_{k=1}^{n}k - \sum\limits_{k=1}^{n}1}{n^4}$$

$$\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{n\to+\infty}\frac{8(\frac{n^4}{4}) - 12(\frac{n^3}{3}) + 6(\frac{n^2}{2}) - n}{n^4} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4}{n^4} = 2$$

۳ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b\cos a$ و تساوی $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ داریم:

$$\sin\frac{1}{n(n+1)} = \sin(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n}$$

پس سری داده شده را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}.\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}.\cos\frac{1}{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{tg\frac{1}{n}}_{f_n} - \underbrace{tg\frac{1}{n+1}}_{f_{n+1}}) = tg\frac{1}{1} - \lim_{n\to+\infty} tg\frac{1}{n+1} = tg1 - tg0 = tg1 - 0 = tg1$$

۴ـ گزینه «۳»

$$S = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-n}} - \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}\right) \xrightarrow{n=\sqrt{n^2}}$$

$$S = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2-n}} - \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2-n}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}_{f_n} - \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}_{f_{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{2}{2-1}} - \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{2} - 1$$

۵ـ گزینه «۳» بهتر است از طرفین Ln بگیریم:

$$Lna_n = Lne^{-nk}(1+\frac{k}{n})^{n^2} \xrightarrow{LnAB = LnA + LnB} Lna_n = Lne^{-nk} + Ln(1+\frac{k}{n})^{n^2} \Rightarrow Lna_n = -nk + n^2Ln(1+\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Lna_n = \lim_{n\to+\infty}(-nk) + \lim_{n\to+\infty} n^2Ln(1+\frac{k}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(-nk) + \lim_{n\to+\infty} n^2\left[\frac{k}{n} - \frac{1}{2}(\frac{k}{n})^2 + \frac{1}{3}(\frac{k}{n})^3 + \cdots\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(-nk) + \lim_{n\to+\infty}(nk) - \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} k^2 + \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{3}(\frac{k}{n})^3 + \cdots$$

دو حد اول با هم حذف می‌شوند و در سمت راست فقط $-\frac{k^2}{2}$ باقی می‌ماند، (چون حدود بعد از آن صفر می‌شوند.) پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} Lna_n = -\frac{k^2}{2} \Rightarrow \mathbf{a_n = e^{-\frac{k^2}{2}}}$$

۶ـ گزینه «۱» ابتدا صورت کسر را به‌صورت جمع اعداد طبیعی از ۱ تا $2n$ منهای دو برابر جمع اعداد زوج می‌نویسیم.

$$a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2+3-4+5\cdots-2n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{4n^2-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+2n)-2(2+4+6+\cdots+2n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{4n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2n(2n+1)}{2}-2[n(n+1)]}{n+2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{4n^2+2n}{2}-(2n^2+2n)}{3n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{4n^2+2n-4n^2-4n}{2}}{3n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{3n}=-\frac{1}{3}$$

توجه داشته باشید که $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد که فقط به جای n باید $2n$ را قرار دهیم و همچنین جمع اعداد زوج برابر است با $n(n+1)$.

۷ـ گزینه «۱» ابتدا تابع f را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$f(x)=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}+1\Rightarrow f'''(x)=\frac{3!}{(x+1)^4}\Rightarrow f'''(1)=\frac{3!}{2^4}\Rightarrow \text{ضریب}=\frac{f'''(1)}{3!}=\frac{1}{2^4}$$

۸ـ گزینه «۱» صورت کسر یعنی $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$ را S_1 می‌نامیم و سپس مخرج کسر را براساس S_1 به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\text{مخرج کسر}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots=S_1-2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\cdots\right)=S_1-2\times\frac{1}{2^p}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\right)}_{S_1}=S_1-\frac{2}{2^p}S_1$$

$$\Rightarrow \text{مخرج کسر}=S_1\left(1-\frac{2}{2^p}\right)=S_1(1-2^{1-p})$$

اکنون به جای مخرج کسر معادل آن را برحسب S_1 قرار می‌دهیم و داریم:

$$S=\frac{1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}=\frac{S_1}{S_1(1-2^{1-p})}=\frac{1}{1-2^{1-p}}$$

۹ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک‌لورن $\sin x$ داریم:

$$Ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=Ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots}{x}\right)=Ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots\right)=Ln\left[1+\left(\frac{-x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)-+\cdots\right]$$

همان‌طور که می‌دانیم بسط مک‌لورن $Ln(1+u)$ به‌صورت مقابل است:

$$Ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-+\cdots$$

در این سؤال $u=\frac{-x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots$، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل بسط}\sim\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-+\cdots\right)^2}{2}+-\cdots$$

همان‌طور که مشخص است ضریب x^4 برابر با مقدار زیر است:

$$\text{ضریب } x^4=\frac{1}{5!}-\frac{\left(-\frac{1}{3!}\right)^2}{2}=\frac{1}{5!}-\frac{1}{2\times(3!)^2}$$

۱۰ـ گزینه «۳» عبارت صورت کسر یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$ و جمله اول $a_1=1$ و همچنین عبارت مخرج کسر یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q=\frac{1}{3}$ و جمله اول $a_1=1$ می‌باشد و لذا با توجه به فرمول مجموع جملات تصاعد هندسی با جملات نامتناهی یعنی $S_n=\frac{a_1}{1-q}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۳»

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n n}{n!}+\frac{2^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

چون $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ پس $e^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ از طرفی $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ پس $xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$ پس $2e^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$ بنابراین $S=e^2+2e^2=3e^2$.

۱۲ـ گزینه «۲» اگر $x=1$ باشد، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ همگرا است. اگر $x=-1$ باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ به‌صورت:

$$(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}+\cdots)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)$$

که مجموع دو سری هندسی همگرا با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تبدیل شده و همگرا است. از طرفی طبق آزمون نسبت داریم: $\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{(n+1)^2}}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{x^{n^2}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+1}}{2}|$

اگر $|x|<1$ باشد، حاصل حد فوق صفر بوده و سری همگراست و در غیر این صورت واگراست.

۱۳ـ گزینه «۳» اولاً می‌دانیم:

$\cot g^{-1}(n^2+n+1)=tg^{-1}(\frac{1}{n^2+n+1})$، از طرفی چون $\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n+1}$، با استفاده از فرمول زیر $tg^{-1}(\frac{a-b}{1+ab})=tg^{-1}a-tg^{-1}b$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{1393}\cot g^{-1}(n^2+n+1)=\sum_{n=1}^{1393}tg^{-1}(\frac{1}{n^2+n+1})=\sum_{n=1}^{1393}tg^{-1}(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)})=\sum_{n=1}^{1393}[tg^{-1}(n+1)-tg^{-1}n]=(-1)\sum_{n=1}^{1393}\underbrace{tg^{-1}n}_{f(n)}-\underbrace{tg^{-1}(n+1)}_{f(n+1)}$$

$$=(-1)[tg^{-1}(1)-tg^{-1}1394]=tg^{-1}(1394)-tg^{-1}(1)=tg^{-1}(\frac{1394-1}{1+1394\times1})=tg^{-1}(\frac{1393}{1395})$$

$$S=\cot g[\sum_{n=1}^{1393}\cot g^{-1}(n^2+n+1)]=\cot g[tg^{-1}(\frac{1393}{1395})]=\cot g[\cot g^{-1}\frac{1395}{1393}]=\mathbf{\frac{1395}{1393}}$$

۱۴ـ گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال، تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم برای n های بزرگ $Ln(Lnn)>1$، بنابراین $\frac{1}{n(Lnn)}>\frac{2^{Ln(Lnn)}}{nLnn}$، و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ واگراست، سری گزینه (۱)، نیز واگراست. هر چند پاسخ به تست در همین‌جا تمام است. اما برای تمرین حل را ادامه می‌دهیم.

بررسی گزینه (۲): در این گزینه با یک سری متناوب روبه‌رو هستیم که $a_n=\frac{1}{2^n}$ که باید دو شرط لایب‌نیتز را برای آن کنترل کنیم:

الف) باید $a_{n+1}<a_n$، یعنی a_n نزولی باشد، واضح است این دنباله نزولی است، پس اولین شرط برقرار است.

ب) باید $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$، که واضح است $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ پس شرط دوم هم برقرار است. بنابراین سری متناوب و همگراست.

بررسی گزینه (۳): واضح است سری داده شده، هم‌ارز سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، است و مطابق مطالب P ـ سری این سری همگراست.

بررسی گزینه (۴): سری داده شده برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$. می‌دانیم برای n های بزرگ، $e^{\sqrt{n}}>n$ است. بنابراین $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{n}$ است، پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ است و چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ طبق P– سری‌ها همگراست، این سری نیز همگراست.

۱۵ـ گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{\log\frac{n+1}{n+2}}_{f_n}-\underbrace{\log\frac{n+2}{n+3}}_{f_{n+1}})=\log\frac{1+1}{1+2}-\lim_{n\to+\infty}\log\frac{n+2}{n+3}=\log\frac{2}{3}-\cancel{\log 1}=\log\frac{2}{3}$$

۱۶ـ گزینه «۱» ابتدا تابع را تجزیه کرده و مخرج باید مخالف صفر باشد.

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}=\frac{-1}{x+n}+\frac{1}{x+n-1}$$
$$x+n\neq0\ \to x\neq-n\ \Rightarrow x\neq-1,-2,-3,\ldots$$
$$x+n-1\neq0\ \to x\neq-n+1\ \Rightarrow x\neq0,-1,-2,-3$$

۱۷ـ گزینه «۴» اگر $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت d بدهند، همواره $u_{i+۱}-u_i=d$ و لذا داریم:

$$\frac{۱}{u_iu_{i+۱}}=\frac{\frac{۱}{d}(u_{i+۱}-u_i)}{u_iu_{i+۱}}=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{u_i}-\frac{۱}{u_{i+۱}}\right)\Rightarrow S=\frac{۱}{d}\sum_{i=۱}^{n-۱}\left(\underbrace{\frac{۱}{u_i}}_{f_i}-\underbrace{\frac{۱}{u_{i+۱}}}_{f_{i+۱}}\right)$$

با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی حاصل سری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{u_۱}-\frac{۱}{u_{n-۱+۱}}\right)=\frac{۱}{d}\left(\frac{۱}{u_۱}-\frac{۱}{u_n}\right)=\frac{۱}{d}\left(\frac{u_n-u_۱}{u_۱u_n}\right)\xrightarrow{u_n-u_۱=d(n-۱)}S=\frac{۱}{d}\left(\frac{d(n-۱)}{u_۱u_n}\right)=\frac{n-۱}{u_۱u_n}$$

۱۸ـ گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش تشریحی: ابتدا کسر داده شده را تفکیک می‌کنیم و سپس از قاعده تلسکوپی استفاده می‌کنیم.

$$S=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)(n+۱)n}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(n+۱)-(n-۱)}{(n-۱)n(n+۱)}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)n}-\frac{۱}{n(n+۱)}$$

با فرض $f_n=\frac{۱}{(n-۱)n}$ داریم $f_{n+۱}=\frac{۱}{n(n+۱)}$. بنابراین یک سری تلسکوپی داریم که از $n=۲$ آغاز می‌شود. طبق فرمول سری‌های تلسکوپی خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}(f_n-f_{n+۱})=\frac{۱}{۲}(f_۲-\lim_{n\to\infty}f_{n+۱})=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\infty}\right)=\frac{۱}{۴}$$

روش تستی:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n^۳-n}=\frac{۱}{۲^۳-۲}+\cdots=\frac{۱}{۶}+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۶}<\text{حاصل سری}<\frac{۱}{۶}+۲\times\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\text{حاصل سری}<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) جوابه.

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا بسط مک‌لورن مخرج کسر را می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۱+\frac{x}{۶}}=۱-\frac{x}{۶}+\frac{x^۲}{۶^۲}-\frac{x^۳}{۶^۳}+\frac{x^۴}{۶^۴}+\cdots$$

و اگر بسط مک‌لورن $Ln(۱+x)$ را بنویسیم، صورت کسر به‌صورت زیر می‌شود:

$$\left(۱+\frac{۲}{۳}x\right)\left(x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\ldots\right)=\left[\left(x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots\right)+\left(\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۲}{۳}\left(\frac{x^۳}{۲}\right)+\frac{۲}{۳}\left(\frac{x^۴}{۳}\right)-\frac{۲}{۳}\left(\frac{x^۵}{۴}\right)+-\cdots\right)\right]$$

لذا داریم:

$$\frac{۱}{۱+\frac{x}{۶}}\left(۱+\frac{۲}{۳}x\right)Ln(۱+x)=\left(۱-\frac{x}{۶}+\frac{x^۲}{۶^۲}-\frac{x^۳}{۶^۳}+\frac{x^۴}{۶^۴}-+\cdots\right)\left[x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots+\left(\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۲}{۳}\left(\frac{x^۳}{۲}\right)+\frac{۲}{۳}\left(\frac{x^۴}{۳}\right)-+\cdots\right]$$

در این مرحله عبارت داخل کروشه دوم را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\left[x+\left(-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}\right)x^۲+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۶}\right)x^۳+\left(-\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۹}\right)x^۴+\cdots\right]=x+\frac{۱}{۶}x^۲+\frac{-۱}{۳۶}x^۴+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$\left(۱-\frac{x}{۶}+\frac{x^۲}{۶^۲}-\frac{x^۳}{۶^۳}+\frac{x^۴}{۶^۴}-+\cdots\right)\left(x+\frac{۱}{۶}x^۲-\frac{۱}{۳۶}x^۴+\cdots\right)$$

فقط جملاتی که نشان داده شده‌اند، جمله‌ی شامل $x^۴$ دارند، که ضرایب آنها به‌صورت مقابل است:

$$x\ \text{ضریب}=-\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۶^۳}-\frac{۱}{۶^۳}=-\frac{۱}{۳۶}$$

۲۰ـ گزینه «۲» باید از بسط $\frac{۱}{۱-x}$ مشتق بگیریم و بعد از آن به جای تمام xها، عدد $\frac{۲}{۳}$ را قرار دهیم:

$$\frac{۱}{۱-x}=\sum_{n=۰}^{\infty}x^n\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{۱}{(۱-x)^۲}=۰+\sum_{n=۱}^{\infty}nx^{n-۱}=\sum_{n=۱}^{\infty}nx^{n-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{در طرفین به جای xها،}\ \frac{۲}{۳}\ \text{قرار می‌دهیم}}\frac{۱}{\left(۱-\frac{۲}{۳}\right)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}n\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}n\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱}=۹$$

۲۱ـ گزینه «۳» سؤال خیلی سخت نیست، اما کمی وحشت اولیه، طبیعی است! ابتدا توجه کنید؛ عبارت داده شده در توان a، خودش سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را نمایش می‌دهد که می‌دانیم یک سری واگرا می‌باشد و دارای حد ∞ است. بنابراین برای همگرایی سری اصلی لازم است؛ a عددی باشد که وقتی به توان بی‌نهایت می‌رسد، برابر با صفر شود. (چون همان‌طور که می‌دانیم شرط لازم برای همگرایی هر سری این است که حد جمله‌ی عمومی صفر شود)
با این توضیحات، واضح است؛ a نمی‌تواند برابر با یک و یا بزرگتر از یک باشد، پس $0 < a < 1$، که البته در این حالت فقط شرط لازم برای همگرایی سری برقرار می‌شود. اما باید دید سری شرط کافی برای همگرایی را هم دارد؟ برای این منظور از آزمون رابه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

همان‌طور که می‌بینید، با حالت ابهام «$\infty\times 0$»، روبه‌رو هستیم، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}}\right)=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{-1}{(n+1)^2}a^{\frac{1}{n+1}}\text{Ln}a}{-\frac{1}{n^2}}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{+\frac{1}{n^2}a^{\frac{1}{n+1}}}{-\frac{1}{n^2}}\text{Ln}a=-a^{\frac{1}{+\infty}}\text{Ln}a=-a^{0}\text{Ln}a=-\text{Ln}a$$

بر طبق آزمون رابه، شرط همگرایی این است که $-\text{Ln}a>1$ باشد و برای این منظور باید $\text{Ln}a<-1$ و لذا با شرط $a<e^{-1}$ سری همگراست.

۲۲ـ گزینه «۱» باید سعی کنیم، $f(x)$ را به شکل سری توانی بنویسیم. برای این منظور از بسط مک‌لورن $\text{Ln}(1+t)$، استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}}{t}dt=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\left(\frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}t^{(n-1+1)}}{n(n-1+1)}\right]_0^x\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$$

حالا به راحتی می‌توان شعاع همگرایی $f(x)$ را حساب کرد:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1\Rightarrow R=1$$

۲۳ـ گزینه «۲» برای ساده‌تر حل شدن این سؤال، بهتر است کمی از اطلاعات مثلثاتی خود کمک بگیریم:

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$$

حالا اگر بسط $\sin^{-1}x$ را بنویسیم، به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3-\cdots$$

۲۴ـ گزینه «۳» با یک سؤال نسبتاً سخت روبه‌رو هستیم! ابتدا مخرج کسر داده شده در سری را تجزیه کرده و بعد عبارت را به دو کسر تفکیک می‌کنیم:

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)(n-1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n-1}-\frac{(-1)^n}{n+2}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}=\frac{1}{3}S_1+\frac{1}{3}S_2$$

می‌دانیم $\text{Ln}(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$، که با قرار دادن $x=1$ در طرفین این تساوی داریم:

$$\text{Ln}(1+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1)^n}{n}\Rightarrow \mathbf{Ln2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود در سری $\text{Ln}2$ به شکل مقابل به سری S_1 می‌رسیم:

$$\text{Ln}2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}=S_1$$

و به همین ترتیب اگر در سری S_2 نیز از قاعده‌ی لغزاندن حدود استفاده کنیم، داریم:

$$S_2=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

اما اینجای کار کمی دقت می‌خواهد. واضح است؛ سری فوق را می‌توان معادل سری $\text{Ln}2$ دانست که البته ۳ جمله‌ی اول آن وجود ندارد، پس داریم:

$$S_2=\text{Ln}2-\left[\frac{(-1)^{1-1}}{1}+\frac{(-1)^{2-1}}{2}+\frac{(-1)^{3-1}}{3}\right]=\text{Ln}2-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\text{Ln}2-\frac{5}{6}$$

پس حاصل نهایی سری به‌صورت مقابل است:

$$S=\frac{1}{3}S_1+\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3}\left[\text{Ln}2+\text{Ln}2-\frac{5}{6}\right]=\frac{1}{3}\left[2\text{Ln}2-\frac{5}{6}\right]=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{Ln2}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}$$

۲۵ـ گزینه «۳» یک سؤال نسبتاً جالب! دقت کنید؛ صورت کسر را می‌توان به‌صورت سری $S=\sum_{k=۱}^{n} kk!$ نوشت. این سری را می‌توان به شکل زیر به فرم «سری تلسکوپی» تبدیل کرد:

$$S=\sum_{k=۱}^{n}[(k+۱)-۱]k! = \sum_{k=۱}^{n}[k!(k+۱)-k!] = \sum_{k=۱}^{n}[(k+۱)!-k!] = -\sum_{k=۱}^{n}[\underbrace{k!}_{f_k}-\underbrace{(k+۱)!}_{f_{k+۱}}] = -۱+\mathbf{(n+۱)!}$$

پس حد خواسته شده به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+۱)!-۱}{(n+۱)!}\right) \simeq \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+۱)!}{(n+۱)!} = ۱$$

۲۶ـ گزینه «۲» اگر مقدار حد موجود باشد، (که طبق گزینه‌ها موجود است) به ازای $n=۳k$ یا $n=۳k+۱$ یا $n=۳k+۲$ باید به جواب‌های یکسانی برسیم.

فرض می‌کنیم $n=۳k$ مضرب سه باشد. در صورت این کسر داریم:

$$\left(\left[\frac{۱}{۳}\right]+\left[\frac{۲}{۳}\right]\right)+\left(\left[\frac{۳}{۳}\right]+\left[\frac{۴}{۳}\right]+\left[\frac{۵}{۳}\right]\right)+\left(\left[\frac{۶}{۳}\right]+\left[\frac{۷}{۳}\right]+\left[\frac{۸}{۳}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\frac{n-۳}{۳}\right]+\left[\frac{n-۲}{۳}\right]+\left[\frac{n-۱}{۳}\right]\right)+\left[\frac{n}{۳}\right]$$

$$=۰+(۱+۱+۱)+(۲+۲+۲)+\cdots+(k-۱+k-۱+k-۱)+k = ۰+۳(۱)+۳(۲)+\cdots+۳(k-۱)+k = ۳(۱+۲+\cdots+(k-۱))+k$$

$$=۳\frac{(k-۱)k}{۲}+k=\frac{۳}{۲}k^۲-\frac{۱}{۲}k$$

البته $k=\frac{n}{۳}$ است، بنابراین صورت کسر برابربا $\frac{۳}{۲}(\frac{n}{۳})^۲-\frac{۱}{۲}(\frac{n}{۳})$ است.

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۳}{۲}(\frac{n}{۳})^۲-\frac{۱}{۲}(\frac{n}{۳})}{n^۲} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{۶}n^۲-\frac{۱}{۶}n}{n^۲}=\frac{۱}{۶}$$

۲۷ـ گزینه «۳»

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi^+}{۴}}\left[tg\frac{۳\pi}{۸}\right]^{tg\frac{\pi^+}{۲}} \xrightarrow{\frac{۳\pi}{۸}>\frac{\pi}{۴}\Rightarrow tg\frac{۳\pi}{۸}>۱} \lim_{x\to\frac{\pi^+}{۴}}(\text{یک عدد بزرگتر از ۱})^{-\infty}=۰$$

برای محاسبه B، بجای n به ترتیب عدد می‌گذاریم و متوجه می‌شویم که کمان‌ها همگی در ربع دوم قرار دارند پس حاصل sin آنها مثبت است:

$$\left.\begin{array}{l} n=۱\to\sin\frac{\pi}{۲}=۱\\ n=۲\to\sin\frac{۴\pi}{۷}<۱\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ n=\infty\to\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{array}\right\}$$

برای $n\ge ۲$ از قضیه فشردگی استفاده می‌شود:

$$۰\le(\sin\frac{۲\pi n}{۳n+۱})^n\le(\sin\frac{۴\pi}{۷})^n \xrightarrow{\lim_{n\to\infty}۰=\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{۴\pi}{۷})^n} B=\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{۲\pi n}{۳n+۱})=۰$$

۲۸ـ گزینه «۴» از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم، یعنی رابطه داده شده را به صورت تعریف مشتق در می‌آوریم:

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}$$

با حدگیری از طرفین تساوی، وقتی $y\to ۰$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{y\to۰}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to۰}\frac{۱}{y}\left(\frac{y}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}+f(x)-f(x)\right)=\lim_{y\to۰}\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

در نتیجه $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$، و با انتگرال‌گیری از آن داریم $f(x)=\sqrt{x}+c$، با توجه به اینکه $f(۰)=۰$، پس $f(x)=\sqrt{x}$ و لذا $f(k)=\sqrt{k}$.

$$\Rightarrow\sum_{k=۹}^{۵۳}(\sqrt{k})^۲=\sum_{k=۹}^{۵۳}k=\frac{۵۳\times۵۴}{۲}-\frac{۸\times۹}{۲}=۱۴۳۱-۳۶=\mathbf{۱۳۹۵}$$

۲۹ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$k^3+6k^2+11k+5=(k+1)(k+2)(k+3)-1$$

و لذا داریم:

$$\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right)$$

همان‌طور که می‌بینید؛ یک سری با فرم سری تلسکوپی داریم که اختلاف اندیس‌ها بیشتر از یک واحد، یعنی ۳ واحد است. پس باید سه جمله اول سری را برای $\frac{1}{k!}$ بنویسیم و سپس عدد ۳ را در حد قسمت دوم سری در بی‌نهایت (یعنی $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(k+3)!}$) ضرب کنیم، حد جمله‌ی دوم سری در بی‌نهایت که صفر است، بنابراین کافیست مجموع سه جمله‌ی اول سری را به ازای $k=1$، $k=2$ و $k=3$ بدست بیاوریم:

$$S=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

روش تستی: اگر مقدار سری صورت سؤال را به ازای $k=1$ حساب کنیم، داریم:

$$\frac{1^3+6(1)^2+11\times1+5}{(1+3)!}=\frac{23}{24}$$

خُب $\frac{23}{24}$، فقط مقدار جمله‌ی اول این سری است که قراره با عددهای مثبت دیگه جمع بِشه، اما این عددهای دیگه مقدارشون چقدره؟ اگر مقدار سری به ازای $k=2$ را حساب کنیم، عددی بدست می‌آید که وقتی با $\frac{23}{24}$ جمع می‌شود، عددی بزرگتر از یک پدید می‌شود، پس گزینه‌های (۲) و (۴) غلط هستند! اما در سؤالاتی که در مخرج فاکتوریل یا توان نمایی در مخرج (a^n) داریم، می‌توان با قطعیت گفت؛ مقدار جمله‌ی اول سری (به ازای $k=1$) قطعاً بزرگتر یا مساوی سایر جملات است، پس سایر جملات سری حداکثر $\frac{23}{24}$ هستند که وقتی با $\frac{23}{24}$ (مربوط به جمله‌ی اول) جمع می‌شوند، قطعاً مقدار سری به عدد $\underline{\underline{2}}$ نمی‌رسد، پس گزینه (۲) هم غلط است!

۳۰ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که تساوی $\frac{1}{x^a+1}=1-x^a+x^{2a}-x^{3a}+\cdots$ را داریم. از انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1\frac{1}{x^a+1}dx=\int_0^1(1-x^a+x^{2a}-\cdots)dx=\left(x-\frac{x^{a+1}}{a+1}+\frac{x^{2a+1}}{2a+1}-\cdots\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2a+1}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$$

۳۱ـ گزینه «۱» ابتدا سعی می‌کنیم صورت و مخرج را ساده کنیم:

$$\frac{n!}{n!\times(n+1)+(n!)\times(n+1)(n+2)}=\frac{n!}{n!(n+1)[1+n+2]}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

خُب حالا دیگه فرم سری برای ما آشناست و می‌تونیم به راحتی با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی حاصل سری را حساب کنیم:

$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(f_n-f_{n+2})$$

با توجه به این که اختلاف جملات ۲ واحد است، حاصل سری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{12}$$

۳۲ـ گزینه «۱» هر دو سری را با استفاده از آزمون ریشه بررسی می‌کنیم. در سری سمت راست دقت کنید که برای چندجمله‌ای‌ها داریم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$ و برای جملات نمایی $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^{kn+b}}=A^k$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)^3e^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n+1)^3}\sqrt[n]{e^{n+1}}}{\sqrt[n]{3^n}}=\frac{e}{3}<1$$

در سری سمت چپ هم دقت کنید که $n+2$ چندجمله‌ای است و $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2}=1$ خواهد بود:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n^{2n})(n+2)}{(1+n)^{3n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(1+n)^3}=0<1$$

در هر دو سری، حاصل حد ریشه‌ی nاُم کوچکتر از یک است. بنابراین هر دوی آن‌ها همگرا هستند.

۳۳ـ گزینه «۳» از قضیه‌ی همگرایی میانگین هندسی برای تعیین حد جمله عمومی استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه اگر دنباله‌ی a_n به L همگرا باشد، آنگاه $a_1a_2\cdots a_n \simeq L^n$ در این سری دنباله‌ی $a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$، پس داریم:

$$S \simeq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

بنابراین شعاع همگرایی این سری $R = \frac{3}{2}$ است. همان‌طور که گفتیم بازه همگرایی $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ است. اما در دو نقطه‌ی $x = \pm\frac{3}{2}$ بررسی نشان می‌دهد که به سری‌های واگرا می‌رسیم:

$$x = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\pm\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n$$

پس شعاع همگرایی $R = \frac{3}{2}$ و ناحیه‌ی همگرایی $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ است.

۳۴ـ گزینه «۳» از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^x - n}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 0}\frac{2^x \operatorname{Ln}2 + 3^x \operatorname{Ln}3 + \cdots + n^x \operatorname{Ln}n}{1} = \operatorname{Ln}2 + \operatorname{Ln}3 + \cdots + \operatorname{Ln}n = \operatorname{Ln}(n!)$$

۳۵ـ گزینه «۴» جمله nام سری فوق به صورت مقابل است:

$$a_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(-2)^i}$$

با استفاده از فرمول مجموع جملات تصاعد هندسی داریم:

$$a_n = \frac{\frac{2(2^n-1)}{2-1}}{\frac{-2((-2)^n-1)}{-2-1}} = \frac{-6(2^n-1)}{-2((-2)^n-1)} = 3\times\frac{2^n-1}{(-1)^n 2^n - 1}$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$ میل کند، برای nهای زوج مقدار حد برابر با ۳ است و برای nهای فرد، مقدار حد برابر با ۳− است. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$

برای nهای بزرگ داریم $2^n - 1 \simeq 2^n$ پس:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3\times\frac{2^n}{(-1)^n 2^n}$$

به این ترتیب برای nهای زوج مقدار حد ۳+ و برای nهای فرد مقدار حد ۳− است، این نشان می‌دهد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود ندارد. پس شرط لازم برای همگرا بودن سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ برقرار نیست. این سری واگراست.

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» دو منحنی همدیگر را در مبدأ مختصات قطع می‌کنند.

$$4\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad 4\cos^2\theta - 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_2 = \pm\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow |\theta_2 - \theta_1| = \frac{\pi}{3}$$

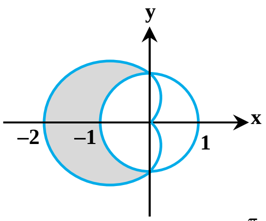
۲ـ گزینه «۱»

زاویه‌ی بین شعاع حامل و خط مماس از رابطه‌ی $\operatorname{tg}\theta = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ به دست می‌آید.

$f(\theta) = 2(1-\cos\theta)$ و $f'(\theta) = 2\sin\theta$

با توجه به اینکه در نقطه‌ی فوق $f'(\theta) = 0$ می‌باشد، لذا $\theta = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

۳ـ گزینه «۳» با توجه به شکل باید مساحت ناحیه هاشورخورده را محاسبه کنیم، بدین منظور تقاطع دو منحنی را بدست می‌آوریم، سپس از آنجائی‌که شکل متقارن است، فقط مساحت نیمه بالایی را محاسبه کرده و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم. هر خط شعاعی از $r = 1$ وارد و از $r = 1 - \cos\theta$ خارج می‌شود، بنابراین داریم:



$$1 = 1 - \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \; , \; \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{مساحت نیمه بالایی} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [(1-\cos\theta)^2 - 1]d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^2\theta - 2\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta)d\theta$$

$$= [\frac{1}{4}\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta - \sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = [\frac{1}{4}(\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{8}(\sin 2\pi - \sin\pi) - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}]$$

$$\text{مساحت کل} = 2(\frac{\pi}{8} + 1) = \frac{\pi}{4} + 2$$

۴ـ گزینه «۱» منحنی موردنظر رز ۵ برگ است، بنابراین مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را ۵ برابر می‌کنیم.

$$\cos 5\theta = 0 \Rightarrow 5\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{10}$$

$$S = 5 \times \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^2 5\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}$$

۵ـ گزینه «۲» مساحت محصور درون منحنی $r = f(\theta)$ از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1+\operatorname{tg}^2\theta) - 1)d\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}(4 - \pi)$$

۶ـ گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$2 + \sin\theta = 2 + \cos 2\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos 2\theta \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مساحت موردنظر برابر است با:

$$S = 2 \times \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} ((2+\cos 2\theta)^2 - (2+\sin\theta)^2)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 2\theta + \cos^2 2\theta - 4\sin\theta - \sin^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} - 4\sin\theta - \frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta = \frac{51\sqrt{3}}{16}$$

بنابراین مساحت $\frac{51}{16}$ برابر $\sqrt{3}$ می‌باشد.

۷ـ گزینه «۴» منحنی مورد نظر شبیه رز می‌باشد و n برگ دارد مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را n برابر می‌کنیم.

$$S=\frac{1}{2}\times n\int_{\frac{-\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} a^2\cos n\theta d\theta = na^2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos n\theta d\theta = na^2\times\frac{1}{n}\sin n\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2n}}=a^2$$

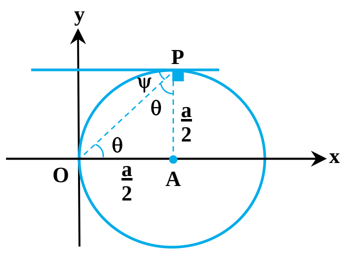
۸ـ گزینه «۱» $(r^2=1-\theta^2=0\ \Rightarrow\theta=-1,1)$ پس حدود انتگرال $\theta=-1$ و $\theta=1$ هستند.

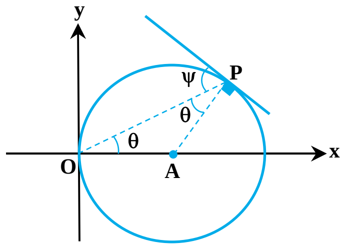
$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}r^2dt=\int_0^1 r^2d\theta=\int_0^1(1-\theta^2)d\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۹ـ گزینه «۴» چون برای $r=1\ \Rightarrow\theta=\sin\frac{1}{3}$ و برای $r=3\ \Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$ پس داریم:

$$L=\int_{\sin^{-1}\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\int_{\sin^{-1}\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9}\,d\theta=3\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

۱۰ـ گزینه «۳» نقطه‌ی دلخواه $P(r,\theta)$ را روی منحنی $r=a\cos\theta$ در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید این منحنی یک دایره به مرکز $A(\frac{a}{2},0)$ است. در شکل مقابل AP و OA هر دو شعاع‌های دایره هستند، پس با هم برابرند. پس مثلث OAP متساوی‌الساقین است. این نشان می‌دهد که زاویه‌ی $A\hat{P}O$ با θ برابر است. از طرفی شعاع دایره بر خط مماس عمود است؛ پس $\psi+\theta=\frac{\pi}{2}$.





توضیح: اگر به روش رد گزینه بخواهیم مسأله را حل کنیم، به یک نقطه‌ی خاص روی منحنی دقت می‌کنیم. در شکل مقابل نقطه‌ی P بالاترین نقطه از دایره است. خط مماس در این نقطه، خطی افقی است، در این حالت واضح است که $\psi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

۱۱ـ گزینه «۳» اگر بخواهیم از فرمول مختصات قطبی حل کنیم، محاسبات سنگینی را باید انجام دهیم، بنابراین ابتدا معادله منحنی را در مختصات دکارتی می‌نویسیم:

$$r=2\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\ \Rightarrow r^2=2\sqrt{2}(r\sin\theta+r\cos\theta)\ \Rightarrow x^2+y^2=2\sqrt{2}(x+y)\ \Rightarrow(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$$

همان‌طور که می‌دانید منحنی موردنظر دایره‌ای به شعاع ۲ می‌باشد و محیط آن برابر با $2\pi\times2=4\pi$ است.

۱۲ـ گزینه «۳» این انتگرال را می‌توان مساحت محصور توسط منحنی $r=f(\theta)$ در فاصله‌ی ۰ تا π در نظر گرفت، بنابراین داریم:

چون $0\le\theta\le\pi$، مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ است. $\Rightarrow\quad\frac{1}{2}r^2=1\ \Rightarrow r=\sqrt{2}$

۱۳ـ گزینه «۲» معادله‌ی داده شده مربوط به دایره‌ای قائم با مرکز $(0,\frac{1}{2})$ است، که مرکز دایره همان مرکز تقارن منحنی نیز می‌باشد و چون این نقطه بر روی محور y ها قرار دارد، خط $\theta=\frac{\pi}{2}$ (یا همان محور y ها) از این نقطه عبور می‌کند.

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ است، یعنی معادله به صورت $r=1+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ می‌باشد که معادله‌ی یک دلنماست.

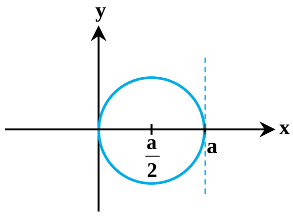
۱۵ـ گزینه «۴» سؤال بسیار ساده‌ای است، کافیست r^2 و $(r'_\theta)^2$ را حساب کنید:

$$\begin{cases}r^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin2\theta\\ r'_\theta=\cos\theta-\sin\theta\ \Rightarrow(r'_\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin2\theta\end{cases}$$

بنابراین $r^2+r'^2_\theta=2$ می‌شود و لذا به راحتی داریم:

$$L=\int_0^\pi\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{2}d\theta=\sqrt{2}[\theta]_0^\pi=\sqrt{2}\pi$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱ـ گزینه «۳» به طور کلی می‌دانیم $r = a\cos\theta$ دایره‌ای به مرکز $(\frac{a}{2},0)$ و به شعاع $\frac{a}{2}$ می‌باشد. با توجه به شکل منحنی واضح است که در مبدأ محور yها همان خط مماس قائم بر منحنی است و همچنین در نقطه $(a,0)$، خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی است. پس در دو نقطه $(0,0)$ و $(a,0)$ منحنی دارای مماس قائم است.

حل دیگر: برای این که مماس قائم داشته باشیم، باید شیب منحنی در آن نقطه بی‌نهایت شود. بدین منظور باید $\frac{dx}{dt} = 0$ قرار دهیم و معادله حاصل را حل کنیم تا نقطه موردنظر به دست آید:

$$x = r\cos\theta = 2\cos^2\theta$$

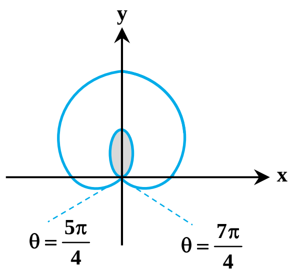
$$\frac{dx}{dt} = -4\cos\theta\sin\theta = 0 \Rightarrow -2\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}$$

اگر $\theta \in [0,2\pi]$ فرض شود، جواب معادله برابر است با:

$$\theta = 0\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ 2\pi$$

با جایگذاری تمامی این θها به ۲ نقطه $(0,0)$ و $(2,0)$ می‌رسیم.

۲ـ گزینه «۲» ابتدا شکل لیماسیون قائم را رسم می‌کنیم، سپس برای یافتن حدود $r = 0$ قرار داده، در نتیجه $\theta = \frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ بدست می‌آید.



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (1+\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta \overset{\text{بنابر تقارن}}{=\!=\!=} 2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+2\sqrt{2}\sin\theta+2\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+2\sqrt{2}\sin\theta+1-\cos 2\theta)d\theta = [2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi-3}{2}$$

یادآوری: برای راحتی در انتگرال‌گیری، از فرمول توان‌شکن $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ استفاده می‌کنیم.

۳ـ گزینه «۱» مساحت حاصل از دوران $r = f(\theta)$ حول محور قطبی از رابطه $S = 2\pi\int r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$ به دست می‌آید.

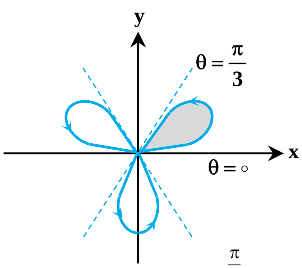
$$S = 2\pi\int r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = 2\pi\int r\sin\theta\sqrt{(2\sqrt{3})^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta = 4\pi\sqrt{3}\int r\sin\theta d\theta$$

$$= 4\pi\sqrt{3}\int 2\sqrt{3}\sin^2\theta d\theta = 4\pi\sqrt{3}\int\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)d\theta = 12\pi(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2})\Big|_0^{\pi} = 12\pi^2$$

۴ـ گزینه «۲» منحنی $r = a\sin 3\theta$، رز ۳ برگ می‌باشد.

با توجه به تقارن برگ‌ها، می‌توانیم مساحت یکی از برگ‌ها را محاسبه و حاصل را در ۳ ضرب کنیم.

برگ هاشور خورده در شکل روبرو به ازای $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ بدست می‌آید. بنابراین داریم:



$$S = 3\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (a\sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta \overset{\text{فرمول طلایی مثلثات}}{=\!=\!=\!=} \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 6\theta}{2}d\theta = \frac{3a^2}{4}(\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

یادآوری: مساحت محدود ما بین نمودار $r = f(\theta)$ و دو نیم‌خط $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ از رابطه $S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)d\theta$ بدست می‌آید.

حل دیگر:

$$S = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\theta d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta = \frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\theta)d\theta = \frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta - \frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 6\theta d\theta = [\frac{3a^2}{4}(\frac{\pi}{3}) - \frac{a^2}{8}\sin 6\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

توجه شود که مساحت یکی از برگ‌ها محاسبه و از این رو سه برابر شده است.

۵ـ گزینه «۴»

روش اول: از فرمول $S=\int_{r_۱}^{r_۲}\frac{r^۲}{۲}(\frac{d\theta}{dr})dr$ استفاده می‌کنیم. حدود r را از برخورد $\theta=۴r-r^۳$ و $\theta=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$۴r-r^۳=۰\Rightarrow r(۴-r^۲)=۰\Rightarrow r=۰\ ,\ r=۲$$

$$S=|\int_۰^۲\frac{r^۲}{۲}(۴-۳r^۲)dr|=|\int_۰^۲(۲r^۲-\frac{۳}{۲}r^۴)dr|=|[\frac{۲r^۳}{۳}-\frac{۳}{۱۰}r^۵]_۰^۲|=\frac{۶۴}{۱۵}$$

روش دوم: می‌دانیم که با تغییر دستگاه دکارتی به قطبی مساحت ناحیه‌ی D به این صورت به‌دست می‌آید: $S=\iint_D dydx=\iint_D rdrd\theta$

در این مثال ما حدود θ را برحسب r داریم: $\theta=۰$ و $\theta=۴r-r^۳$ پس حدود θ را در انتگرال میانی بنویسیم. یعنی ترتیب $d\theta dr$ را می‌نویسیم. بـرای تشـخیص حدود r، منحنی‌ها را برخورد می‌دهیم. توجه کنید که در انتگرال دوگانه r همواره نامنفی است: $۴r-r^۳=۰\Rightarrow r(۴-r^۲)=۰\Rightarrow r=۰,r=۲$

$$S=\int_۰^۲\int_۰^{۴r-r^۳}rd\theta dr=\int_۰^۲r(۴r-r^۳)dr=\int_۰^۲(۴r^۲-r^۴)dr=[\frac{۴r^۳}{۳}-\frac{r^۵}{۵}]_۰^۲=\frac{۳۲}{۳}-\frac{۳۲}{۵}=\frac{۶۴}{۱۵}$$

۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $S=\frac{۱}{۲}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}r^۲d\theta$، برای تعیین حدود انتگرال، از رابطه $\theta=\frac{\pi t}{۱+t^۲}$ کمترین و بیشترین مقدار θ را پیدا می‌کنیم:

$$\theta=\pi\frac{t}{۱+t^۲}\xrightarrow{\theta'_t=۰}\pi\frac{(۱+t^۲)-۲t^۲}{(۱+t^۲)^۲}=۰\Rightarrow ۱-t^۲=۰\Rightarrow t=\pm۱\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین حدود تغییرات θ به‌صورت $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و حدود تغییرات t به‌صورت $-۱\le t\le ۱$ است.

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}r^۲d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\frac{(۱+t^۲)^۲}{۱-t^۲}(\frac{\pi(۱-t^۲)}{(۱+t^۲)^۲})dt=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\pi dt=\frac{۱}{۲}(۲\pi)=\pi$$

۷ـ گزینه «۴» $r=a\cos^۲\theta\Rightarrow y=a\cos^۲\sin\theta\ ;\ x=a\cos^۳\theta\Rightarrow dx=-۳a\sin\theta\cos^۲\theta d\theta$

چون r با تغییر θ به $-\theta$ و با تغییر θ به $\pi-\theta$ تغییر نمی‌کند، پس منحنی نسبت به محورهای x و y متقارن است. پس باید از ۰ تا π را حول محور x دوران دهیم که چون نسبت به y متقارن است از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ را دوران می‌دهیم و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

$$\Rightarrow V=\pi\int_۰^{\pi}y^۲dx=۲\pi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}a^۲\cos^۴\theta\sin^۲\theta(-۳a\sin\theta\cos^۲\theta d\theta)=-۶\pi a^۳\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۳\theta\cos^۶\theta d\theta=۶\pi a^۳\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}-\sin\theta\underbrace{(۱-\cos^۲\theta)\cos^۶\theta}_{\cos^۶\theta-\cos^۸\theta}d\theta$$

$$=۶\pi a^۳[\frac{\cos^۷\theta}{۷}-\frac{\cos^۹\theta}{۹}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۶\pi a^۳\times\frac{۲}{۶۳}=\frac{۴}{۲۱}\pi a^۳$$

۸ـ گزینه «۱» طول منحنی $y=f(x)$ از رابطه $\int\sqrt{۱+y'^۲}dx$ و طول منحنی $r=f(\theta)$ از رابطه $\int\sqrt{r^۲+r'^۲}d\theta$ به دست می‌آید.

$$l_۱=\int_۰^۲\sqrt{۱+x^۲}dx\ ,\ l_۲=\int_۰^۲\sqrt{\theta^۲+۱}d\theta$$

پس طول دو منحنی با هم برابر است.

۹ـ گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$۲+\sin\theta=۲+\cos۲\theta\Rightarrow\sin\theta=\cos۲\theta\Rightarrow\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{۶}\\ \theta=-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

مساحت موردنظر برابر است با:

$$S=۲\times\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۶}}((۲+\cos۲\theta)^۲-(۲+\sin\theta)^۲)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۶}}(۴\cos۲\theta+\cos^۲۲\theta-۴\sin\theta-\sin^۲\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۶}}(۴\cos۲\theta+\frac{۱+\cos۴\theta}{۲}-۴\sin\theta-\frac{۱-\cos۲\theta}{۲})d\theta=\frac{۵۱\sqrt{۳}}{۱۶}$$

بنابراین مساحت $\frac{۵۱}{۱۶}$ برابر $\sqrt{۳}$ می‌باشد.

۱۰ـ گزینه «۳» برای این که مماس افقی داشته باشیم، باید شیب منحنی در آن نقطه صفر شود. برای این منظور باید $\frac{dy}{d\theta}$ را حساب کرده و مساوی صفر قرار دهیم:

$$y = r\sin\theta = \sqrt{\cos ۲\theta}\sin\theta$$

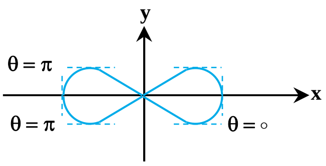
$$\frac{dy}{d\theta} = ۰ \Rightarrow \cos\theta\sqrt{\cos ۲\theta} + \sin\theta\frac{-۲\sin ۲\theta}{۲\sqrt{\cos ۲\theta}} = ۰ \Rightarrow \cos\theta\cos ۲\theta - \sin\theta\sin ۲\theta = ۰ \Rightarrow \cos(\theta + ۲\theta) = \cos ۳\theta = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\theta = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

اگر $\theta \in [۰, ۲\pi]$ فرض شود، جواب‌های معادله برابر است با:

$$\theta = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۱۱\pi}{۶}$$

با جایگذاری تمامی این θها به نقاط $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{\pi}{۶})$ و $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۵\pi}{۶})$ و $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۷\pi}{۶})$ و $(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱۱\pi}{۶})$ می‌رسیم، همان‌طور که می‌دانید نقاطی که r منفی دارند را با اضافه کردن (کم کردن) مقدار π به زاویه آن‌ها می‌توان به مثبت تبدیل نمود، پس با توجه به گزینه‌ها نقاط $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۵\pi}{۶})$ و $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, -\frac{۵\pi}{۶})$ (متناظر با $(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{\pi}{۶})$) جواب هستند.



توضیح: اگر منحنی $r^۲ = \cos ۲\theta$ را رسم کنیم، واضح است که در نقاط $\theta = ۰$ و $\theta = \pi$ مماس‌های قائم رخ می‌دهند و در چهار نقطه از منحنی مماس‌های افقی رخ می‌دهند. بنابراین با رسم شکل می‌توانیم به راحتی گزینه (۳) را انتخاب کنیم. البته این به شرطی است که شکل را حفظ باشیم که چون منحنی معروفی است، شرط سختی نیست!

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $r = \frac{۱}{\theta}$ و لذا $r'_\theta = -\frac{۱}{\theta^۲}$ و بنابراین طبق فرمول داریم:

$$L = \int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\sqrt{r^۲ + r'^۲_\theta}\,d\theta = \int_{\frac{۳}{۴}}^{\frac{۴}{۳}}\sqrt{\frac{۱}{\theta^۲} + \frac{۱}{\theta^۴}}\,d\theta = \int_{\frac{۳}{۴}}^{\frac{۴}{۳}}\frac{۱}{\theta^۲}\sqrt{\theta^۲ + ۱} = \int_{\frac{۳}{۴}}^{\frac{۴}{۳}}\theta^{-۲}(\theta^۲ + ۱)^{\frac{۱}{۲}}\,d\theta$$

با استفاده از تغییر متغیر $\theta^۲ + ۱ = \theta^۲u^۲$ و یا $\theta^۲ = \frac{۱}{u^۲ - ۱}$، خواهیم داشت:

$$۲\theta d\theta = \frac{-۲udu}{(u^۲ - ۱)^۲} \Rightarrow d\theta = \frac{-udu}{\theta(u^۲ - ۱)^۲} \quad و \quad \theta = \frac{۴}{۳} \Rightarrow u = \frac{۵}{۴} \;,\; \theta = \frac{۳}{۴} \Rightarrow u = \frac{۵}{۳}$$

حالا به راحتی داریم:

$$\int_{\frac{۵}{۳}}^{\frac{۵}{۴}}\theta^{-۲}u\theta(\frac{-udu}{\theta(u^۲ - ۱)^۲}) = \int_{\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۳}}\frac{u^۲du}{u^۲ - ۱} = \int_{\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۳}}(۱ + \frac{du}{u^۲ - ۱}) = \left[u + \frac{۱}{۲}Ln\left|\frac{u - ۱}{u + ۱}\right|\right]_{\frac{۵}{۴}}^{\frac{۵}{۳}} = \frac{۵}{۱۲} + Ln\frac{۳}{۲}$$

۱۲ـ گزینه «۲» می‌توانیم معادله را به مختصات دکارتی ببریم و سؤال را حل کنیم:

$$r = \frac{۲}{\sin\theta - \cos\theta} \Rightarrow r\sin\theta - r\cos\theta = ۲ \Rightarrow y - x = ۲$$

می‌دانیم فاصله‌ی این خط از مبدأ برابر با $\frac{|-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \sqrt{۲}$ است.

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی خم را در مختصات قطبی نمایش می‌دهیم:

$$x^۲ + y^۲ + xy = ۱۶ \Rightarrow r^۲ + (r\cos\theta)(r\sin\theta) = ۱۶ \Rightarrow r^۲ + \frac{۱}{۲}r^۲\sin ۲\theta = ۱۶$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} ۲r^۲ + r^۲\sin ۲\theta = ۳۲ \Rightarrow r^۲(۲ + \sin ۲\theta) = ۳۲ \Rightarrow r^۲ = \frac{۳۲}{۲ + \sin ۲\theta}$$

دنبال بیشترین و کمترین مقدار فاصله از مبدأ یعنی همان r هستیم. هر مقدار θ که $r^۲$ را ماکزیمم و یا مینیمم کند، r را نیز ماکزیمم و یا مینیمم خواهد کرد. اما $r^۲$ به ازای $\sin ۲\theta = ۱$ مینیمم و به ازای $\sin ۲\theta = -۱$ ماکزیمم خواهد شد. بنابراین مینیمم $r^۲$ برابر با $\frac{۳۲}{۲+۱} = \frac{۳۲}{۳}$ و ماکزیمم آن برابر با $\frac{۳۲}{۲-۱} = ۳۲$ است و چون دنبال ماکزیمم و مینیمم r هستیم، لذا مینیمم r برابر با $\sqrt{\frac{۳۲}{۳}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$ و ماکزیمم r برابر با $\sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$ می‌شود.

۱۴ـ گزینه «۳» راحت‌تر است که معادله را به فضای دکارتی ببریم:
$$r=\cos\theta+\sin\theta \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } r} r^{۲}=r\cos\theta+r\sin\theta \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=x+y$$
دنبال به‌دست آوردن محل تلاقی منحنی فوق با محور قطبی و به عبارت دیگر تلاقی با $y=۰$ هستیم، لذا داریم:
$$x^{۲}+۰^{۲}=x+۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x_{۲}=۱, x_{۱}=۰$$
پس فاصله‌ی دو نقطه از هم برابر با $x_{۲}-x_{۱}=۱-۰=۱$ است.

۱۵ـ گزینه «۱» ابتدا $r_{\theta}'^{۲}$ را حساب می‌کنیم:
$$r=a\,tgh\frac{\theta}{۲} \Rightarrow \quad , \quad r_{\theta}'=\frac{a}{۲}\sec h^{۲}\frac{\theta}{۲} \Rightarrow (r_{\theta}')^{۲}=\frac{a^{۲}}{۴}\sec h^{۴}(\frac{\theta}{۲})$$
حالا با استفاده از فرمول داریم:
$$L=\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{a^{۲}tgh^{۲}\frac{\theta}{۲}+\frac{a^{۲}}{۴}\sec h^{۴}\frac{\theta}{۲}}\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}a\sqrt{tgh^{۲}(\frac{\theta}{۲})+\frac{۱}{۴}(۱-tgh^{۲}(\frac{\theta}{۲}))^{۲}}\,d\theta=a\int_{۰}^{۲\pi}\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱+tgh^{۲}\frac{\theta}{۲})^{۲}}\,d\theta=\frac{a}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۱+tgh^{۲}\frac{\theta}{۲})d\theta$$
$$L=\frac{a}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(۲-\sec h^{۲}\frac{\theta}{۲})d\theta=\frac{a}{۲}\left[۲\theta-۲tgh\frac{\theta}{۲}\right]_{۰}^{۲\pi}=\frac{a}{۲}(۴\pi-۲tgh\pi)=a(۲\pi-tgh\pi)$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» با فرض این‌که $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$، برای منحنی $C_۱$ باید قسمت حقیقی $\frac{۱}{z}$ را حساب کنیم:

$$C_۱ : Re(\frac{۱}{z}) = Re(\frac{۱}{x+iy}) = Re(\frac{x-iy}{x^۲+y^۲}) = Re[\frac{x}{x^۲+y^۲} - i\frac{y}{x^۲+y^۲}] = \frac{x}{x^۲+y^۲}$$

بنابراین معادله $C_۱$ به‌صورت $\frac{۱}{۴}=\frac{x}{x^۲+y^۲}$ و به عبارت دیگر به‌صورت $x^۲+y^۲-۴x=۰$ و یا $(x-۲)^۲+y^۲=۴$ می‌باشد، یعنی دایره‌ای با شعاع ۲ که مساحت آن $\pi(۲)^۲=۴\pi$ می‌شود. حالا سراغ $C_۲$ می‌رویم:

$$C_۲ : z\bar{z}+i(z-\bar{z})=۳ \Rightarrow (x+iy)(x+iy)+i[(x+iy)-(x-iy)]=۳ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴$$

یعنی دایره‌ای به شعاع ۲ که مساحت آن $\pi(۲)^۲=۴\pi$ می‌شود، پس گزینه ۳ صحیح است.

۲ـ گزینه «۱» اگر z به‌صورت $z=x+iy$ تعریف شود، آن‌گاه $Re\,z=x$، $Im\,z=y$ و $|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}$ خواهد بود، یعنی معادله‌ی زیر را داریم:

$$|x|+|y|=\sqrt{x^۲+y^۲} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^۲+y^۲+۲|x||y|=x^۲+y^۲ \Rightarrow ۲|x||y|=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } y=۰$$

در هر صورت $xy=۰$ است و به عبارت دیگر $\mathbf{Re(z)Im(z)=۰}$ می‌شود.

۳ـ گزینه «۱» با فرض این‌که $z=x+iy$، آن‌گاه داریم:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}$$
$$\overline{\exp(z)}=\overline{e^z}=\overline{e^x.e^{iy}}=\overline{e^x}.\overline{e^{iy}}$$

مزدوج عدد حقیقی خودش می‌شود، چون e^x عدد حقیقی است پس $\overline{e^x}=e^x$ و مزدوج iy برابر با $-iy$ می‌شود، لذا داریم:

$$\overline{\exp(z)}=e^x.e^{-iy}=e^{x-iy}=e^{\overline{x-iy}}=e^{\bar{z}}=\mathbf{\exp(\bar{z})}$$

۴ـ گزینه «۳» سؤال ساده‌ای است، با فرض این‌که $i=\sqrt{-۱}$ لذا داریم:

$$۱+\sqrt{-۱}=۱+i=\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i} \quad , \quad ۱-\sqrt{-۱}=۱-i=\sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i}$$

$$A=(\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i})^{۸n}+(\sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۴}i})^{۸n}=(\sqrt{۲})^{۸n}[e^{۲n\pi i}+e^{-۲n\pi i}]=۲^{۴n}[۲\cos(۲n\pi)]=۲^{۴n}\times۲\times۱=\mathbf{۲^{۴n+۱}}$$

۵ـ گزینه «۳» واضح است ابتدا باید مقادیر z را حساب کنیم:

$$z+\frac{۱}{z}=۲\cos\frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } z} z^۲+۱=z(۲\cos\frac{\pi}{۱۲}) \Rightarrow z^۲-۲\cos\frac{\pi}{۱۲}z+۱=۰ \Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{۱۲}\pm\sqrt{\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۱}$$

$$\Rightarrow z=\cos\frac{\pi}{۱۲}\pm\sqrt{-\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\cos(\frac{\pi}{۱۲})\pm i\sin(\frac{\pi}{۱۲})=e^{\pm i\frac{\pi}{۱۲}}$$

اگر $z=e^{i\frac{\pi}{۱۲}}$، آن‌گاه $\frac{۱}{z}=e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}$، لذا داریم:

$$z^۶+\frac{۱}{z^۶}=(e^{i\frac{\pi}{۱۲}})^۶+(\frac{۱}{e^{i\frac{\pi}{۱۲}}})^۶=e^{۶i\frac{\pi}{۱۲}}+e^{-۶i\frac{\pi}{۱۲}}=۲\cos\frac{۶\pi}{۱۲}=۰$$

اگر $z=e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}$، آن‌گاه $\frac{۱}{z}=e^{i\frac{\pi}{۱۲}}$، لذا داریم:

$$z^۶+\frac{۱}{z^۶}=(e^{-i\frac{\pi}{۱۲}})^۶+(\frac{۱}{e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}})^۶=e^{-۶i\frac{\pi}{۱۲}}+e^{۶i\frac{\pi}{۱۲}}=۲\cos\frac{۶\pi}{۱۲}=۰$$

پس در هر حالت، مقدار خواسته شده برابر با صفر است.

۶ـ گزینه «۴» می‌دانیم $\bar{z}$ یعنی مزدوج z، لذا داریم:

$$z=۳+i\sqrt{۳} \Rightarrow \bar{z}=۳-i\sqrt{۳}$$

با توجه به این‌که نقطه $۳-i\sqrt{۳}$ در ربع چهارم قرار دارد، لذا داریم:

$$Arg(\bar{z})=Arctg(\frac{-\sqrt{۳}}{۳})=-\frac{\pi}{۶} \quad , \quad |\bar{z}|=\sqrt{۳^۲+(-\sqrt{۳})^۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$\bar{z}=۲\sqrt{۳}e^{-i\frac{\pi}{۶}} \Rightarrow (\bar{z})^۳=(۲\sqrt{۳})^۳e^{-i\frac{\pi}{۶}\times۳} \Rightarrow Arg(\bar{z})^۳=-\frac{\pi}{\mathbf{۲}}$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به نکته متن کتاب، $|z-z_۱|+|z-z_۲|=a$ معادله یک بیضی می‌باشد.

۸ـ گزینه «۲» سری داده شده یک سری هندسی با جمله‌ی اول $t_۱=۱$ و $r=i$ است، لذا داریم:

$$\sum_{k=۰}^{۱۰۰}i^k=\frac{t_۱(۱-r^{۱۰۱})}{۱-r}=\frac{۱(۱-i^{۱۰۱})}{۱-i}=\frac{۱-i^{۱۰۱}}{۱-i}=\frac{۱-(i^{۱۰۰})i}{۱-i}=\frac{۱-(i^۲)^{۵۰}i}{۱-i}=\frac{۱-i}{۱-i}=۱$$

بنابراین $x+iy=۱$ لذا $x=۱$ و $y=۰$ و بنابراین $y-x=۰-۱=\mathbf{-۱}$.

۹ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ و $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ می‌باشد، داریم:

$$i^{1+i}+i^{1-i}=i\times i^{i}+i\times i^{-i}=i(i^{i}+i^{-i})=i(e^{i^2\frac{\pi}{2}}+e^{-i^2\frac{\pi}{2}})=i(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}})$$

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که:

$$|z|=3 \Rightarrow |z|^2=3^2 \Rightarrow \begin{cases}|z|^2+1=10 \;,\; |z|^2-1=8\\ |z^2+2|=11 \;,\; |z|^2-2=7\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ و $|a-b|\le|a+b|\le|a|+|b|$ بنابراین داریم:

$$\overset{\frac{8}{11}}{\boxed{\frac{|z|^2-1}{|z|^2+2}}}\le\left|\frac{z^2+1}{z^2+2}\right|=\frac{|z^2+1|}{|z^2+2|}\le\overset{\frac{10}{7}}{\boxed{\frac{|z|^2+1}{|z|^2-2}}}$$

توضیح: هرگاه صورت را بزرگ و مخرج را کوچک کنیم، کسر بزرگتر می‌شود. هرگاه صورت را کوچک و مخرج را بزرگ کنیم، کسر کوچک می‌شود.

۱۱ـ گزینه «۳» چون $1+i$ ریشه معادله می‌باشد، لذا در معادله صدق می‌کند:

$$(1+i)^5+a(1+i)^3+b=0$$

طبق نکته حاصل $(1+i)^n$ برای n های فرد برابر $(2i)^{\frac{n-1}{2}}(1+i)$ می‌باشد، لذا با توجه به این‌که در این تست $n=3$ و $n=5$ است، داریم:

$$(2i)^{\frac{5-1}{2}}(1+i)+a(2i)^{\frac{3-1}{2}}(1+i)+b=0 \Rightarrow (2i)^2(1+i)+a(2i)(1+i)+b=0 \Rightarrow 4i^2(1+i)+a(2i+2i^2)+b=0$$

$$\Rightarrow -4-4i+2ai-2a+b=0 \Rightarrow (-4+2a)i-4-2a+b=0 \Rightarrow \begin{cases}-4+2a=0\\ -4-2a+b=0\end{cases} \Rightarrow a=2 \,,\, b=8 \Rightarrow a-b=2-8=-6$$

البته بدون استفاده از نکته نیز می‌توانیم $1+i$ را در معادله قرار دهیم و به طور عادی محاسبات را انجام دهیم.

۱۲ـ گزینه «۴» واضح است باید $\bar{z}=x-iy$ قرار دهیم:

$$\frac{1}{\bar{z}}+1=\frac{1}{x-iy}+1 \Rightarrow \frac{x+iy}{x^2+y^2}+1 \Rightarrow Re(\frac{1}{\bar{z}}+1)=\frac{x}{x^2+y^2}+1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}+1\le 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}\le 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2+y^2 \text{ باشرط } (x,y)\neq 0} x^2+y^2\ge x \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2\ge\frac{1}{4}$$

که محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است (که البته چون $(x,y)\neq(0,0)$ یعنی نقطه‌ی $(0,0)$ جزء ناحیه نیست) پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به سؤال، لازم است تمام گزینه‌ها بررسی شوند:

$$1)\;\; Im(z^2)=2 \Rightarrow Im[(x+iy)^2]=2 \Rightarrow Im[x^2+i^2y^2+2xiy]=2 \Rightarrow Im(x^2-y^2+2xiy)=2 \Rightarrow 2xy=2 \Rightarrow xy=1$$

که نمایش یک منحنی غیر از دایره است. (معادله‌ی یک هذلولی است)

$$2)\;\; Re[(\bar{z})^2]=2 \Rightarrow Re[(x-iy)^2]=2 \Rightarrow Re[x^2+i^2y^2-i2xiy]=2 \Rightarrow Re[x^2-y^2-i2xy]=2 \Rightarrow x^2-y^2=2$$

که معادله‌ی یک دایره <u>نیست</u> و معادله‌ی یک هذلولی است.

$$3)\;\; Re(\frac{1}{\bar{z}})=1 \Rightarrow Re(\frac{1}{x-iy})=1 \Rightarrow Re[\frac{x+iy}{x^2-(iy)^2}]=1 \Rightarrow Re[\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{iy}{x^2+y^2}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2-x=0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$$

که معادله‌ی یک دایره به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است. هر چند نیاز نیست و پاسخ به تست تمام است، اما منحنی داده شده در گزینه (۴) را نیز بررسی می‌کنیم:

$$4)\;\; |z|-Re(z)=12 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x=12 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2+y^2=(12+x^2)^2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2+y^2=144+x^2+24x$$

$\Rightarrow y^2-24x-144=0 \Rightarrow$ که معادله‌ی یک سهمی است

۱۴ـ گزینه «۴» بهتر است هر دو پرانتز را در مختصات نمایی نمایش دهیم:

$$A=(3e^{i60^\circ})(4e^{i180^\circ})=12e^{i120^\circ}=12[\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)]=12[\cos(180^\circ-60^\circ)+i\sin(180^\circ-60^\circ)]$$

$$=12[-\cos(-60^\circ)+i(-\sin(-60^\circ))] \Rightarrow A=12(-\frac{1}{2})+i(12\times\frac{\sqrt{3}}{2})=-6+i6\sqrt{3}$$

۱۵ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $z=x+iy$ و لذا $\bar{z}=x-iy$، بنابراین داریم:

$$(1-i)(x-iy)=(1+i)(x+iy) \Rightarrow x-iy-ix+i^2y=x+iy+ix+i^2y \Rightarrow -2ix-2iy=0 \Rightarrow i(x+y)=0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» اگر $z=x+iy$ باشد، می‌دانیم اندازه z برابر با $|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است و با توجه به این که $|z^n|=|z|^n$ می‌باشد، داریم:

$$|z^۲|=|z|^۲=|(۱+i)(۱+i\sqrt{۲})(۱+i\sqrt{۳})\dots(۱+i\sqrt{n})|^۲=|۱+i|^۲|۱+i\sqrt{۲}|^۲|۱+i\sqrt{۳}|^۲\dots|۱+i\sqrt{n}|^۲\Rightarrow$$

$$|z|^۲=(\sqrt{۲})^۲(\sqrt{۳})^۲(\sqrt{۴})^۲\dots(\sqrt{۱+n})^۲=۲\times۳\times۴\times\dots\times(n+۱)=\mathbf{(n+۱)!}$$

البته با قرار دادن $n=۲$ و محاسبه $|(۱+i)(۱+i\sqrt{۲})|^۲$ می‌توان به روش سریع به سؤال پاسخ داد.

۲ـ گزینه «۱» ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\frac{z-۱}{z})^۴=۱۶\Rightarrow\frac{z-۱}{z}=\sqrt[۴]{۱۶}\Rightarrow\frac{z-۱}{z}=\sqrt[۴]{۱۶}\,e^{\frac{۲k\pi}{۴}i}\Rightarrow\frac{z-۱}{z}=۲e^{\frac{k\pi}{۲}i}$$

$$k=۰\Rightarrow\frac{z-۱}{z}=۲\Rightarrow z=-۱\Rightarrow x+iy=-۱\Rightarrow x=-۱\,,\ y=۰$$

که مقادیر فوق، فقط در معادله‌ی داده شده در گزینه «۱» صدق می‌کند.

۳ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که حاصل عبارت به‌صورت توان‌های متوالی برای z و $\bar z$، داده شده است، لذا در حالت کلی مقادیر $z^n-\bar z^n$ را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} z=r\cos\theta+ir\sin\theta\Rightarrow z^n=r^n\cos n\theta+ir^n\sin\theta \\ \bar z=r\cos\theta-i\sin\theta\Rightarrow(\bar z)^n=r^n\cos n\theta-ir^n\sin\theta\end{array}\right\}\Rightarrow z^n-(\bar z)^n=۲ir^n\sin n\theta\xrightarrow{r=\sqrt{۲},\theta=\frac{\pi}{۴}}z^n-(\bar z)^n=i۲(\sqrt{۲})^n\sin n(\frac{\pi}{۴})$$

کافیست به جای n اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} n=۱\Rightarrow z-\bar z=i۲(\sqrt{۲})^۱\sin(\frac{\pi}{۴})=i۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲i \\ n=۲\Rightarrow z^۲-\bar z^۲=i۲(\sqrt{۲})^۲\sin(۲\times\frac{\pi}{۴})=i۲\times۲\times۱=۴i \\ n=۳\Rightarrow z^۳-\bar z^۳=i۲(\sqrt{۲})^۳\sin(۳\times\frac{\pi}{۴})=i۴\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۴i\end{array}\right\}\Rightarrow A=(۲i)(۴i)(۴i)=\mathbf{-۳۲i}$$

توضیح: اگر $A=(z-\bar z)(z^۲-\bar z^۲)(z^۳-\bar z^۳)\cdots(z^n-\bar z^n)$ مورد سؤال بود، حاصل آن به‌صورت زیر می‌شد:

$$A=۲^n i^n r^{\frac{n(n+۱)}{۲}}(\sin\theta\sin۲\theta\sin۳\theta\cdots\sin n\theta)$$

۴ـ گزینه «۲» ابتدا به سمت چپ $A\bar A$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$z\bar z+\bar Az+A\bar z+A\bar A-A\bar A+B=۰\Rightarrow z(\bar z+\bar A)+A(\bar z+\bar A)=A\bar A-B$$

$$\Rightarrow(z+A)(\bar z+\bar A)=A\bar A-B\Rightarrow(z+A)(\overline{z+A})=A\bar A-B\Rightarrow|z+A|^۲=A\bar A-B\Rightarrow|z+A|=\sqrt{A\bar A-B}$$

بنابراین معادله‌ی فوق، دایره‌ای به مرکز $z=-A$ و به شعاع $\sqrt{A\bar A-B}$ می‌باشد، برای این که مطمئن باشیم زیر رادیکال منفی نیست، چون $A\bar A=|A|^۲$ مثبت است، پس B باید عددی منفی باشد.

۵ـ گزینه «۱» برای این که معادله فقط دارای ریشه‌های حقیقی باشد، باید $y=۰$ و لذا $z=x$ و بنابراین داریم:

$$|(\frac{۱+ix}{۱-ix})^n|=|a+bi|\Rightarrow|\frac{۱+ix}{۱-ix}|^n=|a+bi|\Rightarrow(\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{\sqrt{۱+x^۲}})^n=\sqrt{a^۲+b^۲}\Rightarrow\sqrt{a^۲+b^۲}=۱\Rightarrow\mathbf{a^۲+b^۲=۱}$$

۶ـ گزینه «۲» سؤال راحتی است، کافیست ریشه‌های غیرحقیقی معادله‌ی $z^۳=۱$ و به عبارت دیگر ریشه‌های سوم موهومی عدد ۱ را حساب کنیم:

$$\begin{array}{l} z_۱=\cos(\frac{۲\pi}{۳})+i\sin(\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i \\ z_۲=\cos(\frac{۴\pi}{۳})+i\sin(\frac{۴\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i\end{array}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} z_۱+۱=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i=\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳} \\ z_۲+۱=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i=\cos(\frac{-\pi}{۳})+i\sin(\frac{-\pi}{۳})\end{array}\right.$$

حالا طبق قاعده‌ی دموآور داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (z_۱+۱)^۵=\cos(\frac{۵\pi}{۳})+i\sin(\frac{۵\pi}{۳}) \\ (z_۲+۱)^۵=\cos(\frac{۵\pi}{۳})-i\sin(\frac{۵\pi}{۳})\end{array}\right\}\Rightarrow(z_۱+۱)^۵+(z_۲+۱)^۵=۲\cos\frac{۵\pi}{۳}=۲\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=۲\cos(\frac{\pi}{۳})=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

۷ـ گزینه «۱»

$$|1-z_1|=|1-z_2| \Rightarrow |1-(3+i\sqrt{5})|=|1-(x+iy)| \Rightarrow |-2-i\sqrt{5}|=|(1-x)-iy| \Rightarrow$$
$$4+5=(1-x)^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-2x=8 \qquad (1)$$
$$|z_1|=|z_2| \Rightarrow |3+i\sqrt{5}|=|x+iy| \Rightarrow 9+5=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=14 \quad (2)$$
$$\xrightarrow{(2),(1)} -2x=8-14 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{در رابطه (۲) قرار می‌دهیم}} y=\pm\sqrt{5}$$

که با توجه به شرط $z_1 \neq z_2$ ، $y=-\sqrt{5}$ قابل قبول است.

۸ـ گزینه «۳» با توجه به این که $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ ، لذا داریم:

$$f(z)=4\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+4i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2=4\left(\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4}\right)+4i\left(\frac{z^2+(\bar{z})^2-2z\bar{z}}{4i^2}\right)=z^2+(\bar{z})^2+2z\bar{z}-i(z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z})$$
$$\Rightarrow f(z)=(1-i)z^2+(2+2i)z\bar{z}+(1-i)\bar{z}^2$$

۹ـ گزینه «۳» واضح است ابتدا باید از z فاکتور بگیریم، لذا داریم:

$$z^5+z^3+z=0 \Rightarrow z(z^4+z^2+1)=0 \Rightarrow z=0 \; , \; z^4+z^2+1=0$$

دقت کنید؛ $z=0$ ، ریشه‌ی بدیهی معادله است و در گزینه‌ها هم آن را نداریم، پس باید دنبال ریشه‌های معادله‌ی درجه (۴) باشیم. اما برای حل معادله‌ی $z^4+z^2+1=0$ ، دو راه داریم؛ اول این‌که فرض کنیم $z^2=A$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم $A^2+A+1=0$ را حل کنیم و بعد از پیدا کردن A، z را تعیین کنیم. راه دیگر این است که دقت کنید $1+z^2+z^4$ یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q=z^2$ و $t_1=1$ است و لذا سمت چپ برابر با $\frac{z^6-1}{z^2-1}$ است:

$$z^6-1=0 \Rightarrow z^6=1 \Rightarrow z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1\times e^{0i}}=e^{\frac{2k\pi+0}{6}i}=e^{\frac{k\pi}{3}i} \xrightarrow{k=1} \mathbf{z=e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

۱۰ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از تساوی $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ ، خواهیم داشت:

$$A=\left(\frac{1+itgx}{1-itgx}\right)^n=\left(\frac{1+i\frac{\sin x}{\cos x}}{1-i\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^n=\left(\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}\right)^n$$

حالا می‌توانیم از قانون دموآور استفاده کنیم:

$$\Rightarrow A=\left(\frac{\operatorname{coxnx}+i\sin nx}{\cos nx-i\sin nx}\right) \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos nx} A=\frac{1+itgnx}{1-itgnx}$$

۱۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ لذا داریم:

$$A=\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}+(2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

اگر $k=0$ ، آن‌گاه داریم:

$$A=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$$

اگر $k=1$ ، آن‌گاه داریم:

$$A=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right]+\sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]=-2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}=(-2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{6}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۲ـ گزینه «۲»

$$a\left(z\bar{z}+\frac{d}{a}\bar{z}+\frac{\bar{d}}{a}z\right)+c=0 \Rightarrow a\left(z+\frac{d}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{d}}{a}\right)+c=0$$
$$\Rightarrow a\left|z+\frac{d}{a}\right|^2=-c \Rightarrow \left|z+\frac{d}{a}\right|^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow$$

دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{-\alpha}{a},\frac{-\beta}{a}\right)$ می‌باشد

۱۳ـ گزینه «۴» ابتدا Δ را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=b'^2-ac=(1+i)^2-i\times 1=1+i^2+2i-i=1-1+i=i$$

بنابراین داریم:

$$z_{1,2}=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{i}}{i} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } i} z_{1,2}=\frac{-i(1+i)\pm i\sqrt{i}}{i^2}=\frac{-i-i^2\pm i\sqrt{i}}{-1}=-1+i\mp i\sqrt{i}$$

اما $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ و لذا $\sqrt{i}=e^{\frac{\pi}{4}i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ و بنابراین داریم:

$$z_{1,2}=-1+i\mp i\sqrt{i}=-1+i\mp i\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=-1+i\mp i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} z_1=\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_2=\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{aligned} pi+1 &= \sqrt{1+p^2}\, e^{i\,tg^{-1}p} \\ pi-1 &= \sqrt{1+p^2}\, e^{i(\pi - tg^{-1}p)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{pi+1}{pi-1} = e^{i(-\pi+2tg^{-1}p)}$$

می‌دانیم $tg^{-1}p + \cot g^{-1}p = \frac{\pi}{2}$، لذا $-\pi + 2tg^{-1}p = -2\cot g^{-1}p$ و لذا داریم:

$$\frac{pi+1}{pi-1} = e^{i(-2\cot g^{-1}p)} \Rightarrow \left(\frac{pi+1}{pi-1}\right)^n = e^{i(-2n\cot g^{-1}p)}$$

بنابراین داریم:

$$e^{i(2n\cot g^{-1}p)} . e^{i(-2n\cot g^{-1}p)} = e^{\circ} = 1$$

۱۵ـ گزینه «۲» برای راحتی کار، ابتدا $\frac{1}{z+1}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{x+iy+1} = \frac{1}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - i\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right) = 1 + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right) = 2 - \frac{y}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2x^2+4x+2+2y^2-y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right) + \mathrm{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2x^2+4x+2+2y^2-y}{(x+1)^2+y^2} = 4 \Rightarrow \frac{3x^2+7x+3y^2-y+4}{(x+1)^2+y^2} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{پس از ساده کردن}} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

پس شعاع دایره $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.