



پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۲» راه حل کلاسیک برای حل این نوع سؤالات، مساوی قرار دادن دو تابع است. اما اگر بدون ساده کردن ضابطه‌ی اول این کار را انجام دهیم، حل

$$y = \text{Ln} \sqrt{\cosh x + \sinh x} = \text{Ln} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Ln}(e^x) = \frac{x}{2}$$

$$x^2 - \frac{y}{2}x = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$$

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

بنابراین نقاط $A(0,0)$ و $B(4,2)$ ، محل تلاقی دو نمودار هستند.

۲- گزینه «۲» از ضابطه‌ی $y = f(x)$ ، x را بر حسب y به دست می‌آوریم.

$$y = 2^{x-1} \Rightarrow \log_2 y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x \log_2 y - \log_2 y = x \Rightarrow x \log_2 y - x = \log_2 y \Rightarrow x(\log_2 y - 1) = \log_2 y \Rightarrow x = \frac{\log_2 y}{\log_2 y - 1}$$

پس $f^{-1}(y) = \frac{\log_2 y}{\log_2 y - 1}$. البته می‌توانیم ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ را هم با جایگذاری x به جای y بنویسیم.

$$y = \frac{x+6}{x} = 1 + \frac{6}{x}$$

۳- گزینه «۱»

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1+\frac{6}{1}=7 \in \mathbb{N} \\ x=2 \Rightarrow y=1+\frac{6}{2}=4 \in \mathbb{N} \\ x=3 \Rightarrow y=1+\frac{6}{3}=3 \in \mathbb{N} \\ x=4 \Rightarrow y=1+\frac{6}{4}=\frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \\ x=5 \Rightarrow y=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5} \notin \mathbb{N} \\ x=6 \Rightarrow y=1+\frac{6}{6}=2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

به ازای $x > 6$ همواره عبارت $\frac{6}{x}$ عددی غیرطبیعی (کسری) خواهد بود و مقدار y متعلق به مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) نخواهد بود، لذا به ازای $1 \leq x \leq 6$ که $x \in \mathbb{N}$ بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌گردد در ۴ مورد مقدار y نیز عدد طبیعی خواهد بود، لذا تابع چهار عضو دارد.

۴- گزینه «۲» برای محاسبه‌ی $f(\sqrt{\log_2 1024})$ چون تابع چندضابطه‌ای است، باید ابتدا مقدار $\sqrt{\log_2 1024}$ را تعیین کنیم تا معلوم شود که از چه ضابطه‌ی

$$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10 \log_2 2 = 10 \Rightarrow \sqrt{\log_2 1024} = \sqrt{10} \xrightarrow{\sqrt{10} > 3} \text{ باید از ضابطه‌ی سوم استفاده کنیم}$$

$$f(\sqrt{10}) = 2 \times \sqrt{10} - 5 = 2 \times 3/2 - 5 = 6/4 - 5 = 1/4$$

۵- گزینه «۳» در گزینه (۱) هر چند دو ضابطه با هم برابرند، اما دامنه‌ها با هم برابر نیست. زیرا:

$$D_g : \mathbb{R} - \{0\}, D_f : \mathbb{R}$$

$$D_f : x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1, D_g : x \geq +1 \Rightarrow D_g \neq D_f \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

در گزینه (۲) نیز دامنه‌ی دو تابع برابر نیست.

در گزینه (۳) هم دامنه‌ها و هم ضابطه‌ها با هم برابر هستند.

$$D_f : \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\} (k \in \mathbb{Z})$$

در گزینه (۴) دامنه دو تابع با هم برابر است:

$$D_g : \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\} (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(\pi + \frac{\pi}{3}) = 2, g(\pi + \frac{\pi}{3}) = -2 \Rightarrow f(\pi + \frac{\pi}{3}) \neq g(\pi + \frac{\pi}{3})$$

اما دو ضابطه با هم برابر نیستند، زیرا داریم:

$$2 \geq -2 \cos(4x) \geq -2 \Rightarrow 5 \geq 3 - 2 \cos 4x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{3 - 2 \cos 4x} \leq 1$$

۶- گزینه «۳» می‌دانیم که $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ است. بنابراین داریم:

$$\text{یعنی: } \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1 \text{، پس برد تابع } f \text{ برابر است با } \left[\frac{1}{5}, 1 \right]$$

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot \binom{10}{k} (\sqrt[3]{x})^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = (-1)^k \cdot \binom{10}{k} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^k} \cdot x^{\frac{10-k}{3} - \frac{k}{3}}$$

۷- گزینه «۴»

$$\frac{10-k}{3} = \frac{k}{3} \rightarrow 10 = 2k \rightarrow k = 5$$

برای اینکه جمله فاقد x باشد، باید توان x را برابر صفر قرار دهیم:

$$\text{جمله مورد نظر} = (-1)^4 \cdot \binom{10}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}^4} = \frac{10!}{4! \times 6!} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}^4} = \frac{105}{8 \sqrt[3]{x}^4}$$

۸- گزینه «۱» می‌دانیم دامنه‌ی توابع $y = \text{Arcsin } f(x)$ به شکل $-1 \leq f(x) \leq 1$ می‌باشد، اما چون خود $\text{Arcsin } \text{Log}_3^x$ زیر رادیکال است، لذا باید داشته

باشیم: $\text{Arcsin } \text{log}_3^x \geq 0$ ، پس داریم:

$$\begin{cases} \text{Log}_3^x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{Log}_3^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

۹- گزینه «۴» تساوی (۱) هنگامی برقرار است که a و b هم‌علامت باشند. اگر هر دو مثبت باشند، داریم:

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \Rightarrow |a| = a, |b| = b, |a + b| = a + b$$

$$a < 0, b < 0 \Rightarrow a + b < 0 \Rightarrow |a| = -a, |b| = -b, |a + b| = -a - b$$

و اگر هر دو منفی باشند، داریم:

$$|a| - |b| > 0$$

در مورد تساوی (۲) هرگاه a و b هم‌علامت باشند، داریم: $|a - b| = ||a| - |b||$ حالا اگر $|a| > |b|$ باشد، داریم:

$$|a - b| = ||a| - |b|| = |a| - |b|$$

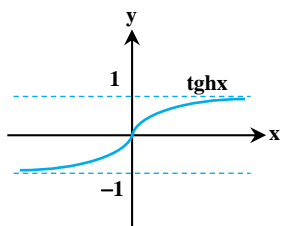
پس داریم:

۱۰- گزینه «۱» می‌دانیم که $0 \leq x < \infty$ بنابراین: $||x|| = 0, 1, 2, 3, \dots$ در نتیجه داریم:

$$y = 2^{||x||} = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots \Rightarrow y = 1, 2, 4, 8, \dots$$



پاسخنامه آزمون (۲)



۱- گزینه «۴» بازه‌ی تغییرات $tghx$ ، $(-1, 1)$ می‌باشد، به عبارتی $-1 < tghx < 1$. تابع $Arctgx$ نیز صعودی است، پس می‌توانیم از طرفین نامساوی، $Arctg$ بگیریم و در نتیجه داریم:

$$Arctg(-1) < Arctg(tghx) < Arctg(1) \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < Arctg(tghx) < \frac{\pi}{4}$$

۲- گزینه «۴» ابتدا با تقسیم صورت بر مخرج در براکت دوم، ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left[\frac{a+2}{9-4x} \right] + \left[-4 + \frac{y}{4x+9} \right] \Rightarrow f(x) = \left[\frac{a+2}{9-4x} \right] - 4 + \left[\frac{y}{4x+9} \right]$$

$$\left[\frac{a+2}{9-4x} \right] - 4 + \left[\frac{y}{4x+9} \right] - \left[\frac{a+2}{4x+9} \right] + 4 - \left[\frac{y}{9-4x} \right] = 0$$

چون تابع زوج است، باید $f(x) - f(-x) = 0$ باشد، لذا داریم:

با توجه به گزینه‌ها به سادگی ملاحظه می‌شود به ازای $a = 5$ تساوی فوق برقرار است.

$$f(0+0) + f(0-0) = 2f(0) + 2f(0) \Rightarrow 2f(0) = 4f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

۳- گزینه «۳» با فرض $a = b = 0$ داریم:

$$f(0+x) + f(0-x) = 2f(0) + 2f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

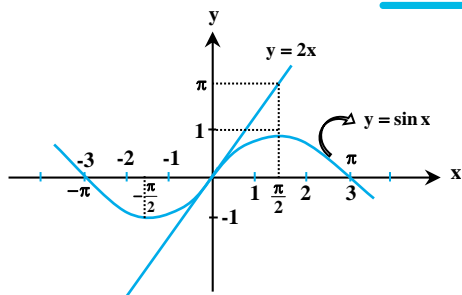
اما با فرض $a = 0$ و $b = x$ داریم:

۴- گزینه «۳» می‌دانیم که در هر تابع معکوس‌پذیر، $f \circ f^{-1}(x) = x$ است. بنابراین خط $y = x$ به دست می‌آید. فقط باید دامنه‌ی تابع $f \circ f^{-1}(x)$ را تشخیص

$$[1, 2] \xrightarrow{f^{-1}} [-1, 1] \xrightarrow{f} [1, 2]$$

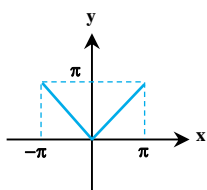
دهیم. طبق صورت سؤال $f: [-1, 1] \rightarrow [1, 2]$ پس $f^{-1}: [1, 2] \rightarrow [-1, 1]$ و با ترکیب آن‌ها خواهیم داشت:

به عبارتی دامنه و برد تابع $f^{-1} \circ f$ همان بازه‌ی $[1, 2]$ است، پس گزینه (۳) صحیح است.



۵- گزینه «۳»

با رسم نمودار دو تابع $y = \sin x$ و $y = 2x$ و مشاهده محل تلاقی دو منحنی ملاحظه می‌شود که تنها ریشه‌ی معادله، $x = 0$ می‌باشد.



۶- گزینه «۱» کافی است نمودار را در فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$ رسم کنیم و در سایر فاصله‌ها به روش مشابه نمودار قابل رسم می‌باشد.

$$0 < x < \pi \rightarrow y = \arccos(\cos x) = x$$

$$-\pi < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \pi, \cos x = \cos(-x) \Rightarrow \arccos(\cos(-x)) = -x$$

در سایر فاصله‌ها نیز شکل به همین ترتیب قابل رسم می‌باشد.

۷- گزینه «۴» دامنه‌ی تابع f ، $x \geq 1$ است و به ازای $x = 1$ ، حداقل f برابر ۱۴ بدست می‌آید، در نتیجه $R_f = [14, +\infty)$ خواهد بود.

۸- گزینه «۳» برای این‌که تابع زوج باشد، باید $a + 2 = 0$ و $c = -b$ باشد. در نتیجه $a + b + c = -2$ خواهد بود.

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x} \Rightarrow yx^2 - 2yx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + y}}{y} \Rightarrow y^2 + y \geq 0 \Rightarrow y(y+1) \geq 0 \Rightarrow y \leq -1 \text{ یا } y \geq 0$$

۹- گزینه «۴»

$$R_f = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

توجه شود چون وقتی $y = 0$ است، مقدار x نیز برابر صفر می‌شود و می‌دانیم $x = 0$ جزء دامنه نیست، پس داریم:



۱۰- گزینه «۴»

$$[a + [a]] = [a] + [a] = 2[a]$$

روش اول: عدد صحیح می تواند از جزء صحیح خارج شود و $[a]$ یک عدد صحیح است، بنابراین داریم:
با استفاده از این نکته داریم:

$$\left. \begin{aligned} [a + [a]] &= 2[a] \\ \left[a + \underbrace{2[a + [a]]}_{2[a]} \right] &= 5[a] \\ \left[a + \underbrace{3[a - 2[a]]}_{-[a]} \right] &= -2[a] \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 3 \left[a - \frac{2[a]}{2} + \frac{5[a]}{5} - \frac{2[a]}{2} \right] = 3[a - [a]] = 0$$

روش دوم: به ازای $a = 1$ حاصل عبارت برابر صفر خواهد شد و در گزینه های ۱، ۲ و ۳ هیچ کدام از گزینه ها به ازای $a = 1$ برابر صفر نمی شود.



پاسخنامه آزمون (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f(0) = \frac{\sqrt{0+9}}{3} = 1$$

۱- گزینه «۱»

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor 0^- \rfloor = -1$$

۲- گزینه «۳» ابتدا تکلیف جزء صحیح را معلوم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor \sqrt{9x^2 + 4} (\sin 2x)}{(x^2 + 1) \operatorname{tg} 3x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(2)(2x)}{(1)(3x)} = \frac{-4}{3}$$

۳- گزینه «۴» با توجه به حاصل حد باید بیشترین توان صورت را انتخاب کنیم، لذا داریم:

$$2n = 5 \Rightarrow n = \frac{5}{2} \Rightarrow n + 2 > 2n \quad \text{تناقض} \quad \Rightarrow n + 3 = 5 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^5}{ax^5} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$a + n = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

بنابراین داریم:

$$g(x) = (x-1)^2(x+2)f(x)$$

۴- گزینه «۳» تابع $g(x)$ را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

چون تابع f کراندار است، لذا حد تابع $g(x)$ در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ برابر صفر است. پس تا اینجا $g(x)$ در ۲ نقطه حد دارد. از طرفی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ حد دارد و لذا حد تابع $g(x)$ در این نقطه برابر با $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ می‌باشد (یعنی g در این نقطه هم حد دارد)، پس $g(x)$ دقیقاً در ۳ نقطه حد دارد.

۵- گزینه «۱» حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای محاسبه حد از هم‌ارزی‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sinh x \sim x + \frac{x^3}{6}, \quad \sin x \sim x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{6}}{1 + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}, \quad \operatorname{tg}^{-1} x \sim x - \frac{x^3}{3}$$

۶- گزینه «۴» حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای محاسبه حد از هم‌ارزی‌های مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2x - \frac{(2x)^3}{6}) - 2(2x - \frac{(2x)^3}{6})}{ax - (ax - \frac{(ax)^3}{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^3}{a^3 x^3} = \frac{-15}{a^3}$$

در این صورت:

$$\text{از معادله } \frac{-15}{a^3} = \frac{-3}{25} \text{ مقدار } a = 5 \text{ به دست می‌آید.}$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{Ln}(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}$$

۷- گزینه «۲» حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. از هم‌ارزی‌های مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x + \frac{x^2}{2} - 1 - x)^2}{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{2}$$

در این صورت:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{te^{at}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - 1}{te^{at}} \sim \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{te^{at}} = a \Rightarrow \text{حد اول}$$

۸- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{cosec} x)^{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin^2 x \operatorname{Ln} \operatorname{cosec} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin^2 x (\operatorname{cosec} x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin^2 x \left(\frac{1 - \sin x}{\sin x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x (1 - \sin x)} = e^{0(1)} = 1$$

از آنجایی که حاصل حد اول، دو برابر حاصل حد دوم است، بنابراین $a = 2 \times 1 = 2$ خواهد بود.

۹- گزینه «۲» با جایگذاری $x = 0$ در عبارت به حالت مبهم 1^{∞} می‌رسیم. می‌دانیم حاصل رفع ابهام این حالت خاص به صورت e^L می‌شود و داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} (\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (\frac{1 + \operatorname{tg} x - 1 - \sin x}{1 + \sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3(1+x)} \xrightarrow{\text{بنا بر هم‌ارزی مناسب}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

۱۰- گزینه «۳» حالت $\frac{0}{0}$ است، بنابراین از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(x \sin x)^2} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6})}{(x(x - \frac{x^3}{6}))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{(x^2 - \frac{x^4}{6})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^4(1 - \frac{x^2}{6})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6(1 - \frac{x^2}{6})^2} = \frac{1}{6}$$

۱۱- گزینه «۲» ابتدا مخرج مشترک گرفته و صورت را تا جایی بسط می‌دهیم تا به توان مخرج برسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2 - 2 \cos x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x^2 - 2(1 - \cos x)}{2x^2(1 - \cos x)}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2(1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24})}{2x^2(1 - 1 + \frac{x^2}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^4}{24}}{2x^2(\frac{x^2}{2})} = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$$

۱۲- گزینه «۳» از اولین جمله بسط مک‌لورن $\operatorname{tgh}(u)$ استفاده کنیم. وقتی $u \rightarrow 0$ داریم: $\operatorname{tgh}(u) \approx u$. حد مورد نظر فرم 1^{∞} دارد، پس به این ترتیب آن را

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \operatorname{tgh}(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{\frac{1}{x}} \sim \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}x} = e^{-1}$$

ساده‌تر کرده و سپس حل می‌کنیم:

۱۳- گزینه «۳» از دو جمله اول بسط مک‌لورن $\sinh(x)$ استفاده کنیم:

$$\sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{3!}$$

سپس با توجه به آن که فرم 1^{∞} رخ می‌دهد از قاعده $(1+u)^v \approx e^{vu}$ کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sinh(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x + \frac{1}{3}x^3}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{6})^{\frac{1}{x^2}} \sim \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{6}(\frac{x^2}{x^2})} = e^{\frac{1}{6}}$$

۱۴- گزینه «۴» وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ، بنابراین می‌توانیم هم‌ارز $\frac{1}{x} \sin^{-1} \frac{1}{x}$ را بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sin^{-1}(\frac{1}{x})]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} + \dots)]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \dots)^{x^2}$$

حالا اگر دقت کنید؛ با حالت ابهام 1^{∞} روبه‌رو هستیم که اتفاقاً حد ساده‌ای است و به راحتی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \dots) - 1] \times x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{6} + \frac{1}{120x^2} + \dots) = \frac{1}{6}$$

حاصل حد $= e^{\frac{1}{6}}$

۱۵- گزینه «۱» حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. با توجه به هم‌ارزی‌های $\sin x \sim x$ ، $\sinh x \sim x$ ، $e^x - 1 = x$ و این که $\operatorname{Arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$ و $\operatorname{Arcsec} \infty = \frac{\pi}{2}$ ، لذا داریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{x \cdot 2x \cdot \frac{\pi}{2}} = 0$$

۱۶- گزینه «۱» وقتی دیدید تابع $f(x)$ بین دو تابع گیر افتاده! و حد آن مورد سؤال است مطمئن باشید، با یک تست ساندویچی روبه‌رو هستید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \Delta x}{x^2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$



۱۷- گزینه «۴» تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
 (۱) گزینه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \cos(\frac{1}{+\infty})] = 1 + \cos(0) = 1 + 1 = 2$

(۲) گزینه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

(۳) گزینه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} \sim \lim_{x \rightarrow 0^-} -(\frac{x}{x}) = -1$

چون x منفی است، پس $|x| = -x$ می‌باشد:

چون x منفی است پس $|x| = -x$ می‌باشد:

۱۸- گزینه «۴»
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arcsin}(\frac{1-x}{1+x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

۱۹- گزینه «۴» با توجه به این که $x = 1$ ریشه مخرج کسر است، بهتر است حدود چپ و راست را به دست آوریم:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Arctg} \frac{1}{1-x} = \text{Arctg} \frac{1}{1-(1+\varepsilon)} = \text{Arctg} \frac{1}{-\varepsilon} = \text{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arctg}(\frac{1}{1-x}) = \text{Arctg} \frac{1}{1-(1-\varepsilon)} = \text{Arctg}(\frac{1}{+\varepsilon}) = \text{Arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، لذا تابع حد ندارد.

۲۰- گزینه «۴»

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-1-\varepsilon)^2} = \frac{1}{+\varepsilon^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-1+\varepsilon)^2} = \frac{1}{+\varepsilon^2} = +\infty \end{cases}$$

باید حدود چپ و راست برابر مقدار تابع شوند، یعنی A باید برابر $+\infty$ گردد و چون بی‌نهایت عددی حقیقی نیست، پس A را نمی‌توان طوری انتخاب کرد که تابع فوق پیوسته شود.

۲۱- گزینه «۲» تابع فقط دو خط مجانب افقی دارد:
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Arc cos}(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{1 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Arccos} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{1 + 2x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc cos} \frac{x + x + 2}{1 + 2x} = \text{Arc cos} 1 = 0 \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc cos} \frac{x - x - 2}{2x + 1} = \text{Arc cos}(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲۲- گزینه «۲»
 $y = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos x}{1} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

۲۳- گزینه «۱» برای محاسبه A از هم‌ارزی $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \approx \frac{n^3}{3}$ استفاده می‌کنیم:
 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^3}{3})^{\frac{1}{n}}$

اگرچه می‌دانیم که برای هر چند جمله‌ای مانند $p(n)$ داریم:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p(n)]{n} = 1$

اما برای کامل بودن اثبات، چنین ادامه می‌دهیم:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ln} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Ln}(\frac{n^3}{3})}{n} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{3}n^3} = 0$

بنابراین: $A = e^0 = 1$ است. در مورد B به این دقت کنیم که $\cos(n)$ و $\sin(n^2)$ هر دو توابعی کران‌دار هستند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج بر n خواهیم داشت:

$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin n^2}{n}}{1 + \frac{\cos n}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

۲۴- گزینه «۲» تابع f در a مشتق پذیر است پس در این نقطه پیوسته هم هست پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ حالا اگر فرض کنیم $x = a + \frac{1}{n}$ آن گاه وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $x \rightarrow a$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + \frac{1}{n}) = f(a)$ بنابراین حد داده شده دارای فرم 1^0 است که مبهم نیست و مقدارش برابر با ۱ می شود.

۲۵- گزینه «۳» برای این که منحنی $f(x)$ پایین مجانب مایل خود باشد، باید تفاضل «مجانب مایل - $f(x)$ » کوچکتر از صفر باشد. پس باید مجانب مایل را

$$\frac{x^r + a - 2}{ax^r} = \frac{x}{a} + \frac{(a-2)}{ax^r}$$

حساب کنیم:

$$\frac{x^r + a - 2}{ax^r} - \frac{x}{a} < 0 \Rightarrow \frac{x^r + a - 2 - x^r}{ax^r} < 0 \Rightarrow \frac{a-2}{ax^r} < 0 \Rightarrow \frac{a-2}{a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 2$$

بنابراین مجانب مایل $y = \frac{x}{a}$ است؛ پس داریم:

۲۶- گزینه «۱» با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \cos x) = 0$ ، و توجه به این که عبارت داده شده در سمت چپ نامساوی فوق، بزرگتر یا مساوی صفر است (چون

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \pi} \left| \frac{1-f(x)}{1+f(x)} - 1 \right| = 0$$

داخل قدرمطلق است)، لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left| \frac{1-f(x)}{1+f(x)} - 1 \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \left| \frac{-2f(x)}{1+f(x)} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$$

بنابراین بر طبق قضیه ساندویچ داریم:

۲۷- گزینه «۲» برای محاسبه حد A و B با توجه به هم‌ارزی $\frac{u^r}{r}$ $u \rightarrow 0$ داریم:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!}}}{\frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{بنابر هم‌ارزی برنولی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{4})}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x^4}{2}}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{2}}}{\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A - 2B = 0 - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

۲۸- گزینه «۳» ابتدا لازم است عبارت را ساده کنیم، بدین منظور عبارت مقابل حد را در $(1-x)$ ضرب و تقسیم می کنیم و سپس به طور متوالی از اتحاد

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

مزدوج استفاده می کنیم.

حال توجه کنید که در عبارت به دست آمده $x = \cos 20^\circ$ را جایگزین کرده و حد می گیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\cos 20^\circ)^{2^{n+1}}}{1 - \cos 20^\circ} = \frac{1}{1 - \cos 20^\circ} = \frac{1}{2 \sin^2 10^\circ} = \frac{1}{2} (1 + \cot^2 10^\circ)$$

۲۹- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x+2|}{\operatorname{tg}^{-1}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(x+2)}{\operatorname{tg}^{-1}(x+2)} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|x+2|}{\operatorname{tg}^{-1}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x+2)}{\operatorname{tg}^{-1}(x+2)} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 1 - (-1) = 2$$

۳۰- گزینه «۳» چون درون براکت به سمت ∞ میل می کند، می توانیم براکت را برداریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{2^n} - x^{2^n}}{3x^{2^n} - x^{2^n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2^n}}{2x^{2^n}} = \frac{1}{2}$$



۳۱- گزینه «۲» مجانب افقی تابع $y = \frac{1}{a}$ می باشد، پس $a = -2$ به دست می آید، یعنی $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{-2x^2 + 5x - 3}$. مقدار $f(1)$ باید برابر با حد f در $x = 1$ باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{-2x^2 + 5x - 3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 5}{-4x + 5} = -3 \Rightarrow f(1) = -3$$

۳۲- گزینه «۱» ابتدا منحنی را مرتب می کنیم به طوری که y بر حسب x به دست بیاید و سپس مجانب های آن را می یابیم:

$$x^2 y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 y^2 - y^2 = x^2 \Rightarrow y^2(x^2 - 1) = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

دو مجانب قائم دارد. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \text{دو مجانب افقی دارد.}$$

پس منحنی داده شده دارای ۴ مجانب است.

۳۳- گزینه «۲» حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. برای محاسبه حد از هم‌ارزی های زیر استفاده می کنیم:

$$\text{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$$

برای $\text{tg}^{-1} x$ از دو جمله بسط فوق و برای e^{2x} نیز از دو جمله بسط استفاده می کنیم، زیرا جملات اول حذف می شوند. در این صورت حد به شکل زیر در می آید:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x + \frac{x^3}{3})(1 + 2x - 1)}{2x^2 - 1 + \cos ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{2x^2 - 1 + \cos ax}$$

برای اینکه حد اخیر برابر عدد شود، لازم است درجه x در مخرج کسر با درجه x در صورت کسر برابر باشد. می دانیم بسط مکلاورن $\cos ax$ به صورت زیر است:

$$\cos ax = 1 - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4 x^4}{4!} - \dots$$

بنابراین لازم است جمله $2x^2$ در مخرج با جمله $-\frac{a^2}{2}x^2$ در بسط $\cos ax$ حذف شود، یعنی $2 - \frac{a^2}{2} = 0$ پس $a = \pm 2$ به دست می آید. در این صورت حد مورد

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{2x^2 - 1 + (1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{2}{3}x^4} = 1$$

نظر برابر ۱ به دست می آید.

۳۴- گزینه «۴» حد به صورت مبهم 1^∞ است، برای رفع ابهام از فرمول $u^v \sim e^{v(u-1)}$ استفاده می کنیم. در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\coth x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\coth x \left(\frac{1+e^x}{2} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\text{tgh} x} \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

توضیح: در محاسبات فوق از هم‌ارزی $\text{tgh} x \sim x$ استفاده کردیم.

۳۵- گزینه «۳» با قراردادن $x = 0$ در عبارت به حالت مبهم 1^∞ می رسیم. حاصل رفع ابهام این حالت خاص e^L می شود و فقط باید L را به روش زیر محاسبه

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\text{Arcsinh } x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsinh } x - x}{x^3}$$

نمود:

جای $\text{Arcsinh } x$ هم‌ارزی مناسب را قرار می دهیم (توجه کنید چون مخرج هم‌ارز x^3 است کافی است بسط مکلاورن صورت آن را تا توان ۳ بنویسیم).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \text{حاصل حد} = e^{-\frac{1}{6}}$$

۳۶- گزینه «۱» در محاسبات زیر از تساوی‌های $\frac{1}{0^+} = +\infty$ و $\frac{1}{0^-} = -\infty$ استفاده کرده‌ایم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{0^-} = \sqrt{0^-} = 0 \Rightarrow A_1 = 3 + \frac{1}{1+0} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} &= \sqrt{0^+} = \sqrt{0^+} = 0 \Rightarrow A_2 = 3 + \frac{1}{1+\infty} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 - A_2 = 4 - 3 = 1$$

۳۷- گزینه «۳» باید نقطه انفصال توابع را از درون به بیرون تعیین کنیم:

نقطه انفصال $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $1-x=0 \Rightarrow x=1$ نقطه انفصال

نقطه انفصال $f(f(x))$: $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{1-x}{-x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow x=0$ نقطه انفصال

نقطه انفصال $f(f(f(x)))$: $f(f(f(x))) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x \Rightarrow$ نقطه انفصال ندارد

۳۸- گزینه «۳» برای درک بهتر فرض می‌کنید $\text{Arc cot } gx = u$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ آن‌گاه $u \rightarrow 0^+$ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{Arc cot } gx] = \lim_{u \rightarrow 0^+} [u] = [0^+] = 0$$

۳۹- گزینه «۱» با استفاده از هم‌ارزی $\sin x \approx x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a \sin^b x}{\sin^c x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a x^b}{x^c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a+b}}{x^c}$$

اکنون ۳ حالت داریم. اگر $a+b > c$ ، درجه‌ی صورت بیشتر است و با ساده کردن کسر داریم $\lim_{x \rightarrow 0} x^{a+b-c} = 0$. اگر $a+b < c$ ، درجه‌ی مخرج بیشتر است و با

ساده کردن کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{c-a-b}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

پس در این دو حالت مقدار حد یا صفر است یا بی‌نهایت. تنها زمانی که $a+b=c$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a+b}}{x^c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

پس باید $a+b=c$.

۴۰- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x+x+2x^2)(1+3x)-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x+3x+9x^2+2x^2+6x^3-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3+11x^2+6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6x^2+11x+6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2+11x+6) = 6$$

توضیح: البته با کمی دقت از همان ابتدا چون در $x \rightarrow 0$ در صورت کسر باید کوچکترین توان را انتخاب کردیم، پس باید ضریب x را برداریم (البته دقت کنید اگر عدد ثابت ۱ در صورت باقی می‌ماند باید آن را به عنوان کمترین درجه می‌گرفتیم ولی در این مثال ۱ از صورت حذف می‌شود).



پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۳» با استفاده از مفهوم هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$e^x - x - \frac{x^2}{2} \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - x - \frac{x^2}{2} \cong 1 + \frac{x^3}{3!}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x - \frac{x^2}{2})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}} \cong \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^3}{3!})^{\frac{1}{x^3}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^3}{3!}) \cdot \frac{1}{x^3}} = e^{\frac{1}{3!}} = e^{\frac{1}{6}} \Rightarrow A = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Ln}(x+1)^{1395} = \lim_{x \rightarrow 0} 1395 \cdot \operatorname{Ln}(x+1) = 1395 \cdot \operatorname{Ln}(1) = 0$$

۲- گزینه «۳»

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ ملاحظه می‌شود تابع $e^{f(x)}$ کراندار می‌باشد، لذا جواب مورد نظر برابر صفر خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{f(x)}_0 \cdot \underbrace{g(x)}_0 = 0$$

تابع کراندار \times

یادآوری:

۳- گزینه «۳» از بسط مک‌لورن استفاده می‌کنیم، چون مخرج کسر هم x^f است، پس بسط مک‌لورن توابع صورت را تا درجه چهار می‌نویسیم.

$$\operatorname{Ln}(\cos x) \sim \operatorname{Ln}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots) \sim (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots) - \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots)^2}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(\cos x) - \sqrt{1-x^2} + 1}{\sin^f x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8} + 1}{x^f} = \frac{1}{24}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

۴- گزینه «۱» با قرار دادن $x = 0$ در کسر، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. چون $x \rightarrow 0$ ، لذا می‌توان به جای $\sinh(\operatorname{tg} x)$ از بسط مک‌لورن آن استفاده نمود:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad \sinh u \stackrel{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \sinh(\operatorname{tg} x) = \sinh(x + \frac{x^3}{3} + \dots) = (x + \frac{x^3}{3} + \dots) + \frac{1}{3!}(x + \frac{x^3}{3} + \dots)^3 + \dots$$

دقت کنید، چون مخرج کسر x^3 می‌باشد، کافی است بسط مک‌لورن صورت را فقط تا جمله x^3 بنویسیم.

توجه: لازم نیست $(x + \frac{x^3}{3} + \dots)^3$ را کامل به توان برسانیم؛ زیرا ما فقط تا جمله x^3 را به کار می‌بریم، بنابراین می‌توان به جای آن جمله‌ی هم‌ارز مناسب،

$$\sinh(\operatorname{tg} x) - x \sim x + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3!})x^3 - x \quad \frac{1}{3!}x^3 \text{ را جایگزین کرد:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{3} + \frac{1}{6})x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

۵- گزینه «۴» با قرار دادن $x = 0$ در عبارت، به حالت مبهم 1^∞ می‌رسیم. حاصل رفع ابهام این حالت خاص e^L می‌شود و فقط باید L را به روش مقابل محاسبه

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\frac{\cos x}{\cosh x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\frac{\cos x - \cosh x}{\cosh x})$$

نمود:

ابتدا هم‌ارزی مناسب برای مخرج را می‌نویسیم؛ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$ چون مخرج هم‌ارز x^2 شد، پس کافی است بسط‌های مک‌لورن صورت برای $\cos x$ و $\cosh x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} - 1 - \frac{x^2}{2!}}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow \text{حد} = e^{-1}$$

نیز تا x^2 نوشته شود:

۶- گزینه «۱» با قراردادن $x = 0$ در کسر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای صورت از هم‌ارزی $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} \operatorname{Ln}(x+1)$ و برای مخرج ابتدا هم‌ارزی $\cosh x$ را

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2!}} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2!}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2!} - 1}{(1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{2!}) - (1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!}}{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) \frac{x^2}{2!}} = -6$$

نوشته، سپس از هم‌ارزی برنولی استفاده می‌کنیم و داریم:

۷- گزینه «۴» با قراردادن $x = 1$ در کسر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام از قاعده هویتال استفاده می‌کنیم و داریم:

$$y = x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \ln y = x \ln x \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = x^x (1 + \ln x)$$

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (1 + \ln x) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \stackrel{\text{دوباره از Hop استفاده می‌کنیم}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (1 + \ln x)^2 + x^x (\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2$$

۸- گزینه «۳» برای رفع ابهام صورت و مخرج را دو بار در مزدوج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}) \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \frac{x+2+x+2\sqrt{x(x+2)} - 4(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \frac{2(\sqrt{x(x+2)} - (x+1))}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x(x+2)} + (x+1)}{\sqrt{x(x+2)} + (x+1)}$$

حالا می‌دانیم که $\sqrt{x+2} \approx \sqrt{x}$ و $\sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x^2 + 2x} \approx |x + \frac{2}{x}|$ که این جمله هم وقتی $x \rightarrow +\infty$ با x هم‌ارز است، پس داریم:

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \frac{2[x(x+2) - (x+1)^2]}{(4\sqrt{x})(2x)} \Rightarrow \text{حد} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}$$

۹- گزینه «۴» حالت کسر $\frac{0}{0}$ است. همچنین مخرج کسر x^4 است لذا صورت کسر را تا جمله x^4 بسط می‌دهیم.

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2} \xrightarrow{u = \sin x} \cos(\sin x) \sim 1 - \frac{\sin^2 x}{2}$$

با توجه به هم‌ارزی $\cos x$ در صفر داریم:

هم‌ارزی $\sin x$ در $x = 0$ برابر است با $x - \frac{x^3}{3!}$. $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}$ با توجه به موارد گفته شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{\sin^2 x}{2}) - (1 - \frac{x^2}{2})}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - \sin^2 x}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x - (x - \frac{x^3}{6}))(x + x - \frac{x^3}{6})}{x^4} \sim \frac{\frac{1}{2}(\frac{x^3}{6})(2x)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

توضیح: در کسر ما قبل آخر، $\frac{x^3}{6}$ را برابر صفر در نظر گرفتیم؛ چون وقتی $x \rightarrow 0$ آن‌گاه $\frac{x^3}{6}$ نسبت به x خیلی کوچکتر است و می‌توان آن را صفر را در نظر گرفت.

۱۰- گزینه «۱» حالت مبهم $\infty \times 0$ است. در اولین قدم از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم تا متغیر به سمت صفر میل کند. $t = \frac{1}{x}$ که اگر $x \rightarrow \infty$

آن‌گاه $t \rightarrow 0^+$ می‌باشد.

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} \right) \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \left(\cos t - 1 + \frac{1}{2} t^2 \right)$$

وقتی $t \rightarrow 0$ باشد، برای تابع $\cos t$ می‌توانیم از بسط مک‌لورن تابع به عنوان هم‌ارز استفاده کنیم و با توجه به درجه ۴ مخرج، بسط را تا توان ۴ می‌نویسیم.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - 1 + \frac{1}{2} t^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t^4} \left(\frac{t^4}{24} \right) = \frac{1}{24}$$



۱۱- گزینه «۱» با جایگذاری $x = 0$ به حالت مبهم $\infty - \infty$ می‌رسیم. برای رفع ابهام مخرج مشترک می‌گیریم. دانشجو باید توجه داشته باشد که هنگام استفاده از هم‌ارزی $\sin u$ اگر جملات یکدیگر را حذف کنند، هم‌ارزی معتبر نیست و باید به جملات، آنقدر اضافه کرد تا حاصل صفر نشود.

$$\begin{aligned} \text{حد} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 x}{(\sin^2 x)(4 \sin^2 \frac{x}{2})} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin \frac{x}{2} - \sin x)(2 \sin \frac{x}{2} + \sin x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2(\frac{x}{2}) - 2\frac{x}{2} - x + \frac{x^3}{3!})(2x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6})(2x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \frac{2x^3}{24} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تذکره: چون مخرج هم‌ارزی x^4 شد، بسط صورت را تا رسیدن به x^4 ادامه می‌دهیم.

۱۲- گزینه «۱» هم‌ارزی‌ها را تا جمله‌ی x^4 می‌نویسیم زیرا جملات قبلی حذف می‌شوند:

هم‌ارزی برنولی: $\sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2$

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \rightarrow \cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \end{aligned} \right\} \text{بسط‌های مک لورن:}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x + \frac{x^2}{2!}) - (1+x)}{(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2) - (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2!}}{-\frac{1}{12}x^2} = -6$$

۱۳- گزینه «۳» از هم‌ارزی $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ و $\cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{\pi^2}{2n^2}}{1 - \frac{\pi^2}{2n^2}} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \left(\frac{1 + \frac{\pi^2}{2n^2}}{1 - \frac{\pi^2}{2n^2}} - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \left(\frac{\pi^2}{2n^2} \right)} = e^{\pi^2}$$

۱۴- گزینه «۴» وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $t = (x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow 0$ و خواهیم داشت:

علاوه بر این تغییر متغیر، وقتی که $t \rightarrow 0$ می‌توانیم از هم‌ارزی $1 - \frac{m}{2}t^2 \sim e^{-\frac{mt^2}{2}} \sim e^{\frac{m \ln(1 - \frac{t^2}{2})}{2}}$ نیز استفاده کنیم. به این ترتیب داریم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2})^{\alpha+\beta}}{\sqrt{[1 - (1 - \frac{t^2}{2})^\alpha][1 - (1 - \frac{t^2}{2})^\beta]}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{\alpha+\beta}{2}t^2}{\sqrt{[1 - 1 + \frac{\alpha}{2}t^2][1 - 1 + \frac{\beta}{2}t^2]}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}t^2}{\sqrt{\alpha\beta}t^2} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

چون قرار است حاصل این حد $\sqrt{3}$ شود، باید $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{3}$ ، پس $\alpha+\beta = \sqrt{3\alpha\beta}$ ، و اگر طرفین را به توان دو برسانیم، آن‌گاه $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 3\alpha\beta$ ، و

لذا $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha\beta$

۱۵- گزینه «۳» فرض کنیم $y = x^{\sin x}$ باشد. وقتی $x \rightarrow 0$ هم‌ارزی $\sin x \approx x$ را داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

اما در حد دوم، یعنی: $B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctg x \right)^x$ ، چون $\arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$ ، لذا فرم 1^∞ رخ خواهد داد. می‌دانیم که $\arctg x = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، پس داریم:

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\arctg\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{2}} \right)^x$$

وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ پس $\arctg\left(\frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x}$ بنابراین داریم:

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\pi x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{-1}{\pi}\right) = e^{-\frac{1}{\pi}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{e^{-\frac{1}{\pi}}} = e^{\frac{1}{\pi}}$$

۱۶- گزینه «۳» حد A دارای فرم مبهم 1^∞ است. چون $x \rightarrow \infty$ پس $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. دو جمله اول بسط $\sin^{-1}(t)$ وقتی که $t \rightarrow 0$ به صورت $t + \frac{t^3}{3!}$ است به

این ترتیب خواهیم داشت:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(1 + \frac{1}{6x^2}\right)\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2}{6x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$$

اما B فرم مبهم ندارد، در واقع: $B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1^0 = 1$ پس $\frac{A}{B} = e^{\frac{1}{6}}$

۱۷- گزینه «۴» حد مورد نظر دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ است. اگرچه می توان با استفاده از هوییتال محاسبه حد را انجام داد، اما این روش قدری وقت گیر است و با

توجه به آن که $x = 0$ ریشه ی مضاعف صورت است، باید دو بار هوییتال گرفت. به این دلایل سعی می کنیم با استفاده از بسط مک لورن حد را ساده تر کنیم.

کار را با استفاده از هم ارزی های $\sin(u) \approx u$ و $\cos(u) \approx 1 - \frac{u^2}{2}$ آغاز می کنیم و سپس با هم ارزی $\ln(1+u) \approx u$ ادامه می دهیم (همه این هم ارزی ها زمانی معتبر هستند که $u \rightarrow 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{\ln[\cos(2x^2 - x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\ln\left[1 - \frac{(2x^2 - x)^2}{2}\right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-\frac{1}{2}(2x^2 - x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x^2}{x^2(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6}{(2x-1)^2} = -6$$

۱۸- گزینه «۲» از آنجا که $x \rightarrow 0$ از بسط مک لورن به این شکل استفاده کنیم:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots\right)} = e^{(1 - \frac{x}{2} + \dots)} \approx e^{1-x} = e^1 e^{-x} \approx e^1 (1-x)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \approx e^{\frac{1}{x} \left(-\frac{x}{2}\right)} \approx e^{-\frac{1}{2}}$$

همچنین با طی کردن مراحل مشابه:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{e^x(1 - \frac{x}{2}) - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x x}{-\frac{x}{2} e^x} = \frac{2}{1}$$

با جایگذاری در حد خواهیم داشت:

۱۹- گزینه «۲» از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ استفاده می کنیم و حد را به صورت مقابل بازنویسی می کنیم:

حاصل حد $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} (1 + 2 + 3 + \dots + |t|)$

چون $t \rightarrow \infty$ ، لذا $|t| = |t|$ و بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+|t|}{t^2}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t|(|t|+1)}{t^2} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t|^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{2t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

۲۰- گزینه «۴» به دو روش به این تست جواب می دهیم:

روش اول: فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می دهد. می توانیم هوییتال بگیریم یا از بسط مک لورن استفاده کنیم. اولین جمله بسط مک لورن توابع موجود برای یافتن حد کافی

است؛ زیرا مقدار حد را جملات با کمترین درجه تعیین می کنند. یادآوری کنیم که وقتی $u \rightarrow 0$ داریم:

$$\ln(1+u) \approx u$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + 2 \arctg(3x) + 3x^2}{\ln(\sin^2 x + 3x + 1) + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2(3x) + 3x^2}{\ln(x^2 + 3x + 1) + x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6x + 3x^2}{(x^2 + 3x) + x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = 2$$

روش دوم: با استفاده از هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + 2 \arctg(3x) + 3x^2}{\ln(\sin^2 x + 3x + 1) + xe^x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) + \frac{6}{1+9x^2} + 6x}{2 \sin x \cos x + 3 + e^x(x+1)} = \frac{2+6}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$



۲۱- گزینه «۴» قرار می‌دهیم: $A = (1 + \frac{2}{n^2})(1 + \frac{4}{n^2}) \cdots (1 + \frac{2n}{n^2})$ ، در این صورت داریم:

$$\ln A = \ln(1 + \frac{2}{n^2}) + \ln(1 + \frac{4}{n^2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{2n}{n^2})$$

با استفاده از هم‌ارزی $\ln(1+x) \sim x$ وقتی $x \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود: $\ln A \sim \frac{2(n(n+1))}{n^2} = \frac{n^2+n}{n^2}$ و در نتیجه $A \rightarrow e$ است، بنابراین $\ln A \rightarrow 1$ است، عبارت $\frac{n^2+n}{n^2}$ هم‌ارز ۱ است، بنابراین $\ln A \rightarrow 1$ و در نتیجه $A \rightarrow e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^n})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^{1-n}}$$

۲۲- گزینه «۳» حد به صورت مبهم 1^∞ است، بنابراین داریم:

اگر $n > 1$ ، رشد مخرج بیشتر و حد کسر برابر صفر می‌شود و حاصل حد برابر با ۱ به دست می‌آید.
اگر $n = 1$ ، واضح است که حد برابر e به دست می‌آید.
اگر $-\infty < n < 1$ ، رشد صورت بیشتر و حد کسر ∞ و حاصل حد e^∞ یا ∞ می‌شود.

۲۳- گزینه «۳» چون α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ هستند، بنابراین داریم: با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1 - \cos(ax^2 + bx + c)}{(x-\alpha)^2} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1 - \cos a(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)^2}$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{[a(x-\alpha)(x-\beta)]^2}{2} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{a^2(x-\beta)^2}{2} = \frac{a^2(\alpha-\beta)^2}{2}$$

طبق فرمول هم‌ارزی در $u \rightarrow 0$ ، $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ ، داریم:

۲۴- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sinh x - 1 + x)(2 \sinh x - 1)}{\sinh x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3+x)(2 \sinh x - 1)}{\sinh x + 2}$$

برای راحتی در محاسبات، ابتدا حاصل حد را حساب کرده و در نهایت عدد به دست آمده را در توان قرار می‌دهیم، اما در محاسبه‌ی حاصل حد دقت کنید که $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و چون $x \rightarrow +\infty$ ، لذا $\sinh x = \frac{1}{2}e^x$. با جایگزین کردن این مقدار به جای $\sinh x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3+x)(2 \sinh x - 1)}{\sinh x + 2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-3+x)(2 \frac{e^x}{2})}{(\frac{e^x}{2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3+x) \times 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 6) = +\infty$$

و لذا حاصل حد برابر با $+\infty = e^{+\infty}$ است.

۲۵- گزینه «۴» یادآوری می‌کنیم، تابع علامت $\text{sgn}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \text{sgn}(x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \text{sgn}(x-1)(x+2) = (-1) \times 1 = -1$$

حالا حد چپ و راست تابع را با هم حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \text{sgn}(x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \text{sgn}(x-1)(x+2) = (-1) \times (-1) = 1$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد.

دقت کنید، مقدار $\text{sgn}(x-1)$ برای $x > 1$ برابر ۱ و برای $x < 1$ برابر -۱ است، پس در هر دو حالت $x \rightarrow (-2)^+$ و $x \rightarrow (-2)^-$ مقدار $\text{sgn}(x-1)$ برابر -۱ می‌شود. مقدار $\text{sgn}(x+2)$ برای $x > -2$ برابر ۱ و برای $x < -2$ برابر -۱ است، پس مقدار $\text{sgn}(x+2)$ برای $x \rightarrow (-2)^+$ برابر ۱ و برای $x \rightarrow (-2)^-$ برابر -۱ است.

۲۶- گزینه «۲» در هر دو حد خواسته می‌توانیم فرض کنیم $\theta = \sin^{-1} x$ و حد را برحسب θ نوشته و حل کنیم. در این صورت $x = \sin \theta$ است،

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2} (\sin^{-1} x)^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta})}{\theta^3 \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

وقتی $x \rightarrow 0$ آن‌گاه $\theta \rightarrow 0$ و لذا داریم:

می‌دانیم که $\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta|$ است البته در این مثال $\theta \rightarrow 0$ میل می‌کند و $\cos(0) = 1$ مثبت است پس قدرمطلق لازم نیست.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2} (\sin^{-1} x)^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3 \cos \theta} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \left(\frac{\theta^2}{2}\right)}{\theta^3 (1 - \frac{\theta^2}{2})} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\theta^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه داریم:

محاسبه A: می‌دانیم اگر $x \rightarrow a$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow 0$. در نتیجه $\sqrt{1 + f(x)} - 1 \approx \frac{1}{m} f(x)$

$$1 - \sqrt{1 - x^2} = -(\sqrt{1 + (-x)^2} - 1) \approx -\left(\frac{1}{2}(-x^2)\right) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 + (-x^2)} \approx \frac{1}{2}(-x^2) + 1$$

(اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $x^2 \rightarrow 0$)

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{1}{2}x^2\right)}{\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right)x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right)x^3} = \frac{1}{2}$$

(اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $\text{Arc sin } x \approx x$)

در محاسبه‌ی B هم از آن‌جا که کمان کسینوس و کتانژانت در صورت و مخرج $\sin^{-1} x$ است، بهتر است با تغییر متغیر $\theta = \sin^{-1} x$ این حد را ساده‌تر کنیم.

$$\theta = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin \theta$$

می‌دانیم که $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است بنابراین وقتی $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، آن‌گاه $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، لذا داریم:

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x - \cos(\sin^{-1} x)}{1 - \cot g(\sin^{-1} x)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta - \cos \theta}{1 - \cot g \theta} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 + \cot g^2 \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

محاسبه B:

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \quad |x| \leq 1 \quad \cot g(\sin^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad x \neq 0, |x| \leq 1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه با تقسیم A بر B داریم:

۲۷- گزینه «۲» برای این‌که تابع در نقطه $x = 0$ ، پیوسته باشد، باید در این نقطه حد داشته باشد، با توجه به قوانین هم‌ارزی چون مخرج جمله x^3 را دارد، باید

هم‌ارزی را تا جمله x^3 نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{A \sin x + B \cos x + \sin^2 x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + B \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + (2x - \frac{(2x)^3}{6})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{A}{6} - \frac{1}{6}\right)x^3 - \frac{B}{2}x^2 + (A + 2)x + B}{x^3}$$

حال صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم می‌کنیم:

صورت کسرهایی که در مخرج آنها x وجود دارد باید برابر صفر شود چون در غیر اینصورت به حالت ابهام $\frac{\infty}{0}$ می‌دهیم و با فرض مسأله که تابع پیوسته

$$B = 0, A + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$$

است تناقض دارد:

مقدار $f(x)$ را به دست می‌آوریم که برابر حدود چپ و راست تابع می‌باشد یعنی داریم:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-A - 1}{6} = \frac{+2 - 1}{6} = -\frac{1}{6}$$

۲۸- گزینه «۴» استفاده از هم‌ارزی $(\sqrt[3]{1+u} \sim 1 + \frac{u}{3})$ بهترین روش حل این تست است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{x}{2}) - (1-\frac{x}{2})}{(1+\frac{x}{3}) - (1-\frac{x}{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{2}}{\frac{2x}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} + \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})]^n}{x^n} + \frac{[x(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})]^n}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^n (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})^n}{x^n} + \frac{x^n (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})^n}{x^n} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})^n] + \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}})^n] &= (1-1)^n + (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} - x \right) = \frac{1}{2} \quad \text{۳۰- گزینه «۳» ابتدا حد عبارت پراتز جلوی Arc cos را حساب می‌کنیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc cos}(\sqrt{x^2 + x} - x) = \text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

۳۱- گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها باید حدود چپ و راست در نقطه $x = k^2$ را با مقدار تابع مقایسه کنیم، برای این منظور داریم:

$$(k-1) < \sqrt{x} < k \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = k-1 \quad \text{حال اول برای بررسی حد چپ در نقطه } x = k^2 \text{ فرض کنیم: } x < k^2 < (k-1)^2 \text{، پس داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow (k^2)^-} (\sqrt{x} - \lfloor \sqrt{x} \rfloor) = \sqrt{x} - (k-1) = \sqrt{k^2} - k + 1 \stackrel{k \geq 0}{=} k - k + 1 = 1 \quad \text{پس حد چپ تابع در نقطه } x = k^2 \text{ برابر است با:}$$

$$k^2 < x < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{x} < k+1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = k \quad \text{اما برای بررسی حد راست تابع در نقطه } x = k^2 \text{، فرض کنیم } x < k^2 < (k+1)^2 \text{، داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow (k^2)^+} (\sqrt{x} - \lfloor \sqrt{x} \rfloor) = \sqrt{k^2} - k = k - k = 0 \quad \text{پس حد راست تابع در نقطه } x = k^2 \text{ برابر است با:}$$

مقدار تابع در نقطه $x = k^2$ برابر $f(k^2) = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor = k - k = 0$ می‌باشد، پس تابع در هر نقطه مانند $x = k^2$ فقط پیوستگی راست دارد.

تذکر: البته در کنکور تست فوق را با بررسی عددی مثلاً $x = (1)^2$ یا $x = 2^2$ به راحتی و در زمان بسیار کمتری می‌توانید پاسخ دهید!

۳۲- گزینه «۴» تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Arctg} \frac{1}{x} &= \text{Arctg} \frac{1}{0^+} = \text{Arctg} +\infty = +\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Arctg} \frac{1}{x} &= \text{Arctg} \frac{1}{0^-} = \text{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در نقطه } x = 0 \text{ پیوسته نیست.}$$

بررسی گزینه (۲): با توجه به نمودار و تعریف تابع علامت $\text{sgn}(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^2\left(\frac{1}{0}\right) = \cos^2 \infty = \infty \quad \text{بررسی گزینه (۳): عددی غیرمشخص}$$

در $x = 0$ تابع اصلاً حد ندارد چه برسد که بخواهد پیوسته هم باشد.

بررسی گزینه (۴): در تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin \pi x$ ، $\sin \pi x$ که همه‌جا پیوسته است، پس این $\lfloor x \rfloor$ است که ممکن است باعث ناپیوستگی تابع شود. از طرفی

می‌دانیم $\lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، اما چون در نقاط صحیح همواره مقدار $\sin \pi x = 0$ می‌شود، پس تابع پیوسته است.

نکته: تابع $y = g(x) \lfloor f(x) \rfloor$ به شرط پیوسته است که ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ ، مقدار $g(x)$ را همزمان صفر کند.

(در این تست $f(x) = x$ و $g(x) = \sin \pi x$ در نظر بگیرید)

۳۳- گزینه «۱» با استفاده از فرمول تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ تست حل می شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$$

حد عبارتی را که کمان \sin هستند، حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}\right) = \sin(\infty) = -1 \leq \text{عدد} \leq 1$$

حد اول برابر صفر شد، اما برای عبارت دوم داریم:

پس حد کل عبارت برابر با $0 = \text{عدد کراندار} \times \infty$ است.

۳۴- گزینه «۳» اگر به توان کسر توجه کنیم، می توانیم حد آن را به سادگی به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sqrt{x}) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{a(1-x) + \sin(x-1)}{x-1 + \sin(x-1)}\right]^2 \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{a(1-x) + (x-1)}{(x-1) + (x-1)}\right]^2$$

در نتیجه داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1-a)^2 (x-1)^2}{2^2 (x-1)^2}\right] = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{(1-a)^2}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 1-a = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

۳۵- گزینه «۲» برای حل حد مذکور ابتدا تغییر متغیر زیر را اعمال می کنیم و محدوده میل کردن حد را هم تعیین می کنیم و سپس به ساده سازی تابع مربوطه می پردازیم:

$$x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[1 - \text{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})] \cdot [1 - \sin(\frac{\pi}{2} + t)]}{[1 + \text{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})] \cdot [-2t]^2}$$

حالا توجه داریم که $\sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t$ و $\text{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}) = \frac{1 + \text{tg}(\frac{t}{2})}{1 - \text{tg}(\frac{t}{2})}$ است. با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{[1 - \frac{1 + \text{tg}(\frac{t}{2})}{1 - \text{tg}(\frac{t}{2})}] \cdot [1 - \cos(t)]}{[1 + \frac{1 + \text{tg}(\frac{t}{2})}{1 - \text{tg}(\frac{t}{2})}] \cdot [-2t]^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[-2 \text{tg}(\frac{t}{2})] \cdot [2 \sin^2(\frac{t}{2})]}{-16t^2}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \sim t \\ \lim_{t \rightarrow 0} \text{tg}(t) \sim t \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-t) \cdot (\frac{t}{2})}{(-16t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2}}{-16t^2} = \frac{1}{32}$$

حالا از هم‌ارزی‌های زیر می خواهیم استفاده کنیم تا حد مذکور را ساده تر کنیم:

۳۶- گزینه «۳» برای عامل $(\cos x - 1)$ استفاده از هم‌ارزی $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!}$ مناسب است. حالا که بسط $\cos x$ را تا x^2 نوشتیم، بسط e^x را هم تا x^2 ادامه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x - e^x)}{x^n} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} - 1)[(1 - \frac{x^2}{2!}) - (1 + x + \frac{x^2}{2!})]}{x^n}$$

می دهیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{x^2}{2})(-x)}{x^n} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^n}$$

فقط اگر $n = 3$ باشد مقدار حد $\frac{1}{2}$ است. در غیر این صورت یا مقدار حد $\pm \infty$ است یا صفر.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x^2} + \frac{e^{-x}}{2x \sinh(x)} \right) \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x^2} + \frac{e^{-x}}{2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+e^{-x}-1}{2x^2} \right) = \frac{0}{0} \rightarrow \text{مبهم}$$

۳۷- گزینه «۳»

$$\stackrel{\text{Hop}}{\lim}_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-e^{-x}}{4x} \right) = \frac{0}{0} \text{ (مبهم)} \stackrel{\text{Hop}}{\lim}_{x \rightarrow 0} \left(\frac{+e^{-x}}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

۳۸- گزینه «۳» با استفاده از هم‌ارزی‌های $\sin u \approx u$ و $\text{tg}(u) \approx u$ داریم:

$$\begin{cases} f(o^-) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+|x|)^{\frac{a}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{a}{|x|}} = e^a \\ f(o) = b \\ f(o^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{rx} = e^r \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } b = e^a = e^{\frac{2}{3}} \text{، یعنی } a = \frac{2}{3} \text{ و } b = e^{\frac{2}{3}} \text{ در نتیجه } ab = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}}$$

۳۹- گزینه «۲» هرگاه مقدار داخل جزء صحیح به $\pm\infty$ میل کند داریم $\lfloor u \rfloor \approx u$.

وقتی $x \rightarrow 0$ میل می‌کند داریم $\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$ پس: $\lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{a}{x} = a$ پس مجموع خواسته شده برابر است با:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{1394}{x} \right\rfloor \right) = 1+2+3+\dots+1394$$

$$\sum_{n=1}^m n = 1+2+\dots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

برای محاسبه جمع اعداد ۱ تا ۱۳۹۴ با توجه به رابطه گاوس داریم:

$$A = \frac{1394(1395)}{2} = 1395 \times 697$$

پس حاصل A برابر است با:

۴۰- گزینه «۱» با قرار دادن $x = 0$ در کسر، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای e^x و $\sin x$ باید از هم‌ارزی‌های مرتبط استفاده نمود. لازم به ذکر است چون

درجه x در مخرج کسر ۳ می‌باشد، کافی است هر یک از هم‌ارزی‌ها را فقط تا جایی که جمله‌ی x^3 تولید می‌شود، ادامه دهیم و داریم:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$e^x \sin x \sim \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^4 - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36}$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} - x - x^2}{x^3} \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۳» طبق فرمول، حجم هرمی که مساحت قاعده آن S و ارتفاع آن h باشد، برابر با $v = \frac{1}{3}sh$ می‌باشد. با توجه به صورت سؤال اگر از این رابطه نسبت به

زمان مشتق بگیریم، با توجه به این که تغییرات مساحت نسبت به زمان، یعنی $\frac{ds}{dt}$ و همچنین تغییرات حجم نسبت به زمان، یعنی $\frac{dv}{dt}$ داده شده است، لذا داریم:

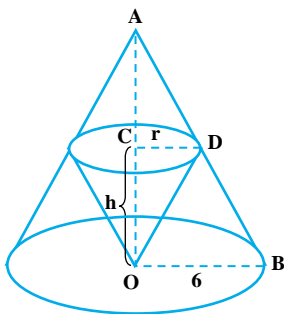
$$V = \frac{1}{3}sh \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}\left(s\frac{dh}{dt} + h\frac{ds}{dt}\right) \Rightarrow 30 = \frac{1}{3}(100\frac{dh}{dt} + 8 \times 5) \Rightarrow 90 - 40 = 100\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)$$

۲- گزینه «۳» برای یافتن نقطه بحرانی باید از تابع مشتق بگیریم و حاصل آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$y = x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \ln y = x \ln x \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = x^x(1 + \ln x) = 0$$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

x^x هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود، پس کفایست حاصل $1 + \ln x = 0$ را بیابیم:



۳- گزینه «۲» در شکل مقابل دو مثلث AOB و ACD متشابه‌اند، بنابراین داریم:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{12-h}{r} \Rightarrow h + 2r = 12$$

حجم مخروط مورد نظر $V = \frac{\pi}{3}r^2h$ می‌باشد، که چون $h = 12 - 2r$ ، بنابراین $V = \frac{\pi}{3}(12r^2 - 2r^3)$ است. برای یافتن ماکزیمم V مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\pi}{3}(24r - 6r^2) = 0 \Rightarrow r = 4 \text{ و } h = 4$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{x^2}$$

۴- گزینه «۲» طبق تعریف مشتق داریم:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cos(f(x))}{2x}$$

با توجه به پیوستگی تابع f و این که $f(0) = 0$ است فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد، پس قاعده هوییتال را به کار می‌گیریم.

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) \cos(f(x)) - f'(x)f'(x) \sin(f(x))}{2} = \frac{1}{2}(f''(0) \cos(0) - 0) = \frac{1}{2}$$

که $f'(0) = 0$ ، پس دوباره فرم مبهم $\frac{0}{0}$ رخ داده است:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^x} = 0, \quad f(0) = 0 \Rightarrow \text{پیوسته}$$

۵- گزینه «۳»

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^x} = \begin{cases} 0 & x \rightarrow 0^+ \\ 1 & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

بنابراین مشتق راست در $x = 0$ برابر ۰ و مشتق چپ در $x = 0$ برابر ۱ است.

۶- گزینه «۴» اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه n م برحسب x باشند، آن‌گاه مشتق مرتبه n م uv ، از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)} + \binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)} + \dots + \binom{n}{n}u^{(n)}v^{(0)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

در این تست $u = x$ و $v = \sin x$ می‌باشد، لذا داریم:

$$y^{(10)} = \binom{10}{0}x(\sin x)^{(10)} + \binom{10}{1}1(\sin x)^{(9)} = 1 \times x \cdot \sin(\Delta\pi + x) + 10 \times \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 10 \cos x - x \sin x$$

توضیح: از جمله دوم به بعد چون مشتق u برابر صفر است، لذا دیگر نوشتن بقیه عبارات لازم نبود.

$$\left. \begin{aligned} x = -1 \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} y = e \rightarrow A(-1, e) \\ y' = 2xe^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} \xrightarrow{x=-1} m = -3e \end{aligned} \right\} \text{خط مماس: } y - e = -3e(x + 1)$$

۷- گزینه «۱»

$$0 - e = -3e(x + 1) \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

در نقطه A (نقطه برخورد با محور x ها) داریم $y = 0$ ، لذا داریم:

با توجه به این که تصویر نقطه تماس روی محور x ها نقطه $x = -1$ می‌باشد، لذا فاصله مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

۸- گزینه «۱» ابتدا ضابطه عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$y = \cotg^{-1} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right) = \cotg^{-1} \left(\frac{1 + \cotg x}{1 - \cotg x} \right) = \cotg^{-1} \left(\cotg x \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = x + \frac{3\pi}{4}$$

بنابراین $y' = 1$ بدست می‌آید.

۹- گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی داده شده برای $f(x)$ داریم:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} - 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}} - \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{2}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = 0$$

با توجه به این که مشتق برابر صفر است، لذا قطعاً f تابعی ثابت است. اما دقت کنید در این لحظه گزینه (۴) را انتخاب نکنید، چون f تابعی ثابت است به ازای هر مقدار که به x بدهیم، مقدار $f(x)$ فرقی نمی‌کند و همیشه یکسان است. لذا با قرار دادن عدد مناسب صفر به جای x (برای راحتی در محاسبات)، مقدار ثابت f

$$f(0) = \text{Arc sin}(-1) - \text{Arc sin}(0) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}$$

حساب می‌شود:

بنابراین $f(x)$ همواره برابر $-\frac{\pi}{2}$ است و در نتیجه حاصل $f'(x) - f(x)$ برابر $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ می‌شود.

۱۰- گزینه «۱» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f(1) = 0$ است، پس $x-1$ عامل صفرکننده می‌باشد و برای مشتق‌گیری کفایت فقط از این عامل مشتق گرفته

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} f'(1) = 1 \times \frac{2(-1)(-2)}{2(3)(4)} = \frac{1}{6}$$

و در مابقی جملات تابع، $x=1$ را جایگزین کنیم:

$$y = 2 \Rightarrow 2 = \frac{4x^2}{x^2+1} \Rightarrow x = 1$$

۱۱- گزینه «۱» در این سؤال ابتدا از $y = 2$ مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}, f'(x) = \frac{12x^2(x^2+1) - (2x)(4x^2)}{(x^2+1)^2}$$

حالا از فرمول مشتق تابع معکوس استفاده می‌کنیم:

$$f'(1) = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$$

۱۲- گزینه «۱» در ابتدا باید مقدار $g'(0)$ و $f'(0)$ را بیابیم. با توجه به شرط‌های سؤال داریم:

$$ef(0) = 2 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(0)g(0) = 2 \Rightarrow g(0) = \frac{2}{f(0)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$f'(0) = 4g(0) = 4 \times 4 = 16, \quad 2g'(0) = 4g(0) \Rightarrow g'(0) = 2g(0) = 2 \times 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

با توجه به مقادیر ناصفر $g'(0)$ و $f'(0)$ داریم:

۱۳- گزینه «۴» یک دانشجوی باهوش باید بداند که مشتق‌گیری از این تابع با استفاده از قواعد معمولی مشتق نظیر مشتق حاصل ضرب و تقسیم کار پیچیده و

وقت‌گیری است، لذا برای راحتی کار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$y = \frac{\sqrt{(1+x)^y} \cos^3 x}{(x^2-4)^\Delta} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \text{Lny} = \text{Ln} \frac{(1+x)^{\frac{y}{2}} \cos^3 x}{(x^2-4)^\Delta} \Rightarrow \text{Lny} = \frac{y}{2} \text{Ln}(1+x) + 9 \text{Ln} \cos x - \Delta \text{Ln}(x^2-4)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = \frac{y}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{-9 \sin x}{\cos x} - \Delta \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow y'(0) = y(0) \left[\frac{y}{2} + \frac{-9(0)}{1} - \Delta \frac{2(0)}{0-4} \right]$$

$$\Rightarrow y'(0) = y(0) \left(\frac{y}{2} \right) \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{(-4)^\Delta} \times \frac{y}{2} \Rightarrow y'(0) = -\frac{14}{4^\Delta}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

۱۴- گزینه «۲» مساله همان مشتق‌گیری پارامتری است، یعنی داریم:

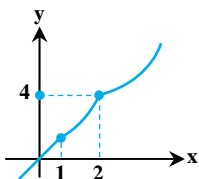
$$x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\cos t + \sin t)$$



$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\right)'_t}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^2}$$



۱۵- گزینه «۱»

با توجه به نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که این تابع در \mathbb{R} پوشاست و چون یک به یک است، پس معکوس‌پذیر نیز می‌باشد.

۱۶- گزینه «۲» با توجه به ضابطه $f(x)$ واضح است که محاسبه مشتق به کمک Ln ساده‌تر است:

$$\text{Ln} f(x) = \frac{1}{2}(\text{Ln}(4x+2) - \text{Ln}x - \text{Ln}(x+1) - \text{Ln}(x+2))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{4x+2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{-7}{12}$$

از طرفین رابطه اخیر مشتق می‌گیریم:

حال به جای x ها در دو طرف تساوی $x=1$ قرار می‌دهیم.

$$\text{با توجه به این که } f(1) = \sqrt{\frac{4 \times 1 + 2}{1 \times 2 \times 3}} = 1 \text{ می‌باشد، پس } f'(1) = \frac{-7}{12} \text{ بدست می‌آید.}$$

۱۷- گزینه «۱» راه حل مرسوم استفاده از مشتق‌گیری ضمنی است اما کمی دارای محاسبات وقت‌گیر و پیچیده است (حتی امکان بی‌دقتی در آن زیاد است). بنابراین با یک راه حل ابتکاری به سؤال جواب می‌دهیم. با فرض $x = \sin \alpha$ و $y = \sin \beta$ داریم:

$$\sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 1 \Rightarrow \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta = 1$$

با استفاده از فرمول مجموع $\sin(\alpha + \beta)$ داریم:

$$\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta = 1 \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \text{Arcsin } 1 \xrightarrow[\beta = \text{Arcsin } y]{\alpha = \text{Arcsin } x} \text{Arcsin } x + \text{Arcsin } y = \frac{\pi}{2}$$

حالا به راحتی مشتق‌گیری ضمنی را انجام می‌دهیم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) = -\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{\frac{15}{16}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\log_2(\Delta 12) = 9$$

۱۸- گزینه «۴» با توجه به آن که $\Delta 12 = 2^9$ ، داریم:

بنابراین $x = \sqrt{1 + \log_2(\Delta 12)} = \sqrt{10}$. حال می‌دانیم که $3 \leq x$. پس $f(x) = x^2 - 6x$ و $f'(x) = 2x - 6$ و با جایگذاری $x = \sqrt{10}$ داریم:

$$f'(\sqrt{10}) = 30 - 6 = 24$$

۱۹- گزینه «۴» چون ضابطه داده شده ضمنی است، برای مشتق‌گیری، همه جملات را به یک طرف برده و طرف دیگر را برابر صفر قرار می‌دهیم، سپس به کمک

$$e^{xy} \text{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) - x - \frac{1}{y} = 0 \quad \text{از رابطه مشتق می‌گیریم: } -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\text{مشتق} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{ye^{xy} \text{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) + e^{xy} \left(\frac{1}{x}\right) - 1}{xe^{xy} \text{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) - e^{xy} \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^2}} = -\frac{e^{-1}e^{1 \cdot e^{-1}} \text{Ln}\left(\frac{e}{e^{-1}}\right) + \frac{1}{e}e^{1 \cdot e^{-1}} - 1}{ee^{1 \cdot e^{-1}} \text{Ln}\left(\frac{e}{e^{-1}}\right) - \frac{e^{1 \cdot e^{-1}}}{e^{-1}} + \frac{1}{e^{-2}}} = -\frac{1}{e^2} = -e^{-2}$$

$$y = \sqrt{\text{tg}x + \sqrt{\text{tg}x + \sqrt{\text{tg}x + \dots}}} \Rightarrow y^2 = \text{tg}x + y$$

۲۰- گزینه «۴» ابتدا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^2 - \text{tg}x - y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-(1 + \text{tg}^2 x)}{2y - 1} = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{2y - 1} \quad (1)$$

با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\text{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \Rightarrow \text{tg}x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \xrightarrow{x = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)} \text{tg}x = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}$$

$$y^2 = \frac{3}{4} + y \Rightarrow 4y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{قق:} \\ -\frac{1}{2} & \text{غ قق:} \end{cases}$$

حال با جایگزینی $\frac{3}{4} = \text{tg}x = \frac{y}{x}$ در رابطه $y^2 = \text{tg}x + y$ نتیجه می شود:

$$y' = \frac{1 + \frac{9}{16}}{3 - 1} = \frac{25}{32}$$

با جایگزینی $y = \frac{3}{4}$ و $\text{tg}x = \frac{3}{4}$ در رابطه (1) داریم:

۲۱- گزینه «۴» نقطه تماس دو منحنی بر روی محور y ها است یعنی $x = 0$. با جایگذاری $x = 0$ در دو معادله داده شده داریم:

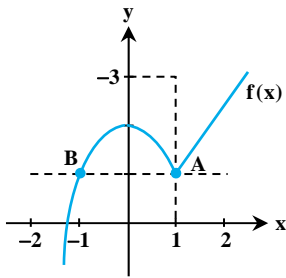
$$y = \frac{1}{a+x} \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow a = b$$

$$y = \frac{1+x}{b-x} \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{b}$$

همچنین، چون دو منحنی بر هم مماس هستند، در نتیجه شیب دو منحنی در نقطه‌ی تماس یعنی $x = 0$ با هم برابر است.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{a+x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(a+x)^2} \xrightarrow{x=0} m = \frac{-1}{a^2} \\ y = \frac{1+x}{b-x} \Rightarrow y' = \frac{b+1}{(b-x)^2} \xrightarrow{x=0} m = \frac{b+1}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{a^2} = \frac{b+1}{b^2} \xrightarrow{a=b} -1 = b+1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = -2$$

پس $a + b$ برابر -4 می باشد.



۲۲- گزینه «۳» چون رسم این نمودار ساده است، بهترین راه برای حل این مسأله استفاده از شکل تابع می باشد. با توجه به نمودار، نقطه‌ی مینیمم نسبی f نقطه‌ی $A(1, 1)$ می باشد، لذا خطی موازی محور x ها که از A هم بگذرد، خط $y = 1$ است. از برخورد دادن $y = 1$ با $y = 2 - x^2$ نقطه‌ی $B(-1, 1)$ به دست می آید.

۲۳- گزینه «۱» با توجه به شکل تابع که به صورت f می باشد، باید a مثبت باشد و با توجه به گزینه‌ها $a = 1$ می باشد و داریم:

$$y = x^3 + bx^2 + 3x$$

همچنین با توجه به شکل تابع، مشتق تابع باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد (چون نمودار تابع اکستریم نسبی ندارد و از طرفی شیب تابع در یک نقطه با طول مثبت صفر است). پس داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (2b)^2 - 4(3)(3) = 0 \Rightarrow 4b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

به ازای $b = -3$ داریم:

چون به ازای $b = -3$ طول ریشه‌ی مضاعف مثبت شده است، پس فقط $b = -3$ قابل قبول است چرا که با توجه به شکل ریشه مضاعف دارای طول مثبت است. پس دو تایی مرتب (a, b) برابر $(1, -3)$ می شود.

۲۴- گزینه «۱» با توجه به صورت سوال، می خواهیم سود ماهانه شرکت را ماکزیم کنیم، به این منظور، تابع هدف را حاصل ضرب سود هر اتومبیل (با در نظر گرفتن تخفیف) در تعداد اتومبیل‌های فروخته شده در ماه فرض می کنیم و برای حداکثر ساختن این تابع، مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\text{Max سود ماهانه} = \text{Max}(\text{سود هر اتومبیل}) \times (\text{تعداد اتومبیل‌های فروخته شده در ماه}) = \text{Max}(1000 - 50n)(2000 + 200n)$$

$$= 2 \times 10^6 - 10^5 n + 2 \times 10^5 n - 10^4 n^2$$

$$\text{مشتق} = 0 \Rightarrow 1000000 - 200000n = 0 \Rightarrow n = 5$$

(تعداد بهینه تخفیف‌ها)

بنابراین تخفیف کل برای رسیدن به حداکثر سود ماهانه باید، $5 \times 5 = 250$ دلار باشد.

۲۵- گزینه «۱» تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ چند جمله‌ای است، در نتیجه بر \mathbb{R} پیوسته می باشد و داریم:

$$\text{تابع } f(x) \text{ بر بازه } [0, 1] \text{ حداقل یک ریشه دارد} \Rightarrow f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0$$

با توجه به این که علامت تابع مشتق $y' = 3x^2 - 4x + 3$ همواره مثبت است، پس تابع f صعودی اکید است و دقیقاً یک ریشه دارد.



۲۶- گزینه «۲» ابتدا ضابطه داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم و داریم:

$$x^2 y^2 = 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} xy^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$$

فاصله از مبدأ برابر با $\sqrt{x^2 + y^2}$ است و برای محاسبه کوتاه‌ترین فاصله باید از این عبارت مشتق گرفت، ولی برای راحتی کار، می‌توان فقط از عبارت زیر رادیکال

$$(x^2 + \frac{1}{x})' = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

مشتق گرفت:

$$\text{فاصله کوتاه‌ترین} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2} + 1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

بنابراین $a = 3$ و $b = 2$ لذا $a - b = 1$.

۲۷- گزینه «۴» مختصات نقطه $(2, 0)$ در ضابطه f صدق نمی‌کند، پس این نقطه خارج منحنی است. نقطه‌ی $(\alpha, \frac{\alpha^2}{\alpha - 1})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و به

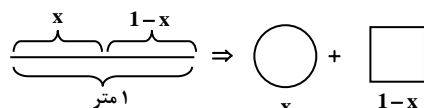
$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \xrightarrow{\text{به ازای } x=\alpha} y'(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-2)}{(\alpha-1)^2}$$

کمک این دو نقطه معادله مماس را به صورت مقابل بدست می‌آوریم:

$$\text{نقطه } (2, 0) \text{ جایگذاری} \rightarrow 0 - \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)^2} (2 - \alpha) \Rightarrow \alpha(\alpha - 1) = (\alpha - 2)^2 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

بنابراین با جایگذاری $\alpha = \frac{4}{3}$ معادله خط به صورت $y = -8(x - 2)$ حاصل می‌شود.

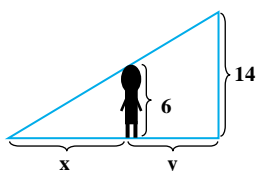
۲۸- گزینه «۱» قطعه‌ای که با آن دایره ساخته‌ایم را x و قطعه‌ای را که با آن مربع ساخته‌ایم را $1 - x$ فرض می‌کنیم و داریم:



$$\text{محیط دایره: } 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}, \quad \text{مساحت دایره: } \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$\text{محیط مربع: } 4a = 1 - x \Rightarrow a = \frac{1 - x}{4}, \quad \text{مساحت مربع: } a^2 = \frac{1}{16}(1 - x)^2$$

$$\text{Min}(\frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}(1-x)^2) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{8}(1-x) = 0 \Rightarrow (\frac{4+\pi}{8\pi})x = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4+\pi} \Rightarrow 1-x = 1 - \frac{\pi}{4+\pi} = \frac{4}{4+\pi}$$



۲۹- گزینه «۳» قضیه تالس: $\frac{6}{14} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow 3x + 3y = 7x \Rightarrow 3y = 4x$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان بدست می‌آید: $3 \frac{dy}{dt} = 4 \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\frac{dy}{dt}=4} \frac{dx}{dt} = 3$

$$A + \frac{A}{100} \times 2 = (1 + \frac{1}{50})A$$

۳۰- گزینه «۲» اگر جمعیت اولیه کشور A باشد پس از یک سال جمعیت کل برابر است با:

$$A(1 + \frac{1}{50})^2$$

بعد از ۲ سال جمعیت برابر است با:

$$A(1 + \frac{1}{50})^{100} \Rightarrow ((1 + \frac{1}{50})^{50})^2$$

جمعیت پس از ۱۰۰ سال 100 برابر است با:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \rightarrow ((1 + \frac{1}{50})^{50})^2 = e^2 = 7.389$$

۳۱- گزینه «۳» چون بحث صعودی مطرح است از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = 2 \sin x - 3x + \tan x \rightarrow f'(x) = 2 \cos x - 3 + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x - 2 \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

چون مجموع ضریب در صورت کسر صفر است می‌توانیم $(1 - \cos x)$ را از آن فاکتور بگیریم:

حالا به علامت $f'(x)$ توجه می‌کنیم. در مخرج کسر، $\cos^2 x$ مثبت است. همچنین عامل $1 - \cos x$ بزرگتر یا مساوی صفر است زیرا $-1 \leq \cos x \leq 1$ است. به عبارت $-2 \cos^2 x + \cos x + 1$ توجه کنید. با تعیین علامت این معادله مانند یک معادله‌ی درجه‌ی دو داریم $\Delta = 1 + 8 = 9$ و $1, -\frac{1}{2}$ و $\cos x = \frac{-1 \pm 3}{-4} = -\frac{1}{2}$ در

فاصله‌ی بین دو ریشه؛ یعنی در بازه‌ای که $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \cos x < 1$ علامت این عبارت؛ مثبت می‌شود. پس هر جا که $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \cos x < 1$ باشد، داریم $f'(x) > 0$ و $f(x)$ اکیداً صعودی می‌شود. این ناحیه شامل $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ و $0 < x < \frac{2\pi}{3}$ است.

۳۲- گزینه «۱» تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع:

$$y = \sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = \frac{1}{2}(3 \sin 3x - \sin x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = \text{Arc cos}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

$$y(\text{Arc cos}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}})) = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} \Rightarrow y_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

۳۳- گزینه «۴»

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{4 + 0.41} - \sqrt{4} = 2.1 - 2 = 0.1$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}} (0.41) = 0.1025$$

$$dy - \Delta y = 0.1025 - 0.1 = 0.0025$$

۳۴- گزینه «۱» این مساله مربوط به بحث دیفرانسیل و تقریب توابع می‌باشد.

$$x_0 = 45, \quad \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(45 + 1) = f(45) + f'(45) \times \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0.72$$

۳۵- گزینه «۳»

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = f'(\sqrt{b}) \Rightarrow \frac{b^{\sqrt{b}} - b + 1 - 1}{b - 1} = 2(\sqrt{b})^{\sqrt{b}} - 1 \Rightarrow \frac{b^{\sqrt{b}} - b}{b - 1} = 2 \Rightarrow \frac{b(b+1)(b-1)}{b-1} = 2 \Rightarrow b(b+1) = 2 \Rightarrow b = 4$$

۳۶- گزینه «۳» ابتدا تابع معکوس یعنی $y = f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)} - 1 \Rightarrow (f(x)+1)^3 = x+1 \Rightarrow x = -1 + (f(x)+1)^3 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -1 + (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f^{-1}(a+h) - f^{-1}(a)}{h} \right) = y'(a) \Rightarrow \frac{d}{dx} [-1 + (x+1)^{\frac{1}{3}}]_{x=a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3(a+1)^{\frac{2}{3}} = 12$$

$$(a+1)^{\frac{2}{3}} = 4 \rightarrow a = -1 \pm 2 = \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +1 \end{cases}$$

۳۷- گزینه «۱» کافیست با استفاده از فرمول مشتق ضمنی ابتدا y' را حساب کنیم:

$$y'_x = -\frac{2x - y}{-x + 3y^2} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

حُب حالا باید مقدار y را به ازای $x = 1$ از روی معادله‌ی داده شده، حساب کنیم:

$$x^2 - xy + y^3 = 1 \xrightarrow{x=1} 1 - y + y^3 = 1 \Rightarrow y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, y = +1, y = -1$$

پس در نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، سه عرض مختلف روی منحنی داریم:

حالا باید مقدار y' را به ازای این سه نقطه حساب کنیم:

$$y'_x(1, 0) = \frac{2 \times 1 - 0}{1 - 3(0)^2} = 2 \quad y'_x(1, 1) = \frac{2 \times 1 - 1}{1 - 3(1)^2} = -\frac{1}{2} \quad y'_x(1, -1) = \frac{2 \times 1 - (-1)}{1 - 3(-1)^2} = -\frac{3}{2}$$

واضح است y'_x هر یک از سه مقدار گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ را می‌تواند اختیار کند و در نقطه‌ی $x = 1$ هیچ‌گاه برابر با $\frac{3}{4}$ نمی‌شود.

۳۸- گزینه «۱» از صورت سؤال نتیجه می‌گیریم، ظرف مدت یک ماه فقط $\frac{1}{4}$ ماده باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$y(t) = Ce^{kt} \Rightarrow \frac{1}{4}C = Ce^k \Rightarrow e^k = \frac{1}{4} \Rightarrow k = -2 \ln 2 \Rightarrow \text{نیمه عمر} = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-2 \ln 2} = \frac{1}{2} \text{ (ماه)} = 15 \text{ (روز)}$$

۳۹- گزینه «۲» $f'(2) = 0$ است، بنابراین $x = 2$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع $f(x)$ است. حالا از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم؛ $f''(2) = -5$ است؛ لذا $f''(2)$ منفی است و این نشان می‌دهد که $x = 2$ نقطه‌ی ماکزیمم موضعی است.



$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \Rightarrow h'(0) = \frac{f'(0)g(0) - g'(0)f(0)}{g^2(0)}$$

۴۰- گزینه «۱»

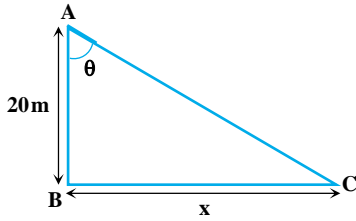
$$6f(0) = 3 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(0)g(0) = 2 \Rightarrow g(0) = \frac{2}{f(0)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

با توجه به شرطهای صورت سؤال داریم:

$$f'(0) = 4g(0) = 4 \times 4 = 16, \quad 2g'(0) = 4g(0) \Rightarrow g'(0) = 2g(0) = 2 \times 4 = 8$$

$$\Rightarrow h'(0) = \frac{16 \times 4 - 8 \times \frac{1}{2}}{16} = \frac{64 - 4}{16} = \frac{15}{4}$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱- گزینه «۴» در شکل مقابل فاصله فرد تا پای نورافکن را x فرض می‌کنیم، در این صورت طبق قضیه فیثاغورس $AC = \sqrt{x^2 + 400}$ است. در مثلث قائم‌الزاویه مورد نظر $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 400}}$ ، بنابراین با

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{x^2 + 400} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 400}}}{x^2 + 400} \cdot \frac{dx}{dt}$$

مشتق‌گیری از طرفین رابطه اخیر داریم:

چون سرعت حرکت فرد ۴ متر بر ثانیه است، بنابراین $\frac{dx}{dt} = 4$. در لحظه $x = 15$ ، مقدار $\sin \theta = \frac{15}{\sqrt{15^2 + 400}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ و در نتیجه $\cos \theta = \frac{4}{5}$ می‌باشد، در

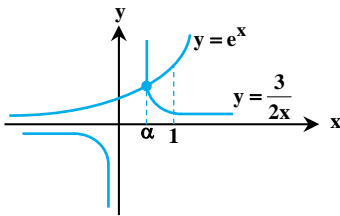
$$\frac{4}{5} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{225 + 400} - \frac{225}{\sqrt{225 + 400}}}{225 + 400} \times 4 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0/128$$

نتیجه داریم:

۲- گزینه «۲»

روش اول: فرض کنید $f(x) = 2xe^x - 3$. ابتدا به علامت f در دو سر بازه توجه کنید $f(0) = 0 - 3 < 0$ و $f(1) = 2e - 3 > 0$. با توجه به تغییر علامت f این بازه، قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک ریشه را تضمین می‌کند. از طرفی در این بازه داریم $f'(x) = 2e^x + 2xe^x > 0$ ، پس f اکیداً صعودی است. در نتیجه f نمی‌تواند دو ریشه داشته باشد (هر تابع اکیداً یکنوا حداکثر یک ریشه دارد).

روش دوم (روش ترسیمی):



$$f(x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{3}{2x}$$

رسم نمودارهای $y = e^x$ و $y = \frac{3}{2x}$ نشان می‌دهد این دو منحنی دقیقاً یک نقطه برخورد در بازه $(0, 1)$ دارند. دقت

کنید که در $x = 1$ مقدار e^x از $\frac{3}{2x}$ بیشتر است. پس $\alpha < 1$.

۳- گزینه «۳» تابع $y = \cosh(\sqrt{x})$ در ناحیه $x > 0$ و تابع $y = \cos(\sqrt{-x})$ بر ناحیه $x < 0$ پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. پس کفایت نقطه $x = 0$ را مورد بررسی قرار دهیم. پیوستگی f در $x = 0$ واضح است، زیرا $f(0) = 1$ و $f(0^+) = \cosh(0) = 1$ و $f(0^-) = \cos(0) = 1$ اکنون مشتق‌های چپ و راست را بررسی کنیم:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(\sqrt{x}) - 1}{x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cosh(\sqrt{x})}{\frac{2}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(\sqrt{-x}) - 1}{x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{-x}} \cos(\sqrt{-x})}{-\frac{2}{2\sqrt{-x}}} = \frac{1}{2}$$

و در مورد مشتق چپ:

پس f در مبدأ نیز پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه بر \mathbb{R} پیوسته و مشتق‌پذیر است.

توجه ۱: تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ و $t = \sqrt{-x}$ می‌تواند محاسبه‌ها را ساده‌تر کند. برای مثال در محاسبه مشتق چپ داریم $t = \sqrt{-x}$ پس $t^2 = -x$ و وقتی $x \rightarrow 0^-$ داریم $t \rightarrow 0^+$. حال می‌توان نوشت:

$$f'(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(t) - 1}{-t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(t)}{2} = \frac{1}{2}$$

توجه ۲: استفاده از بسط مک‌لورن $\cosh(\sqrt{x})$ و $\cos(\sqrt{-x})$ سریع‌ترین راه برای محاسبه حدهای مورد نظر است:

$$\cosh(\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad x > 0; \quad \cos(\sqrt{-x}) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \quad x < 0$$

۴- گزینه «۲» حل سوال به روش تشریحی خیلی طولانی می‌شود اما دانشجوی باهوش باید کمی زرنگ‌تر از این حرف‌ها باشد. ابتدا توابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{2 \sinh^2 \frac{x}{2}}{2 \cosh^2 \frac{x}{2}}} = \operatorname{arctgh} \left(\operatorname{tgh} \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2}$$

$$g(x) = \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}} = \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + \frac{\sinh x}{\cosh x}}{1 - \frac{\sinh x}{\cosh x}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x - \sinh x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{e^x}{e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Lne}^{2x} = \frac{2x}{2} \operatorname{Lne} = x$$

$$g'(x) - f'(x) = \frac{1}{2}$$

حال به راحتی $f'(x) = \frac{1}{2}$ و $g'(x) = 1$ را بدست آوردیم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-\frac{1}{x}}) = \ln(1 + e^{-\infty}) = \ln(1) = 0$$

۵- گزینه «۲» از آنجا که $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(\infty)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-\frac{1}{x}})}{x}$$

پس f در $x = \infty$ پیوسته است. اکنون مشتق پذیری f را در صفر بررسی کنیم:

اکنون با توجه به آن که عبارت $e^{-\frac{1}{x}}$ به صفر میل می‌کند، می‌توانیم از بسط عبارت $\ln(1+t)$ به ازای $t = e^{-\frac{1}{x}}$ استفاده کنیم. در واقع وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad \ln(1 + e^{-\frac{1}{x}}) \approx e^{-\frac{1}{x}}$$

با معرفی $z = \frac{1}{x}$ داریم $x = \frac{1}{z}$ و وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $z \rightarrow 0$ آن‌گاه داریم: $z \rightarrow 0$

$$L = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{-z}}{\frac{1}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z} \text{ HOP}}{e^z} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z\sqrt{z}e^z} = 0$$

بنابراین $f'(\infty) = 0$ است.

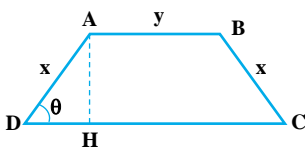
توجه: تغییر متغیر $z = \frac{1}{x}$ نیز مسأله را حل می‌کند اما در این صورت وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم $z \rightarrow 0$.

۶- گزینه «۳» بدون کاسته شدن از کلیت مسأله اندازه قاعده بزرگ را ۱ در نظر می‌گیریم، مساحت دوزنقه برابر $S = \frac{1}{2}AH(y+1)$ خواهد بود و طبق فرض مسأله

$2x + y = c$ پس $x = \frac{c-y}{2}$ است. چون $DH = \frac{1-y}{2}$ ، پس طبق قضیه فیثاغورس $AH = \sqrt{x^2 - (\frac{1-y}{2})^2} = \sqrt{(\frac{c-y}{2})^2 - (\frac{1-y}{2})^2}$ بنابراین

$$S^2 = \frac{1}{4}AH^2(y+1)^2 = \frac{1}{16}((c-y)^2 - (y-1)^2)(y+1)^2$$

می‌توانیم مشتق S^2 را برابر صفر قرار دهیم:



$$\frac{dS^2}{dy} = \frac{1}{8}(y+1)((c-y)^2 - (y-1)^2) + \frac{1}{16}(-2(c-y) - 2(y-1))(y+1)^2 = 0$$

از معادله فوق $y = \frac{c}{3}$ و در نتیجه $x = \frac{c}{3}$ بدست می‌آید.

$$S = \frac{(AB+CD) \times AH}{2} = \frac{(\frac{c}{3} + \frac{c}{3} + 2 \times \frac{c}{3} \cos \theta) \times \frac{c}{3} \sin \theta}{2} = \frac{c^2}{9}(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

حال مساحت دوزنقه را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{c^2}{9}(-\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta) = 0 \Rightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \cos \theta = 0 \Rightarrow 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = 2\ln(1 + \frac{x}{2}) = 2\ln(\frac{2+x}{2}) = 2\ln(2+x) - 2\ln 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2+x}$$

۷- گزینه «۳»

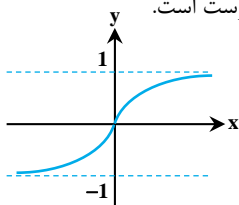
حال لازم است از عبارت $\frac{2}{2+x}$ ، ۹ بار دیگر مشتق بگیریم. می‌دانیم اگر $y = \frac{1}{ax+b}$ ، آن‌گاه $y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ بنابراین داریم:

$$f^{(10)}(x) = (f')^{(9)}(x) = 2 \times \frac{(-1)^9 9!}{(2+x)^{10}} \Rightarrow f^{(10)}(-2) = 2 \times \frac{(-1)^9 9!}{(2-2)^{10}} = -2(9!)$$

۸- گزینه «۳»

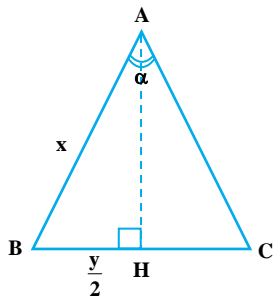
$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

روش اول: واضح است $1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < -1$ است لذا برد تابع $(-1, 1)$ است. همچنین $f'(x) > 0$ است پس f تابعی صعودی است و چون برای هر x ، $e^x + e^{-x} \neq 0$ پس دامنه f ، \mathbb{R} است. لذا گزینه (۳) نادرست است.



$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{tgh} x$$

روش دوم: $\operatorname{tgh} x$ گزینۀ (۳) نادرست است. با توجه به نمودار $\operatorname{tgh} x$ گزینۀ (۳) نادرست است.



۹- گزینه «۲» طول ساق مثلث متساوی الساقین را x و طول قاعده را y فرض می‌کنیم، در این صورت در مثلث ABH می‌توان نوشت $BH = AB \sin \frac{\alpha}{2}$ و یا $BC = 2AB \sin \frac{\alpha}{2}$. می‌دانیم شعاع دایره محاطی مثلث برابر با $r = \frac{2S}{P}$ است که S مساحت

و P محیط مثلث است. طبق فرض مساحت مثلث مقداری ثابت است، یعنی $S = \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha = c$ محیط این مثلث برابر است

$$r = \frac{2c}{2x + 2x \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{x + x \sin \frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین داریم: $AB + AC + BC = 2x + 2x \sin \frac{\alpha}{2}$

می‌خواهیم عبارت فوق با قید $x^2 \sin \alpha = 2c$ بهینه شود، از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x^2 \sin \alpha = 2c \\ 1 + \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x^2 \cos \alpha}{\frac{x}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x^2 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = x^2 \cos \alpha + x^2 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 \left(\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \right) = x^2 \cos \alpha \Rightarrow x^2 \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) = x^2 \cos \alpha \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

۱۰- گزینه «۳» از رابطه‌ی $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

فرض کنید $\text{Arcsin } x = \alpha \Rightarrow x = \sin \alpha \Rightarrow y = \sin 3\alpha \Rightarrow y = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 3x - 4x^3$

$y = 3x - 4x^3 \Rightarrow y' = 3 - 12x^2, y'' = -24x$
 $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = (1 - x^2)(-24x) - x(3 - 12x^2) + 9(3x - 4x^3) = 0$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با:

۱۱- گزینه «۴» مشتق‌گیری با استفاده از قواعد مشتق‌گیری حاصل ضرب، کار پیچیده و وقت‌گیری است. اما می‌توان آن را به کمک Ln ، به راحتی حل کرد:

از طرفین Ln می‌گیریم $\rightarrow y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \rightarrow \text{Ln } y = \text{Ln}(x-1) + \text{Ln}(x-2) + \text{Ln}(x-3) + \text{Ln}(x-4)$

از طرفین مشتق می‌گیریم $\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$

$\Rightarrow y' = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} \right]$

$\Rightarrow y'(0) = (-1)(-2)(-3)(-4) \left[\frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-4} \right] = 24 \left(\frac{-12-6-4-3}{12} \right) = -50$

۱۲- گزینه «۲» با استفاده از ویژگی‌های Ln داریم:

$\text{Ln } F(x) = \frac{1}{2} \text{Ln}(1+x) + \frac{1}{3} \text{Ln}(1-x) - \frac{4}{5} \text{Ln}(1+\delta x) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{3(1-x)} - \frac{4 \times \delta}{5(1+\delta x)}$

حالا با جایگذاری $x=0$ در $F(x)$ و $F'(x)$ داریم: $F(0) = 1, \frac{F'(0)}{F(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{20}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 4 = -\frac{23}{6} \Rightarrow F'(0) = -\frac{23}{6}$

۱۳- گزینه «۴» در $x = \frac{\pi}{4}$ داریم $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس در تابع $f(x) = x^2 \cos x (1+x^4)^{-7}$ عامل $\cos x$ ، صفرشونده است و کفایت از همین عامل مشتق گرفته

در سایر عوامل ضرب کنیم.

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = x^2 (-\sin x) (1+x^4)^{-7} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4} (-1) \left(1 + \frac{\pi^4}{16} \right)^{-7} = -\frac{\pi^2}{4 \left(1 + \frac{\pi^4}{16} \right)^7}$$

۱۴- گزینه «۲» $k(x) = f(x)g(x) \sin x \Rightarrow k'(x) = f'(x)g(x) \sin x + f(x)g'(x) \sin x + f(x)g(x) \cos x$

$\Rightarrow k'(0) = f'(0)g(0) \sin(0) + f(0)g'(0) \sin(0) + f(0)g(0) \cos(0) = 0 + 0 + f(0)g(0) = f(0)g(0)$ (۱)

با توجه به شرط‌های صورت سؤال باید $f(0)$ و $g(0)$ را بیابیم:

$$\left. \begin{cases} ef(0) = 3 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \\ f(0)g(0) = 2 \Rightarrow g(0) = \frac{2}{f(0)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \end{cases} \right\} \xrightarrow{\text{با توجه به (۱)}} k'(0) = f(0)g(0) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

یادآوری: اگر $f(x) = u_1(x)u_2(x)u_3(x)$ ، آن‌گاه مشتق $f(x)$ برابر است با: $f'(x) = u_1'(x)u_2(x)u_3(x) + u_1(x)u_2'(x)u_3(x) + u_1(x)u_2(x)u_3'(x)$



۱۵- گزینه «۲» اگر فرض کنیم $g(x) = \sqrt{5x+6}$ ، آن‌گاه نسبت تغییر y به $\sqrt{5x+6}$ برابر $\frac{y'_x}{g'_x}$ تعریف می‌شود. پس داریم:

$$g(x) = \sqrt{5x+6} \Rightarrow g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+6}} \quad x=2 \quad \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{8}$$

از طرفی برای محاسبه y'_x بهتر است x'_y را حساب کرده و آن‌گاه با توجه به رابطه $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ مقدار y'_x را معلوم کنیم:

$$x = y^3 + y \Rightarrow x'_y = 3y^2 + 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

$$x = y^3 + y \xrightarrow{x=2} y^3 + y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{3(1)^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{نسبت تغییرات} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(\lambda+r)^3$$

۱۶- گزینه «۱» با توجه به این که حجم کره برابر است با $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ، داریم:

$$S = 4\pi(\lambda+r)^2$$

و مساحت کره برابر است با $S = 4\pi R^2$ داریم:

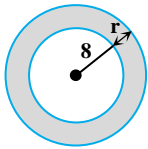
$$V'_t = 4\pi(\lambda+r)^2 \times r'(t)$$

$$S'_t = 8\pi(\lambda+r) \times r'(t)$$

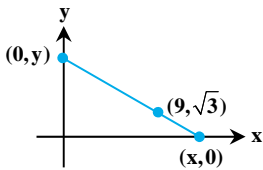
$$\frac{V'_t}{S'_t} = \frac{(\lambda+r)}{2} \xrightarrow[r=2]{V'_t=10} \frac{10}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow S'_t = 2$$

از تقسیم $\frac{V'_t}{S'_t}$ داریم:

سطح خارجی یخ با سرعت ۲ واحد کم می‌شود.



۱۷- گزینه «۳» با توجه به شکل، باید طول پاره‌خط یعنی $\sqrt{x^2+y^2}$ را می‌نیمیم. بدین منظور باید تابع را بر حسب یک متغیر (x یا y) نوشته و از آن مشتق بگیریم و حاصل را برابر صفر قرار دهیم:



$$m = \frac{\sqrt{3}-0}{9-x} = \frac{\sqrt{3}-y}{9-0} \Rightarrow 9\sqrt{3} = 9\sqrt{3} - 9y - \sqrt{3}x + xy \Rightarrow y(x-9) = \sqrt{3}x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}x}{x-9}$$

$$\text{Min}[x^2 + y^2] = \text{Min}\left[x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{x-9}\right)^2\right]$$

اگر مقدار $x^2 + y^2$ را حداقل کنیم، مقدار جذر آن نیز کمینه می‌شود:

$$\text{مشتق} = 2x + 2\left(\frac{\sqrt{3}x}{x-9}\right)\left(\frac{-9\sqrt{3}}{(x-9)^2}\right) = 0 \Rightarrow x\left(1 - \frac{27}{(x-9)^2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } (x-9)^2 = 27 \Rightarrow x-9 = 3 \Rightarrow x = 12$$

اما $x = 0$ نمی‌تواند باشد، زیرا در این صورت پاره‌خطی تشکیل نمی‌شود و نمایشگر مبدأ مختصات است و به ازای $x = 12$ داریم:

$$\sqrt{12^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192} = \sqrt{3 \times 64} = 8\sqrt{3}$$

۱۸- گزینه «۲» با توجه به ضابطه، نقطه $(1, -3)$ روی منحنی قرار ندارد مختصات نقطه‌ی تماس را به صورت (α, α^2) نشان می‌دهیم.

$$\text{معادله خط: } y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} -3 - \alpha^2 = 2\alpha - 2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1, 3$$

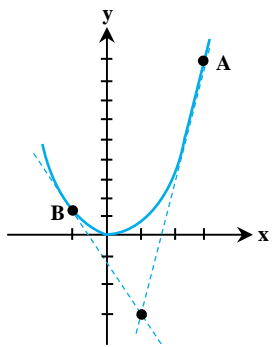
$$\text{مختصات نقطه تماس: } A \begin{vmatrix} 3 \\ 9 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

پس دو نقطه تماس به دست می‌آید:

شیب خط مماس در هر نقطه از منحنی برابر است با: $y' = 2x$. پس در A شیب خط مماس ۶ و در B شیب خط مماس -۲ است.

$$(1) \text{ معادله خط: } y - 9 = 6(x - 3) \Rightarrow y = 6x - 9$$

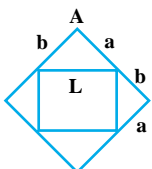
$$(2) \text{ معادله خط: } y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$$



۱۹- گزینه «۴»

مطابق شکل روبرو طول هر ضلع مربع مورد نظر برابر $a + b$ می‌باشد و طبق قضیه فیثاغورس باید $a^2 + b^2 = L$ باشد.

برای این که $a + b$ ماکسیمم شود لازم است a و b با هم برابر باشند که در این صورت $a^2 = b^2 = \frac{L}{2}$ ، لذا داریم $a + b = \sqrt{2L}$.



۲۰- گزینه «۳» چون ارتفاع، تابعی خطی از شعاع است، بنابراین $h = ar + b$. از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. در این صورت $\frac{dh}{dt} = a \frac{dr}{dt}$ ، و چون در سؤال سرعت تغییر ارتفاع سه برابر شعاع است، بنابراین $a = 3$. وقتی شعاع برابر یک است ارتفاع برابر ۶ می‌باشد، بنابراین $a + b = 6$ و لذا $b = 3$ بدست می‌آید. پس در این استوانه $h = 3r + 3$ ، که با جایگزینی در فرمول حجم استوانه نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow V = 3\pi(r^2 + r^3) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3\pi(2r \frac{dr}{dt} + 3r^2 \frac{dr}{dt})$$

چون در سؤال وقتی شعاع برابر ۶ می‌باشد تغییر حجم برابر ۱ داده شده است، بنابراین داریم:

$$3\pi(3 \times 36 + 12) \frac{dr}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{360\pi}$$

در نتیجه وقتی شعاع ۳۶ باشد تغییر حجم برابر است با:

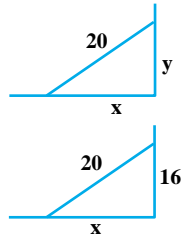
$$n = 3\pi(3 \times 36^2 + 3 \times 36) \frac{1}{360\pi} = \frac{36(108 + 3)}{120} = \frac{3(110)}{10} = 33 \Rightarrow n = 33$$

۲۱- گزینه «۲» می‌خواهیم با رد گزینه این سؤال را پاسخ دهیم. در ابتدا حالت $x < 0$ را در نظر بگیرید و x به سمت صفر از راست میل می‌کند. وقتی $x \rightarrow 0^+$ آن‌گاه هم‌ارز $\ln(1+x)$ را می‌نویسیم:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \Rightarrow x - \ln(1+x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \dots = I$$

حال باید بررسی کنیم I کوچکتر از $\frac{x^2}{2}$ است یا خیر. چون $x \rightarrow 0^+$ لذا $-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} < 0$ و همچنین $-\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} < 0$. بنابراین هر چه بیشتر بسط I را بنویسیم، آن‌گاه I برابر $\frac{x^2}{2}$ منهای یک سری اعداد می‌شود. بنابراین $I < \frac{x^2}{2}$.
که با توجه به نامساوی بالا، گزینه (۲) صحیح است.

۲۲- گزینه «۲»



$$x^2 + y^2 = 400 \xrightarrow{y=16} x = 12$$

$$x^2 + y^2 = 400 \xrightarrow{\text{مشتق به زمان}} 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \xrightarrow{y=16, \frac{dy}{dt} = -1/5, x=12} 12 \frac{dx}{dt} - 24 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2$$

۲۳- گزینه «۲»

روش اول: برای محاسبه تعداد ریشه‌های معادله $x^A + x - 1 = 0$ ، از آنجا که این تابع چندجمله‌ای است (در نتیجه در کل \mathbb{R} پیوسته می‌باشد). برای دو بازه $[0, 1]$ و $[-2, -1]$ بررسی را انجام می‌دهیم:

تابع f در بازه $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد $\Rightarrow f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$

تابع f در بازه $[-2, -1]$ حداقل یک ریشه دارد $\Rightarrow f(-2) = (-2)^A + (-2) - 1 > 0$ و $f(-1) = (-1)^A - 1 - 1 < 0$

چون تابع f بر بازه $[0, 1]$ صعودی اکید است، پس دقیقاً یک ریشه در این بازه دارد.

چون تابع f بر بازه $[-2, -1]$ نزولی اکید است، پس دقیقاً یک ریشه نیز در این بازه دارد.

در نتیجه در کل \mathbb{R} دقیقاً دو ریشه موجود است.

روش دوم: قرار می‌دهیم $f(x) = x^A + x - 1$ ، در این صورت معادله $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} + 1 = 0$ فقط یک ریشه دارد. پس معادله $f(x) = 0$ حداکثر دو ریشه دارد. از طرفی داریم: $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0 \Rightarrow f$ حداقل دو ریشه دارد. از بحث فوق نتیجه می‌شود معادله مورد نظر دقیقاً دو ریشه دارد.

۲۴- گزینه «۱» تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است و دامنه آن $D: \mathbb{R} - \{0\}$ است و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda f(x) + 6f\left(\frac{1}{x}\right) &= (\lambda + x) \times \lambda \\ (x \rightarrow \frac{1}{x}): \lambda f\left(\frac{1}{x}\right) + 6f(x) &= (\lambda + \frac{1}{x}) \times -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (64 - 36)f(x) = [(40 - 30) + (\lambda x - \frac{6}{x})]$$

$$\Rightarrow 28f(x) = [10 + \lambda x - \frac{6}{x}] \Rightarrow 28f'(x) = [0 + \lambda + \frac{6}{x^2}] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{28}[\lambda + \frac{6}{x^2}]$$

اگر y را برابر با $y = x^2 f(x)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$y'(-1) = -2f(-1) + f'(-1) = -2 \times \left[\frac{10 - \lambda + 6}{28} \right] + \left(\frac{\lambda + 6}{28} \right) = \frac{-16 + 14}{28} = -\frac{1}{14}$$

در نتیجه مقدار $y'(-1)$ را می‌توانیم از رابطه روبرو پیدا کنیم:



۲۵- گزینه «۴» حد داده شده از نوع $\frac{0}{0}$ بوده و مبهم می‌باشد؛ پس برای حل آن می‌توان از قاعده هویتال استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(a) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)}{g(x) - f(x)} \right] = f \Rightarrow \left(\frac{0}{0} \right)^H \equiv \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(a)g'(x) - g(a)f'(x)}{g'(x) - f'(x)} \right] = f$$

$$\frac{f(a)=g(a)=k}{x \rightarrow a} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{kg'(x) - kf'(x)}{g'(x) - f'(x)} = k \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x) - f'(x)}{g'(x) - f'(x)} \right) = f \Rightarrow k = f$$

۲۶- گزینه «۱» ابتدا y را برابر x قرار می‌دهیم و معادله تابعی (Functional Equation) را حل می‌کنیم:

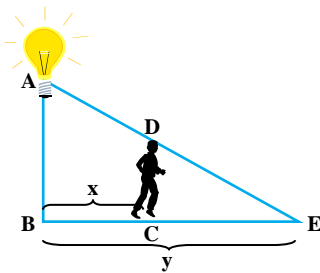
$$\begin{cases} f(x) + f(y) + f(x)f(y) = 1; & \underline{y=x} \rightarrow f(x) + f(x) + f(x)f(x) = 1 \Rightarrow (f(x))^2 + 2f(x) = 1 \\ f(x) > 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f(x) + 1)^2 = 2 \Rightarrow f(x) = -1 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{f(x) > 0} f(x) = -1 + \sqrt{2}$$

مشق تابع $f(x)$ برابر صفر است.

$$f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow 2x + \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (f^{-1})''(1) = -\frac{f''(0)}{(f'(0))^2} = +\frac{1}{8} \quad \text{۲۷- گزینه «۳»}$$

$$f'(x) = 2 - \sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$



۲۸- گزینه «۳» با توجه به توضیحات تست و شکل مقابل $AB = 540$ را ارتفاع تیر، $DC = 180$ را قد این مرد، و E را نوک سایه این مرد روی زمین در نظر می‌گیریم، اگر فاصله این مرد از تیر (یعنی BC) را برابر x و فاصله سایه این شخص از تیر (یعنی BE) را برابر y فرض کنیم. طبق صورت مسئله، مقدار $\frac{dx}{dt} = 240$ داده شده و هدف سؤال تعیین مقدار $\frac{dy}{dt}$ می‌باشد. طبق قضیه تالس در مثلث ABE رابطه زیر را داریم:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{180}{540} = \frac{y-x}{y} \Rightarrow \frac{y-x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y - 3x = y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} \times 240 = 360 \text{ (سانتی‌متر ثانیه)} \quad \text{اگر از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، داریم:}$$

۲۹- گزینه «۴» مقدار مشتق یک منحنی در یک نقطه دلخواه برابر ضریب زاویه مماس بر آن منحنی در آن نقطه دلخواه است. پس باید مشتق چپ و راست را برای تابع در نقطه $x = 1$ بیابیم:

$$\begin{cases} m_1 = f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(-1)^{[x]} \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right) - 0}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \\ m_2 = f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} - \left(\frac{(-1)^{[x]} \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right) - 0}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\left(\frac{x-1}{x} \right)}{\left(\frac{x-1}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = +1 \end{cases}$$

از آنجایی که بین شیبها رابطه‌ی $m_1 \times m_2 = -1$ برقرار است، پس دو مماس بر هم عمودند و زاویه بین آنها $\frac{\pi}{2}$ است.

۳۰- گزینه «۳» با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$\text{Lny} = \text{Ln} \left[\frac{(x+1)^2 (x+2)^3}{(x+4)^2 (x+8)^{\frac{1}{3}}} \right] = \text{Ln}(x+1)^2 + \text{Ln}(x+2)^3 - \text{Ln}(x+4)^2 - \text{Ln}(x+8)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \text{Lny} = 2\text{Ln}(x+1) + 3\text{Ln}(x+2) - 2\text{Ln}(x+4) - \frac{1}{3}\text{Ln}(x+8)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+4} - \frac{1}{3(x+8)}$$

حالا از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$y'(0) = y(0) \left[\frac{2}{0+1} + \frac{3}{0+2} - \frac{2}{0+4} - \frac{1}{3(0+8)} \right] \Rightarrow y'(0) = y(0) \left[2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right] = y(0) \left[\frac{48 + 36 - 12 - 1}{24} \right] = y(0) \left(\frac{71}{24} \right) = y(0) \left(\frac{10}{3} \right)$$

حالا کافیس مقدار $y(0)$ را حساب کنیم که این کار به راحتی و با قرار دادن $x = 0$ در تساوی داده شده در صورت سؤال، صورت می‌گیرد:

$$y(0) = \frac{(0+1)^2(0+2)^2}{(0+4)^2(0+8)^2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{بنابراین } y'(0) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\cos t}{e^t}$$

۳۱- گزینه «۲» مشتق‌های اول و دوم y نسبت به x را حساب می‌کنیم:

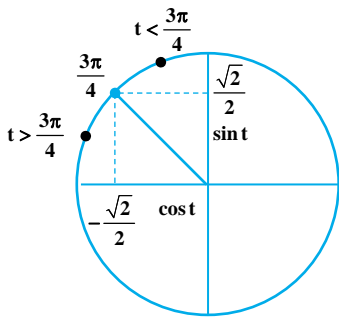
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{-e^t \sin t - e^t \cos t}{e^{3t}} = \frac{-(\sin t + \cos t)}{e^{2t}}$$

با توجه به آن که $e^{2t} > 0$ است، مخارج این کسرها هیچ‌جا صفر نمی‌شود و مشتق‌های اول و دوم در هر نقطه وجود دارند. ریشه‌های معادله $y'' = 0$ را پیدا می‌کنیم.

$$y'' = \sin t + \cos t = 0 \Rightarrow \sin t = -\cos t \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = -1 \Rightarrow \text{tg}t = -1 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi$$

این نقاط ریشه‌های y'' هستند. البته باید اطمینان یابیم که علامت y'' در این نقاط تغییر می‌کند. نقطه‌ی $t = \frac{3\pi}{4}$ را به عنوان نماینده‌ی این نقاط در نظر بگیرید.

می‌دانیم که $e^{2t} = -\frac{\sin t + \cos t}{e^{2t}}$ است. e^{2t} همواره مثبت است. بنابراین به علامت عبارت $\sin t + \cos t$ توجه کنید. برای توضیح بهتر، زاویه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان داده‌ایم. مقدار $\sin t$ روی محور عمودی و مقدار $\cos t$ روی محور افقی بدست می‌آید. وقتی $t > \frac{3\pi}{4}$ باشد $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است در نتیجه $\sin t + \cos t < 0$ و $y'' > 0$ می‌شود.



وقتی $t < \frac{3\pi}{4}$ باشد، $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است پس $\sin t + \cos t > 0$ و در نتیجه $y'' < 0$ می‌شود.

پس علامت y'' در این نقطه عوض می‌شود. به این ترتیب مطمئن شدیم که نقاط $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ نقاط عطف منحنی هستند.

۳۲- گزینه «۲» مجانب مایل تابع داده شده به صورت زیر است:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3} \quad \text{هم‌ارزی} \quad f(x) = \sqrt[3]{-1(x + \frac{2}{3(-1)})} = -x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -x + \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - x^3)^2}} = 0 \Rightarrow 4x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(\frac{4}{3}) = \sqrt[3]{2(\frac{4}{3})^2 - (\frac{4}{3})^3} = \sqrt[3]{\frac{32}{27}} \end{array} \right. \quad \text{نقطه } x = 0 \text{ نقطه می‌نیم تابع است.}$$

$$d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{9+9}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{بنابراین کافی است فاصله نقطه } (0,0) \text{ را از خط } y = -x + \frac{2}{3} \text{ یا } 3y + 3x = 2 \text{ بدست آوریم.}$$

تذکر: فاصله خط $ax + by = c$ از مبدأ مختصات برابر $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

۳۳- گزینه «۳» ابتدا به ازای $x = y = 0$ مقدار $g(0)$ را تعیین می‌کنیم:

حالا می‌خواهیم از معادله‌ی تابعی داده شده در صورت سؤال؛ کسر $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ را به وجود آورده و با استفاده از تعریف مشتق، ضابطه‌ی $g'(x)$ را بدست آوریم. اگر در معادله‌ی داده شده، به جای y ها، h قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$g(x+h) = e^h g(x) + e^x g(h)$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x g(h) + e^h g(x) - g(x)}{h} \quad \text{بنابراین داریم:}$$

در این حد، h به صفر میل می‌کند، پس h متغیر ما است و x ثابت است. می‌توانیم این حد را به صورت زیر بنویسیم:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [e^x \left(\frac{g(h)}{h} \right) + g(x) \left(\frac{e^h - 1}{h} \right)] = e^x \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \right] + g(x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right]$$

$$g'(x) = e^x \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{1} \right] + g(x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{1} \right] = e^x g'(0) + g(x) e^0$$

از هویتال برای محاسبه‌ی حدها استفاده می‌کنیم:

در نتیجه $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x$ ، پس $C = g'(0) = 2$.

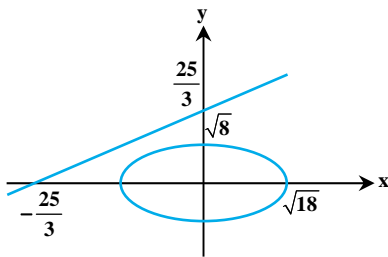
راه کوتاه: ابتدا با فرض $x = y = 0$ مقدار $g(0) = 0$ بدست می‌آید. سپس در تساوی داده شده برای $g'(x)$ نیز $x = 0$ قرار دهیم، داریم $g'(0) = g(0) + Ce^0$. پس $C = 2$ ، لذا $C = 2$.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۳۴- گزینه «۲» می‌دانیم که فاصله نقطه (x_1, y_1) تا خط $ax + by + c = 0$ به صورت روبرو است:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow y^2 = 8 - \frac{4}{9}x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2}$$

فرض کنید نقطه (x, y) روی بیضی قرار داشته باشد؛ در این صورت داریم:



اگر خط $2x - 3y + 25 = 0$ و بیضی $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ را رسم کنید (رسم آن‌ها ساده است، کافی است

یک‌بار $x = 0$ قرار دهید، محل برخورد با محور y ها معلوم شود و یک بار هم $y = 0$ قرار دهید، محل برخورد با محور x ها معلوم شود)، متوجه می‌شوید که نیم بیضی بالایی که در بخش $y \geq 0$ قرار دارد، به این خط نزدیک‌تر است. بنابراین قسمت بالای بیضی یعنی مقدار $+$ را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری در فرمول فاصله داریم:

$$D = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2x - 3\sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2} + 25|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

برای خارج کردن صورت کسر از قدرمطلق، توجه کنید که اگر نقطه (x, y) دقیقاً روی خط باشد، داریم $ax + by + c = 0$ ، در بالای خط داریم $ax + by + c > 0$ و اگر (x, y) زیر خط قرار داشته باشد، $ax + by + c < 0$ است. ما نقطه‌ی (x, y) را روی بیضی فرض کرده‌ایم، بنابراین در این نقطه $ax + by + c < 0$ می‌شود و داریم $|ax + by + c| = -(ax + by + c)$. در نتیجه ضابطه‌ی $D(x)$ چنین است:

$$D(x) = -\frac{1}{\sqrt{13}} (2x - 3\sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2} + 25)$$

$$D'(x) = -\frac{1}{\sqrt{13}} \left(2 - 3 \frac{-\frac{4}{9}x}{2\sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2}} \right)$$

حالا مینیمم این تابع را می‌خواهیم. ابتدا مشتق را حساب می‌کنیم:

مشتق را مساوی صفر قرار داده تا مینیمم‌های موضعی را پیدا کنیم.

$$D'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{-\frac{4}{9}x}{\sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2} = \frac{4}{9}x \Rightarrow \sqrt{8 - \frac{4}{9}x^2} = \frac{2}{9}x \Rightarrow 8 - \frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{81}x^2 \Rightarrow \frac{4}{9}x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$D(-3) = \frac{|2(-3) - 3\sqrt{8 - \frac{4}{9} \times 9} + 25|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \times 13 = \sqrt{13}$$

چون نقطه در ربع دوم است، پس $x = -3$ ، بنابراین داریم:

۳۵- گزینه «۲» وقتی $A(a, b)$ بالاترین نقطه‌ی منحنی باشد، به این معناست که $f(a) = b$ است ولی در سایر نقاط $f(x) \leq b$. در واقع برای هر x در دامنه داریم $f(x) \leq f(a)$. پس $x = a$ محل ماکزیمم مطلق را نشان می‌دهد. به همین ترتیب پایین‌ترین نقطه‌ی هر منحنی، به معنای مینیمم مطلق آن است. بنابراین

$$x^2 + xy + y^2 = 12 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

با پیدا کردن ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌توانیم مختصات A و B را پیدا کنیم. ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم:

برای تعیین نقطه اکسترمم باید $y' = 0$ باشد، لذا $2x + y = 0$ و به عبارت دیگر $y = -2x$ است، با قرار دادن y برحسب x در ضابطه تابع داریم:

$$x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 12 \Rightarrow x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

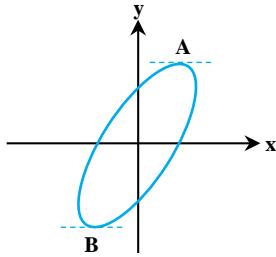
اگر $x = 2$ ، آن‌گاه $y = -4$ و اگر $x = -2$ ، آن‌گاه $y = 4$ بدست می‌آید. پس بالاترین نقطه $(-2, 4)$ و پایین‌ترین نقطه $(2, -4)$ است و این یعنی

$$\frac{b-d}{a-c} = \frac{4 - (-4)}{2 - (-2)} = 2$$

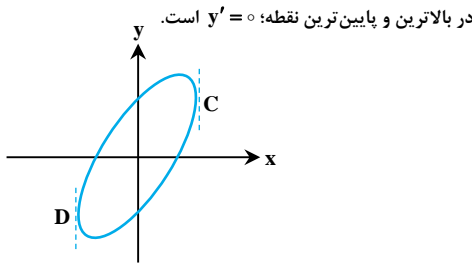
برای آن که مطمئن شویم در $x = 2$ و $x = -2$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق بدست آمده‌اند؛ باید دامنه‌ی تابع را مشخص کرده و مقدار y را در دو سر دامنه هم بررسی کنیم. اگر از معادله‌ی ضمنی داده شده y را حساب کنیم داریم:

$$y^2 + xy + (x^2 - 12) = 0 \Rightarrow \Delta = x^2 - 4(x^2 - 12) = 2(16 - x^2) \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{2(16 - x^2)}}{2}$$

در دامنه‌ی این تابع باید $0 \leq 16 - x^2$ باشد، یعنی $-4 \leq x \leq 4$ است. مقدار y را در دو سر دامنه یعنی $x = \pm 4$ حساب می‌کنیم: $x = \pm 4 \Rightarrow y = \frac{\mp 4 \pm 0}{2} = \mp 2$. در حالی که در نقاط بحرانی $x = \pm 2$ به مقادیر $y = \mp 4$ رسیده‌ایم. حالا اطمینان داریم که مقادیر بدست آمده در $x = \pm 2$ ، ماکزیمم و مینیمم مطلق y هستند.



توضیح: معادله‌ی $x^2 + xy + y^2 = c$ برای $c > 0$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضی می‌باشد. در بالاترین و پایین‌ترین نقطه از این منحنی، خط مماس بر منحنی افقی می‌شود یعنی $y' = 0$ می‌شود. به همین دلیل به دنبال نقاطی بودیم که در آن‌ها مشتق برابر با صفر می‌شود.



در هر معادله‌ی ضمنی که دایره یا بیضی را نشان دهد، دو نقطه‌ی بحرانی دیگر هم وجود دارند که در آن‌ها y' وجود ندارد. ضابطه‌ی $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$ را در نظر بگیرید. اگر $x+2y = 0$ باشد، نقاطی بدست می‌آیند که مشتق در آن‌ها وجود ندارد. اگر این دو نقطه را حساب کنید، می‌بینید که نقاط سمت راست و سمت چپ منحنی را پیدا کرده‌اید. که در آن‌ها شیب خط مماس، $\pm\infty$ است.

در نقاط سمت چپ و راست: $y' = \pm\infty$ است.

۳۶- گزینه «۴» برای بررسی زاویه‌ی بین دو منحنی ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y^2 = x^2 - 3} x^2 - 4x + (x^2 - 3) + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

با جایگذاری $x = 0$ در ضابطه‌ی دو منحنی می‌بینیم که معادله‌ی غیرممکن $y^2 = -3$ بدست می‌آید. در واقع $x = 0$ اصلاً در دامنه‌ی این دو منحنی قرار ندارد. اما به ازای $x = 2$ داریم $y = 1$ ، پس $y = \pm 1$ بدست می‌آید. تا این‌جا متوجه شدیم که منحنی‌های داده شده در دو نقطه‌ی $A(2, 1)$ و $B(2, -1)$ با هم برخورد می‌کنند. اکنون شیب هر کدام از منحنی‌ها را در این نقاط حساب می‌کنیم و زاویه‌ی برخورد آن‌ها با هم را بدست می‌آوریم. با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{-2y} \Rightarrow y' = \frac{x}{y}, \quad x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x-4}{2y} \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y}$$

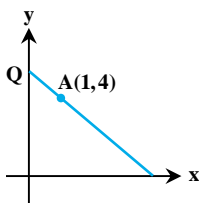
در نقطه‌ی $A(2, 1)$ ؛ شیب منحنی‌ها به ترتیب $m_1 = \frac{x}{y} = 2$ و $m_2 = \frac{2-x}{y} = 0$ است. پس زاویه‌ی بین دو منحنی را به این صورت حساب می‌کنیم:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right| = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \right| = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2)$$

در نقطه‌ی $B(2, -1)$ شیب منحنی‌ها عبارتند از: $m_1 = \frac{x}{y} = -2$ و $m_2 = \frac{2-x}{y} = 0$. در نتیجه داریم:

پس این دو منحنی در هر دو نقطه‌ی برخوردشان با یکدیگر، زاویه‌ای برابر با $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2)$ دارند. با آن‌که محاسبه‌ی این زاویه به ماشین حساب نیاز دارد، اما واضح است که عددی بین 60° تا 90° است، زیرا $\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$ و $\operatorname{tg}^{-1}(\infty) = 90^\circ$ ، پس $\operatorname{tg}^{-1}(2)$ بین این دو مقدار قرار دارد و فقط گزینه‌ی (۴) می‌تواند درست باشد.



۳۷- گزینه «۴» معادله خط گذرنده از نقطه $A(1, 4)$ را می‌توان به صورت $y - 4 = m(x - 1)$ در نظر گرفت. در این صورت

این خط محور x ها را در نقطه $P(1 - \frac{4}{m}, 0)$ و محور y ها را در نقطه $Q(0, 4 - m)$ قطع می‌کند. مجموع قطع‌ات مثبت جدا

شده روی محورهای مختصات برابر $(1 - \frac{4}{m} + 4 - m)$ یا $(5 - m - \frac{4}{m})$ است،

$$\left(5 - m - \frac{4}{m}\right)' = -1 + \frac{4}{m^2} = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

وقتی $m = 2$ باشد، محور x ها در ربع اول قطع نمی‌شود، پس قابل قبول نیست. به ازای $m = -2$ ، معادله خط به صورت $y - 4 = -2(x - 1)$ درمی‌آید و محور y ها در نقطه $P(0, 6)$ قطع می‌شود.

$$x = y \Rightarrow y^2 = \operatorname{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (1)$$

۳۸- گزینه «۱» نیمساز ناحیه اول خط $y = x$ می‌باشد، لذا داریم:

تابع $f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} - xy = 0$ را در نظر گرفته، با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی خواهیم داشت:



$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right) = -\left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right) = -\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

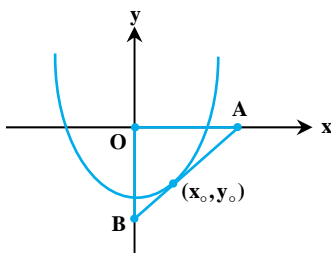
$$\frac{y=x}{y} \cdot \frac{y}{y^2+y^2} = \frac{1}{2y^2} \xrightarrow{y^2=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$$

۳۹- گزینه «۳»

$x = t^2 - t$ و $y = t^2 + t$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+1}{2t-1} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2(2t-1) - 2(2t+1)}{(2t-1)^2} = \frac{-4}{(2t-1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{24}{(2t-1)^2} = \frac{24}{(2t-1)^2} \xrightarrow{t=\frac{3}{2}} \frac{d^2y}{dx^2} \left(t = \frac{3}{2}\right) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$



۴۰- گزینه «۱» نقطه‌ی تماس را با (x_0, y_0) نشان می‌دهیم. شیب خط مماس برابر است با $f'(x_0) = 2x_0$.

معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم:
 $y - y_0 = 2x_0(x - x_0) \Rightarrow y = 2x_0x + y_0 - 2x_0^2$

مختصات نقاط برخورد خط مماس با محورهای مختصات را تعیین می‌کنیم:
 $x = 0 \Rightarrow y = y_0 - 2x_0^2$
 $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{y_0 - 2x_0^2}{2x_0}$

مساحت مثلث OAB برابر است با:
 $S = \frac{1}{2} |x_A y_B| = \frac{1}{2} \left| \frac{(y_0 - 2x_0^2)}{2x_0} \right| = \frac{1}{4} \frac{(y_0 - 2x_0^2)^2}{x_0}$

نقطه‌ی (x_0, y_0) روی سهمی قرار دارد، پس داریم $y_0 = x_0^2 - 1$ ، بنابراین داریم:
 $S = \frac{1}{4} \frac{(x_0^2 + 1)^2}{x_0}$

اکنون کمترین مقدار S را بدست می‌آوریم:
 $S'(x_0) = \frac{1}{4} \frac{4x_0^2(x_0^2 + 1) - (x_0^2 + 1)^2}{x_0^2} = 0 \Rightarrow (x_0^2 + 1)[4x_0^2 - x_0^2 - 1] = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

دقت کنید که در ربع چهارم $x_0 > 0$ است.
 $\min S = \frac{1}{4} \frac{(\frac{1}{3} + 1)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$



پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = t^2$ استفاده می‌کنیم در این صورت $dx = 2t dt$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = (2t - 2\ln(1+t)) \Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3 = 4 - \ln 9$$

به راه حل تستی سؤال فکر کنید! (در کمتر از ۱۰ ثانیه)

۲- گزینه «۳» ابتدا در زیر رادیکال از e^{2x} فاکتور می‌گیریم و از زیر رادیکال خارج می‌کنیم، حال ملاحظه می‌شود که عبارت زیر رادیکال برابر $1+e^x$ خواهد شد و مشتق آن $e^x dx$ می‌باشد، لذا به آسانی قادر به حل انتگرال به صورت مقابل خواهیم بود:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x \sqrt{1+e^x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+e^x)\sqrt{1+e^x} \right]_{\ln 3}^{\ln 8} = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}$$

۳- گزینه «۲» با توجه به این که $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ بنابراین داریم:

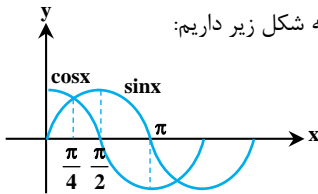
$$f(x) = (1 + \operatorname{tg} x) \left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = (1 + \operatorname{tg} x) \left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = 2$$

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{gof}(x) dx = \int_0^1 x^2 \operatorname{g}[f(x)] dx = \int_0^1 x^2 \operatorname{g}(2) dx = \operatorname{g}(2) \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \operatorname{g}(2)$$

۴- گزینه «۴» $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$ ، $f(1) = 0$

بنابراین: $y = x^2 f(x) \Rightarrow y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \Rightarrow y'(1) = 2f(1) + f'(1) = \frac{-1}{2}$

۵- گزینه «۲» ابتدا باید خودمان را از دست قدر مطلق خلاص کنیم! این کار را باید با شکستن بازه انجام دهیم با توجه به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} |\sin x - \cos x| = \cos x - \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ |\sin x - \cos x| = \sin x - \cos x & \frac{\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

۶- گزینه «۴» ملاحظه می‌شود که حد داده شده مبهم و از نوع $\frac{0}{0}$ است، لذا با استفاده از قضیه هسپیتال و فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \int_2^x \sqrt{20-t^4} dt = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 \times \int_2^x \sqrt{20-t^4} dt + x \sqrt{20-x^4}}{1} = \int_2^2 \sqrt{20-t^4} dt + 2\sqrt{20-2^4} = 0 + 2\sqrt{20-16} = 2\sqrt{4} = 4$$

۷- گزینه «۱» با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$u = \operatorname{Arctg} x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx, \quad dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 x \operatorname{Arctg} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Arctg} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

۸- گزینه «۴» این انتگرال را می‌توان با استفاده از ایجاد مربع کامل زیر رادیکال و استفاده از فرمول $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{Arc} \sin \frac{u}{a}$ حل کرد، اما روش راحت‌تر استفاده از تابع بتا می‌باشد، طبق متن درس داریم:

$$\int_a^b (x-a)^{-\frac{1}{2}} (b-x)^{-\frac{1}{2}} dx = (b-a)^\beta \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

۹- گزینه «۴» برای حل انتگرال داده شده، باید کاری کنیم که توان e به صورت مجذور کامل در بیاید. برای اینکار توان e را به صورت $-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2+2x} dx = \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)^2+1} dx = \int_1^{+\infty} e^1 \cdot e^{-(x-1)^2} dx$$

می‌نویسیم و داریم:

$$du = dx, \quad x = 1 \Rightarrow u = 0, \quad x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$$

حال از تغییر متغیر $u = x - 1$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$I = e \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)^2} dx = e \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{e\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۰- گزینه «۱» یک انتگرال با ظاهری غلط انداز! که با تغییر متغیر راحت حل می‌شود. فرض می‌کنیم $u = \sin(\text{Lnx})$. آن‌گاه $du = \frac{\cos(\text{Lnx})}{x} dx$ لذا داریم:

$$\int \frac{\sin^3(\text{Lnx}) \cos^3(\text{Lnx})}{x} dx = \int [\sin^2(\text{Lnx}) \cos^2(\text{Lnx})] \frac{\cos(\text{Lnx})}{x} dx = \int u^2 (1-u^2) du = \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 = \frac{1}{4} \sin^4(\text{Lnx}) - \frac{1}{6} \sin^6(\text{Lnx})$$

$$I = \left[\frac{1}{4} \sin^4(\text{Lnx}) - \frac{1}{6} \sin^6(\text{Lnx}) \right]_1^e = \frac{1}{4} \sin^4(\text{Lne}) - \frac{1}{6} \sin^6(\text{Lne}) = \frac{1}{4} \sin^4(1) - \frac{1}{6} \sin^6(1)$$

۱۱- گزینه «۴» این انتگرال را می‌توانیم به دو روش زیر پاسخ دهیم:

روش اول: با استفاده از تغییر متغیر $u = \sin x$, پس $du = \cos x dx$, در نتیجه $du = dx \sqrt{1-u^2}$ و برای حدود جدید به ترتیب داریم: $u = \sin 0 = 0$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-u} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = \int_0^1 (1+u)^{-\frac{1}{2}} du = [2\sqrt{1+u}]_0^1 = 2[\sqrt{2}-1]$$

و $u = \sin \frac{\pi}{4} = 1$ می‌باشد و لذا داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx$$

روش دوم: می‌دانیم $1 - \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$ بنابراین داریم:

برای $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آن‌گاه $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{8}$ و در این بازه $\cos \frac{x}{2} > \sin \frac{x}{2}$, پس با ضرب یک منفی در عبارت، قدر مطلق را برمی‌داریم و لذا داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx = \left[2 \cos \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[2 \sin \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[2 \cos \frac{\pi}{8} - 2 \cos(0)\right] + \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 \sin(0)\right]$$

$$\Rightarrow I = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2(\sqrt{2}-1)$$

به راه حل ۱۰ ثانیه‌ای سؤال بدون استفاده از خودکار فکر کنید.

۱۲- گزینه «۱» ابتدا تابع تحت انتگرال را به صورت $\frac{x \cdot x}{(1+x^2)^2}$ می‌نویسیم، سپس با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $u = x$ و $dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ داریم:

$$du = dx, \quad v = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-2} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$F(x) = \int_0^a \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2}\right]_0^a - \int_0^a \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1+x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{Arctg}x\right]_0^a$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(x) = 0 + \frac{1}{2} \text{Arctg} \infty - 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

توضیح: البته از تغییر متغیر $x = \text{tg} \theta$ نیز می‌توان به سؤال فوق پاسخ داد.

۱۳- گزینه «۴» با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری داریم:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = [\text{Ln} |\sec x + \text{tg} x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \text{Ln} \infty - \text{Ln} 1 = \infty \Rightarrow \text{واگراست } I_1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg} x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = [-\text{Ln} |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\text{Ln} \frac{1}{|\cos x|}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \text{Ln} \infty - \text{Ln} 1 = \infty \Rightarrow \text{واگراست } I_2$$

۱۴- گزینه «۱» ابتدا باید مقدار تابع $\text{sgn}x$ را با توجه به بازه $(-1, 1)$ تعیین کنیم. بدین منظور در بازه‌های $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ که علامت آن متفاوت است، آن را

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x(-1)}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{x(1)}{x+2} dx = \int_{-1}^0 \frac{-x-2+2}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int_{-1}^0 -1 dx + 2 \int_{-1}^0 \frac{dx}{x+2} + \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

می‌شکنیم و داریم:

$$= [-x + 2 \text{Ln} |x+2|]_{-1}^0 + [x - 2 \text{Ln} |x+2|]_0^1 = [-(0 - (-1)) + 2 \text{Ln} 2 - 2 \text{Ln} 1] + [(1 - 0) - 2 \text{Ln} 3 + 2 \text{Ln} 2] \Rightarrow$$

$$I = -1 + 2 \text{Ln} 2 - 2 \text{Ln} 1 + 1 - 2 \text{Ln} 3 + 2 \text{Ln} 2 = 4 \text{Ln} 2 - 2 \text{Ln} 3 = \text{Ln} 2^4 - \text{Ln} 3^2 = \text{Ln} 16 - \text{Ln} 9 = \text{Ln} \frac{16}{9}$$



۱۵- گزینه «۲» ابتدا لازم است از تابع داده شده مشتق بگیریم:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt \Rightarrow F'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

واضح است که $F'(x) \geq 0$ پس F تابعی اکیداً صعودی است.

$$F''(x) = \frac{-4x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{F''(x)=0} x=0$$

چون $x=0$ ریشه $F''(x)=0$ است و در دو طرف آن F'' تغییر علامت می‌دهد، پس $x=0$ طول نقطه‌ی عطف است.

۱۶- گزینه «۳» در نقطه $x=a$ شیب منحنی یعنی $f'(a)$ برابر $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ و در نقطه b ، شیب منحنی یعنی $f'(b)$ برابر $1 = \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین داریم:

$$I = \int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a) = 1 - \sqrt{3}$$

۱۷- گزینه «۱» ابتدا عبارت $(1-\frac{2}{x})^2$ را به توان می‌رسانیم و داریم:

$$I = \int_1^4 (1 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x}) e^x dx = \int_1^4 e^x dx + \int_1^4 \frac{4}{x^2} e^x dx + \int_1^4 -\frac{4}{x} e^x dx$$

قبل از محاسبه‌ی دو انتگرال اول، انتگرال سوم را از قاعده‌ی جزء به جزء به نحوی محاسبه می‌کنیم که در آن $u = -\frac{4}{x}$ و $dv = e^x dx$ پس $du = \frac{4}{x^2} dx$ و $v = e^x$

$$\int_1^4 -\frac{4}{x} e^x dx = [-\frac{4}{x} e^x]_1^4 - \int_1^4 (+\frac{4}{x^2}) e^x dx \xrightarrow{\text{به جای انتگرال سوم قرار می‌دهیم}} I = [e^x]_1^4 + \int_1^4 \frac{4}{x^2} e^x dx - [-\frac{4}{x} e^x]_1^4 - \int_1^4 (+\frac{4}{x^2}) e^x dx$$

$$I = (e^4 - e^1) + \int_1^4 \frac{4}{x^2} e^x dx + (-e^4 + 4e^1) - \int_1^4 \frac{4}{x^2} e^x dx = 3e$$

۱۸- گزینه «۱» اگر دقت کنیم، عبارت داخل انتگرال، مشتق x^x می‌باشد، بنابراین داریم:

$$F(x) = \int x^x (\ln x + 1) dx = x^x + c \xrightarrow{\text{ثابت انتگرال گیری صفر است}} F(x) = x^x$$

توضیح: برای درک بهتر از این که عبارت داخل انتگرال، مشتق x^x است فقط کافیست از x^x مشتق بگیریم:

$$y = x^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} \times x \Rightarrow y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0^0 \xrightarrow{\text{میهم}} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{\text{HOP}} \text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$$

خب حالا به ادامه‌ی حل می‌پردازیم:

۱۹- گزینه «۲» با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ f''(x) dx = dv \Rightarrow f'(x) = v \end{cases} \Rightarrow I = [x f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = 1 \times f'(1) - 0 - \int_0^1 f'(x) dx$$

$$I = f'(1) - [f(x)]_0^1 = f'(1) - f(1) + f(0)$$

۲۰- گزینه «۴» با استفاده از روش تغییر متغیر به راحتی داریم:

$$\text{Arcsin } \sqrt{x} = u \Rightarrow \sqrt{x} = \sin u \Rightarrow x = \sin^2 u, \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \cos u du, \quad x=0 \Rightarrow u=0, \quad x=1, u=\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{\text{Arcsin } \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int \frac{(u) 2\sqrt{x} \cos u du}{\sqrt{x} \times \sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{2u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} (\cos u) du = \int \frac{2u}{|\cos u|} \cos u du \xrightarrow{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}}} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u du = [u^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

۲۱- گزینه «۴» در این گونه سؤالات باید انتگرال «خواسته شده» را بر حسب انتگرال «داده شده» نوشت:

$$A = \int_0^1 \frac{e^t}{t+1} dt$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{t+1} \Rightarrow du = -\frac{dt}{(t+1)^2} \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{cases} \Rightarrow A = uv - \int v du = \frac{e^t}{t+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^t dt}{(t+1)^2} = \left(\frac{e}{2} - 1\right) + \int_0^1 \frac{e^t dt}{(t+1)^2}$$

با توجه به این که $B = \int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^2} dt$ ، لذا داریم:

$$A = \frac{e}{2} - 1 + B \Rightarrow B - A = 1 - \frac{e}{2}$$

۲۲- گزینه «۴» یک انتگرال بسیار ساده که به راحتی با استفاده از تغییر متغیر $u^2 = 4 - x^2$ ، خواهیم داشت:

$$u^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2udu = -2xdx \Rightarrow xdx = -udu \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & u \\ \hline \circ & 2 \\ 2 & \circ \end{array}$$

$$I = \int_2^{\circ} \frac{-udu}{u^2 + u} = \int_{\circ}^2 \frac{du}{u+1} = \text{Ln}(u+1) \Big|_{\circ}^2 = \text{Ln}3$$

در این صورت انتگرال به صورت مقابل در می آید:

۲۳- گزینه «۴» واضح است؛ ابتدا باید ضابطه‌ی $g(x)$ را به دست آوریم. برای این کار با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه‌ی $g'(x)$ را به دست می آوریم. در نظر

$$g'(u) = u^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می گیریم}} g(u) = \int g'(u) du = \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C$$

بگیرید $u = x^2$ ، بنابراین $x = \sqrt{u}$ و $x^3 = u^{\frac{3}{2}}$ و لذا داریم:

$$g(1) = \frac{2}{5} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{5} \Rightarrow g(u) = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5}$$

از صورت سؤال می دانیم $g(1) = 1$ ، بنابراین داریم:

$$g(4) = \frac{2}{5} (4)^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times 2^5 + \frac{3}{5} = \frac{67}{5}$$

خب حالا به راحتی $g(4)$ را به دست می آوریم.

$$\int_1^{\cos x} \frac{f(t)}{t^2} dt = \text{Ln}(\cos x) + \frac{1}{\cos x} - 1$$

۲۴- گزینه «۲» با مشتق گیری از طرفین رابطه داریم:

$$(-\sin x) \frac{f(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{طرفین را در } \frac{-\cos^2 x}{\sin x} \text{ ضرب می کنیم}} f(\cos x) = \cos x - 1 \xrightarrow{u=\cos x} f(u) = u - 1 \Rightarrow f'(u) = 1$$

۲۵- گزینه «۱» با استفاده از فرمول طلایی $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ و با جایگذاری رابطه $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ و $\sec^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$ ، داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= \left[\tan \frac{x}{2} + 2 \text{Ln} \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right) + \left(2 \text{Ln} \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - 2 \text{Ln} \left| \cos 0 \right| \right) \right] = 1 + 2 \text{Ln} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \text{Ln} 2$$

$$I = L[x^9] \Big|_{s=2} = \frac{9!}{s^{10}} \Big|_{s=2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \times 9!$$

۲۶- گزینه «۴» انتگرال داده شده همان تعریف تبدیل لاپلاس است.

۲۷- گزینه «۳» ابتدا با توجه به این که $\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$ ، انتگرال را بازنویسی می کنیم.

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x} \left(\frac{1}{1 + \sin x} \right) dx \xrightarrow{\text{صورت و مخارج را در «} 1 - \sin x \text{» ضرب می کنیم}} I = \int \frac{\cos x}{\sin x} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{\sin x \cos x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x}{\sin x \cos x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2 dx}{\sin 2x} - \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \text{Ln} \left| \tan \frac{2x}{2} \right| - \text{Ln} \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c = \text{Ln} | \tan x | - \text{Ln} \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

۲۸- گزینه «۱» ابتدا باید تعیین کنیم، $2 \sin x$ ، در چه نقاطی از بازه‌ی $[\circ, \frac{\pi}{6}]$ ، عددی صحیح می شود، واضح است در نقاط $x = \circ$ و $x = \frac{\pi}{6}$ این اتفاق می افتد.

$$x = \circ \Rightarrow [2 \sin x] = [2 \sin(\circ)] = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow [2 \sin x] = \left[2 \sin \frac{\pi}{6} \right] = \left[2 \times \frac{1}{2} \right] = 1$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} [2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (0) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 1 dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



۲۹- گزینه «۲» با توجه به این که توان $\sin x$ فرد است، لذا داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \right) dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\cos x = u$ داریم:

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du, \quad x = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$I = -\int_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-u^2}{u} \right) du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u} - u \right) du = \left[\ln u - \frac{u^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \Rightarrow \ln 1 - \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

۳۰- گزینه «۳» یک سؤال نه چندان سخت با ظاهری جدید و البته کمی جالب! کافیت حد تابع را در نقطه‌ی $x = 0$ حساب کرده و مساوی $3k$ قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{\operatorname{tg} x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x [1 + \operatorname{tg}^2(\sin x)]}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

بنابراین $3k = 1$ و لذا $k = \frac{1}{3}$ است.

۳۱- گزینه «۳» آنچه از همان نگاه اول به نظر می‌رسد؛ انتگرال در بی‌نهایت ناسرگی دارد. برای بررسی وضعیت همگرایی بهتر است از قضیه اول استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \left(\frac{(\operatorname{Ln} x)^\beta}{x^\alpha} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\operatorname{Ln} x)^\beta}{x^{\alpha-p}} \right)$$

اگر $\alpha - p > 0 \Rightarrow \alpha > p \xrightarrow{p > 1} \alpha > 1$ پس با شرط $\alpha > 1$ انتگرال همگراست. پس داریم:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^\alpha (\operatorname{Ln} x)^{-\beta}}$$

البته حل تمام نشده است! چون اگر β منفی باشد، آن‌گاه $x = 1$ نیز نقطه‌ی ناسرگی است، چون داریم:

برای بررسی شرایط همگرایی دقت کنید؛ در همسایگی $x = 1$ ، انتگرال فوق هم‌ارز با انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{-\beta}}$ است، که این انتگرال با شرط $-\beta < 1$ و به عبارت دیگر با شرط $\beta > -1$ همگراست.

۳۲- گزینه «۴» می‌دانیم $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ ، در این سؤال $y = 0$ ، در نتیجه داریم:

$$\int_0^x [1 + \sin(\sin t)] dt = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$f'(x) = 1 + \sin(\sin x) \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

حال به محاسبه‌ی مقدار $f'(0)$ می‌پردازیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t} e^{\operatorname{Ln} t}}{\frac{\operatorname{Ln} t}{t}} = \frac{t}{\operatorname{Ln} t}$$

۳۳- گزینه «۳» با یک مشتق‌گیری پارامتری ساده روبه‌رو هستیم و به راحتی داریم:

۳۴- گزینه «۳» یک سؤال بسیار ساده! کافیت در انتگرال اول از رابطه‌ی $e^{\operatorname{Ln} u} = u$ و در انتگرال دوم از تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ استفاده کنیم:

$$I = \int \frac{e^{\operatorname{Ln} \sqrt{x}}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \xrightarrow{c=0} I = 2\sqrt{x}$$

بنابراین $A = e^{2\sqrt{x}}$ است، برای انتگرال B با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ ، آن‌گاه $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$ و در نتیجه $dx = 2u du$ ، پس داریم:

$$B = \int \frac{e^u}{u} (2u du) = 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c \xrightarrow{c=0} B = 2e^{\sqrt{x}}$$

پس $B^2 = 4A$ است.

$$I = \int \frac{\sinh \frac{1}{a}}{\sinh \sqrt{a} \sqrt{x^2 + 1}} dx = [\operatorname{Arc} \sinh x]_{\sinh \sqrt{a}}^{\sinh \frac{1}{a}} = \operatorname{Arc} \sinh(\sinh \frac{1}{a}) - \operatorname{Arc} \sinh(\sinh \sqrt{a}) = \frac{1}{a} - \sqrt{a} = \frac{1 - \sqrt{a^2}}{a}$$

۳۵- گزینه «۳»

۳۶- گزینه «۳» ابتدا با تغییر متغیر فرم انتگرال را تغییر می‌دهیم: $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \Rightarrow x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt \xrightarrow{\text{روش جدول}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \oplus & t & \sin t \\ \hline \ominus & 1 & -\cos t \\ \hline & 0 & -\sin t \\ \hline \end{array} \Rightarrow I = 2[-t \cos t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۳۷- گزینه «۱» تابع $\operatorname{tg}^2 x$ تابعی زوج و تابع $\operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ تابعی فرد می‌باشد، لذا حاصلضرب آنها تابعی فرد می‌باشد و می‌دانیم اگر $f(x)$ فرد باشد آن‌گاه:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ خواهد بود.}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x + c \quad \text{گزینه «۴»}$$

۳۹- گزینه «۲» می‌دانیم $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ و لذا داریم:

$$I = \int \left(\frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1} \right) dx = \int \left(\frac{2}{e^x + e^{-x} + 2} \right) dx \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } e^x \text{ ضرب می‌کنیم}} I = \int \left(\frac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \right) dx$$

$$du = e^x dx \Rightarrow du = u dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \quad \text{حالا از تغییر متغیر } u = e^x \text{ داریم:}$$

$$I = \int \left(\frac{2u}{u^2 + 2u + 1} \right) \frac{du}{u} = \int \left(\frac{2}{u^2 + 2u + 1} \right) du = \int \frac{2}{(u+1)^2} du = -\frac{2}{u+1} + c = -\frac{2}{e^x + 1} + c \quad \text{پس داریم:}$$

۴۰- گزینه «۳» برای تمرین بیشتر تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): انتگرال داده شده در این گزینه، در بی‌نهایت ناسرگی دارد. از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$\frac{\sqrt{3+2x^2}}{\sqrt{x^3-1}} \sim \frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{x^3}} = \frac{(2x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم انتگرال $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{11}{25}}} dx$ واگراست، چون $p = \frac{11}{25} < 1$.

بررسی گزینه (۲): وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت مقابل انتگرال هم‌ارز با $\frac{x}{x}$ و به عبارت دیگر هم‌ارز با $\frac{1}{x}$ است و چون انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ واگراست، انتگرال داده شده در گزینه (۲) نیز واگراست.

بررسی گزینه (۳): انتگرال موردنظر دو نوع ناسرگی دارد، بنابراین انتگرال را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} = \int_2^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$$

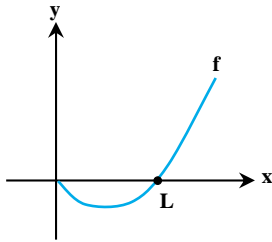
$$\int_2^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}} = \int_2^2 \frac{dx}{\sqrt{2(2-1)(x-2)}} = \int_2^2 \frac{dx}{\sqrt{2(x-2)}} \quad \text{انتگرال اول را در همسایگی } x=2 \text{، می‌توان به شکل مقابل نوشت:}$$

و چون این انتگرال همگراست، بنابراین انتگرال اولیه نیز همگراست. اما انتگرال دوم را در $x \rightarrow +\infty$ می‌توان هم‌ارز انتگرال $\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ و به عبارت دیگر

هم‌ارز $I = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ دانست و چون این انتگرال همگراست، پس قسمت دوم انتگرال داده شده نیز همگراست. و در نتیجه انتگرال گزینه (۳) همگراست.

بررسی گزینه (۴): برای این انتگرال داریم:

$$\int_0^{+\infty} e^{2x} dx = \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^{+\infty} = +\infty \text{ واگراست}$$



۴۱- گزینه «۲» فرض کنیم $F(x)$ پادمشتق $f(x)$ باشد. بنابراین $F'(x) = f(x)$ است. به نمودار مقابل که در آن فقط f را نشان داده‌ایم توجه کنید. محل برخورد f با محور x های مثبت را L نامیده‌ایم. در بازه $(0, L)$ داریم: $f(x) < 0$ یعنی $F'(x) < 0$ پس نمودار $F(x)$ در این بازه باید نزولی باشد. از همین جا معلوم است که a و c نمی‌توانند جواب باشند. در ضمن در بازه (L, ∞) نمودار f مثبت شده است؛ پس $F'(x)$ مثبت شده است. بنابراین نمودار پادمشتق در این بازه، صعودی است. تنها نموداری که این ویژگی‌ها را دارد b است.

۴۲- گزینه «۳» حالت ابهام به صورت $\frac{0}{0}$ است و بنابراین از قضیه هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + 1396 \sin t)^{\frac{1}{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + 1396 \sin x)^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 1396 \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 1396 \sin x - 1)^{\frac{1}{x}} = e^{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1396 \sin x}{x} \right) = e^{1396}$$

۴۳- گزینه «۴» از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$1 \times \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x) = 2x f'(x^2) \xrightarrow{x=2} \sin 2\pi + 2\pi \cos(2\pi) = 2 \times 2 f'(4) \Rightarrow 2\pi = 4 f'(4) \Rightarrow f'(4) = \frac{\pi}{2}$$

۴۴- گزینه «۲» اگر از تغییر متغیر $u = 1 + e^{-\sqrt{x}}$ استفاده کنیم، آنگاه $du = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$ لذا داریم:

$$I = \int \frac{-2du}{(u-1)u} = -2 \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = -2 \ln |u-1| - \ln |u| + c$$

$$I = -2 \ln \left(\frac{u-1}{u} \right) + c = -2 \ln \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{1 + e^{-\sqrt{x}}} \right) + c$$

دقت کنید، چون $u = 1 + e^{-\sqrt{x}}$ ، لذا u و $u-1$ مثبت هستند، لذا داریم:

$$\begin{cases} u = y \Rightarrow du = dy \\ dv = \sec^2 y dy \Rightarrow v = \tan y \end{cases}$$

۴۵- گزینه «۴» از روش جزء به جزء کمک می‌گیریم:

$$\Rightarrow I = \left[y \tan y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan y) dy = \frac{\pi}{4} + \left[\ln |\cos y| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر $e^x = t$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$I = \int \frac{1}{1 + \sqrt{t} + \sqrt{t}^2} \left(\frac{dt}{t} \right) = \int \frac{dt}{t(t+1)(\sqrt{t}+1)} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} - \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right) dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} - \sqrt{t} \int \frac{\sqrt{t} dt}{1+\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow I = \text{Lnt} + \text{Ln}(t+1) - \sqrt{t} \text{Ln}(1+\sqrt{t}) = \text{Lne}^x + \text{Ln}(e^x + 1) - \sqrt{t} \text{Ln}(1+\sqrt{t}) = x + \text{Ln}(e^x + 1) - \sqrt{t} \text{Ln}(1+\sqrt{t})$$

۲- گزینه «۱» $I'(\beta) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^\beta} \cos \beta x) dx = \int_0^\infty -x e^{-x^\beta} \sin \beta x dx$

برای محاسبه انتگرال اخیر از روش «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم:

$u = \sin \beta x \Rightarrow du = \beta \cos \beta x$, $-x e^{-x^\beta} dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{\beta} e^{-x^\beta}$

$$I'(\beta) = \int_0^\infty -x e^{-x^\beta} \sin \beta x dx = \frac{1}{\beta} e^{-x^\beta} \sin \beta x \Big|_0^\infty - \frac{\beta}{\beta} \int_0^\infty e^{-x^\beta} \cos \beta x dx \Rightarrow I'(\beta) = -\frac{\beta}{\beta} I(\beta) \Rightarrow I'(\beta) = -I(\beta) \Rightarrow I'(\beta) = -I(\beta)$$

بنابراین:

۳- گزینه «۳» در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ انتگرال ناسره است، بنابراین قبل از هر چیزی باید بازه‌ی انتگرال را به دو قسمت تفکیک کنیم:

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \text{tg}^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \text{tg}^4 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \frac{dx}{1 + \text{tg}^4 x} \stackrel{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \text{tg}^4 x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 + \text{tg}^4(\pi - t)}$$

در قسمت (*) برای محاسبه‌ی انتگرال دوم از تغییر متغیر $x = \pi - t$ استفاده کردیم و بنابراین $dx = -dt$ و حدود نیز بر حسب متغیر جدید تغییر کرد.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \text{tg}^4 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 + \text{tg}^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \text{tg}^4 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \text{tg}^4 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \text{tg}^4 x} dx$$

$$\Rightarrow I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

با توجه به نکته‌ی گفته شده؛ حاصل این انتگرال برابر با $\frac{\pi}{4}$ است و $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$ است و لذا مقدار گزینه (۳) برابر با $\frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$ است.

۴- گزینه «۲» فارسی‌تر این سؤال! این است که حاصل $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟ می‌دانیم $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Arc sec } x + c$ ، بنابراین داریم:

$$F(\alpha) = \text{Arc sec } 2 - \text{Arc sec } \alpha \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} F(\alpha) = \text{Arc sec } 2 - \text{Arc sec } 1^+ = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

۵- گزینه «۱» ابتدا مانند توابع مثلثاتی از توان $\text{tgh}^\beta x$ ، دو واحد کم کرده و $\text{tgh} x$ را به انتگرال اضافه و کم می‌کنیم:

$$I = \int (\text{tgh}^\beta x + \text{tgh} x - \text{tgh} x) dx = \int \text{tgh} x dx - \int \text{tgh} x (1 - \text{tgh}^\beta x) dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx - \int \underbrace{\text{tgh} x}_u (1 - \text{tgh}^\beta x) dx = \text{Ln}(\cosh x) - \frac{1}{\beta} \text{tgh}^\beta x + c$$

۶- گزینه «۱» با استفاده از روش «تغییر متغیر» به سؤال جواب می‌دهیم:

$$\text{Ln}(\cos x) = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = du \Rightarrow -\text{tg} x dx = du \Rightarrow \text{tg} x dx = -du$$

$$-\int \frac{du}{u} = -\text{Lnu} = -\text{Ln}(\text{Ln} \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -[\text{Ln}(\text{Ln} \cos \frac{\pi}{4}) - \text{Ln}(\text{Ln} \cos \frac{\pi}{6})] = -[\text{Ln}(\text{Ln} \frac{1}{\sqrt{2}}) - \text{Ln}(\text{Ln} \frac{\sqrt{3}}{2})] = -\text{Ln} \left(\frac{\text{Ln} \frac{1}{\sqrt{2}}}{\text{Ln} \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= -\text{Ln} \left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \text{Ln} \left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} = \text{Ln} \left(\frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \text{Ln} \left(\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \text{Ln} \left(\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \right) = \text{Ln} \left(\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \text{Ln} \left(\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2\sqrt{2}}{2} \right)$$

توجه داشته باشید در محاسبات فوق، برای ساده کردن حاصل انتگرال از قوانین $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c b}$ و $\log_b^a = \frac{1}{\log_a b}$ استفاده کردیم.



۷- گزینه «۴» یک روش حل، استفاده از مطالب گفته شده در کتاب است. در واقع در این روش به دنبال این هستیم که مشتق مخرج را در صورت کسر ایجاد کنیم. این کار را باید با ترکیب خطی دو عبارت انجام دهیم، یکی خود عبارت مخرج کسر و دیگری مشتق عبارت مخرج کسر، می‌دانیم مشتق مخرج به صورت $\cos x - \sin x$ است اما اگر قرار باشد، این عبارت را در صورت کسر قرار دهیم، باید طوری بنویسیم که مجموع در نهایت برابر $\sin x$ شود. لذا داریم:

$$\text{صورت کسر} = \sin x = \frac{1}{2} \left[\overbrace{(\cos x + \sin x)}^{\text{عبارت مخرج کسر}} - \overbrace{(\cos x - \sin x)}^{\text{مشتق مخرج کسر}} \right]$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \right] dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \times dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \right] = \frac{1}{2} [x]_0^{\frac{\pi}{6}} - [\text{Ln} |\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right) - \text{Ln} \left| \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right| + \text{Ln} |\sin(0) + \cos(0)| = \frac{\pi}{12} - \text{Ln} \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \text{Ln} 1 = \frac{\pi}{12} - \text{Ln} \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right| \end{aligned}$$

روش دوم: اما یک راه حل ابتکاری و ساده‌تر برای محاسبه انتگرال داده شده به این شکل است. که انتگرال دیگری به صورت $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ را تعریف کرده و دو انتگرال $I+J$ و $I-J$ را حساب کنیم:

$$\begin{cases} I+J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C_1 \\ J-I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \text{Ln} |\sin x + \cos x| + C_2 \end{cases}$$

حالا برای رسیدن به I می‌توانیم طرفین روابط بالا را از هم کم کنیم:

$$(I+J) - (J-I) = x - \text{Ln} |\sin x + \cos x| + C_1 - C_2 \Rightarrow 2I = x - \text{Ln} |\sin x + \cos x| + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} (x - \text{Ln} |\sin x + \cos x|) + C$$

تله تستی: ممکن است برخی داوطلبان با توجه به انتگرال آشنای زیر با بی‌توجهی گزینه (۲) را در روز آزمون انتخاب کنند:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$$

در واقع در این انتگرال گفته می‌شود؛ حاصل انتگرال با توجه به تابع تحت انتگرال برابر نصف حد بالای انتگرال است. اما دقت کنید، به این دلیل که $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ می‌شود، می‌توان از نکته فوق استفاده کرد و این در حالیست که $\cos x \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و لذا انتخاب نصف حد بالای انتگرال در این سؤال غلط است.

۸- گزینه «۱» برای محاسبه $\int \sqrt{4-x^2} dx$ ، از تغییر متغیر $x = 2 \sin t$ استفاده می‌کنیم؛ و بنابراین $dx = 2 \cos t dt$ ، در این صورت داریم:

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2 = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = [2t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{بنابراین } I_2 - 2I_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

۹- گزینه «۳» از تغییر متغیر $u = -x^2$ ، $du = -2x dx$ استفاده می‌کنیم، در این صورت به ازای $u = 0$ ، $x = 1$ و به ازای $u = -1$ ، $x = -1$ حاصل می‌شود. با بکارگیری قاعده‌ی جزء به جزء (روش جدول) داریم:

علامت	مشتق	انتگرال
⊕	u^2	e^u
⊖	$2u$	e^u
⊕	2	e^u
	0	e^u

$$I = \int_0^1 \frac{x^4}{(-x^2)^2} \cdot xe^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int_0^{-1} u^2 e^u du = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u^2 e^u du = \left[\frac{1}{2} (u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u) \right]_{-1}^0$$

$$I = \frac{1}{2} [2 - (e^{-1} + 2e^{-1} + 2e^{-1})] = 1 - \frac{5}{2} e^{-1}$$

۱۰- گزینه «۳» با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء به شکل زیر داریم:

علامت	مشتق	انتگرال
+	x^n	$\sin x$
-	nx^{n-1}	$-\cos x$
+	$n(n-1)x^{n-2}$	$-\sin x$

$$I_n = [-x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n(n-1)x^{n-2} \sin x dx$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \cos \frac{\pi}{2} + 0 + n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} (\sin 0) - 0 - n(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

توضیح: چون سطر سوم در قاعده‌ی جزء به جزء جدولی، مضربی از سطر اول به دست آمد، در نتیجه همان جا متوقف می‌شویم و از حاصل ضرب دو ستون انتگرال می‌گیریم.

۱۱- گزینه «۲» برای محاسبه این انتگرال، فرض می‌کنیم $x = \operatorname{tg} \theta$ در نتیجه خواهیم داشت؛ $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)d\theta = \sec^2 \theta d\theta$ و برای حدود جدید نیز به

ترتیب از $\operatorname{tg} \theta = 0$ مقدار $\theta = 0$ و از $\operatorname{tg} \theta = 1$ مقدار $\theta = \frac{\pi}{4}$ حاصل می‌شود. به منظور آسان کردن انتگرال‌گیری از فرمول توان‌شکن $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \text{انتگرال} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos^2 2\theta + 2 \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8} \sin 4\theta + \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right) + 0 + 1 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3\pi}{4} + 1 \right] \end{aligned}$$

۱۲- گزینه «۱» به راحتی واضح است؛ انتگرال I_1 هم‌ارز با $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ است که می‌دانیم انتگرالی واگراست، همچنین انتگرال I_2 هم‌ارز با $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3} dx$ است.

که می‌دانیم انتگرالی همگراست. همین‌جا پاسخ به تست تمام است، اما اگر بخواهیم حاصل انتگرال‌ها را نیز به دست آوریم، می‌توانیم به شکل زیر ادامه دهیم. برای محاسبه انتگرال I_1 ، سعی می‌کنیم مشتق مخرج را در صورت بوجود آوریم، به این ترتیب حاصل انتگرال، برابر با \ln مخرج می‌شود.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \left[\frac{1}{4} \ln |2x^2 + 1| \right]_0^{\infty} = [\ln \sqrt{2x^2 + 1}]_0^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \ln \infty = \infty \Rightarrow I_1 \text{ واگراست}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال I_2 ، سعی می‌کنیم مشتق «پایه‌ی عبارت تواندار» را بسازیم، مشتق پایه، برابر با $4x$ است، بنابراین داریم:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1 + 2x^2)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{4x(1 + 2x^2)^{-2}}{1 + 2x^2} dx = \left[\frac{1}{4} \frac{(1 + 2x^2)^{-1}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\infty} = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow I_2 \text{ همگراست}$$

۱۳- گزینه «۳» برای پاسخ به این سؤال بهتر است، هر چهار گزینه را بررسی کنیم:

بررسی گزینه (۱): نامساوی $\frac{1}{x+1} \leq \frac{e^x}{x+1}$ را در نظر می‌گیریم، بنابر آزمون مقایسه، چون $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+1}$ واگراست در نتیجه $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ نیز واگراست.

بررسی گزینه (۲): بازه تحت انتگرال را به ۲ قسمت $(0, \frac{\pi}{2})$ و $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ تقسیم‌بندی می‌کنیم، سپس بر اساس نامساوی $\sin x < x$ ($x < 0$) داریم؛

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} \text{ و چون } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx \text{ واگراست، بنابر آزمون مقایسه } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \text{ نیز واگراست.}$$

بررسی گزینه (۳): این انتگرال بیانگر تابع گاما می‌باشد، در نتیجه همگراست. با فرض $t = x^2$ ، در نتیجه $dt = 2x dx$ داریم:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} (x^2)^p (2x dx) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p+2} dx \xrightarrow{p=\frac{1}{2}} 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

بررسی گزینه (۴): می‌دانیم $1 - \cos \sqrt{x} = 2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}$ و چون $2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \sim 2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$ ، بنابراین با استفاده از آزمون هم‌ارزی در $x = 0$ ، هر دو انتگرال

$$\int \frac{dx}{1 - \cos \sqrt{x}} \text{ و } \int \frac{dx}{x^2} \text{ از نظر وضع همگرایی یکسان هستند. بنابراین چون } \int \frac{dx}{x^2} \text{ واگراست، پس } \int \frac{dx}{1 - \cos \sqrt{x}} \text{ نیز واگرا می‌شود.}$$



۱۴- گزینه «۲» ابتدا با جدا کردن متغیرها و انتگرال گیری، ضابطه‌ی $x(t)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - \frac{x}{10}) \Rightarrow \frac{dx}{x(1 - \frac{x}{10})} = dt \Rightarrow \frac{10 dx}{x(10-x)} = dt \xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} (\frac{1}{x} + \frac{1}{10-x}) dx = dt \Rightarrow \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{10-x}) dx = \int dt$$

$$\Rightarrow \text{Ln}x - \text{Ln}(10-x) = t + c \Rightarrow \text{Ln} \frac{x}{10-x} = t + c \Rightarrow \frac{x}{10-x} = e^{t+c}$$

به ازای $t = 0$ داریم $x = 2$. با جایگذاری در معادله‌ی به دست آمده داریم: $e^c = \frac{2}{10-2}$ ، پس $e^c = \frac{1}{4}$. در نتیجه:

$$\frac{x}{10-x} = \frac{e^t}{4} \Rightarrow 4x = 10e^t - xe^t \Rightarrow x(4 + e^t) = 10e^t \Rightarrow x = \frac{10e^t}{e^t + 4}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4 \cdot e^t}{(e^t + 4)^2} > 0$$

با مشتق گیری از x داریم:

پس x همواره رشد می‌کند. در ضمن $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10e^t}{e^t + 4} = 10$ ، پس x به مقدار معینی میل می‌کند. تا اینجا می‌دانیم که (الف) برقرار است و (ب) نادرست

است. برای بررسی گزاره‌های (ج) و (د) باید از نرخ رشد یعنی از $\frac{dx}{dt}$ مشتق بگیریم:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4 \cdot e^t (e^t + 4)^{-2} - 2e^t (e^t + 4) \times 4 \cdot e^t}{(e^t + 4)^4} = \frac{4 \cdot e^t (e^t + 4) - 2e^t \times 4 \cdot e^t}{(e^t + 4)^3} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4 \cdot e^t (4 - e^t)}{(e^t + 4)^3}$$

$4 \cdot e^t$ و $(e^t + 4)^3$ همواره مثبت هستند، اما عامل $4 - e^t$ برای مقادیر کوچک t (به بیان دقیق‌تر برای $t < \text{Ln}4$) مقدار مثبت دارد؛ اما برای مقادیر بزرگ t ، منفی می‌شود. پس نرخ رشد در ابتدا صعودی است، اما پس از مدتی نزولی می‌شود. بنابراین (د) هم صحیح است.

۱۵- گزینه «۲» در این سؤال در اصل به دنبال محاسبه‌ی انتگرال $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ هستیم. اما تا آخرین مرحله انتگرال را از 1 تا t در نظر می‌گیریم و در پایان

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$t = \infty$ قرار می‌دهیم. برای یافتن حاصل آن باید از روش تفکیک کسرها به صورت مقابل استفاده کنیم.

$$A = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$$

برای به دست آوردن B ، دو طرف را در x ضرب کرده و سپس با میل دادن x به سمت بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = A + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Bx^2 + Cx}{x^2 + 1} \Rightarrow 0 = A + B \xrightarrow{A=1} B = -1$$

حالا که مقادیر A و B ، حساب شد، می‌توانیم با قرار دادن مقداری دلخواه برای x ، (مثلاً $x = 1$) C را نیز حساب کنیم:

$$\frac{1}{1(1+1^2)} = \frac{1}{1} + \frac{(-1)(1)+C}{1+1^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 + \frac{C-1}{2} \Rightarrow \frac{C-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow C-1 = -1 \Rightarrow C = 0$$

بنابراین انتگرال به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I = \int_1^t \frac{dx}{x+x^3} = \int_1^t \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^t \frac{A}{x} dx + \int_1^t \frac{Bx+C}{x^2+1} dx = \int_1^t \frac{dx}{x} - \int_1^t \frac{x}{x^2+1} dx = [\text{Ln}x - \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2+1)]_1^t = [\text{Ln} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}]_1^t$$

$$I = \text{Ln}t - \text{Ln} \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = 0 - \text{Ln} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\text{Ln} \frac{1}{\sqrt{2}} = +\text{Ln} \sqrt{2}$$

۱۶- گزینه «۲» می‌دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، بنابراین داریم:

$$3 + \sin 2x = 3 + 2 \sin x \cos x = 4 - 1 + 2 \sin x \cos x = 4 - (1 - 2 \sin x \cos x) = 4 - (\sin x - \cos x)^2$$

اگر فرض کنیم $\sin x - \cos x = u$ ، آن‌گاه $(\cos x + \sin x) dx = du$ و لذا داریم:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = \int \frac{du}{4 - u^2} = \frac{1}{2 \times 2} \text{Ln} \left| \frac{u+2}{u-2} \right| = \frac{1}{2 \times 2} \text{Ln} \left| \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2} \right|$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\text{Ln} \left| \frac{\sin x - \cos x + 2}{\sin x - \cos x - 2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left[\text{Ln}1 - \text{Ln} \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{4} \text{Ln} \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \text{Ln}3 \Rightarrow b = 3, a = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{a} = 12$$

بنابراین داریم:

۱۷- گزینه «۲» ابتدا لازم است از طرفین مشتق بگیریم، از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$F'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{2}x^2} (1-x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقاط بحرانی تابع ± 1 است که یکی از آن‌ها ماکزیمم و دیگری مینیمم تابع است. برای فهمیدن این که کدام ماکزیمم و کدام مینیمم است؟ لازم است یکبار دیگر

$$F''(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} (1-x^2) - 2x(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = (-3x + x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

از $F'(x)$ مشتق بگیریم:

$$\left. \begin{aligned} F''(-1) &= [-3 \times (-1) + (-1)^3] e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow \text{نقطه مینیمم است} \\ F''(1) &= [-3 \times 1 + (1)^3] e^{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{e}} < 0 \Rightarrow \text{نقطه ماکزیمم است} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 1 - (-1) = 2$$

۱۸- گزینه «۴» برای حل این تست، بهتر است ابتدا از تغییر متغیر استفاده کنیم و سپس از قاعده‌ی جزء به جزء حاصل انتگرال را به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du \\ x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0, x = e \Rightarrow u = \ln e = 1 \end{cases}$$

علامت	مشتق	انتگرال
+	u^3	e^u
-	$3u^2$	e^u
+	$6u$	e^u
-	6	e^u
	0	e^u

$$I = \int_0^1 u^3 e^u du \xrightarrow{\text{با استفاده از جدول}}$$

$$I = [u^3 e^u - 3u^2 e^u + 6u e^u - 6e^u]_0^1$$

$$I = 1 \times e^1 - 3 \times 1 \times e^1 + 6 \times 1 \times e^1 - 6 \times e^1 + 6 = 6 - 2e$$

۱۹- گزینه «۳» واضح است باید از فرمول مشتق از انتگرال استفاده کنیم:

$$g'(x) = (2 \sin x \cos x) \text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - (2 \sin x \cos x) \text{Arcos}(\sqrt{\cos^2 x}) = (2 \sin x \cos x)x - (2 \sin x \cos x)x = 0$$

چون $g'(x) = 0$ ، بنابراین $g(x) = c$ و برای به دست آوردن c ، باید به جای x ، یک عدد مناسب قرار دهیم. اگر $x = \frac{\pi}{4}$ ، قرار دهیم، آن‌گاه حد بالایی دو انتگرال یکی می‌شود (هر دو برابر با $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ می‌شود) و می‌توانیم دو انتگرال را با هم جمع کنیم:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\sin^2(\frac{\pi}{4})} \text{Arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2(\frac{\pi}{4})} \text{Arcos} \sqrt{t} dt$$

می‌شود (هر دو برابر با $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ می‌شود) و می‌توانیم دو انتگرال را با هم جمع کنیم:

$$\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{(\text{Arcsin} \sqrt{t} + \text{Arcos} \sqrt{t})}_{\frac{\pi}{2}} dt \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right) dt = \left[\frac{\pi}{2} t\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

چون $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ ، شده لذا $c = \frac{\pi}{4}$ و بنابراین $g(x) = \frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

$$20- \text{گزینه «۳» برای حل این سؤال می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

(اگر از تغییر متغیر $u = \pi - x$ ، استفاده کنیم، به این نتیجه به راحتی می‌رسید) برای حل انتگرال به دست آمده، می‌توانیم از تغییر متغیر $\text{tg} x = u$ استفاده کنیم و داریم:

$$\text{tg} x = u \Rightarrow (1 + \text{tg}^2 x) dx = du \Rightarrow (1 + u^2) dx = du$$

$$\text{tg}^2 x = u^2 \Rightarrow 1 + \text{tg}^2 x = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + u^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + u^2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1 + u^2}, x = 0 \Rightarrow u = \text{tg}(0) = 0, x = \frac{\pi}{2}, u = \text{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2}{1 + u^2}}{1 + \frac{u^2}{1 + u^2}} du = 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + 2u^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\frac{1}{2} + u^2} = \sqrt{2} [\text{Arctg} \frac{u}{\frac{1}{\sqrt{2}}}]_0^{\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$



۲۱- گزینه «۲» به راحتی واضح است؛ باید از قاعده‌ی «جزء به جزء» استفاده کنیم:

$$u = \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow du = \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{-2dx}{1-x^2}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) \left(\frac{-2}{1-x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + c$$

$$= \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - x + c = \left(\frac{x^2-1}{2}\right) \text{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + c$$

۲۲- گزینه «۳» هدف به دست آوردن انتگرال $\int_1^x \frac{e^t}{t+a} dt$ با استفاده از $F(x)$ است. از تغییر متغیر $t+a = u$ و در نتیجه $dt = du$ داریم:

$$I = \int_1^x \frac{e^t}{t+a} dt \xrightarrow[t=du]{t+a=u} I = \int_{1+a}^{x+a} \frac{e^{u-a}}{u} du = e^{-a} \int_{1+a}^{x+a} \frac{e^u}{u} du \quad (1)$$

در صورت سؤال داریم: $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ با توجه به (۱) و رابطه‌ی $\left(\int_{1+a}^{x+a} = \int_1^{x+a} - \int_1^{1+a}\right)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$I = e^{-a} \int_{1+a}^{x+a} \frac{e^u}{u} du = e^{-a} \int_1^{x+a} \frac{e^u}{u} du - e^{-a} \int_1^{1+a} \frac{e^u}{u} du$$

$$F(1+a) = \int_1^{1+a} \frac{e^t}{t} dt \quad \text{با توجه به ضابطه‌ی } F(x) \text{ داریم؛ } F(x+a) = \int_1^{x+a} \frac{e^t}{t} dt \text{ و در نتیجه به ازای } x=1 \text{ داریم:}$$

$$I = e^{-a} \int_1^{x+a} \frac{e^u}{u} du - e^{-a} \int_1^{1+a} \frac{e^u}{u} du = e^{-a} F(x+a) - e^{-a} F(1+a) = e^{-a} [F(x+a) - F(1+a)]$$

با در نظر گرفتن موارد بالا می‌توان گفت:

۲۳- گزینه «۳» ابتدا با استفاده از روش جزء به جزء انتگرال I را محاسبه می‌کنیم:

علامت	مشتق	انتگرال
⊕	x	$f'(2x)$
⊖	۱	$\frac{1}{2} f'(2x)$
⊕	۰	$\frac{1}{4} f(2x)$

$$I = \left[\frac{x}{2} f'(2x)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} f(2x)\right]_0^1 + 0 = \frac{1}{2} [f'(2) - 0] - \frac{1}{4} [f(2) - f(0)] = \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} [f(2) - f(0)]$$

$$I = \frac{1}{2} (5) - \frac{1}{4} (3-1) = \frac{5}{2} - \frac{2}{4} = 2$$

با توجه به شرط $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$ بنابراین داریم:

۲۴- گزینه «۳» ظاهر انتگرال ما را به یاد استفاده از قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال می‌اندازد! پس از طرفین تساوی بر حسب x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = 1 \Rightarrow [2x(1+x) + x^2] f(x^2(1+x)) = 1$$

حال برای به دست آوردن $f(2)$ باید عددی را قرار دهیم که $x^2(1+x)$ را برابر ۲ کند، به راحتی با قرار دادن $x=1$ به این خواسته می‌رسیم:

$$[2 \times 1(1+1) + 1^2] f[1(1+1)] = 1 \Rightarrow 5f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5}$$

۲۵- گزینه «۳» با توجه به صورت سوال ابتدا $f'(x)$ و $g'(x)$ را تشکیل داده، سپس به سراغ حد می‌رویم:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{2t} (2t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dt \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از انتگرال}} f'(x) = 1 \times e^{2x} (2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad g'(x) = kx^{k-1} e^{2x} + 2x^k e^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \sqrt{2x^2 + 1}}{kx^{k-1} e^{2x} + 2x^k e^{2x}} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \sqrt{2x}}{2x^k e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2x^{k-1}}$$

حال سه حالت متفاوت برای $k-1$ می‌توان در نظر گرفت:

(۱) اگر $k-1 > 0$ ، آن‌گاه $k > 1$ در این حالت حاصل کسر صفر می‌شود، که طبق فرض حاصل حد ناصفر است، پس این حالت قابل قبول نیست.

(۲) اگر $k-1 = 0$ ، آن‌گاه $k = 1$ و در این حالت حاصل کسر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۳) اگر $k-1 < 0$ ، آن‌گاه $k < 1$ و در این حالت حاصل کسر ∞ می‌شود و چون طبق فرض حاصل حد مقداری متناهی است، پس این حالت قابل قبول نیست.

۲۶- گزینه «۲» ابتدا I را به فرم مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

برای محاسبه‌ی انتگرال اول از قاعده‌ی «جزء به جزء» استفاده می‌کنیم: با فرض $u = \frac{1}{1+x}$ که نتیجه می‌دهد؛ $du = \frac{-dx}{(1+x)^2}$ و فرض $dv = e^x dx$ که نتیجه

$$I = \frac{e^x}{1+x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e}{2} - 1$$

می‌دهد $v = e^x$ ، داریم:

روش جالب‌تر: نکته: گفتیم همواره حاصل $\int e^x [f(x) + f'(x)] dx$ ، همواره برابر با $e^x f(x)$ است. در این سؤال داریم:

$$\int_0^1 e^x \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right] dx = \int_0^1 e^x \left[\frac{x+1-1}{(1+x)^2} \right] dx = \int_0^1 e^x \left[\left(\frac{1}{1+x} \right) - \frac{1}{(1+x)^2} \right] dx$$

اگر فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ، آن‌گاه $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ و لذا حاصل این انتگرال برابر با $e^x f(x)$ و به عبارت دیگر برابر با $e^x \left(\frac{1}{1+x} \right)$ است:

$$I = \left[e^x \left(\frac{1}{1+x} \right) \right]_0^1 = e^1 \left(\frac{1}{1+1} \right) - e^0 \left(\frac{1}{1+0} \right) = \frac{e}{2} - 1$$

۲۷- گزینه «۱» اگر از تغییر متغیر $u = \cos x$ ، استفاده کنیم، آن‌گاه $-\sin x dx = du$ ، بنابراین داریم:

$$I = \int_1^0 \frac{-udu}{u^2 + 3u + 2} = \int_0^1 \frac{udu}{u^2 + 3u + 2} = \int_0^1 \left(\frac{2}{u+2} - \frac{1}{u+1} \right) du = 2[\text{Ln} |u+2|]_0^1 - [\text{Ln} |u+1|]_0^1 = 2\text{Ln} 3 - 2\text{Ln} 2 - \text{Ln} 2 + \text{Ln} 1$$

$$\Rightarrow I = 2\text{Ln} 3 - 3\text{Ln} 2 = \text{Ln} 9 - \text{Ln} 8 = \text{Ln} \frac{9}{8}$$

۲۸- گزینه «۴» همان‌طور که می‌بینید e^x در عبارتی بی‌ربط به خودش ضرب شده و احتمال استفاده از فرمول گفته شده در متن کتاب هست!

$$I = \int e^x \left[\frac{1-x^2+1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int e^x \left[\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} \right] dx = e^x \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C \xrightarrow{I(0)=1} e^0 \left(\frac{1+0}{\sqrt{1-0}} \right) + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$I \Big|_0^1 = e^1 \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \right) = \sqrt{e} \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \sqrt{e} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3e}$$

پس داریم:

۲۹- گزینه «۴» برای محاسبه‌ی انتگرال داده شده با استفاده از قاعده‌ی «جزء به جزء» به راحتی داریم:

$$x = u \Rightarrow dx = du, \quad f''(x)dx = dv \Rightarrow v = f'(x)$$

$$I = [xf'(x)]_b^a - \int_b^a f'(x)dx = [xf'(x)]_b^a - [f(x)]_b^a = af'(a) - bf'(b) - f(a) + f(b)$$

اینجاست که باید از دو جمله‌ی اول سؤال استفاده کنیم. وقتی در دو نقطه‌ی $x = a$ و $x = b$ ، تابع f دارای اکسترمم است، یعنی این که یا $f'(b) = f'(a) = 0$ است و یا $f'(b)$ و $f'(a)$ وجود ندارند. و چون در سؤال گفته شده؛ $f''(x)$ پیوسته است، بنابراین $f'(x)$ هم پیوسته و در نتیجه $f'(a)$ و $f'(b)$ وجود دارند و مقدارشان صفر است. پس حاصل انتگرال برابر با $f(b) - f(a)$ می‌شود.

۳۰- گزینه «۱» در این سؤال، ابتدا عبارت درون رادیکال را به فرم $ax^2 + bx + c$ می‌نویسیم:

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4} = -u^2 + \frac{1}{4} \quad \text{بنابراین تغییر متغیر مناسب } x + \frac{3}{2(-1)} = u \text{ می‌باشد که از آنجا } x = u + \frac{3}{2} \text{ می‌شود، لذا داریم:}$$

$$I = \int \left(\frac{u + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}} \right) du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}} du + \frac{3}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}}$$

انتگرال اول تابعی فرد است و چون بازه‌ی انتگرال‌گیری هم متقارن است، پس حاصل آن صفر می‌شود. از طرفی حاصل انتگرال دوم برابر با $\text{Arc sin} \left(\frac{u}{\frac{1}{2}} \right)$ و یا به

$$I = \frac{3}{2} \times [2 \text{Arc sin } 2u]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 3 \text{Arc sin } 1 = \frac{3\pi}{2}$$

عبارت دیگر $\text{Arc sin } 2u$ می‌باشد، پس داریم:



۳۱- گزینه «۲» واضح است انتگرال در بازه $[0, 1]$ ، فقط یک ناسرگی در نقطه $x = 0$ دارد. پس برای تابع تحت انتگرال هم‌ارزی در $x = 0$ را می‌نویسیم، اما یک مشکل وجود و آن x^p است. بنابراین باید برای p سه حالت زیر را در نظر بگیریم.

حالت اول: فرض می‌کنیم $p < 1$ باشد: در این صورت هم‌ارزی مقابل را داریم:
 $x^p - \sin x \sim x^p \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$
 و می‌دانیم این انتگرال به ازای $p < 1$ همگراست.

حالت دوم: فرض می‌کنیم $p = 1$ باشد در این حالت داریم:
 $x^p - \sin x = x^1 - \sin x \sim \frac{x^2}{6}$

پس انتگرال به صورت $I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{6}x^3} dx$ نوشته می‌شود، که واضح است با توجه به وجود x^2 در مخرج کسر، انتگرال واگراست.

حالت سوم: فرض می‌کنیم $p > 1$ باشد: در این حالت هم‌ارزی زیر را داریم:
 $x^p - \sin x \sim -\sin x \sim -x \Rightarrow I = \int_{-x}^1 \frac{1}{-x} dx \Rightarrow$ انتگرال واگراست

۳۲- گزینه «۴» می‌دانیم وقتی که $+\infty < x < \sqrt{3}$ ، آن‌گاه $\frac{\pi}{3} < \text{Arctg}x < \frac{\pi}{2}$ و چون $\frac{\pi}{3}$ عددی بزرگتر از یک و $\frac{\pi}{2}$ عددی کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد، بنابراین
 $[\text{Arctg}x] = [2] = 1$ و کوچکتر از یک و کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد، بنابراین

بنابراین انتگرال با ظاهری جدید و زیباتر به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:
 $I = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [x]^{\sqrt{3}}_{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

۳۳- گزینه «۳» بر طبق نکته‌ی گفته شده در متن کتاب رابطه‌ی مقابل را داریم:
 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \left(\frac{\sin kx}{x}\right) dx = \text{tg}^{-1}\left(\frac{k}{a}\right)$

بنابراین داریم:
 $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x \cos \text{ec}(kx)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \left(\frac{\sin kx}{x}\right) dx - \int_0^{+\infty} e^{-bx} \left(\frac{\sin kx}{x}\right) dx = \text{tg}^{-1}\left(\frac{k}{a}\right) - \text{tg}^{-1}\left(\frac{k}{b}\right)$

۳۴- گزینه «۴» واضح است باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^n})} \right] - (1) \times \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} = -\frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{(\frac{x^2+1}{x^2})(\frac{1+x^n}{x^n})} \right] - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}$$

$$= -\frac{x^n}{(x^2+1)(1+x^n)} - \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} = \frac{-(1+x^n)}{(1+x^2)(1+x^n)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

با توجه به این که $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ به راحتی با انتگرال‌گیری از طرفین به ضابطه‌ی $f(x)$ می‌رسیم:
 $f(x) = -\int \frac{dx}{1+x^2} = -\text{Arctg}x + c$
 برای پیدا کردن ثابت c ، می‌توانیم به جای x در تساوی صورت سؤال عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ قرار دهیم، (عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ به خاطر صفر شدن حاصل انتگرال و راحتی محاسبات انتخاب شد) در این صورت داریم:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_1^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) = -\text{Arctg}x + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) = -\text{Arctg}\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

۳۵- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید، انتگرال در بی‌نهایت و $x = 2$ ناسرگی دارد، بنابراین انتگرال را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم که هر کدام شامل یک ناسرگی

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^4-16)^p} = \int_2^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^4-16)^p} + \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{(x^4-16)^p} = I_1 + I_2$$

انتگرال I_1 در $x = 2$ ناسره است و در همسایگی این نقطه تابع زیر انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{(x^4-16)^p} = \frac{1}{[(x-2)(x+2)(x^2+4)]^p} \sim \frac{1}{(x-2)^p (x+2)^p (x^2+4)^p} < \frac{1}{(x-2)^p}$$

چون انتگرال $\int_2^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x-2)^p}$ ، به ازای $p < 1$ همگراست، لذا انتگرال I_1 نیز به ازای $p < 1$ همگراست (طبق آزمون مقایسه چون انتگرال بزرگتر همگراست، بنابراین انتگرال کوچکتر هم همگراست).

حالا سراغ انتگرال I_2 می‌رویم، در بی‌نهایت می‌توان عبارت $(x^4-16)^p$ را هم‌ارز با $(x^4)^p$ در نظر گرفت، لذا داریم:

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{(x^4-16)^p} \sim \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^{4p}}$$

می‌دانیم این انتگرال به ازای $p > 1$ و به عبارت دیگر به ازای $\frac{1}{p} < 1$ همگرا می‌شود، با توجه به محدودیت همگرایی انتگرال I_1 ، شرط همگرایی دو انتگرال I_1 و I_2 با هم و به عبارت دیگر شرایط همگرایی I به صورت زیر است:

$$\frac{1}{p} < 1$$

۳۶- گزینه «۲» می‌دانیم انتگرال‌هایی به فرم $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$ را می‌توان برابر با $\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ دانست، لذا از دست x با این نکته خلاص می‌شویم!

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1 + \sin x} \right) dx \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } 1 - \sin x \text{ ضرب می‌کنیم}} I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right] dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_0^{\pi} (-\sin x)(\cos x)^{-2} dx \right] = \frac{\pi}{2} [\operatorname{tg} x - (\cos x)^{-1}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} [1 + 1] = \pi$$

۳۷- گزینه «۳» مشتق عبارت زیر رادیکال، $2x - 8$ است، اما در صورت کسر $2x - 3$ داریم، بنابراین می‌توانیم صورت کسر را به صورت $(2x - 8) + 5$ بنویسیم و انتگرال را به دو قسمت تفکیک کنیم:

$$I = \int \frac{(2x - 8) + 5}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}} dx = \int \frac{(2x - 8)}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}} dx + \int \frac{5}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}} dx = \int (2x - 8)(x^2 - 8x + 12)^{-\frac{1}{2}} dx + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}$$

$$= 2(x^2 - 8x + 12)^{\frac{1}{2}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 4)^2 - 4}} = 2\sqrt{x^2 - 8x + 12} + 5 \operatorname{Ln} |x - 4 + \sqrt{(x - 4)^2 - 4}| + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} \quad \text{۳۸- گزینه «۳»}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{از طرفی می‌دانیم برای هر } n \in \mathbb{N}$$

لذا $I = \frac{\pi}{4}$ و در نتیجه حاصل انتگرال خواسته شده برابر با $\frac{\pi}{4} \sqrt{2}$ است.

۳۹- گزینه «۲» اگر عبارت مخرج را به فرم $1 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 + \sin 2x$ بنویسیم، داریم:

$$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + (\sin x + \cos x)^2} dx \Rightarrow (\sin x + \cos x) = u \Rightarrow (\cos x - \sin x) dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tgu} + c = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(\sin x + \cos x) + c$$

۴۰- گزینه «۱» فرض کنید $g(x) = x^2 - x$ در بازه‌ی $0 \leq x \leq 2$ تعریف می‌شود، ماکزیمم $g(x)$ به ازای $x = 2$ به دست می‌آید که برابر $g(2) = 2^2 - 2 = 2$ می‌شود. از طرفی مینیمم تابع با مشتق گرفتن از تابع حساب می‌شود:

$$g(x) = x^2 - x \Rightarrow g'(x) = 2x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار مینیمم تابع برابر $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ می‌شود. در واقع در بازه‌ی $0 < x < 2$ شرایط مقابل را داریم:

$$e^{-\frac{1}{4}} < x^2 - x < 2 \quad \text{چون تابع } e^x \text{ همواره صعودی است، لذا داریم:}$$

$$\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} dx < \int_0^2 e^{x^2 - x} dx < \int_0^2 e^2 dx \Rightarrow 2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2 - x} dx < 2e^2 \quad \text{و اگر از طرفین رابطه‌ی فوق انتگرال بگیریم، داریم:}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{2e^2}{2e^{-\frac{1}{4}}} = \frac{e^2}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^2 \times e^{\frac{1}{4}} = e^{2 + \frac{1}{4}} = e^{\frac{9}{4}} \quad \text{همان‌طور که ملاحظه می‌شود، } B = 2e^2 \text{ و } A = 2e^{-\frac{1}{4}} \text{ و لذا نسبت خواسته شده برابر مقدار مقابل است:}$$



۴۱- گزینه «۳» ابتدا با تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ خواهیم داشت: $x = \frac{1}{t}$ پس $dx = -\frac{dt}{t^2}$ در ضمن وقتی $x \rightarrow +\infty$ داریم $t \rightarrow 0^+$ و وقتی $x \rightarrow 0^+$ داریم

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{x} + x^2\right)} dx = -\int_0^{\infty} e^{-\left(t^2 + \frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{1}{t}\right)} dt \quad . t \rightarrow +\infty$$

دقت کنید که در تساوی آخر با جابه‌جا کردن حدود انتگرال، حاصل آن قرینه شده است. از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$t^2 + \frac{1}{t} = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2t \quad \text{پس } I = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\left[\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2t\right]} dt$$

و اکنون با تغییر متغیر $u = t - \frac{1}{t}$ داریم: $(1 + \frac{1}{t^2})dt = du$ در ضمن وقتی $t \rightarrow 0^+$ داریم: $u \rightarrow -\infty$ و وقتی $t \rightarrow +\infty$ داریم: $u \rightarrow +\infty$. برای آن که du را ایجاد کنیم کنار $\frac{1}{t^2}$ یک واحد کم و زیاد می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2t} dt = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2} - 1\right) e^{-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2t} dt = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2t} dt - \int_0^{\infty} e^{-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - 2t} du - \int_0^{\infty} e^{-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2t} dt$$

از انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - 2t} du$ ثابت e^{-2t} را خارج کرده و از زوج بودن تابع زیر انتگرال هم استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du - I \Rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-2t} \sqrt{\pi} dt - I \Rightarrow 2I = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$$

۴۲- گزینه «۱» فرض کنیم $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ باشد. در این صورت داریم $F'(x) = f(x)$ و $F''(x) = f'(x)$. حالا می‌خواهیم نمودارهای $f(x)$ ، $F(x)$ و

$f'(x)$ را از بین نمودارهای a ، b و c شناسایی کنیم. برای شروع دقت کنید که $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ است؛ پس نمودار $F(x)$ باید از مبدأ مختصات عبور کرده باشد. پس یکی از نمودارهای a یا b خواهد بود.

اگر نمودار $F(x)$ همان (b) باشد، این نمودار در ابتدا حالت صعودی دارد، بنابراین مشتق آن باید مثبت باشد؛ یعنی در ابتدای نمودار باید $F'(x) > 0$ باشد در نتیجه در ابتدای نمودار، $f(x) > 0$ است. اما نمودارهای a و c هر دو در ابتدا منفی هستند؛ چون زیر محور x قرار دارند، پس اگر نمودار $F(x)$ ، همان (b) باشد، نمودار مشتق آن یعنی $f(x)$ نمی‌تواند هیچ‌کدام از منحنی‌های (a) و (c) باشد. از این‌جا متوجه می‌شویم که (b) نشان‌دهنده $F(x)$ نیست. پس تا اینجا نتیجه گرفتیم که نمودار $F(x)$ باید منحنی (a) باشد. به ابتدای این نمودار یعنی نقاط نزدیک به مبدأ توجه کنید. این منحنی در ابتدا، نزولی است بنابراین مشتق آن باید منفی باشد. اما جهت تقعر منحنی (a) رو به بالاست، پس مشتق دوم آن باید مثبت باشد. در نتیجه با بررسی منحنی (a) در نقاط نزدیک به مبدأ می‌بینیم که باید داشته باشیم:

پس منحنی (c) نشان‌دهنده $f(x)$ و منحنی (b) نشان‌دهنده $f'(x)$ است.

۴۳- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{x^2} < \frac{x}{x^5+1} < \frac{x+1}{(x+1)^5+1} < \frac{1}{(x+1)^4}$ ، بنابراین داریم:

$$n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{(x+1)^4} < n^3 \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5+1} < n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4} \quad \text{از طرفی داریم:}$$

به طور مشابه حد سمت چپ نیز برابر $\frac{7}{24}$ است، طبق قضیه ساندویچ حد موردنظر نیز $\frac{7}{24}$ است.

۴۴- گزینه «۴» با تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ یا $x = u^2$ ، آنگاه $dx = 2u du$ ، لذا داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \int \frac{2u du}{u^2(1+u)^3} = 2 \int \frac{udu}{(1+u)^3} = 2 \int \left[\frac{(u+1)-1}{(1+u)^3} \right] du = 2 \int \frac{du}{(1+u)^2} - 2 \int \frac{du}{(1+u)^3} = \frac{2(1+u)^{-1}}{-1} - \frac{2(1+u)^{-2}}{-2} + c$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right]_1^{16} = -\frac{2}{\sqrt{16}+1} + \frac{2}{(\sqrt{16}+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{1}+1} - \frac{2}{(\sqrt{1}+1)^2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{2} - \frac{2}{4} = \frac{-12+2}{9} + \frac{3}{2} = -\frac{10}{9} + \frac{3}{2} = \frac{-20+27}{18} = \frac{7}{18}$$

۴۵- گزینه «۲» با ضرب صورت و مخرج در «مزدوج مخرج» داریم:

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u^2 = 1-x^2$ استفاده می‌کنیم، پس $2x dx = -2u du$ و یا $x dx = -u du$ ، لذا داریم:

$$\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} (x dx) = \int \frac{1-u}{1-u^2} (-u du) = -\int \frac{u}{1+u} du = -\int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = -u + \ln|1+u| + c$$

$$\Rightarrow I = \left[-\sqrt{1-x^2} + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) \right]_0^1 = 1 - \ln 2$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۴» با توجه به آن که ضابطه‌ی x را بر حسب y داریم و حدود y نیز در این شکل مشخص هستند، از فرمول $V = 2\pi \int_a^b |y-k|g(y) dy$ استفاده می‌کنیم. که در آن $k=1$ و $g(y) = 12(y^2 - y^3)$ داده شده است. چون در این ناحیه $0 \leq y \leq 1$ است، بنابراین $|y-1| = 1-y$ خواهد بود.

$$V = 2\pi \int_0^1 |y-1|g(y) dy = 2\pi \int_0^1 (1-y) \times 12(y^2 - y^3) dx = 24\pi \int_0^1 (y^2 - 2y^3 + y^4) dy = 24\pi \left[\frac{y^3}{3} - \frac{2}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \right]_0^1 = 24\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 4\pi \left(\frac{\pi}{5} \right)$$

۲- گزینه «۴» دایره‌ای به شعاع r و مرکز مبدأ در نظر می‌گیریم. معادلات نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی به صورت $y_1 = -\sqrt{r^2 - x^2}$ و $y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$ هستند

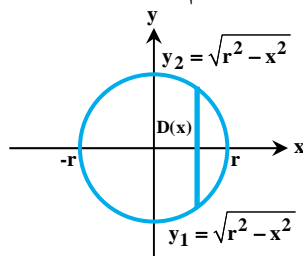
$$D(x) = y_2 - y_1 = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$S(x) = D^2(x) = 4(r^2 - x^2)$$

بنابراین فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر است: سطح مقطع شکل، مربع‌هایی با ضلع $D(x)$ هستند بنابراین مساحت آن‌ها برابر است با:

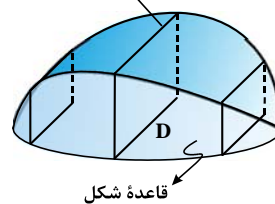
$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_{-r}^r 4(r^2 - x^2) dx = 4 \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = 16 \frac{r^3}{3}$$

همچنین حدود x به شکل $-r \leq x \leq r$ می‌باشد، پس داریم:



قاعده شکل در صفحه $x-y$

مقاطع عمودی شکل مربع هستند



قاعده شکل

۳- گزینه «۳»

روش اول: مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به شعاع 30 cm را در نظر می‌گیریم که خط افقی $y = -10$ از آن عبور کرده است. می‌دانید که از دوران این نیم‌دایره حول محور y ها یک نیم کره به شعاع 30 cm به دست می‌آید. اگر حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی D (ناحیه‌ی بین نیم‌دایره و خط $y = -10$) حول محور y ها را حساب کنیم، حجم آبی که در این نیم کره جمع شده است را حساب کرده‌ایم. البته ناحیه‌ی D نسبت به محور y ها تقارن دارد، (زیرا در معادله‌ی $x^2 + y^2 = 900$ تبدیل x به $-x$ تغییری ایجاد نمی‌کند). بنابراین فقط نیمه‌ی سمت راست ناحیه‌ی D را حول محور y ها دوران می‌دهیم و نیازی به دو برابر کردن حجم به دست آمده هم نداریم.

حالا به یک نکته دقت کنید؛ در این مثال کران‌های y به سادگی مشخص شده‌اند. همان‌طور که می‌بینید حدود y به صورت $-30 \leq y \leq -10$ است. به همین

خاطر تصمیم می‌گیریم از انتگرال dy استفاده کنیم:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy$$

خط $y = -10$ کران بالای انتگرال را مشخص می‌کند و از معادله‌ی دایره داریم: $x = f(y) = \sqrt{900 - y^2}$. با قرار دادن در فرمول خواهیم داشت:

$$V = \pi \int_{-30}^{-10} (900 - y^2) dy = \pi \left[900y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-30}^{-10} = \pi \left[-9000 + \frac{1000}{3} + 27000 - \frac{27000}{3} \right] = \frac{28000}{3} \pi$$

روش دوم: فرض کنید بخواهیم همین مسأله را با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای حل کنیم. از معادله‌ی $x^2 + y^2 = 900$ ، تابع $y = f(x) = -\sqrt{900 - x^2}$ تابع x است. ناحیه‌ی مورد نظر ما بخشی از نیم‌دایره‌ی پایینی است و در آن $y \leq 0$ است.

ناحیه‌ی مورد نظر بین خط $y = -10$ و منحنی $y_1 = -\sqrt{900 - x^2}$ قرار دارد و حول محور y ها دوران می‌کند.

$$V = 2\pi \int_a^b x |y_2 - y_1| dx = 2\pi \int_a^b x (-10 + \sqrt{900 - x^2}) dx$$

حالا باید حدود x را مشخص کنیم. اما پیش از آن دقت کنید که معادله‌ی $f(x) = -\sqrt{900 - x^2}$ با تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کند، پس ناحیه‌ی مورد نظر نسبت به محور y تقارن دارد. به همین خاطر فقط نیمه‌ی سمت راست آن را حول محور دوران می‌دهیم و نیازی به دو برابر کردن جواب هم نداریم.

با این توضیح مشخص می‌شود که $x \geq 0$ است. کران بالای x هم از برخورد خط $y = -10$ با منحنی $y = -\sqrt{900 - x^2}$ به دست می‌آید.

$$y = -\sqrt{900 - x^2} = -10 \Rightarrow 900 - x^2 = 100 \Rightarrow x = \sqrt{800} = 10\sqrt{8}$$

پس $0 \leq x \leq 10\sqrt{8}$ است.

$$V = 2\pi \int_0^{10\sqrt{8}} x(-10 + \sqrt{900 - x^2}) dx = 2\pi \left[-5x^2 - \frac{1}{3}(900 - x^2)^{3/2} \right]_0^{10\sqrt{8}} = 2\pi \left[-40000 - \frac{1000}{3} + \frac{27000}{3} \right] = 28000 \frac{\pi}{3}$$

۴- گزینه «۲» منحنی $y = 4 - x^2$ در نقاط $x = \pm 2$ با محور x ها برخورد می‌کند. با توجه به شرط $x \geq 0$ که در صورت سؤال داریم، حدود x

$$\bar{x} = \frac{\int x y dx}{\int y dx} = \frac{\int_0^2 x(4-x^2) dx}{\int_0^2 (4-x^2) dx} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

به صورت $0 \leq x \leq 2$ خواهد بود.

۵- گزینه «۳» طول قوس منحنی $y = f(x)$ از رابطه‌ی $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$ به دست می‌آید.

$$9y^2 = 4(x^2+1)^2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2(x^2+1)} dx$$

$$\Rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{(2x^2+1)^2} dx = \int_0^2 (2x^2+1) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + x\right) \Big|_0^2 = 21$$

۶- گزینه «۴» توجه کنید که حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دو منحنی $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ حول خط $x = k$ برابر

$$V = 2\pi \int_a^b |x-k| |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

است با:

در این فرمول $x = a$ و $x = b$ هر دو باید در یک طرف محور دوران قرار داشته باشند. در این مثال محور دوران خط $x = 2$ است و حدود x به صورت $0 \leq x \leq 2$ به دست می‌آیند زیرا از برخورد $y = 2x$ و $y = x^2$ خواهیم داشت $x^2 = 2x$ و از اینجا دو مقدار $x = 0$ و $x = 2$ به دست می‌آیند.

$$V = 2\pi \int_0^2 |x-2| (2x-x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2-x)(2x-x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (4x-2x^2-2x^2+x^3) dx$$

$$\Rightarrow V = 2\pi \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

۷- گزینه «۱» در اولین جمله داریم $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ، در دومین جمله $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$ است و در جمله‌ی آخر $\frac{n+n}{n} = 1 + \frac{n}{n}$ است. پس می‌توانیم حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-(1+\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(1+\frac{2}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-(1+\frac{n}{n})^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4-(1+\frac{i}{n})^2}}$$

مجموع داده شده را به این شکل بنویسیم:

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-(1+x)^2}} dx = \left[\arcsin\left(\frac{1+x}{2}\right) \right]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۸- گزینه «۴» طبق رابطه مقابل تست را حل می‌کنیم:

$$S = 2\pi \int_0^4 x \sqrt{1+f'(x)} dx$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \Rightarrow f'^2(x) = x + \frac{1}{16x} - \frac{1}{2} \Rightarrow 1+f'^2(x) = x + \frac{1}{16x} + \frac{1}{2} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_0^4 x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) dx = 2\pi \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^4 = 2\pi \left(\frac{64}{5} + \frac{8}{6}\right) = 2\pi \left(\frac{384+40}{30}\right) = \frac{424\pi}{15}$$

۹- گزینه «۳» می‌دانیم اگر $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ، آن‌گاه طول قوس منحنی از t_1 تا t_2 از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

بنابراین برای این سؤال داریم:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(2t)\sin t + (\cos t)t^2]^2 + [(2t)\cos t + (-\sin t)t^2]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2(2\sin t + t\cos t)^2 + t^2(2\cos t - t\sin t)^2} dt$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} t \sqrt{4\sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 4t \sin t \cos t + 4\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 4t \sin t \cos t} dt$$

$$\int_0^{2\pi} t \sqrt{\underbrace{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}_4 + t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{4+t^2} dt$$

حالا با یک انتگرال ساده روبه‌رو هستیم که با تغییر متغیر داریم:

$$u = 4+t^2 \Rightarrow du = 2t dt, \begin{cases} t=0 \Rightarrow u=4 \\ t=2\pi \Rightarrow u=4+4\pi^2 \end{cases}$$

$$L = \int_4^{4+4\pi^2} \frac{1}{2} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_4^{4+4\pi^2} = \frac{1}{3} (4+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (4)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(1+\pi^2)^3} - \frac{8}{3}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_i}{n}\right)^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r \ln \left(1 + \frac{r_i}{n}\right)$$

۱۰- گزینه «۱» ابتدا حد مورد نظر را به صورت مقابل می نویسیم:

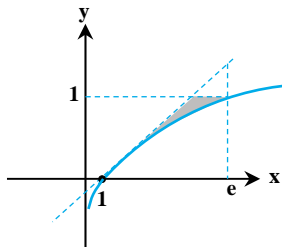
پشت سری $\frac{1}{n}$ را داریم و عبارت داخل آن بر حسب $\frac{1}{n}$ است پس واضح است که برای محاسبه حد از فرمول حد مجموع باید استفاده کنیم. با قرار دادن x به جای $\frac{1}{n}$ به تابع $f(x) = r \ln(1 + rx)$ می رسیم.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r \ln \left(1 + r \left(\frac{i}{n}\right)\right) \right) = \int_0^1 r \ln(1 + rx) dx \stackrel{u = rx, du = r dx}{=} \int_0^r \ln(1 + u) du = [(1 + u) \ln(1 + u) - u]_0^r = r \ln 3 - r$$

۱۱- گزینه «۴» برای یافتن مساحت ناحیه مورد نظر باید حاصل $\int_0^{\pi} y dx$ را به دست آوریم:

$$\int_0^{\pi} \left(r + \sin \frac{x}{r}\right)^r \cos \frac{x}{r} dx = r \int_0^{\pi} \left(r + \sin \frac{x}{r}\right)^r \left(\frac{1}{r}\right) \cos \frac{x}{r} dx = \left[\frac{\left(r + \sin \frac{x}{r}\right)^{r+1}}{r+1} \right]_0^{\pi} = \frac{r}{r+1} \left[\left(r + \sin \frac{\pi}{r}\right)^{r+1} - \left(r + \sin 0\right)^{r+1} \right] = \frac{r}{r+1} [r^{r+1} - r^{r+1}] = \frac{r}{r+1}$$

۱۲- گزینه «۲» مساحت مورد نظر، همان مساحت سطح ناحیه‌ی هاشور خورده در شکل زیر است:



ابتدا معادله‌ی خط مماس را در $x = 1$ به دست می آوریم. به ازای $x = 1$ مقدار $y = 0$ حاصل می شود و شیب خط مماس $y' = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1$ است. پس معادله خط مماس $y = x - 1$ است. با توجه به نوع ناحیه بهتر است x را بر حسب y به دست آورد. یعنی مساحت محدود مابین خط $x = y + 1$ و منحنی $x = e^y$ را در فاصله $0 \leq y \leq 1$ پیدا کنیم. در این صورت داریم:

$$S = \int_0^1 (e^y - (y + 1)) dy = \left(e^y - \frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_0^1 = e - \frac{5}{2}$$

۱۳- گزینه «۱» ناحیه‌ی سمت راست خط $x = 1$ ، یعنی ناحیه‌ای که در آن $1 \leq x < \infty$ است. بنابراین حدود انتگرال مشخص شده‌اند. از طرفی ناحیه‌ی داده شده بین خط $y_1 = 0$ و منحنی $y_2 = \frac{4}{2x+1} - \frac{2}{x+2}$ قرار دارد.

$$\text{مساحت} = \int_1^{\infty} \left(\frac{4}{2x+1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = r \int_1^{\infty} \frac{2 dx}{2x+1} - r \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+2} = [r \ln |2x+1| - r \ln |x+2|]_1^{\infty} = \left[\ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^r \right]_1^{\infty} = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

۱۴- گزینه «۱» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می آوریم.

$$\ln^r x = \ln x \Rightarrow \ln^r x - \ln x = \ln x (\ln x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \ln x = 1 \Rightarrow x = e \end{cases}$$

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^r x) dx$$

بنابراین حدود انتگرال به صورت $1 \leq x \leq e$ هستند.

از تغییر متغیر $t = \ln x$ استفاده می کنیم بنابراین $x = e^t$ و $dx = e^t dt$ داریم $1 \leq x \leq e$ پس $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{array}{l|l} t - t^r & e^t \\ 1 - rt & e^t \\ -r & e^t \\ 0 & e^t \end{array} \Rightarrow S = [(t - t^r)e^t - (1 - rt)e^t - re^t]_0^1 = (0 + e - re - 0 + 1 + r) = r - e$$

دقت کنید که $0 > e - r$ است، اگر جواب به دست آمده منفی می شد، باید قدر مطلق آن را به عنوان جواب می پذیرفتیم.

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{r}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{r}}}} \stackrel{\text{قانون رشد}}{=} 0 \Rightarrow y = 0$$

مجانب افقی $y = 0$

۱۵- گزینه «۲» خط $y = 0$ تنها مجانب تابع داده شده است.

$$S = r \int_0^{\infty} (x e^{-\frac{x^2}{r}} - 0) dx = -r e^{-\frac{x^2}{r}} \Big|_0^{\infty} = r$$

بنابراین مساحت ناحیه‌ی بین $y = 0$ و $y = x e^{-\frac{x^2}{r}}$ را می خواهیم که برابر است با:

۱۶- گزینه «۴» برای محاسبه طول قوس از فرمول $\int \sqrt{1+y'^2} dx$ استفاده می‌کنیم.

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt \Rightarrow y' = \sqrt{\cos x} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt = 0$$

برای محاسبه‌ی حدود انتگرال I، باید منحنی y را با محور x برخورد دهیم:

بدیهی است که یکی از جواب‌ها $x = -\frac{\pi}{2}$ باشد. همچنین چون $\cos t$ زیر رادیکال است و باید مثبت باشد، x حداکثر می‌تواند $\frac{\pi}{2}$ باشد.

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

بنابراین طول قوس برابر است با:

۱۷- گزینه «۱» واضح است که محل تلاقی دو منحنی $x=0$ و $x=1$ می‌باشد. حجم حاصل از دوران را به کمک فرمول $\pi \int (y_1^2 - y_2^2) dx$ محاسبه می‌کنیم.

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

۱۸- گزینه «۱» منحنی مورد نظر نسبت به محور x تقارن دارد. از آنجا که $y^2 = \frac{x(x-3)}{x-4}$ ، لازم است $\frac{x(x-3)}{x-4} \geq 0$ باشد. برای محاسبه‌ی حدود انتگرال،

منحنی را با محور x برخورد می‌دهیم:

$$y^2 = \frac{x(x-3)}{x-4} = 0$$

پس منحنی بین دو خط $x=0$ و $x=3$ و محور x محصور است و از آنجا $x=3$ و $x=0$ کسر $\frac{x(x-3)}{x-4}$ به ازای $0 \leq x \leq 3$ مثبت می‌شود پس این ناحیه قابل قبول هم هست.

$$V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{x(x-3)}{x-4} dx = \pi \int_0^3 \frac{x^2 - 3x}{x-4} dx = \pi \int_0^3 \left(x+1 + \frac{4}{x-4} \right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x + 4 \ln |x-4| \right) \Big|_0^3$$

$$= \pi \left(\frac{15}{2} - 4 \ln 4 \right) = \frac{\pi}{2} (15 - 16 \ln 2)$$

توضیح: برای محاسبه‌ی انتگرال $\int \frac{x^2 - 3x}{x-4} dx$ چون درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر است باید صورت را بر مخرج تقسیم کنیم. برای این کار می‌توانیم از تقسیم چند جمله‌ای‌ها استفاده کنیم یا آن‌که با اضافه و کم کردن یک عدد ثابت و استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک، در صورت کسر $(x-4)$ را ایجاد کنیم. در این سؤال

$$\frac{x^2 - 3x}{x-4} = \frac{x^2 - 3x - 4 + 4}{x-4} = \frac{(x+1)(x-4) + 4}{x-4} = (x+1) + \frac{4}{x-4}$$

به این صورت عمل کرده‌ایم:

۱۹- گزینه «۴» ابتدا نقاط برخورد این منحنی با محور x ها ($y=0$) را تعیین می‌کنیم.

$$y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \xrightarrow{\text{تلاقی با محور xها}} \frac{t(t^2 - 3)}{3} = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pm\sqrt{3}$$

بنابراین طول قوس مورد نظر در دو بازه‌ی $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ و $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ قرار دارد. با محاسبه‌ی المان طول قوس خواهیم داشت:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} dt = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = (t^2 + 1) dt$$

از آنجا که $t^2 + 1$ تابعی زوج است، مقدار انتگرال آن در بازه‌های $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ و $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ یکسان خواهد بود. می‌توانیم حاصل انتگرال را در بازه‌ی

$$L = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \left[\sqrt{3} + \sqrt{3} \right] = 4\sqrt{3}$$

محاسبه کرده و دو برابر کنیم:

۲۰- گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, \frac{1}{2}$$

البته از معادله‌ی $y^2 = \frac{3}{2}x$ معلوم است که باید $x \geq 0$ باشد، پس $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ قابل قبول است. بنابراین حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V = \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx \right) = \pi \left(\left(\frac{3}{4} x^2 \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = \pi \left(\frac{3}{16} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \pi \left(\frac{9 + 48 - 16 - 24 + 2}{48} \right) = \frac{19\pi}{48}$$

۲۱- گزینه «۳» در این حد جمله‌ی $\sin \frac{i\pi}{n}$ به کار رفته است و $1 \leq i \leq n-1$ است. بنابراین حتی وقتی که $i = n-1$ باشد باز هم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i\pi}{n} = 0$ می‌شود به

همین خاطر می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin x \approx x$ استفاده کنیم. پس از استفاده از این هم‌ارزی، را از گروه خارج می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{n} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{2\pi}{n} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{n} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{2\pi}{n} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$$

در واقع جمله‌ی عمومی داخل گروه به صورت $\left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i\pi}{n}$ است. پس داریم:

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i\pi}{n} \Rightarrow f(x) = (1+x)\pi x$$

$$\text{حد} = \int_0^1 f(x) dx = \pi \int_0^1 x(1+x) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5\pi}{6}$$

$$x' = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \Rightarrow x' = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \quad x^{1/2} = \frac{16t^2}{(1+t^2)^4}$$

۲۲- گزینه «۲»

$$y' = \frac{2(1+t^2) - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} \xrightarrow{\text{پس از ساده‌سازی}} y' = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y^{1/2} = \frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4}$$

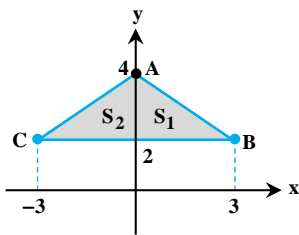
$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{\frac{4(t^2 + 2t^2 + 1)}{(1+t^2)^4}} = \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(1+t^2)^4}} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\text{طول منحنی} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \text{Arc tg } t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2\pi$$

۲۳- گزینه «۳» ابتدا فرمول حجم را نوشته و سپس با استفاده از قاعده‌ی جزء به جزء و به کمک جدول داریم:

$$\text{حجم} = 2\pi \int_0^1 x \cosh x dx = 2\pi [x \sinh x - \cosh x]_0^1 = 2\pi \left[\frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^1 + e^{-1}}{2} + 1 \right] = 2\pi \left[-\frac{1}{e} + 1 \right]$$

علامت	مشق	انتهال
⊕	x	cos hx
⊖	۱	sin hx
⊕	o	cos hx



۲۴- گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: معادله‌ی پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم:

$$y - 4 = \frac{2-4}{3-0}(x-0) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4$$

فرض کنیم S_1 ناحیه‌ی محدود شده به محور y ها و خط AB و خط $y=2$ باشد. چنانچه حجم حاصل از دوران S_1 حول محور x ها را V_1 بنامیم. به علت تقارن موجود در شکل واضح است که $V = 2V_1$ جواب است.

$$V_1 = \pi \int_0^3 \left[\left(-\frac{2}{3}x + 4\right)^2 - (2)^2 \right] dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 12 \right) dx = \pi \left[\frac{4}{27}x^3 - \frac{16}{6}x^2 + 12x \right]_0^3 = 16\pi$$

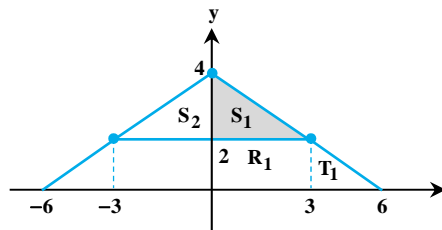
بنابراین $V = 32\pi$ جواب است.

روش دوم: استفاده از فرمول‌های هندسی حجم:

وقتی معادله خط AB به صورت $y = -\frac{2}{3}x + 4$ به دست آمد، محل برخورد آن با محور x ها را مشخص

$$-\frac{2}{3}x + 4 = 0 \Rightarrow x = 6$$

می‌کنیم.



حجمی که از دوران کل ناحیه‌ی $S_1 \cup R_1 \cup T_1$ حول محور x ها به دست می‌آید، مخروطی است با ارتفاع ۶ و شعاع ۴ حجم آن $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32\pi$ است. از

دوران R_1 حول محور x استوانه‌ای به ارتفاع ۳ و شعاع ۲ به دست می‌آید. حجم آن $\pi r^2 h = 12\pi$ است. از دوران T_1 نیز مخروطی به ارتفاع ۳ و شعاع ۲ به دست

می‌آید که حجم آن $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4\pi$ است. اکنون حجم حاصل از دوران S_1 به این شکل به دست می‌آید:

$$V_1 = 32\pi - 12\pi - 4\pi = 16\pi$$

پس حجم ناحیه‌ی مورد نظر $V = 2V_1 = 32\pi$ است.

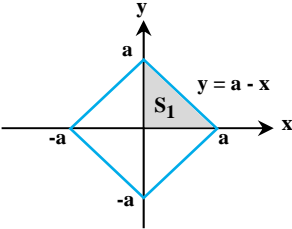
روش سوم: محور دوران یعنی محور x ها ناحیه‌ی درون مثلث ABC را قطع نکرده است، پس می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم. مختصات مرکز ثقل مثلث برابر است با میانگین مختصات رئوس آن:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3}(0+3-3, 4+2+2) = (0, \frac{4}{3})$$

فاصله آن تا محور x ها برابر است با $d = \frac{4}{3}$. مساحت این مثلث نیز برابر است با $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$. طبق فرمول پاپوس داریم:

$$V = 2\pi d \times S = (2\pi)(\frac{4}{3})(6) = 16\pi$$

۲۵- گزینه «۴»

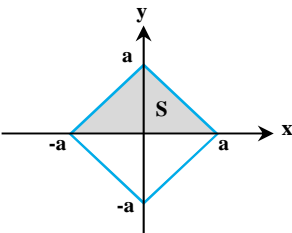


روش اول: شکل منحنی $|x| + |y| = a$ به صورت روبرو می‌باشد. این ناحیه نسبت به محور x ها متقارن است. کافیسیت حجم حاصل از دوران نیمه‌ی بالایی را حساب کنیم و نیازی به ۲ برابر کردن هم نیست. پس می‌توانیم حجم حاصل از دوران S_1 را حساب کرده و دو برابر کنیم:

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_0^a (a-x)^2 dx = 2\pi \int_0^a (a^2 + x^2 - 2ax) dx = 2\pi(a^2x + \frac{x^3}{3} - ax^2) \Big|_0^a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

روش دوم: ناحیه‌ی داده شده نسبت به محور دوران تقارن دارد. بنابراین کافیسیت حجم حاصل از دوران نیمه‌ی بالایی آن (S) را حول محور x ها محاسبه کنیم. محور دوران ناحیه‌ی S را قطع نمی‌کند و می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم:

$$\text{مختصات مرکز ثقل} = \frac{1}{3}(a+0-a, 0+a+0) = (0, \frac{a}{3})$$



پس فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور دوران $d = \frac{a}{3}$ است. مساحت S هم به راحتی محاسبه می‌شود $S = \frac{1}{2}(a)(2a) = a^2$.

$$V = 2\pi d \times S = (2\pi)(\frac{a}{3})(a^2) = \frac{2\pi a^3}{3}$$

در نتیجه داریم:

۲۶- گزینه «۳» صورت و مخرج کسر جلوی سری را بر n تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \frac{i}{n}}{(n + \frac{i}{n})^2} \xrightarrow{\text{در مخرج از } n \text{ فاکتور می‌گیریم}} \text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\frac{1 + \frac{i}{n}}{1 + (\frac{i}{n})^2} \right] \Rightarrow f(\frac{i}{n}) = \frac{1 + \frac{i}{n}}{1 + (\frac{i}{n})^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$$

حالا به راحتی می‌توان گفت حد فوق برابر با انتگرال $I = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$ است و برای محاسبه‌ی آن باید آن را به دو انتگرال مجزا تفکیک کنیم:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = [\text{tg}^{-1}x]_0^1 + \frac{1}{2} [\text{Ln}(1+x^2)]_0^1 = \text{tg}^{-1}(1) - \text{tg}^{-1}(0) + \frac{1}{2} [\text{Ln}2 - \text{Ln}1] = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Ln}2$$

۲۷- گزینه «۲» در این حد مجموع جمله‌ی $\sin(\frac{ia}{n^2})$ آمده است. می‌دانیم که $1 \leq i \leq n$ است، حتی وقتی که $i = n$ باشد، داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ia}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n^2} = 0$

پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin(\frac{ia}{n^2}) \approx \frac{ia}{n^2}$ استفاده کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin(\frac{ia}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{ia}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ia \xrightarrow{f(\frac{i}{n}) = \frac{ia}{n}} \text{جواب حد} = \int_0^1 ax dx = a \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{a}{2}$$

توجه: این مثال را با استفاده از فرمول $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ هم می‌توان حل کرد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin(\frac{ia}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{ia}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2} (1+2+\dots+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an(n+1)}{2n^2} = \frac{a}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{n+k} \sim \frac{\pi}{n+k}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{\pi}{n+k} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

۲۸- گزینه «۱» با توجه به اینکه $\sin x \sim x$ (وقتی که $x \rightarrow 0$) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(\frac{\pi}{n+1}) + \sin(\frac{\pi}{n+2}) + \dots + \sin(\frac{\pi}{2n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n+2} + \dots + \frac{\pi}{2n}]$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\frac{\pi}{1+\frac{1}{n}} + \frac{\pi}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{\pi}{1+\frac{n}{n}}]$$

حالا از n در مخرج فاکتور می‌گیریم تا $\frac{1}{n}$ را پشت کروسه ایجاد کنیم:

$$\text{جواب حد} = \int_0^1 \frac{\pi}{1+x} dx = \pi \text{Ln}(1+x) \Big|_0^1 = \pi \text{Ln}2$$

واضح است که $f(\frac{i}{n}) = \frac{\pi}{1+\frac{i}{n}}$ پس $f(x) = \frac{\pi}{1+x}$ و داریم:



۲۹- گزینه «۴» مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده برابر است با انتگرال تفریق دو تابع مرزی این ناحیه در بازه‌ی $x=0$ تا $x=1$ ؛ پس داریم: (مرزها: $y=e^x$ و $y=e$)

$$S = \int_0^1 (e - e^x) dx = \int_0^1 e dx - \int_0^1 e^x dx = e \times x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e \times (1 - 0) - \int_0^1 e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx \quad (\text{گزاره‌ی I})$$

این بار انتگرال را با المان dy حل می‌کنیم. برای به‌دست آوردن حدود انتگرال، به طریق مقابل عمل می‌کنیم:

$$y = e^x \xrightarrow{\text{Ln}} \text{Lny} = \text{Ln}(e^x) = x \text{Lne} = x$$

$$x = 0 \Rightarrow \text{Lny} = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \text{Lny} = 1 \Rightarrow y = e$$

حدود x از 0 تا 1 است. در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow S = \int_1^e \text{Lny} dy \quad (\text{II گزاره‌ی}) \quad S = \int_1^e (x - 0) dy = \int_1^e \text{Lny} dy$$

$$I = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(a + b - y) dy$$

طبق قاعده ذکر شده در کتاب می‌دانیم که انتگرال‌های معین را می‌توان به‌صورت دیگری نیز نوشت:

$$S = \int_1^e \text{Lny} dy = \int_1^e \text{Ln}(1 + e - y) dy \quad (\text{III گزاره})$$

با استفاده از این نکته و انتگرال (II)، به راحتی گزاره‌ی (III) نیز به‌دست می‌آید:

بنابراین هر سه صورت برابر با مساحت ناحیه‌ی مورد نظر می‌باشد.

۳۰- گزینه «۱» چون با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله تغییر نمی‌کند، پس منحنی نسبت به محور x و محور y متقارن است. بنابراین مساحت شکل را

در ربع اول محاسبه و حاصل را چهار برابر می‌کنیم. منحنی در نقاط $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ محور x را قطع می‌کند. بنابراین داریم:

$$y^2 = x^2 - x^4 \Rightarrow y = x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow S = 4 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{-4}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

بخش پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۳» طبق فرمول طول قوس برای تابع $y = f(x)$ در بازه $0 \leq x \leq 1$ داریم:
 از طرفی از نامساوی $\sqrt{1+a^2} \leq 1+|a|$ که برای هر عدد حقیقی a برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt{1+f'^2} \leq 1+|f'|$ است. بنابراین داریم:

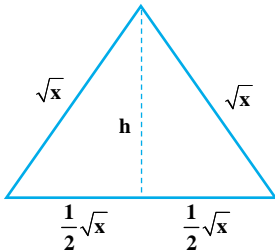
$$L = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

برای انتگرال‌گیری از $|f'|$ باید ریشه‌های معادله $f' = 0$ را بررسی کنیم. لازم است به دو مورد توجه کنیم. اولاً چون $f(0) = f(1) = 0$ است، طبق قضیه رول حتماً یک $0 < c < 1$ وجود دارد که $f'(c) = 0$ باشد. پس معادله $f' = 0$ لاقلاً یک جواب مانند c دارد. ثانیاً طبق فرض، $f''(x) \leq 0$ است. از آنجا که $f''(x)$ مشتق $f'(x)$ است، نتیجه می‌گیریم که $f'(x)$ تابعی نزولی است. اکنون می‌توانیم علامت f' را در هر بازه تعیین کنیم. نمودار f' نزولی است و در نقطه $x = c$ مقدارش صفر است پس برای $0 \leq x \leq c$ داریم: $f' \geq 0$ و برای $c \leq x \leq 1$ داریم $f' \leq 0$.

$$L \leq \int_0^1 (1+|f'|) dx = \int_0^c dx + \int_c^1 f' dx + \int_c^1 -f' dx = [x]_0^c + [f(x)]_c^1 - [f(x)]_c^1 = 1 + f(c) - f(0) - f(1) + f(c)$$

طبق فرض $f(0) = f(1) = 0$ است. بنابراین داریم:
 از آنجا که $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ داده شده است، برای هر $x \in [0,1]$ داریم $f(x) \in [0,1]$ یعنی $0 \leq f(x) \leq 1$ پس به ازای $x = c$ هم داریم $0 \leq f(c) \leq 1$ به این ترتیب نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$L \leq 1 + 2(1) = 3$$



۲- گزینه «۲» سطح مقطع این جسم در هر نقطه به طول x یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع \sqrt{x} است. با استفاده از قضیه فیثاغورث، ارتفاع این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 + h^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}x \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$$

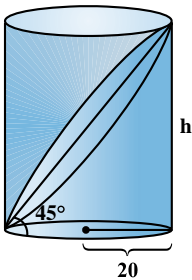
$$S(x) = \frac{1}{2} \times h \times \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$$

پس مساحت این مثلث برابر است با:

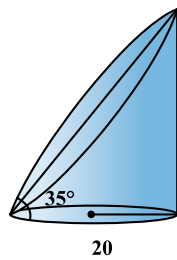
$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{3}}{4}x dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15}{8}\sqrt{3}$$

حجم این جسم با انتگرال‌گیری از $S(x)$ در فاصله‌ی $1 \leq x \leq 4$ معلوم می‌شود:

۳- گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



\Rightarrow



روش اول: قطر این استوانه برابر با 40cm است. وقتی یک برش با زاویه‌ی 45° از آن داشته باشیم، چون ارتفاع مطابق شکل مقابل و به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\text{tg}(45^\circ) = \frac{h}{40} \Rightarrow \frac{h}{40} = 1 \Rightarrow h = 40$$

حجم کل این استوانه اگر آن را برش نمی‌دادیم برابر بود با:

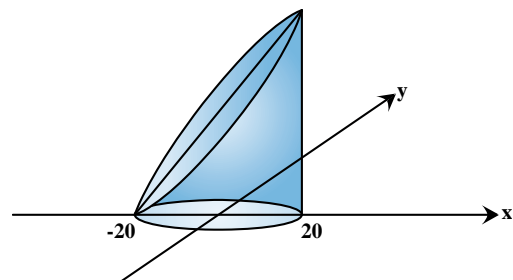
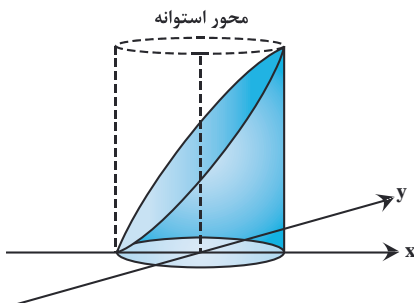
$$V_1 = \pi R^2 h = \pi (20)^2 (40) = 16000\pi$$

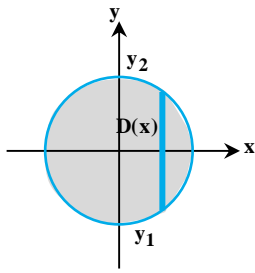
برش با زاویه‌ی 45° این استوانه را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند، پس حجم

$$V = \frac{1}{2}(16000\pi) = 8000\pi$$

قسمت بریده شده نصف مقدار فوق است:

روش دوم (با استفاده از انتگرال): برای آن که منظور این سؤال را بهتر متوجه شوید، ابتدا استوانه‌ای به شعاع 20cm را تصور کنید. آن را طوری برش می‌دهیم که یکی از برش‌ها بر محور استوانه عمود باشد (کف شکل) و برش دوم با زاویه‌ی 45° درجه آن را قطع کند.





قاعده‌ی این استوانه دایره‌ای به شعاع ۲۰ است. مبدأ مختصات را در مرکز آن تصور کنید. از آنجا که زاویه‌ی این برش، ۴۵ درجه است، وقتی از روبرو به این جسم نگاه کنیم بین خط $y = x + 20$ و محور x ها قرار می‌گیرد. همچنین چون شعاع استوانه ۲۰ cm است خواهیم داشت $-20 \leq x \leq 20$.

هر کدام از برش‌های عرضی این شکل، یک مستطیل به ارتفاع $y = x + 20$ و عرض قاعده‌ی این شکل (کف) دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲۰ است. معادله‌ی این دایره، $x^2 + y^2 = 20^2$ است و از اینجا $y = \pm\sqrt{400 - x^2}$ به دست می‌آید. اگر به کف این شکل نگاه کنیم بین نیم‌دایره‌های $y_1 = -\sqrt{400 - x^2}$ و $y_2 = \sqrt{400 - x^2}$ در فاصله‌ی $-20 \leq x \leq 20$ قرار دارد که فاصله‌ی این منحنی‌ها از یکدیگر برابر است با:

$$D(x) = y_2 - y_1 = 2\sqrt{400 - x^2}$$

$$S(x) = (x + 20)D(x) = 2(x + 20)\sqrt{400 - x^2} \quad \text{پس سطح مقطع این جسم مستطیلی با ابعاد } D(x) \text{ و } x + 20 \text{ است.}$$

می‌توانیم حجم جسم را حساب کنیم:

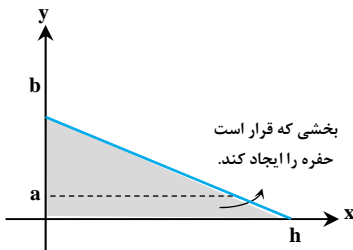
$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_{-20}^{20} 2(x + 20)\sqrt{400 - x^2} dx = 2 \int_{-20}^{20} [x\sqrt{400 - x^2} + 20\sqrt{400 - x^2}] dx$$

$$V = 40 \int_{-20}^{20} \sqrt{400 - x^2} dx$$

تابع $x\sqrt{400 - x^2}$ فرد است و انتگرالش در این بازه صفر می‌شود. بنابراین داریم:

با تغییر متغیر $x = 20 \sin \theta$ داریم $dx = 20 \cos \theta d\theta$. وقتی $-20 \leq x \leq 20$ باشد داریم $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$V = 40 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{400 - 400 \sin^2 \theta} 20 \cos \theta d\theta = 16000 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{16000}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 8000 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8000 \pi$$



۴- گزینه «۱» ابتدا خطی را در نظر بگیرید که از نقاط $(h, 0)$ و $(0, b)$ می‌گذرد. معادله‌ی این خط به صورت $\frac{x}{h} + \frac{y}{b} = 1$ نوشته می‌شود. اگر ناحیه‌ی محدود به این خط و محور x ها را در بازه‌ی $0 \leq x \leq h$ حول محور x دوران دهید، مخروط مورد نظر ایجاد می‌شود. حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi b^2 h$$

حالا فرض کنید $0 < a < b$ و خط افقی $y = a$ را رسم کنید. اگر ناحیه‌ی محدود به محور x ها، خط $y = a$ و خط $\frac{x}{h} + \frac{y}{b} = 1$ را حول محور x دوران دهیم، حفره‌ای به شعاع a درون مخروط ایجاد می‌شود. محل برخورد

$$\begin{cases} y = a \\ \frac{x}{h} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = h \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

این دو خط را مشخص می‌کنیم:

از دوران D_1 حول محور x ها استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع $h \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ ایجاد می‌شود. حجم آن برابر است با:

$$V_1 = \pi a^2 h \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

از دوران D_2 حول محور x ها مخروطی با شعاع قاعده‌ی a و ارتفاع $h - h \left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} h$ ایجاد می‌شود. حجم

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi a^2 \left(\frac{a}{b} h\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi a^3}{b} h\right)$$

این مخروط برابر است با:

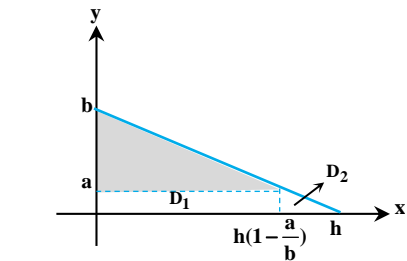
بنابراین حجم حفره‌ی ایجاد شده در مخروط برابر است با $V_1 + V_2$ و حجمی از مخروط که باقی می‌ماند برابر است با: $V - (V_1 + V_2)$.

$$\text{حجم قسمت باقیمانده} = V - (V_1 + V_2) = \frac{1}{3} \pi b^2 h - \pi a^2 h \left(1 - \frac{a}{b}\right) - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a^3}{b} h\right) = \frac{\pi}{3} h \left(b^2 - 3a^2 + 2\frac{a^3}{b}\right)$$

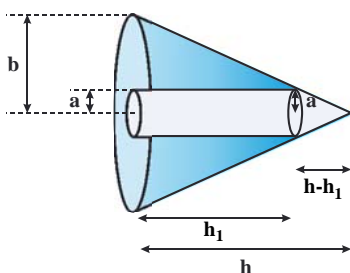
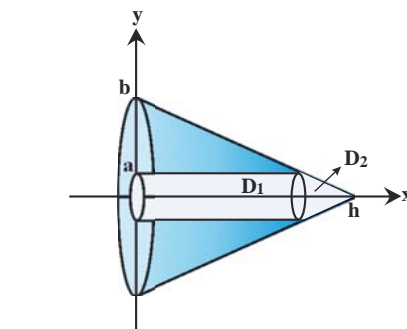
روش دیگر: بعد از آن که شکل ناحیه را تشخیص دادیم؛ متوجه می‌شویم که از یک مخروط به شعاع b و ارتفاع h باید یک مخروط کوچک به شعاع a و ارتفاع $h - h_1$ همچنین یک استوانه به شعاع a و ارتفاع h_1 را حذف کنیم. پس بدون استفاده از انتگرال می‌توانیم از فرمول‌های هندسی حجم استفاده کنیم. ابتدا با استفاده از تناسب h_1 را به دست می‌آوریم.

$$\frac{h_1}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow h_1 = \frac{a}{b} h$$

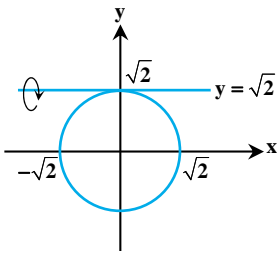
$$V = \frac{1}{3} \pi b^2 h - \pi a^2 (h - h_1) - \frac{1}{3} \pi a^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi h \left(b^2 - 3a^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right) - a^2 \frac{a}{b}\right) = b^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b} - \frac{a^3}{b}$$



از دوران ناحیه‌ی سفید حفره ایجاد می‌شود.



۵- گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:



روش اول «قضیه پاپوس»: دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$ است. به همین دلیل محور دوران که خط افقی $y = \sqrt{2}$ است، با این منحنی تماس دارد اما آن را قطع نمی‌کند. در نتیجه می‌توانیم از قضیه‌ی پاپوس استفاده کنیم. مرکز ثقل این دایره، در وسط آن یعنی نقطه‌ی $(0, 0)$ قرار دارد. فاصله‌ی این نقطه تا محور دوران برابر با $\sqrt{2}$ است. طول قوس هر دایره برابر با محیط آن است. در این جا دایره‌ای با شعاع $R = \sqrt{2}$ داریم، پس محیط آن $2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$ است. طبق قضیه‌ی پاپوس برای محاسبه‌ی سطح حاصل از دوران داریم:

$$2\pi \times (\text{فاصله‌ی مرکز ثقل از محور دوران}) \times (\text{طول قوس}) = 2\pi \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}\pi = 8\pi^2$$

روش دوم: در این مثال محور دوران خط $y = \sqrt{2}$ است، پس از فرمول $S = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1 + y'^2} dx$ استفاده می‌کنیم. ابتدا باید ضابطه‌ی y ، مقدار k و

حدود انتگرال را مشخص کنیم. از معادله‌ی $x^2 + y^2 = 2$ داریم $y = \pm\sqrt{2 - x^2}$ پس در واقع دو تابع $y = \sqrt{2 - x^2}$ و $y = -\sqrt{2 - x^2}$ سروکار داریم که

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{\pm 2x}{2\sqrt{2 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{2 - x^2} = \frac{2}{2 - x^2}$$

همان نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی هستند. اما برای هر دوی آن‌ها حاصل $1 + y'^2$ یکسان است:

برای تعیین حدود x دو راه داریم. می‌توانیم با توجه به شعاع دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2$ متوجه شویم که $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ یا می‌توانیم به دامنه‌ی توابع

$y = \pm\sqrt{2 - x^2}$ دقت کنیم که طبق آن $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ است. با توجه به آنکه $y = \sqrt{2}$ محور دوران است در فرمول، $k = \sqrt{2}$ خواهد بود. سطح حاصل از دوران

نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی را به ترتیب S_1 و S_2 می‌نامیم. برای هر دوی آن‌ها عبارت زیرانتگرال $|y - \sqrt{2}| \sqrt{1 + y'^2}$ است فقط ضابطه‌ی y در نیم‌دایره‌های

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi \left[\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}| \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |-\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}| \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx \right]$$

بالایی و پایینی تفاوت دارد.

حالا می‌خواهیم عبارات را از قدرمطلق خارج کنیم. به وضوح $2 - x^2 \leq 2$ است، پس $\sqrt{2 - x^2} \leq \sqrt{2}$ بوده و $\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}$ منفی می‌شود. به همین خاطر در

انتگرال اول $|\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}$ است. در دومین انتگرال واضح است که $|\sqrt{2 - x^2} - \sqrt{2}| = \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2}$ خواهد بود. پس داریم:

$$S = 2\pi \left[\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}) \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\sqrt{2} + \sqrt{2 - x^2}) \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx \right]$$

$$S = 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}} dx = 8\pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = 8\pi \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 8\pi \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 8\pi^2$$

و با جمع کردن انتگرال‌ها خواهیم داشت:

توضیح: ملاحظه می‌کنید که روش پاپوس چه کمک بزرگی در این مسأله به ما می‌کند!

۶- گزینه «۴» برای به دست آوردن طول منحنی باید حاصل $dL = \sqrt{1 + y'^2} dx$ را بیابیم که در آن

$$y = x^4 + \frac{1}{32x^2} \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} y' = 4x^3 - \frac{1}{16x^3} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} - 2(4x^3)\left(\frac{1}{16x^3}\right)$$

$$\Rightarrow y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} - \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + y'^2 = 16x^6 + \frac{1}{256x^6} + \frac{1}{2} = \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2$$

$$\text{طول منحنی} = \int_{x=1}^{x=2} ds = \int_{x=1}^{x=2} \sqrt{\left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2} dx = \int_{x=1}^{x=2} \left|4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right| dx \stackrel{1 \leq x \leq 2}{=} \int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right) dx$$

$$\Rightarrow L = \left[x^4 - \frac{1}{32x^2} \right]_1^2 = (16 - 1) - \frac{1}{32} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 15 - \frac{1}{128} (-3) = 15 + \frac{3}{128}$$

۷- گزینه «۴» طول منحنی پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ در بازه‌ی $a \leq t \leq b$ از رابطه‌ی $L = \int_a^b \sqrt{f'^2 + g'^2} dt$ به دست می‌آید. پس ابتدا به محاسبه عبارت زیر

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{4t^2 + 4}{(1+t^2)^2} = \frac{4}{1+t^2}$$

رادیکال می‌پردازیم:

$$\text{بنابراین طول قوس برابر با } L = \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{1+t^2}} dt \text{ است.}$$

برای یافتن مقدار انتگرال از تغییر متغیر $t = \tan \theta$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه $dt = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ همچنین حدود جدید به ترتیب به صورت زیر می‌شود:

$$t = 0 \Rightarrow \theta = 0, \quad t = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

و با بکارگیری رابطه‌ی $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ داریم:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{1+t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} d\theta \Rightarrow L = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta d\theta = 2 [\ln |\sec \theta + \tan \theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \ln(\sqrt{2} + 1)$$



۸- گزینه «۳» برای محاسبه سطح حاصل از دوران حول محور y ها، باید حاصل $2\pi \int |x| ds$ را محاسبه کنیم، دقت کنید از آنجائیکه نمودار موردنظر پارامتری است، بنابراین $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ و داریم:

$$x' = a - a \cos t, \quad y' = a \sin t$$

$$ds = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos t} dt = \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = a\sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

$$\text{مساحت} = 2\pi \int_0^{2\pi} (at - a \sin t) (2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|) dt \xrightarrow{0 \leq t \leq 2\pi} S = (2\pi)(2a^2) \left[\int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \right]$$

برای محاسبه انتگرال اول از قاعده‌ی «جزء به جزء» و قاعده جدول داریم:

مشتق	انتگرال
⊕ t	$\sin \frac{t}{2}$
⊖ ۱	$-2 \cos \frac{t}{2}$
⊕ ۰	$-4 \sin \frac{t}{2}$

$$\Rightarrow \text{انتگرال اول} = \left[-2t \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 4\pi$$

حاصل انتگرال دوم به راحتی برابر با صفر به دست می‌آید و لذا داریم:

$$S = (2\pi)(2a^2)(4\pi) = 16\pi^2 a^2$$

۹- گزینه «۳» حدود t داده نشده‌اند. در این موارد معمولاً با حل معادله‌ی $y(t) = 0$ می‌توانیم حدود t را مشخص کنیم.

$$y(t) = 0 \Rightarrow (2 + \sin t) \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2\pi$$

$$S = \left| \int_a^b y(t)x'(t) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) \sin t (\cos^2 t - \sin t(2 + \sin t)) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} (2 \sin t + \sin^2 t)(1 - \sin^2 t - 2 \sin t - \sin^2 t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} (2 \sin t + \sin^2 t)(1 - 2 \sin t - 2 \sin^2 t) dt \right| = \left| \int_0^{2\pi} (2 \sin t - 3 \sin^2 t - 6 \sin^3 t - 2 \sin^4 t) dt \right|$$

از توان‌های فرد سینوس به این صورت انتگرال می‌گیریم:

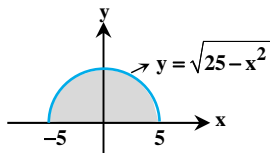
$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin t dt &= [-\cos t]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \right.$$

برای توان‌های زوج از فرمول توان‌شکن استفاده می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos 2t)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[t - \sin 2t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \right.$$

$$S = |2(0) - 3(\pi) - 6(0) - 2(\frac{3\pi}{4})| = \frac{9\pi}{2}$$

با جایگذاری نتایج به دست آمده در فرمول S داریم:



۱۰- گزینه «۴» مختصات مرکز جرم را (\bar{x}, \bar{y}) در نظر می‌گیریم. ناحیه موردنظر نیم‌دایره به شعاع ۵ می‌باشد. با توجه به تقارن شکل نسبت به محور y ها نتیجه می‌شود: $\bar{x} = 0$. پس کافی است \bar{y} را به دست آوریم.

می‌دانیم $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ ، چون در مسأله چگالی مطرح نشده پس چگالی را ۱ در نظر می‌گیریم و در این صورت M برابر مساحت ناحیه‌ای است که برابر مساحت

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-5}^5 f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-5}^5 (25 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{250}{3}$$

نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ است، یعنی $M = \frac{25}{2} \pi$ است.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{20}{3\pi}$$

$$y = 0 \Rightarrow t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = 0, -1, 1$$

۱۱- گزینه «۳» برای تعیین حدود t معادله‌ی $y(t) = 0$ را حل می‌کنیم.

بنابراین ناحیه‌ی موردنظر از دو بخش تشکیل می‌شود که در بازه‌های $0 \leq t \leq 1$ و $-1 \leq t \leq 0$ قرار دارند.

$$S = \left| \int_{-1}^1 y(t)x'(t) dt \right| = \left| \int_{-1}^1 (t^3 - t)(2t) dt \right| = \left| \int_{-1}^1 (2t^4 - 2t^2) dt \right|$$

$$S = \left| 2 \int_0^1 (2t^4 - 2t^2) dt \right| = \left| 2 \left[\frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 \right| = \frac{8}{15}$$

حالا از زوج بودن تابع زیر انتگرال استفاده می‌کنیم:

۱۲- گزینه «۲» خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی مورد نظر است؛ زیرا $y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = 0$. بنابراین مساحت محدود ما بین منحنی و محور x ها را به دست

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

می آوریم.

یادآوری: می دانیم $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$

۱۳- گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می آوریم.

جواب $x = 0$ قابل قبول نیست؛ زیرا با جایگذاری آن در معادله $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$ داریم $y^2 = -\frac{2}{3}$ که غیرممکن است. بنابراین $1 \leq x \leq 2$ حال برای محاسبه ی

طول قوس از فرمول $\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$ استفاده می کنیم.

$$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{9}(x-1)} = \sqrt{\frac{3x-1}{3}}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{3x-1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^2 \sqrt{3x-1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{9} (3x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{9} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) = \frac{4}{9} \left(\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right)$$

۱۴- گزینه «۳» ابتدا معادله منحنی را به صورت $y = \text{Arcsin } x \pm \sqrt{1-x^2}$ می نویسیم.

می دانیم طول قوس تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ از رابطه $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$ حاصل می شود با توجه به اینکه دامنه ی تابع داده شده در بازه $[-1, 1]$ است

لذا داریم:

$$f(x) = \text{Arcsin } x \pm \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \mp x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (f'(x))^2 = \frac{(1 \mp x)^2}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \frac{1+x}{1-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x+1-x}{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{2} \sqrt{1+x} \Big|_{-1}^1 \Rightarrow L_1 = 4 \\ L_2 = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{1+x}{1-x}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x+1+x}{1-x}} dx = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{2} \sqrt{1-x} \Big|_{-1}^1 \Rightarrow L_2 = -2\sqrt{2}(-\sqrt{2}) = 4 \end{cases} \Rightarrow L = L_1 + L_2 = 4 + 4 = 8$$

۱۵- گزینه «۴» واضح است که خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا داریم:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$$

پس حجم مورد نظر برابر حجم حاصل از دوران حول محور x ها می باشد.

$$V = \pi \int_0^{\infty} y^2 dx = \pi \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx = \frac{\pi e}{2}$$

توضیح: برای محاسبه $\int x e^{-2x} dx$ از روش جزء به جزء استفاده کرده ایم:

مشتق	انتگرال
x	e^{-2x}
1	$-\frac{1}{2} e^{-2x}$
0	$\frac{1}{4} e^{-2x}$

$$\Rightarrow V = \pi \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \pi \times \frac{e}{4} = \frac{\pi e}{4}$$

۱۶- گزینه «۲» مجانب منحنی $y = e^{-x^2}$ ، خط $y = 0$ است.

توضیح: برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ از تغییر متغیر $u = \sqrt{2}x$ ، $du = \sqrt{2}dx$ استفاده کردیم و سپس رابطه $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ را به کار بردیم.

۱۷- گزینه «۴» چون تابع زوج است پس $\bar{x} = 0$ است و می‌دانیم برای تابع $y = f(x)$ عرض مرکز ثقل از رابطه $\bar{y} = \frac{\int y\sqrt{1+y'^2} dx}{\int \sqrt{1+y'^2} dx}$ به دست می‌آید.

$$y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$$

$$\int_{-1}^1 y\sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-1}^1 \cosh x \cdot \cosh x dx = 2 \int_0^1 \cosh^2 x dx = \int_0^1 (\cosh 2x - 1) dx = \left(\frac{1}{2} \sinh 2x - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sinh 2 - 1$$

$$\int \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-1}^1 \cosh x dx = \sinh x \Big|_{-1}^1 = 2 \sinh 1 \Rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \sinh 2 - 1}{2 \sinh 1} = \frac{e^2 - e^2 - 1}{4e(e^2 - 1)}$$

۱۸- گزینه «۲» ابتدا دو نقطه‌ی متوالی از نقاط تلاقی را به دست می‌آوریم.

$$y = \text{Ln}(2 \cos x) \xrightarrow{y=0} \text{Ln}(2 \cos x) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}$$

حالا به راحتی طول منحنی را حساب می‌کنیم:

$$l = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2 \sin x}{2 \cos x} \right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = 2 \text{Ln}(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \text{Ln}(\sec \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3}) = \text{Ln}(2 + \sqrt{3})^2$$

۱۹- گزینه «۴» چون با تبدیل y به $-y$ معادله عوض نمی‌شود، پس منحنی نسبت به محور x ها تقارن دارد. بنابراین مساحت بالای محور x ها را محاسبه و

$$x^2 = 4(x^2 - y^2) \Rightarrow y^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

حاصل را دو برابر می‌کنیم:

$$S = 2 \int_0^4 x\sqrt{1 - \frac{1}{4}} dx = \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx$$

از تلاقی منحنی با محور x ها، $x = 0$ و $x = 4$ به دست می‌آید:

از تغییر متغیر $u = 4 - x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x = 4 - u$ و $dx = -du$ است؛ به ازای $x = 0$ داریم $u = 4$ و به ازای $x = 4$ مقدار $u = 0$ به دست می‌آید:

$$S = \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx = -\int_4^0 (4-u)\sqrt{u} du = -\int_4^0 (4u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}) du = -\left[\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} \right]_4^0 = \frac{8}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} = \frac{128}{15}$$

۲۰- گزینه «۴» برای به دست آوردن مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول y ها باید از رابطه‌ی $2\pi \int_a^b |x| ds$ استفاده کنیم، که برای منحنی پارامتری

مورد نظر، $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ محاسبه می‌شود:

$$x' = -2e^{-t}, \quad x'^2 = 4e^{-2t}, \quad y' = -2e^{-2t}, \quad y'^2 = 4e^{-4t}, \quad ds = \sqrt{4e^{-2t} + 4e^{-4t}} dt = 2e^{-t} \sqrt{1 + e^{-2t}} dt$$

$$\text{مساحت} = 2\pi \int_0^{+\infty} (2e^{-t})(2e^{-t} \sqrt{1 + e^{-2t}}) dt = 2\pi \int_0^{\infty} 4e^{-2t} \sqrt{1 + e^{-2t}} dt$$

برای حل این انتگرال باید $u = e^{-2t}$ در نتیجه $du = -2e^{-2t} dt$ پس $du = -2u dt$

$$\text{مساحت} = 2\pi \int 4u\sqrt{1+u} \frac{du}{-2u} = -4\pi \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = \left[-\frac{8\pi}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{+\infty} = -\frac{8\pi}{3}[1 - 2\sqrt{2}] = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

۲۱- گزینه «۱» ابتدا ناحیه‌ی OAB را حول محور y ها دوران می‌دهیم.

برای محاسبه‌ی حجم OAB باید از فرمول $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$ استفاده کنیم.

$$\text{OAB حجم} = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{4\pi}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{4\pi}{5} x^2 \sqrt{x} \right]_0^4 = \frac{4\pi}{5}(32)$$

و برای محاسبه‌ی حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی OBC حول محور x ها، چون ناحیه محدود بین دو نمودار $y_1 = 2$ (سقف ناحیه) و $y_2 = \sqrt{x}$ (کف ناحیه) است

$$\text{OBC حجم} = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi(16 - 8) = 8\pi$$

باید حاصل $\int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$ را به دست آوریم:

$$\frac{\text{OAB حجم}}{\text{OBC حجم}} = \frac{\frac{4\pi}{5}(32)}{8\pi} = \frac{16}{5}$$

و در آخر داریم:

۲۲- گزینه «۴» ابتدا نقاط اکسترمم منحنی را به دست می آوریم.

$$y = e^x + e^{-x}(x^2 + 3x + 1) \Rightarrow y' = -e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 - x + 2) = 0$$

از معادله $-x^2 - x + 2 = 0$ ، نقاط $x = 1$ و $x = -2$ حاصل می شود. پس ما مساحت محدود بین منحنی و محور x ها در فاصله $[-2, 1]$ را به دست می آوریم.

$$S = \int_{-2}^1 (e^x + e^{-x}(x^2 + 3x + 1)) dx = \left[e^{-x}(-x^2 - 5x - 6) \right]_{-2}^1 = \frac{3(e^3 - 4)}{e}$$

توضیح: برای محاسبه $\int e^{-x}(x^2 + 3x + 1) dx$ از روش جزء به جزء و قاعده‌ی جدول استفاده کرده ایم:

مشتق	انتگرال
$\oplus x^2 + 3x + 1$	e^{-x}
$\ominus 2x + 3$	$-e^{-x}$
$\oplus 2$	e^{-x}
\circ	$-e^{-x}$

$$\Rightarrow \int e^{-x}(x^2 + 3x + 1) dx = e^{-x}(-x^2 - 5x - 6) + C$$

$$\text{حجم} = 2\pi \int_{\sqrt{\text{Ln} 3}}^{\sqrt{\text{Ln} 8}} x \sqrt{1 + e^{x^2}} dx$$

۲۳- گزینه «۱» حجم مورد نظر از رابطه‌ی $2\pi \int xy dx$ ، به دست می آید:

برای حل این انتگرال تغییر متغیر $u = \sqrt{1 + e^{x^2}}$ را استفاده می کنیم. داریم $\sqrt{\text{Ln} 3} \leq x \leq \sqrt{\text{Ln} 8}$ پس $2 \leq u \leq 3$. هم چنین $u^2 = 1 + e^{x^2}$ پس

$$dx = \frac{2u}{2\sqrt{\text{Ln}(u^2 - 1)}} du \quad \text{پس } dx = \frac{u}{\sqrt{\text{Ln}(u^2 - 1)}} du \quad \text{به عبارتی } dx = \frac{2u}{2\sqrt{\text{Ln}(u^2 - 1)}} du$$

$$\int_{\sqrt{\text{Ln} 3}}^{\sqrt{\text{Ln} 8}} x \sqrt{1 + e^{x^2}} dx = \int_2^3 \sqrt{\text{Ln}(u^2 - 1)} u \frac{2u du}{2\sqrt{\text{Ln}(u^2 - 1)}} = \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \left[1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right] du$$

$$= \int_2^3 \left[1 + \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1} \right] du = \left[u + \frac{1}{2} \text{Ln}(u-1) - \frac{1}{2} \text{Ln}(u+1) \right] \Big|_2^3 = u + \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{2}{3}$$

$$\text{حجم} = 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{2}{3} \right)$$

بنابراین داریم:

۲۴- گزینه «۴» مساحت رویه‌ی مورد نظر برابر است با $S = 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ از معادلات پارامتری داده شده داریم:

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + (a \sin t)^2 = a^2[\sin^2 t + \cos^2 t + 1 - 2\cos t] = a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t)$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a^2 (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \quad \text{پس } S = 2\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt$$

برای حل این انتگرال از فرمول مثلثاتی $1 - \cos t = 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)$ استفاده می کنیم. از آن جا که $0 \leq t \leq 2\pi$ در نتیجه $0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$ ، پس $\sin \left(\frac{t}{2} \right) \geq 0$ است.

$$S = 2\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^{\frac{3}{2}} dt = 2\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^3 \left(\frac{t}{2} \right) dt$$

پس داریم:

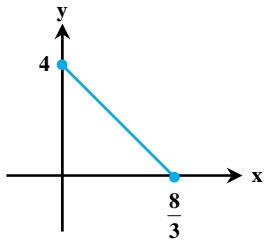
$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)) \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt = 4\pi a^2 (-2) \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)) \left(-\frac{1}{2} \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) dt = 4\pi a^2 \left[-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi a^2 \left[2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{64}{3} \pi a^2$$

۲۵- گزینه «۱»

روش اول: از معادلات پارامتری داریم $x = t^2$ و $y = 8 - t^2$ پس $3x + 2y = 8$ ، به عبارتی معادلات پارامتری داده شده مربوط به خط $3x + 2y = 8$ هستند و چون $x = t^2 \geq 0$ پس $x \geq 0$. محل های برخورد این خط با محورهای مختصات را تعیین می کنیم. اکنون از دوران این ناحیه حول محور x ها یک مخروط به دست

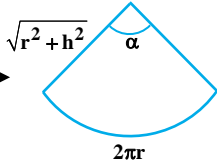
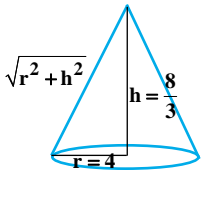
خواهد آمد. $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ پس $0 \leq t \leq \sqrt{8}$ مساحت این مخروط برابر است با:



$$S = \int_0^{\sqrt{\lambda}} 2\pi y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{\sqrt{\lambda}} 2\pi \frac{\lambda - t^2}{2} \sqrt{\frac{4t^2}{9} + 1} dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{\lambda}} \pi(\lambda - t^2) \sqrt{\frac{13}{9}} t dt = \frac{\pi\sqrt{13}}{3} \int_0^{\sqrt{\lambda}} (\lambda t - t^3) dt = \frac{\pi\sqrt{13}}{3} \left(\frac{\lambda}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi\sqrt{13}}{3} (32 - 16) = \frac{16\sqrt{13}}{3} \pi$$

روش دوم: مساحت حاصل از دوران این خط برابر با مساحت جانبی یک مخروط است. مساحت جانبی مخروطی به ارتفاع h و شعاع r از



رابطه‌ی $S = \frac{\alpha}{\gamma} (r^2 + h^2)$ به دست می‌آید که زاویه‌ی رأس مخروط است. در مخروط مورد نظر داریم:

$$S = \frac{\alpha}{\gamma} \pi (r^2 + h^2) = \frac{2\pi r}{2\pi \sqrt{r^2 + h^2}} \pi (r^2 + h^2) = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \times 4 \times \sqrt{16 + \frac{64}{9}} = 16\pi \frac{\sqrt{13}}{3}$$

۲۶- گزینه «۲» اگر فرض کنیم $1 - x = t$ ، بنابراین $-dx = dt$ ، اگر $x = -1$ ، آن‌گاه $t = 2$ و اگر $x = 2$ ، آن‌گاه $t = -1$ و بنابراین داریم:

$$S_1 = \int_{-1}^2 x f(x) dx = -\int_2^{-1} (1-t) f(1-t) dt = -\int_2^{-1} f(1-t) dt + \int_2^{-1} t f(1-t) dt \xrightarrow{f(1-t)=f(t)} \int_{-1}^2 x f(x) dx = -\int_2^{-1} f(t) dt + \int_2^{-1} t f(t) dt$$

$$\xrightarrow{-\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx} \int_{-1}^2 x f(x) dx = \int_{-1}^2 f(t) dt - \int_{-1}^2 t f(t) dt \xrightarrow{t \rightarrow x} 2 \int_{-1}^2 x f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx$$

می‌دانیم سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x)$ و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ و محور x ها برابر با $S_2 = \int_{-1}^2 f(x) dx$ است پس تساوی $2S_1 = S_2$ را داریم.

۲۷- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که حد داده شده را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times 0)^2}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times 1)^2}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times 2)^2}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4(n-1))^2}} \right]$$

پشت کروهه باید $\frac{1}{n}$ داشته باشیم

$$\xrightarrow{\text{پشت کروهه باید } \frac{1}{n} \text{ داشته باشیم}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times 0)^2}} + \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times 1)^2}} + \dots + \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4 \times (n-1))^2}} \right]$$

در داخل کروهه صورت و مخرج را بر $n\sqrt{n}$ و یا به عبارت دیگر بر $\sqrt{n^3}$ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{(1+4 \times 0/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1+4 \times 1/n)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(1+4 \times (n-1)/n)^2}} \right]$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

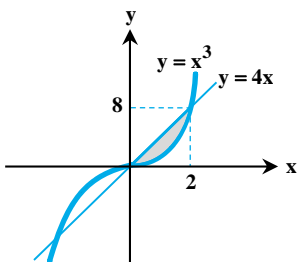
حالا به راحتی می‌توان $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1+4\left(\frac{i}{n}\right))^2}}$ را نوشت و داریم:

که $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+4x)^2}}$ می‌باشد و لذا داریم:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+4x)^2}} = \int_0^1 (1+4x)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1+4}} - \frac{1}{\sqrt{1+0}} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right] = -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{5} + 5}{10} = \frac{1}{10} [5 - \sqrt{5}]$$

۲۸- گزینه «۴»



$$\begin{cases} y = 4x \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3 = 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

پس برای ناحیه‌ی واقع در ربع اول داریم $0 \leq x \leq 2$

$$M = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8 - 4 = 4$$

چون فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور y را خواسته فقط \bar{x} را حساب می‌کنیم:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) dx = \int_a^b (fx - x^r)(fx + x^r) dx = \int_a^b (16x^2 - x^6) dx = \frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \Big|_0^2 = \frac{512}{21}$$

$$M = k \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = 4k$$

بنابراین داریم:

$$M_x = \frac{1}{\gamma} k \int_a^b (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) dx = \frac{1}{\gamma} \int_a^b (f^{\gamma}(x) - g^{\gamma}(x)) dx = \frac{256}{21} k$$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{21} k}{4k} = \frac{64}{21}$$

در نتیجه داریم:

۲۹- گزینه «۲» با توجه به این که $1 \leq i \leq n$ ، بنابراین $\frac{1}{n^2} \leq \frac{i}{n^2} \leq \frac{n}{n^2}$ و وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{n^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n^2} = 0$ حالا که $\frac{i}{n^2} \rightarrow 0$ ، بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی $\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{u}{n}$ (برای $u \rightarrow 0$) استفاده کنیم و لذا داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{2n^2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{i}{n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

۳۰- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که داریم: $\text{Lnn} - \text{Lnk} = \text{Ln}\left(\frac{n}{k}\right)$ ، از طرفی $\frac{1}{\sqrt{nk}} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}$ و لذا حد به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\text{Lnn} - \text{Lnk}}{\sqrt{nk}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{Ln}\left(\frac{n}{k}\right) \sqrt{\frac{n}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^n \text{Ln}\left(\frac{1}{k}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

حالا که به فرم $f\left(\frac{k}{n}\right)$ رسیده‌ایم، می‌توانیم حد فوق را طبق مجموع ریمان حساب کنیم:

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du, \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0, \quad x=1 \Rightarrow u=1$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u = \sqrt{x}$ استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^1 -\text{Lnu}^2(2du) = -4 \int_0^1 \text{Lnu} du = -4 \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \text{Lnu} du = -4 \lim_{a \rightarrow 0^+} [u \text{Lnu} - u]_a^1 = -4 \lim_{a \rightarrow 0^+} [1 \times \text{Ln}1 - 1 - a \text{Lna} + a]$$

از فصل حد و پیوستگی می‌دانیم $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \text{Lna} = 0$ و لذا $I = -4[-1] = 4$

بخش پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۲» قابل قبول $n = 3k; \Rightarrow \frac{2n-3}{3} = 3 \Rightarrow 2n-3=9 \Rightarrow 2n=12 \Rightarrow n=6 \Rightarrow k=2$

غیر قابل قبول $n = 3k+1; \Rightarrow n^2+n+1=3 \Rightarrow n^2+n-2=0 \Rightarrow n=1, n=-2 \Rightarrow k=0, -1$

$n = 3k+2; \Rightarrow \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{n+2}{3} < 4 \Rightarrow 7 \leq n < 10 \Rightarrow n=7, 8, 9$

در حالت سوم، از سه مقدار به دست آمده فقط $n = 8$ قابل قبول است، چون در این حالت، n ها به صورت $n = 3k+2$ تعریف شده اند و فقط $n = 8$ را می توان به صورت $3k+2$ نوشت که در آن $k = 2$ است. در نهایت دیدیم که فقط $n = 6$ و $n = 8$ قابل قبول هستند.

۲- گزینه «۲» ابتدا مخرج کسر جمله عمومی سری را تجزیه می کنیم:

$$n^f + 2n^f + 9 = (n^f + 3)^f - 4n^f = (n^f + 2n^f + 3)(n^f - 2n^f + 3) = ((n+1)^f + 2)((n-1)^f + 2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{fn}{n^f + 2n^f + 9} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\underbrace{(n-1)^f + 2}_{f_n}} - \frac{1}{\underbrace{(n+1)^f + 2}_{f_{n+2}}} \right)$$

لذا حاصل سری به صورت روبرو خواهد بود:

$$S = \frac{1}{(1-1)^f + 2} + \frac{1}{(2-1)^f + 2} - 2 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^f + 2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}$$

ملاحظه می گردد یک سری تلسکوپی که اختلاف جملات ۲ است و داریم:

۳- گزینه «۲» با توجه به این که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ، در این رابطه به جای x ها x^2 قرار می دهیم و به رابطه $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$ می رسیم. طرفین این رابطه را در x

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = xe^{x^2} \xrightarrow{\text{مشق}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$$

ضرب می کنیم تا در توان x عبارت $(2n+1)$ ظاهر شود.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2} \right)^n \Rightarrow S = 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 0 + \dots \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

۴- گزینه «۲»

ملاحظه می کنید با به دست آوردن جملات سری، مجموع سری به صورت مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{4}$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{4}$ است که

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

مجموع این جملات از رابطه $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ به دست می آید.

۵- گزینه «۲» ابتدا حد جمله عمومی را به دست می آوریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

حد جمله عمومی صفر است، اما این سری یک سری تلسکوپی است و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = (\sqrt{1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1}) = -1 + \infty = +\infty = +\infty$$

پس سری واگراست.

بررسی گزینه (۱): می دانیم رشد n در بی نهایت از $\log n$ بیشتر است یعنی $\frac{\log n}{2n^3-1} < \frac{n}{2n^3-1}$ از طرفی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$ که تقریباً معادل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ می باشد، همواره همگراست لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3-1}$ نیز همگراست.

بررسی گزینه (۳): جمله قویتر در صورت کسر n می باشد و لذا می توان از \sqrt{n} در مقابل n صرف نظر کرد و سری را معادل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3}$ در نظر گرفت و یا به عبارت

$$\text{ساده تر معادل } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \text{ در نظر گرفت و طبق مطالب } p \text{ سری این سری همواره همگراست.}$$

بررسی گزینه (۴): دقت شود همواره $\log n < n$ است و اگر حتی $\log n = n$ هم بود آنگاه سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$ و یا به عبارت دیگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ می شد که می دانیم یک سری واگراست چون توان n برابر یک است اما چون $\log n < n$ لذا تفاضل توان n مخرج از صورت کمی از عدد یک بزرگتر می شود، پس این سری همگراست. بطور کلی سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$ با شرط $p > 1$ همواره همگرا هستند.

۶- گزینه «۲» سری داده شده همان سری $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n!}$ می‌باشد. می‌دانیم $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ ، بنابراین سری را می‌توان به صورت

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

نوشت پس داریم:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n-2)!(n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

قاعده‌ی لغزاندن حدود $\rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$

۷- گزینه «۳»

بررسی گزینه «۱» بنابر آزمون ریشه (کوشی) داریم: $\sqrt[n]{\frac{\sinh n}{e^{2n}}} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{e^{2n}}} \Rightarrow \frac{1}{e} = L < 1 \Rightarrow$ سری همگراست

بررسی گزینه «۲» چون تابع تحت انتگرال مثبت، پیوسته و نزولی است، بنابراین می‌توانیم برای بررسی وضعیت همگرایی یا واگرایی آن از آزمون انتگرال استفاده

کنیم. تابع موردنظر برای انتگرال $\frac{1}{x(\ln x)^3}$ است با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ ، داریم $du = \frac{dx}{x}$ و انتگرال موردنظر به $\int \frac{du}{u^3}$ تبدیل می‌شود. از آنجایی که

این انتگرال همگراست، پس سری مذکور نیز همگرا می‌شود. البته با استفاده از نکته‌ی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ می‌توانیم سریع این گزینه را بررسی کنیم.

بررسی گزینه «۴» بنابر آزمون ریشه داریم: $\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} \sim \frac{1}{e} = L < 1 \Rightarrow$ سری همگراست

۸- گزینه «۳»

روش اول: نخست توجه کنید که به ازای هر $1 \leq k \leq n$ داریم:

$$\frac{2n}{n^2+n} \leq \frac{2n}{n^2+k} < \frac{2n}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+k} < \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

از طرفی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \text{ بنابرین طبق قضیه ساندویچ}$$

روش دوم: وقتی $n \rightarrow \infty$ میل کند عبارت مقابل سیگما هم‌ارز $\frac{2n}{n^2}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$

۹- گزینه «۲» برای رسیدن به مشتق مرتبه هشتم در این سؤال، فرمول مشخصی نداریم و از طرفی ۸ بار مشتق گرفتن هم کار عاقلانه‌ای نیست. برای همین از

بسط مک‌لورن $\sin x$ در ابتدا استفاده می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً گفتیم هرگاه مشتق مراتب بالا را در $x=0$ خواسته باشند، می‌توانید بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ را

نوشته و ضریب x^n را در آن بسط مشخص کنید. اگر بسط مک‌لورن $f(x)$ به صورت $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$f^{(n)}(0) = n! \times a_n$$

از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که مسأله مربوط به مشتق مراتب بالا در نقطه‌ی $x=0$ باشد و ما هم بسط مک‌لورن تابع داده شده را بدانیم.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \dots$$

$$x^8 \text{ ضریب} = a_8 = \frac{1}{9!} \Rightarrow f^{(8)}(0) = 8! \times \frac{1}{9!} = \frac{1}{9}$$

۱۰- گزینه «۳» ابتدا مشتق اول را حساب می‌کنیم: $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \ln 1 - \ln(\cos x) = -\ln(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg } x$

حالا دو راه پیش‌رو داریم؛ یا این‌که پنج بار از تابع مشتق بگیریم و به مشتق ششم برسیم یا این‌که از بسط مک‌لورن $\text{tg } x$ استفاده کنیم؛ راه دوم ساده‌تر است:

$$f'(x) = \text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots ; \quad f(x) = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{2}{15} \left(\frac{x^6}{6}\right) + \dots$$

$$x^6 \text{ ضریب} \times 6! = \frac{2}{15 \times 6} \times 6! = \frac{2 \times 5!}{15} = \frac{2 \times 4! \times 5}{3 \times 5} = \frac{2 \times 4!}{3} = 16$$

پس مشتق ششم در $x=0$ برابر است با:

۱۱- گزینه «۳» با جایگزینی $x - \frac{\pi}{6}$ به جای x در بسط $\cos x$ ، خواهیم داشت:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^6}{6!} + \dots$$

با ضرب کردن طرفین رابطه فوق در $x - \frac{\pi}{6}$ به دست می‌آید:

$$\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^7}{6!} + \dots$$

پس:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

۱۲- گزینه «۲» بسط مک‌لورن e^x به صورت مقابل است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

بنابراین بسط $\text{tg}^{-1}(e^x - 1)$ به صورت مقابل است:

$$\text{tg}^{-1}(e^x - 1) = \text{tg}^{-1}\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)^3 + \dots$$

فقط در جمله اول بسط فوق x^2 وجود دارد و ضریب آن برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۳- گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 1$$

در قسمت نهایی از رابطه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$ استفاده کردیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Ln}(n!)}{\text{Ln}(n^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Ln}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\text{Ln}(n^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Lnn} - \text{Lne}}{\text{Lnn}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Lnn}}{\text{Lnn}} = 1$$

۱۴- گزینه «۲» با توجه به وجود توان و عبارت رادیکالی از آزمون ریشه کمک می‌گیریم، $a_n = \frac{\sqrt{n+\delta}}{n}$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{n+\delta}}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \sqrt[n]{n+\delta}\right)$$

می‌دانیم حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+\delta} = 1$ است، لذا داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{سری همگراست}$$

۱۵- گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی $\cos(u)$ وقتی $u \rightarrow 0$ عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\cos(x) \cos(2x) \dots \cos(nx) \approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{n^2 x^2}{2}\right)$$

حاصل ضرب این عوامل یک چند جمله‌ای شامل عباراتی با درجه زوج است. برای محاسبه حد کفایت دو جمله اول این حاصل ضرب به دست آیند؛ زیرا مخرج کسر

داده شده از درجه ۲ است و در نتیجه برای هر $n > 2$ داریم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^2} = 0$. محاسبه دو جمله اول حاصل ضرب نیز کار ساده‌ای است:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{n^2 x^2}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2}\right) x^2 + \dots$$

اکنون محاسبه حد به سادگی صورت می‌گیرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) \dots \cos(nx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2}\right) x^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

حل کوتاه‌تر: می‌توانیم مسأله را به ازای مقادیر کوچک n مثلاً $n = 2$ حل کنیم. و در گزینه‌ها هم $n = 2$ را در نظر بگیریم. دقت کنید که انتخاب $n = 1$ عاقلانه نیست زیرا به ازای $n = 1$ برخی از گزینه‌ها با هم برابر می‌شوند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{2^2 x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right) x^2 - x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right) x^2}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 k^2 = \frac{1}{2} (1 + 4) = \frac{5}{2}$$

که برابر است با گزینه (۲).

۱۶- گزینه «۴» طبق آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n| \left| \frac{\gamma^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right|^k |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^k \left(\frac{n}{e}\right)^{2k}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2k}} |x| = \frac{|x|}{\gamma^k} < 1 \Rightarrow |x| < \gamma^k$$

پس شعاع همگرایی برابر γ^k است.

۱۷- گزینه «۴»

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تبدیل } n+1 \text{ به } n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n + 2a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}{\frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}\right)} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{8}$$

۱۸- گزینه «۱» با نوشتن جملات سری و قرار دادن $x = 1$ ، متوجه می‌شویم حالت $\frac{0}{0}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^{1392} x^k - 1392}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 + x^2 + \dots + x^{1392} - 1392}{x-1} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots + 1392x^{1391}}{1} = 1 + 2 + 3 + \dots + 1392 = \frac{1392(1392+1)}{2} = \frac{1392 \cdot 1393}{2} = 1392A \Rightarrow A = \frac{1393}{2}$$

۱۹- گزینه «۳» در ابتدا باید بتوانیم کسر را تفکیک کنیم، کسر $\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ را می‌توان به شکل زیر تفکیک کرد:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}$$

حال باید ضرایب A و B و C را به دست آوریم. از اینجا به بعد را با دقت بخوانید! برای به دست آوردن ضریب A ، دو طرف معادله را در $(n+1)$ ضرب می‌کنیم و به جای n ، ۱- قرار می‌دهیم.

$$\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = A + \frac{B(n+1)}{n+2} + \frac{C(n+1)}{n+3} \xrightarrow{n=1} \frac{-1}{1 \times 2} = A + 0 + 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

به همین صورت برای به دست آوردن B ، طرفین ضربدر $n+2$ و به جای n ، ۲- جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + B + \frac{C(n+2)}{n+3} \xrightarrow{n=2} \frac{-2}{-1 \times 1} = B + 0 + 0 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A(n+3)}{n+2} + \frac{B(n+3)}{n+3} + C \xrightarrow{n=3} \frac{-3}{-2 \times -1} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

و همین‌طور برای C داریم:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} \right) + 2 \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{n+3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} + \frac{3}{2} \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right) \xrightarrow{\text{سری تلسکوپی}} S = a_1 - a_{\infty} = \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۲۰- گزینه «۲» چند جمله از سری را می‌نویسیم: $a_1 = 2$, $a_2 = \sqrt{4-a_1^2} = \sqrt{4-2^2} = 0$, $a_3 = \sqrt{4-a_2^2} = \sqrt{4-0} = 2$, $a_4 = \sqrt{4-a_3^2} = 0$, ...

$$S = \sum_{i=1}^{100} a_i = 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + \dots$$

a_{2n} ها برابر با صفر، و a_{2n+1} برابر با ۲ می‌باشد و چون تعداد جملات a_{2n+1} برابر با ۵۰ است، لذا حاصل سری برابر با $100 \times 2 = 200$ می‌شود.

۲۱- گزینه «۱» با کمی دقت می‌توان فهمید با تفاضل دو سری هندسی روبه‌رو هستیم، اگر عبارت را بر حسب توان‌های k بنویسیم به هدف می‌رسیم:

$$S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12 \times 2^k}{3^{k-2}} \left(\frac{2}{3} \right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{15 \times 3^k}{4^2} \right) \left(\frac{3}{4} \right)^k = 24 \times 9 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k - \frac{45}{16} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k$$

سری اول، یک سری هندسی با جمله اول $a_1 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$ و قدر نسبت $q = \frac{2}{3}$ و سری دوم یک سری هندسی با جمله اول $a_1 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$ و قدر نسبت

$$S = 24 \times 9 \left(\frac{9}{1-2/3} \right) - \frac{45}{16} \left(\frac{9}{1-3/4} \right) = 24 \times 9 \left(\frac{9}{1/3} \right) - \frac{45}{16} \left(\frac{9}{1/4} \right) = 24 \times 12 - \frac{45 \times 9}{64} = 288 - \frac{405}{64}$$

$q = \frac{3}{4}$ است، لذا داریم:

۲۲- گزینه «۱» واضح است حد جمله‌ی عمومی صفر است (چون رشد n از $\ln(1+n^2)$ بیشتر است) بنابراین باید وضعیت همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1+\ln(1+n^2)]}{n^2}$ را بررسی کنیم، واضح است صورت کسر هم‌ارز $2\ln(1+n^2)$ و به عبارت دیگر هم‌ارز $2\ln n^2$ است، بنابراین سری هم‌ارز با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n^2}{n^2}$ و یا به عبارت دیگر با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\ln n}{n^2}$ هم‌ارز است و لذا طبق نکته سری همگراست.

۲۳- گزینه «۲» شعاع همگرایی را از رابطه $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ به دست می‌آوریم:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\cosh 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{e^{2n} + e^{-2n}}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{e^{2n} + e^{-2n}}} \xrightarrow{\text{قانون رشد}} R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt[n]{e^{2n}}} = \frac{1}{e^2}$$

بنابراین سری در فاصله $\frac{1}{e^2} < |x| < \frac{+1}{e^2}$ یا $-\frac{1}{e^2} < x < \frac{+1}{e^2}$ همگرا است. (دقت کنید در نقاط $x = \pm \frac{1}{e^2}$ به راحتی مشخص می‌شود، سری واگراست).

۲۴- گزینه «۳» با توجه به فرم سری‌ها، از آزمون ریشه کمک می‌گیریم:

$$a_n = \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{3^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

چون حد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ کوچکتر از ۱ است، پس سری همگرا است. اما برای سری S_p ، جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{n^2 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_1 \times \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2} + (-1)^n}{3^n}\right)}_0 = 0$$

بنابراین سری همگرا است.

۲۵- گزینه «۴» در گزینه (۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ را مثال می‌زنیم که یک سری همگراست آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ نیز به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-1)^n}$ می‌باشد که این سری نیز طبق توضیحات یک سری واگرای نامشخص می‌باشد و واگرا به بی‌نهایت نیست.

برای گزینه‌ی (۲) نیز سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را مثال می‌زنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ در آن به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ در می‌آید که این سری یک سری واگراست.

در مورد گزینه (۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را مثال می‌زنیم، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + \sqrt{na_n}}$ در این سری به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} \rightarrow$$

که این سری با توجه به تعریف P سری یک سری واگراست.

برای گزینه (۱) نیز می‌توانیم این طور استدلال کنیم که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، حد a_n صفر است، پس $0 < a_n < 1$ می‌باشد و داریم:

$$0 < a_n < 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 0 < a_n^2 < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

۲۶- گزینه «۴» وقتی $n \rightarrow \infty$ میل می‌کند برای عدد n دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱- n زوج باشد ($n-1$ فرد است): جمع هر دو جمله متوالی $-\frac{1}{n}$ است، تعداد $-\frac{1}{n}$ ها $\frac{n}{2}$ می‌شود پس حاصل حد:

$$\left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۲- فرد باشد ($n-1$ زوج است): جمع هر دو جمله متوالی $-\frac{1}{n}$ است و تعداد $-\frac{1}{n}$ ها $\frac{n-1}{2}$ می‌باشد و داریم:

$$\left(-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{n}{n} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

پس حد وجود ندارد.



۲۷- گزینه «۲» می‌دانیم $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ، بنابراین با مشتق گرفتن از طرفین داریم $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ ، حالا اگر طرفین این تساوی را در x ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{بضرب طرفین در } x} \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \quad \text{بمشتق‌گیری از طرفین} \quad \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\ \Rightarrow \frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \Rightarrow \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\ \xrightarrow{\text{بضرب طرفین در } x} \frac{x+x^2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n \end{aligned}$$

۲۸- گزینه «۴» از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{Lnn}} - |x|^n < 1$$

در صورتی که طبق قاعده‌ی سرعت رشد داریم $a^n + b^n \approx a^n$. بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$. در مخرج کسر می‌دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Lnn} = 1$

(برای چند جمله‌ای‌ها و توابع لگاریتمی مانند Lnn داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{Lnn} = 1$) در نتیجه خواهیم داشت: $ax^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{a} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{a}}$

پس شعاع همگرایی $R = \frac{1}{\sqrt{a}}$ و بازه‌ی همگرایی $(-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}})$ است.

۲۹- گزینه «۳» در واقع سری مورد نظر به صورت $\sum_{i=0}^n (\sum_{j=0}^i \frac{1}{2^j}) - 1$ است (از مجموع ۱ واحد کم کرده‌ایم، چون وقتی i و j هر دو صفر باشند، جمله ۱ به دست می‌آید که جز مجموع مورد نظر نیست).

$$\text{سری} = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=0}^i \frac{1}{2^j}) - 1 = \sum_{i=1}^n (\frac{2^{i+1}-1}{2^i}) - 1 = (\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}) - 1 = \frac{2}{2-1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

۳۰- گزینه «۳» در مورد S_1 از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه اگر (a_n) همگرا به L باشد میانگین حسابی و هندسی آن هم به L همگراست. بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 \times 4 \times \cdots \times (3n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$$

برای دنباله‌ی $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$ خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

چون توان x برابر با ۲ است، پس شعاع همگرایی S_1 برابر است با:

همچنین با استفاده از مقایسه‌ی حدی می‌توانیم به جای S_1 سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^n x^{2n}$ را بررسی کنیم. این سری در ناحیه‌ی $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ همگراست ولی در هر دو

نقطه‌ی $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ سری واگرا می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4})^n (\pm \frac{2}{\sqrt{3}})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}} = 3$$

پس در لبه‌های این ناحیه، سری واگراست. در مورد S_2 با استفاده از قانون سرعت رشد داریم:

پس شعاع همگرایی S_2 ، $R = \frac{1}{3}$ است و بر بازه‌ی $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ همگراست. به ازای $x = \frac{1}{3}$ سری واگرا بدست می‌آید زیرا: $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n})(\frac{1}{3})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + (\frac{2}{3})^n \frac{1}{n}$

اما به ازای $x = -\frac{1}{3}$ سری همگرا بدست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n})(\frac{1}{3})^n (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} (\frac{2}{3})^n$$

پس بازه‌ی همگرایی بازه‌ی $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ است. البته برای بدست آوردن شعاع همگرایی سری S_1 می‌توانستیم از آزمون نسبت هم کمک بگیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n+1)}{1 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+5}{3n+4} \right| = \frac{3}{3}$$

و ادامه حل همان‌طور که در روش اول گفته شد.

بخش پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۴» لازم نیست حد جمله عمومی را حساب کنیم، چون با توجه به گزینه‌ها، حتماً سری همگراست یعنی حد جمله عمومی برابر صفر است، با این حال حد را حساب می‌کنیم:
در هر دو حالت حد جمله عمومی برابر صفر است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{-n} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{زوج } n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^n} \left[\frac{1}{n} \right] = \frac{1}{+\infty} \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0 \times \left[0^+ \right] = 0 \times 0 = 0 \\ \xrightarrow{\text{فرد } n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^n} \left[-\frac{1}{n} \right] = \frac{1}{+\infty} \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = 0 \times \left[0^- \right] = 0 \times (-1) = 0 \end{array}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \right] + \frac{1}{8} \left[\frac{-1}{3} \right] + \frac{1}{16} \left[\frac{1}{4} \right] + \frac{1}{32} \left[\frac{-1}{5} \right] + \dots$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{32} + \dots = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \dots$$

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3}$$

ملاحظه می‌شود یک سری هندسی با جمله اول $a_1 = -\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{4}$ می‌باشد، لذا داریم:

۲- گزینه «۱» در واقع حد فوق را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (rk-1)^r}{n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n (\lambda k^r - 12k^r + 6k - 1)}{n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \sum_{k=1}^n k^r - 12 \sum_{k=1}^n k^r + 6 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1}{n^r}$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \left(\frac{n^r}{r} \right) - 12 \left(\frac{n^r}{r} \right) + 6 \left(\frac{n^r}{2} \right) - n}{n^r} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^r}{n^r} = r$$

۳- گزینه «۲» با توجه به فرمول $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ و تساوی $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ داریم:

$$\sin \frac{1}{n(n+1)} = \sin \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n+1} \cos \frac{1}{n}$$

پس سری داده شده را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n+1} \cos \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\text{tg} \frac{1}{n}}_{f_n} - \underbrace{\text{tg} \frac{1}{n+1}}_{f_{n+1}} \right) = \text{tg} \frac{1}{1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tg} \frac{1}{n+1} = \text{tg} 1 - \text{tg} 0 = \text{tg} 1 - 0 = \text{tg} 1$$

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - n}} - \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - n}} \right) \xrightarrow{n = \sqrt{n^2}}$$

۴- گزینه «۳»

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{n^2}{n^2 - n}}}_{f_n} - \underbrace{\sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 - n}}}_{f_{n+1}} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) = \sqrt{\frac{2}{2-1}} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{2} - 1$$

۵- گزینه «۳» بهتر است از طرفین \ln بگیریم:

$$\ln a_n = \ln e^{-nk} \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{n^r} \xrightarrow{\ln AB = \ln A + \ln B} \ln a_n = \ln e^{-nk} + \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{n^r} \Rightarrow \ln a_n = -nk + n^r \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-nk) + \lim_{n \rightarrow +\infty} n^r \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-nk) + \lim_{n \rightarrow +\infty} n^r \left[\frac{k}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{n} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-nk) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (nk) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} k^r + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{3} \left(\frac{k}{n} \right)^3 + \dots$$

دو حد اول با هم حذف می‌شوند و در سمت راست فقط $-\frac{k^r}{2}$ باقی می‌ماند، (چون حدود بعد از آن صفر می‌شوند) پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln a_n = -\frac{k^r}{2} \Rightarrow a_n = e^{-\frac{k^r}{2}}$$

ع- گزینه «۱» ابتدا صورت کسر را به صورت جمع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲n منهای دو برابر جمع اعداد زوج می نویسیم.

$$a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{4n^2-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+2+3+\dots+2n) - 2(2+4+6+\dots+2n)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{4n^2-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n(2n+1) - 2[n(n+1)]}{2(n+2n)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n^2+2n - (2n^2+2n)}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2+2n-4n^2-4n}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{3} = -\frac{1}{3}$$

توجه داشته باشید که $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ می باشد که فقط به جای n باید 2n را قرار دهیم و همچنین جمع اعداد زوج برابر است با $n(n+1)$.

۷- گزینه «۱» ابتدا تابع f را به صورت زیر می نویسیم.

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1 \Rightarrow f'''(x) = \frac{3!}{(x+1)^4} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3!}{2^4} \Rightarrow \text{ضریب} = \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{1}{2^4}$$

۸- گزینه «۱» به ازای $x=1$ ، سری S_1 به صورت $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ در می آید که همگراست زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ همچنین سری S_1 به ازای $x = \frac{-1}{3}$ به صورت $\sum \frac{1}{2n-1}$ در می آید که واگراست ($\sum \frac{1}{2n-1} \sim \sum \frac{1}{2n}$ و سری $\sum \frac{1}{2n}$ واگراست).
سری S_2 به ازای $x = \frac{-1}{2}$ به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ در می آید که همگراست، زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، بنابراین طبق آزمون لایب نیتز سری همگراست.
یادآوری: سری $\sum \frac{1}{n}$ ، سری همساز است که واگراست.

۹- گزینه «۳» با توجه به بسط مکلاورن $\sin x$ داریم:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = \ln\left[1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)\right]$$

همان طور که می دانیم بسط مکلاورن $\ln(1+u)$ به صورت مقابل است:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$$

در این سؤال $u = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$ ، بنابراین داریم:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \sim \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)^2}{2} + \dots$$

همان طور که مشخص است ضریب x^4 برابر با مقدار زیر است:

$$x^4 \text{ ضریب} = \frac{1}{5!} - \frac{\left(-\frac{1}{3!}\right)^2}{2} = \frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \times (3!)^2}$$

۱۰- گزینه «۳» عبارت صورت کسر یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ و جمله اول $a_1 = 1$ و همچنین عبارت مخرج کسر یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ و جمله اول $a_1 = 1$ می باشد و لذا با توجه به فرمول مجموع جملات تصاعد هندسی با جملات نامتناهی یعنی $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ داریم:

۱۱- گزینه «۳»

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!} + \frac{2^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

چون $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ پس $e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ از طرفی $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ پس $xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ پس $2e^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$ بنابراین $2e^2 = e^2 + 2e^2 = 3e^2$.

۱۲- گزینه «۲» اگر $x=1$ باشد، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ همگراست. اگر $x=-1$ باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ به صورت:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right)$$



که مجموع دو سری هندسی همگرا با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تبدیل شده و همگرا است. از طرفی طبق آزمون نسبت داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)^2}}{x^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{x^{n^2}} \right|$ اگر $|x| < 1$ باشد، حاصل حد فوق صفر بوده و سری همگراست و در غیر این صورت واگراست.

۱۳- گزینه «۳» اولاً می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \cot g^{-1}(n^2 + n + 1) &= \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) \text{، از طرفی چون } \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)} \text{، با استفاده از فرمول زیر } \text{tg}^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \text{tg}^{-1}a - \text{tg}^{-1}b \text{ داریم:} \\ \sum_{n=1}^{1393} \cot g^{-1}(n^2 + n + 1) &= \sum_{n=1}^{1393} \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \sum_{n=1}^{1393} \text{tg}^{-1}\left(\frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{1393} [\text{tg}^{-1}(n+1) - \text{tg}^{-1}n] = (-1) \sum_{n=1}^{1393} \frac{\text{tg}^{-1}n - \text{tg}^{-1}(n+1)}{f(n)} \\ &= (-1)[\text{tg}^{-1}(1) - \text{tg}^{-1}(1394)] = \text{tg}^{-1}(1394) - \text{tg}^{-1}(1) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1394-1}{1+1394 \times 1}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1393}{1395}\right) \\ S &= \cot g\left[\sum_{n=1}^{1393} \cot g^{-1}(n^2 + n + 1)\right] = \cot g\left[\text{tg}^{-1}\left(\frac{1393}{1395}\right)\right] = \cot g\left[\cot g^{-1}\frac{1395}{1393}\right] = \frac{1395}{1393} \end{aligned}$$

۱۴- گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال، تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم برای n های بزرگ $1 < \text{Ln}(\text{Lnn})$ ، بنابراین $\frac{1}{n(\text{Lnn})} > \frac{1}{n\text{Lnn}}$ ، و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\text{Lnn}}$ واگراست، سری گزینه (۱)، نیز واگراست. هر چند پاسخ به تست در همین جا تمام است. اما برای تمرین حل را ادامه می‌دهیم.

بررسی گزینه (۲): در این گزینه با یک سری متناوب روبه‌رو هستیم که $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ که باید دو شرط لایب‌نیتز را برای آن کنترل کنیم:

(الف) باید $a_{n+1} < a_n$ ، یعنی a_n نزولی باشد، واضح است این دنباله نزولی است، پس اولین شرط برقرار است.

(ب) باید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ، که واضح است $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ پس شرط دوم هم برقرار است. بنابراین سری متناوب و همگراست.

بررسی گزینه (۳): واضح است سری داده شده، هم‌ارز سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ است و مطابق مطالب P -سری این سری همگراست.

بررسی گزینه (۴): سری داده شده برابر است با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ne}\sqrt{n}}$. می‌دانیم برای n های بزرگ، $e^{\sqrt{n}} > n$ است. بنابراین $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n}$ است، پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ne}\sqrt{n}} \text{ است و چون } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ طبق } P\text{-سری‌ها همگراست، این سری نیز همگراست.}$$

۱۵- گزینه «۴»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 4n + 4} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+1}{n+2} - \log \frac{n+3}{n+2} \right) = \log \frac{1+1}{1+2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{n+2}{n+3} = \log \frac{2}{3} - \log 1 = \log \frac{2}{3}$$

۱۶- گزینه «۱» ابتدا تابع را تجزیه کرده و مخرج باید مخالف صفر باشد.
 $\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{-1}{x+n} + \frac{1}{x+n-1}$
 $x+n \neq 0 \rightarrow x \neq -n \Rightarrow x \neq -1, -2, -3, \dots$
 $x+n-1 \neq 0 \rightarrow x \neq -n+1 \Rightarrow x \neq 0, -1, -2, -3$

۱۷- گزینه «۴» اگر u_1, u_2, u_3, \dots تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت d بدهند، همواره $u_{i+1} - u_i = d$ و لذا داریم:

$$\frac{1}{u_i u_{i+1}} = \frac{1}{d} \frac{(u_{i+1} - u_i)}{u_i u_{i+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{i+1}} \right) \Rightarrow S = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{i+1}} \right)$$

با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی حاصل سری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n-1+1}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{u_n - u_1}{u_1 u_n} \right) \xrightarrow{u_n - u_1 = d(n-1)} S = \frac{1}{d} \left(\frac{d(n-1)}{u_1 u_n} \right) = \frac{n-1}{u_1 u_n}$$

۱۸- گزینه «۲» به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد می‌کنیم، با توجه به هم‌ارزی زیر داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^P + 2^P + 3^P + \dots + n^P \sim \frac{n^{P+1}}{P+1}$$

$$1^P + 2^P + 3^P + \dots + (2n-1)^P + (2n)^P \sim \frac{(2n)^{P+1}}{P+1}$$

$$(1^P + 3^P + 5^P + \dots + (2n-1)^P) + (2^P + 4^P + \dots + (2n)^P) \sim \frac{2^{P+1} n^{P+1}}{P+1}$$

$$\Rightarrow (1^P + 3^P + \dots + (2n-1)^P) + 2^P (1^P + 2^P + \dots + n^P) \sim \frac{2^{P+1} n^{P+1}}{P+1}$$

$$1^P + 3^P + \dots + (2n-1)^P \sim \frac{2^{P+1} n^{P+1}}{P+1} - 2^P \frac{n^{P+1}}{P+1} = \frac{2^P n^{P+1}}{P+1} \Rightarrow \text{حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^P n^{P+1}}{(P+1)n^{P+1}} = \frac{2^P}{P+1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}} = 1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{6^2} - \frac{x^3}{6^3} + \frac{x^4}{6^4} - \dots$$

۱۹- گزینه «۴» ابتدا بسط مک‌لورن مخرج کسر را می‌نویسیم:

و اگر بسط مک‌لورن $\ln(1+x)$ را بنویسیم، صورت کسر به صورت زیر می‌شود:

$$(1 + \frac{x}{3})(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots) = [(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots) + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}(\frac{x^3}{2}) + \frac{2}{3}(\frac{x^4}{3}) - \frac{2}{3}(\frac{x^5}{4}) + \dots)]$$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}} (1 + \frac{x}{3}) \ln(1+x) = (1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{6^2} - \frac{x^3}{6^3} + \frac{x^4}{6^4} - \dots) [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}(\frac{x^3}{2}) + \frac{2}{3}(\frac{x^4}{3}) - \dots)]$$

لذا داریم:

$$[x + (-\frac{1}{2} + \frac{2}{3})x^2 + (\frac{1}{3} - \frac{2}{6})x^3 + (-\frac{1}{4} + \frac{2}{9})x^4 + \dots] = x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{-1}{36}x^4 + \dots$$

در این مرحله عبارت داخل کروشه دوم را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{6^2} - \frac{x^3}{6^3} + \frac{x^4}{6^4} - \dots)(x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{36}x^4 + \dots)$$

بنابراین داریم:

$$x \text{ ضرب} = -\frac{1}{36} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{6^3} = -\frac{1}{36}$$

فقط جملاتی که نشان داده شده‌اند، جمله‌ی شامل x^4 دارند، که ضرایب آنها به صورت مقابل است:

۲۰- گزینه «۲» باید از بسط $\frac{1}{1-x}$ مشتق بگیریم و بعد از آن به جای تمام x ها، عدد $\frac{2}{3}$ را قرار دهیم:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{در طرفین به جای } x \text{ها، } \frac{2}{3} \text{ قرار می‌دهیم}} \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{2}{3})^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{2}{3})^{n-1} = 9$$

۲۱- گزینه «۳» سؤال خیلی سخت نیست، اما کمی وحشت اولیه، طبیعی است! ابتدا توجه کنید؛ عبارت داده شده در توان a ، خودش سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ را نمایش

می‌دهد که می‌دانیم یک سری واگرا می‌باشد و دارای حد ∞ است. بنابراین برای همگرایی سری اصلی لازم است a عددی باشد که وقتی به توان بی‌نهایت می‌رسد، برابر با صفر شود. (چون همان‌طور که می‌دانیم شرط لازم برای همگرایی هر سری این است که حد جمله‌ی عمومی صفر شود)

با این توضیحات، واضح است a نمی‌تواند برابر با یک و یا بزرگتر از یک باشد، پس $0 < a < 1$ ، که البته در این حالت فقط شرط لازم برای همگرایی سری برقرار می‌شود. اما باید دید سری شرط کافی برای همگرایی را هم دارد؟ برای این منظور از آزمون رابه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n+1}}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - a^{\frac{1}{n+1}})$$

$$\text{همان‌طور که می‌بینید، با حالت ابهام «} \infty \times \infty \text{» روبرو هستیم، بنابراین داریم:}$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - a^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} a^{n+1} \text{Lna} + \frac{1}{n^2} a^{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{+\frac{1}{n^2} a^{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} \text{Lna} = -a^{+\infty} \text{Lna} = -a^{\circ} \text{Lna} = -\text{Lna}$$

بر طبق آزمون رابه، شرط همگرایی این است که $-\text{Lna} > 1$ باشد و برای این منظور باید $\text{Lna} < -1$ و لذا با شرط $a < e^{-1}$ سری همگراست.

۲۲- گزینه «۱» باید سعی کنیم، $f(x)$ را به شکل سری توانی بنویسیم. برای این منظور از بسط مک‌لورن $\text{Ln}(1+t)$ ، استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1} t^{(n-1)+1}}{n(n-1+1)} \right]_0^x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

حالا به راحتی می‌توان شعاع همگرایی $f(x)$ را حساب کرد:

۲۳- گزینه «۲» برای ساده‌تر حل شدن این سؤال، بهتر است کمی از اطلاعات مثلثاتی خود کمک بگیریم:

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} = \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$

حالا اگر بسط $\sin^{-1} x$ را بنویسیم، به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6} x^3 - \dots$$

۲۴- گزینه «۳» با یک سؤال نسبتاً سخت روبه‌رو هستیم! ابتدا مخرج کسر داده شده در سری را تجزیه کرده و بعد عبارت را به دو کسر تفکیک می‌کنیم:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)(n-1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n+2} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2$$

$$\text{Ln}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (1)^n}{n} \Rightarrow \text{Ln} 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

می‌دانیم $\text{Ln}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ ، که با قرار دادن $x=1$ در طرفین این تساوی داریم:

$$\text{Ln} 2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} = S_1$$

با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود در سری $\text{Ln} 2$ به شکل مقابل به سری S_1 می‌رسیم:

$$S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

و به همین ترتیب اگر در سری S_2 نیز از قاعده‌ی لغزاندن حدود استفاده کنیم، داریم:

اما اینجای کار کمی دقت می‌خواهد. واضح است؛ سری فوق را می‌توان معادل سری $\text{Ln} 2$ دانست که البته ۳ جمله‌ی اول آن وجود ندارد، پس داریم:

$$S_2 = \text{Ln} 2 - \left[\frac{(-1)^{1+1}}{1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2} + \frac{(-1)^{3+1}}{3} \right] = \text{Ln} 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \text{Ln} 2 - \frac{5}{6}$$

$$S = \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 = \frac{1}{3} [\text{Ln} 2 + \text{Ln} 2 - \frac{5}{6}] = \frac{1}{3} [2\text{Ln} 2 - \frac{5}{6}] = \frac{2}{3} \text{Ln} 2 - \frac{5}{18}$$

پس حاصل نهایی سری به صورت مقابل است:

۲۵- گزینه «۳» یک سؤال نسبتاً جالب! دقت کنید؛ صورت کسر را می‌توان به صورت سری $S = \sum_{k=1}^n k k!$ نوشت. این سری را می‌توان به شکل زیر به فرم «سری

$$S = \sum_{k=1}^n [(k+1) - 1] k! = \sum_{k=1}^n [k!(k+1) - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = -\sum_{k=1}^n \left[\frac{k!}{f_k} - \frac{(k+1)!}{f_{k+1}} \right] = -1 + (n+1)!$$

تلسکوپی» تبدیل کرد:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$$

پس حد خواسته شده به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

۲۶- گزینه «۲» اگر مقدار حد موجود باشد، (که طبق گزینه‌ها موجود است) به ازای $n = 3k$ یا $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$ باید به جواب‌های یکسانی برسیم. فرض می‌کنیم $n = 3k$ مضرب سه باشد. در صورت این کسر داریم:

$$\left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{3} \right) + \left(\frac{4}{3} \right) + \left(\frac{5}{3} \right) + \left(\frac{6}{3} \right) + \left(\frac{7}{3} \right) + \left(\frac{8}{3} \right) + \dots + \left(\frac{n-3}{3} \right) + \left(\frac{n-2}{3} \right) + \left(\frac{n-1}{3} \right) + \left(\frac{n}{3} \right)$$

$$= 0 + (1+1+1) + (2+2+2) + \dots + (k-1+k-1+k-1) + k = 0 + 3(1) + 3(2) + \dots + 3(k-1) + k = 3(1+2+\dots+(k-1)) + k$$

$$= 3 \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{3}{2} k^2 - \frac{1}{2} k$$

البته $k = \frac{n}{3}$ است، بنابراین صورت کسر برابر با $\frac{3}{2} \left(\frac{n}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{3} \right)$ است.

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \left(\frac{n}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{3}\right)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} n^2 - \frac{1}{6} n}{n^2} = \frac{1}{6}$$

۲۷- گزینه «۳»

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \left[\text{tg} \frac{3\pi}{4} \right]^{\frac{\pi^+}{2}} \xrightarrow{\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tg} \frac{3\pi}{4} > 1} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} (1)^{-\infty} = 0$$

برای محاسبه B، بجای n به ترتیب عدد می‌گذاریم و متوجه می‌شویم که کمان‌ها همگی در ربع دوم قرار دارند پس حاصل sin آنها مثبت است:

$$\left. \begin{aligned} n=1 &\rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ n=2 &\rightarrow \sin \frac{4\pi}{3} < 1 \\ &\vdots \\ n=\infty &\rightarrow \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$0 \leq \left(\sin \frac{2\pi n}{3n+1}\right)^n \leq \left(\sin \frac{4\pi}{3}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{4\pi}{3}\right)^n} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2\pi n}{3n+1}\right)^n = 0$$

برای $n \geq 2$ از قضیه فشردگی استفاده می‌شود:

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+y}}$$

۲۸- گزینه «۴» از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم، یعنی رابطه داده شده را به صورت تعریف مشتق در می‌آوریم:

با حدگیری از طرفین تساوی، وقتی $y \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{y}{\sqrt{x} + \sqrt{x+y}} + f(x) - f(x) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

در نتیجه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، و با انتگرال‌گیری از آن داریم $f(x) = \sqrt{x} + c$ ، با توجه به اینکه $f(0) = 0$ ، پس $f(x) = \sqrt{x}$ و لذا $f(k) = \sqrt{k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=9}^{53} (\sqrt{k})^2 = \sum_{k=9}^{53} k = \frac{53 \times 54}{2} - \frac{8 \times 9}{2} = 1431 - 36 = 1395$$

۲۹- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1$$

$$\frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}$$

و لذا داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!} \right)$$

همان‌طور که می‌بینید؛ یک سری با فرم سری تلسکوپی داریم که اختلاف اندیس‌ها بیشتر از یک واحد، یعنی ۳ واحد است. پس باید سه جمله اول سری را

برای $\frac{1}{k!}$ بنویسیم و سپس عدد ۳ را در حد قسمت دوم سری در بی‌نهایت (یعنی $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+3)!}$) ضرب کنیم، حد جمله دوم سری در بی‌نهایت که صفر

است، بنابراین کفایت مجموع سه جمله اول سری را به ازای $k=1$ ، $k=2$ و $k=3$ بدست بیاوریم: $S = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$$\frac{1^3 + 6(1)^2 + 11 \times 1 + 5}{(1+3)!} = \frac{23}{24}$$

روش تستی: اگر مقدار سری صورت سؤال را به ازای $k=1$ حساب کنیم، داریم:

خُب $\frac{23}{24}$ ، فقط مقدار جمله اول این سری است که قراره با عددهای مثبت دیگه جمع بشه، اما این عددهای دیگه مقدارشون چقدره؟ اگر مقدار سری به

ازای $k=2$ را حساب کنیم، عددی بدست می‌آید که وقتی با $\frac{23}{24}$ جمع می‌شود، عددی بزرگتر از یک پدید می‌شود، پس گزینه‌های (۲) و (۴) غلط هستند! اما در

سؤالاتی که در مخرج فاکتوریل یا توان نمایشی در مخرج (a^n) داریم، می‌توان با قطعیت گفت؛ مقدار جمله اول سری (به ازای $k=1$) قطعاً بزرگتر یا مساوی سایر

جملات است، پس سایر جملات سری حداکثر $\frac{23}{24}$ هستند که وقتی با $\frac{23}{24}$ (مربوط به جمله اول) جمع می‌شوند، قطعاً مقدار سری به عدد $\frac{2}{2}$ نمی‌رسد، پس گزینه

(۲) هم غلط است!



۳۰- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که تساوی $\frac{1}{x^a + 1} = 1 - x^a + x^{2a} - x^{3a} + \dots$ را داریم. از انتگرال گیری از طرفین این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a + 1} dx = \int_0^1 (1 - x^a + x^{2a} - \dots) dx = \left(x - \frac{x^{a+1}}{a+1} + \frac{x^{2a+1}}{2a+1} - \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

۳۱- گزینه «۱» ابتدا سعی می‌کنیم صورت و مخرج را ساده کنیم:

$$\frac{n!}{n \times (n+1) + (n!) \times (n+1)(n+2)} = \frac{n!}{n!(n+1)[1+n+2]} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

خب حالا دیگه فرم سری برای ما آشناست و می‌تونیم به راحتی با استفاده از قاعده‌ی تلسکوپی حاصل سری را حساب کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (f_n - f_{n+2})$$

با توجه به این که اختلاف جملات ۲ واحد است، حاصل سری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{12}$$

۳۲- گزینه «۱» هر دو سری را با استفاده از آزمون ریشه بررسی می‌کنیم. در سری سمت راست دقت کنید که برای چندجمله‌ای‌ها داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)^r e^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n+1)^r} \sqrt[n]{e^{n+1}}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{e}{3} < 1$$

برای جملات نمایشی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^{kn+b}} = A^k$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n^{2n})(n+2)}{(1+n)^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1+n)^2} = 0 < 1$$

در سری سمت چپ هم دقت کنید که $n+2$ چندجمله‌ای است و $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$ خواهد بود:

در هر دو سری، حاصل حد ریشه‌ی n م کوچکتر از یک است. بنابراین هر دوی آن‌ها همگرا هستند.

۳۳- گزینه «۳» از قضیه‌ی همگرایی میانگین هندسی برای تعیین حد جمله عمومی استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه اگر دنباله‌ی a_n به L همگرا باشد، آنگاه

$$a_1 a_2 \dots a_n = L^n \quad \text{در این سری دنباله‌ی } a_n = \frac{2n+1}{3n+2} \text{ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3} \text{ پس داریم:}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n x^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{2}{3}$$

بنابراین شعاع همگرایی این سری $R = \frac{3}{2}$ است. همان‌طور که گفتیم بازه همگرایی $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ است. اما در دو نقطه‌ی $x = \pm \frac{3}{2}$ بررسی نشان می‌دهد که به

$$x = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(\pm \frac{3}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n$$

سری‌های واگرا می‌رسیم:

پس شعاع همگرایی $R = \frac{3}{2}$ و ناحیه‌ی همگرایی $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ است.

۳۴- گزینه «۳» از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n k^x - n}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + \dots + n^x \ln n}{1} = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln(n!)$$



$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^n 2^i}{\sum_{i=1}^n (-2)^i}$$

۳۵- گزینه «۴» جمله n ام سری فوق به صورت مقابل است:

$$a_n = \frac{\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}}{\frac{-2((-2)^n - 1)}{-2 - 1}} = \frac{-6(2^n - 1)}{-2((-2)^n - 1)} = 3 \times \frac{2^n - 1}{(-1)^n 2^n - 1}$$

با استفاده از فرمول مجموع جملات تصاعد هندسی داریم:

بنابراین وقتی $n \rightarrow \infty$ میل کند، برای n های زوج مقدار حد برابر با ۳ است و برای n های فرد، مقدار حد برابر با -۳ است. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times \frac{2^n}{(-1)^n 2^n}$$

برای n های بزرگ داریم $2^n - 1 \approx 2^n$ پس:

به این ترتیب برای n های زوج مقدار حد +۳ و برای n های فرد مقدار حد -۳ است، این نشان می‌دهد که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود ندارد. پس شرط لازم برای همگرا بودن

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برقرار نیست. این سری واگراست.



پاسخنامه آزمون (۱)

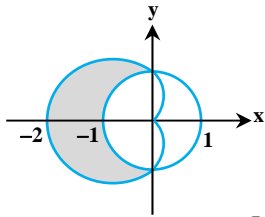
۱- گزینه «۳» دو منحنی همدیگر را در مبدأ مختصات قطع می‌کنند.

$$4 \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad 4 \cos^2 \theta - 3 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_2 = \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow |\theta_2 - \theta_1| = \frac{\pi}{3}$$

۲- گزینه «۱»

زاویه‌ی بین شعاع حامل و خط مماس از رابطه‌ی $\text{tg} \theta = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ به دست می‌آید.

با توجه به اینکه در نقطه‌ی فوق $f'(\theta) = 0$ می‌باشد، لذا $\theta = \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.



۳- گزینه «۳» با توجه به شکل باید مساحت ناحیه هاشورخورده را محاسبه کنیم، بدین منظور تقاطع دو منحنی را بدست می‌آوریم، سپس از آنجائی که شکل متقارن است، فقط مساحت نیمه بالایی را محاسبه کرده و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم. هر خط شعاعی از $r = 1$ وارد و از $r = 1 - \cos \theta$ خارج می‌شود، بنابراین داریم:

$$1 = 1 - \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{مساحت نیمه بالایی} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [(1 - \cos \theta)^2 - 1] d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2 \cos \theta \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} \sin 2\theta - \sin \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\frac{1}{4} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{8} (\sin 2\pi - \sin \pi) - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{مساحت کل} = 2 \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) = \frac{\pi}{2} + 2$$

۴- گزینه «۱» منحنی موردنظر رز ۵ برگ است، بنابراین مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را ۵ برابر می‌کنیم.

$$\cos \Delta \theta = 0 \Rightarrow \Delta \theta = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{10}$$

$$S = \Delta \times \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^5 \Delta \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^5 u du = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos^5 u du = \frac{\pi}{4}$$

۵- گزینه «۲» مساحت محصور درون منحنی $r = f(\theta)$ از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1 + \text{tg}^2 \theta) - 1) d\theta = \frac{1}{2} (\text{tg} \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} (4 - \pi)$$

۶- گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$2 + \sin \theta = 2 + \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} ((2 + \cos 2\theta)^2 - (2 + \sin \theta)^2) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta - 4 \sin \theta - \sin^2 \theta) d\theta$$

مساحت موردنظر برابر است با:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(4 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} - 4 \sin \theta - \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{51\sqrt{3}}{16}$$

بنابراین مساحت $\frac{51}{16}$ برابر $\sqrt{3}$ می‌باشد.

۷- گزینه «۴» منحنی مورد نظر شبیه رز می‌باشد و n برگ دارد مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را n برابر می‌کنیم.

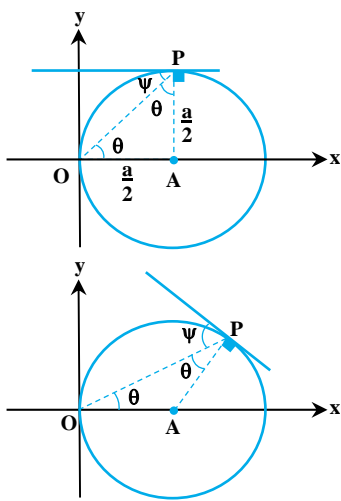
$$S = \frac{1}{n} \times n \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} a^2 \cos n\theta d\theta = na^2 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos n\theta d\theta = na^2 \times \frac{1}{n} \sin n\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2n}} = a^2$$

۸- گزینه «۱» $(r^2 = 1 - \theta^2 = 0 \Rightarrow \theta = -1, 1)$ پس حدود انتگرال $\theta = -1$ و $\theta = 1$ هستند.

$$S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r^2 dt = \int_0^1 r^2 d\theta = \int_0^1 (1 - \theta^2) d\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۹- گزینه «۴» چون برای $r = 1 \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{1}{3}$ و برای $r = 3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{3}$ پس داریم:

$$L = \int_{\sin^{-1} \frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{3}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_{\sin^{-1} \frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{3}} \sqrt{9} d\theta = 3 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{3} \right)$$



۱۰- گزینه «۳» نقطه‌ی دلخواه $P(r, \theta)$ را روی منحنی $r = a \cos \theta$ در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید این منحنی یک دایره به مرکز $A(\frac{a}{2}, 0)$ است. در شکل مقابل OA و AP هر دو شعاع‌های دایره هستند، پس با هم برابرند. پس مثلث OAP متساوی‌الساقین است. این نشان می‌دهد که زاویه‌ی $\hat{A}PO$ با θ برابر است. از طرفی شعاع دایره بر خط مماس عمود است؛ پس $\psi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

توضیح: اگر به روش رد گزینه بخواهیم مسأله را حل کنیم، به یک نقطه‌ی خاص روی منحنی دقت می‌کنیم. در شکل مقابل نقطه‌ی P بالاترین نقطه از دایره است. خط مماس در این نقطه، خطی افقی است، در این حالت واضح است که $\psi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

۱۱- گزینه «۳» اگر بخواهیم از فرمول مختصات قطبی حل کنیم، محاسبات سنگینی را باید انجام دهیم، بنابراین ابتدا معادله منحنی را در مختصات دکارتی می‌نویسیم:

$$r = 2\sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta) \Rightarrow r^2 = 2\sqrt{2}(r \sin \theta + r \cos \theta) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}(x + y) \Rightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$$

همان‌طور که می‌دانید منحنی مورد نظر دایره‌ای به شعاع ۲ می‌باشد و محیط آن برابر با $2\pi \times 2 = 4\pi$ است.

۱۲- گزینه «۳» این انتگرال را می‌توان مساحت محصور توسط منحنی $r = f(\theta)$ در فاصله‌ی 0 تا π در نظر گرفت، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt{2} \Rightarrow \text{چون } 0 \leq \theta \leq \pi, \text{ مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع } \sqrt{2} \text{ است.}$$

۱۳- گزینه «۲» معادله‌ی داده شده مربوط به دایره‌ای قائم با مرکز $(0, \frac{1}{4})$ است، که مرکز دایره همان مرکز تقارن منحنی نیز می‌باشد و چون این نقطه بر روی محور y ها قرار دارد، خط $\theta = \frac{\pi}{4}$ (یا همان محور y ها) از این نقطه عبور می‌کند.

۱۴- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ است، یعنی معادله به صورت $r = 1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد که معادله‌ی یک دلتماست.

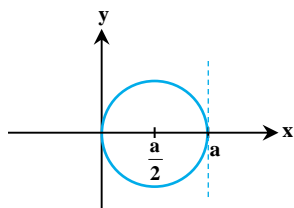
۱۵- گزینه «۴» سؤال بسیار ساده‌ای است، کافیست r^2 و $(r'_\theta)^2$ را حساب کنیم:

$$\begin{cases} r^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta \\ (r'_\theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - \sin 2\theta \end{cases}$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{2} d\theta = \sqrt{2} [\theta]_0^\pi = \sqrt{2} \pi$$

بنابراین $r^2 + r'^2 = 2$ می‌شود و لذا به راحتی داریم:

بخش پاسخنامه آزمون (۲)



۱- گزینه «۳» به طور کلی می‌دانیم $r = a \cos \theta$ دایره‌ای به مرکز $(\frac{a}{2}, 0)$ و به شعاع $\frac{a}{2}$ می‌باشد. با توجه به شکل منحنی واضح است که در مبدأ محور y ها همان خط مماس قائم بر منحنی است و همچنین در نقطه $(a, 0)$ ، خط $x = a$ مماس قائم بر منحنی است. پس در دو نقطه $(0, 0)$ و $(a, 0)$ منحنی دارای مماس قائم است.

حل دیگر: برای این که مماس قائم داشته باشیم، باید شیب منحنی در آن نقطه بی‌نهایت شود. بدین منظور باید $\frac{dx}{dt} = 0$ قرار دهیم و معادله حاصل را حل کنیم تا نقطه موردنظر به دست آید:

$$x = r \cos \theta = 2 \cos^2 \theta$$

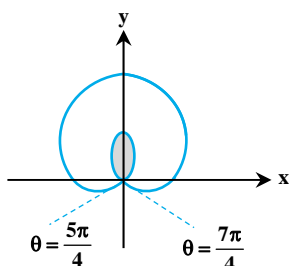
$$\frac{dx}{dt} = -4 \cos \theta \sin \theta = 0 \Rightarrow -2 \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

اگر $\theta \in [0, 2\pi]$ فرض شود، جواب معادله برابر است با:

با جایگذاری تمامی این θ ها به ۲ نقطه $(0, 0)$ و $(2, 0)$ می‌رسیم.

۲- گزینه «۲» ابتدا شکل لیماسیون قائم را رسم می‌کنیم، سپس برای یافتن حدود $r = 0$ قرار داده، در نتیجه $\theta = \frac{\Delta\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ بدست می‌آید.



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (1 + \sqrt{2} \sin \theta)^2 d\theta \stackrel{\text{بنابر تقارن}}{=} 2 \times \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin^2 \theta) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + 2\sqrt{2} \sin \theta + 1 - \cos 2\theta) d\theta = [\theta - 2\sqrt{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi - 3}{2}$$

یادآوری: برای راحتی در انتگرال گیری، از فرمول توان‌شکن $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ استفاده می‌کنیم.

۳- گزینه «۱» مساحت حاصل از دوران $r = f(\theta)$ حول محور قطبی از رابطه $S = 2\pi \int r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ به دست می‌آید.

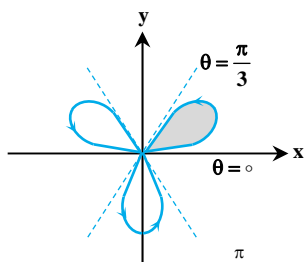
$$S = 2\pi \int r \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 2\pi \int r \sin \theta \sqrt{(r\sqrt{3})^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = 4\pi\sqrt{3} \int r \sin \theta d\theta$$

$$= 4\pi\sqrt{3} \int 2\sqrt{3} \sin^2 \theta d\theta = 4\pi\sqrt{3} \int \sqrt{3} (1 - \cos 2\theta) d\theta = 12\pi (\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}) \Big|_0^\pi = 12\pi^2$$

۴- گزینه «۲» منحنی $r = a \sin 3\theta$ ، رز ۳ برگ می‌باشد.

با توجه به تقارن برگ‌ها، می‌توانیم مساحت یکی از برگ‌ها را محاسبه و حاصل را در ۳ ضرب کنیم.

برگ هاشور خورده در شکل روبرو به ازای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ بدست می‌آید. بنابراین داریم:



$$S = 3 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (a \sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta \stackrel{\text{فرمول تلابی مثلثات}}{=} \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{3a^2}{4} (\theta - \frac{1}{6} \sin 6\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

یادآوری: مساحت محدود ما بین نمودار $r = f(\theta)$ و دو نیم‌خط $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ از رابطه $S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) d\theta$ بدست می‌آید.

حل دیگر:

$$S = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta d\theta = \frac{3a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\theta) d\theta = \frac{3a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta - \frac{3a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 6\theta d\theta = [\frac{3a^2}{4} (\frac{\pi}{3}) - \frac{a^2}{8} \sin 6\theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

توجه شود که مساحت یکی از برگ‌ها محاسبه و از این رو سه برابر شده است.

۵- گزینه «۴»

روش اول: از فرمول $S = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right) dr$ استفاده می‌کنیم. حدود r را از برخورد $\theta = 0$ و $\theta = 4r - r^3$ به دست می‌آوریم:

$$4r - r^3 = 0 \Rightarrow r(4 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 2$$

$$S = \left| \int_0^2 \frac{r^2}{r} (4 - 3r^2) dr \right| = \left| \int_0^2 (4r - 3r^3) dr \right| = \left[\frac{2r^2}{1} - \frac{3}{10} r^4 \right]_0^2 = \frac{64}{15}$$

روش دوم: می‌دانیم که با تغییر دستگاه دکارتی به قطبی مساحت ناحیه D به این صورت به دست می‌آید:

در این مثال ما حدود θ را بر حسب r داریم: $\theta = 4r - r^3$ و $\theta = 0$. پس حدود θ را در انتگرال میانی بنویسیم. یعنی ترتیب $d\theta dr$ را می‌نویسیم. برای تشخیص حدود r ، منحنی‌ها را برخورد می‌دهیم. توجه کنید که در انتگرال دوگانه r همواره نامنفی است:

$$4r - r^3 = 0 \Rightarrow r(4 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 2$$

$$S = \int_0^2 \int_0^{4r-r^3} r d\theta dr = \int_0^2 r(4r - r^3) dr = \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr = \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{64}{15}$$

۶- گزینه «۱» می‌دانیم که $S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$ ، برای تعیین حدود انتگرال، از رابطه $\theta = \frac{\pi t}{1+t^2}$ کمترین و بیشترین مقدار θ را پیدا می‌کنیم:

$$\theta = \pi \frac{t}{1+t^2} \xrightarrow{\theta=0} \pi \frac{(1+t^2) - 2t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

بنابراین حدود تغییرات θ به صورت $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و حدود تغییرات t به صورت $-1 \leq t \leq 1$ است.

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2)^2}{1-t^2} \left(\frac{\pi(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \pi dt = \frac{1}{2} (2\pi) = \pi$$

$$r = a \cos^2 \theta \Rightarrow y = a \cos^2 \theta \sin \theta ; x = a \cos^2 \theta \Rightarrow dx = -2a \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

۷- گزینه «۴»

چون r با تغییر θ به $-\theta$ و با تغییر θ به $\pi - \theta$ تغییر نمی‌کند، پس منحنی نسبت به محورهای x و y متقارن است. پس باید از 0 تا π را حول محور x دوران دهیم که چون نسبت به y متقارن است از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ را دوران می‌دهیم و حاصل را ۲ برابر می‌کنیم.

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta (-2a \sin \theta \cos^2 \theta d\theta) = -4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^6 \theta d\theta = 4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \cos^6 \theta d\theta$$

$$= 4\pi a^3 \left[\frac{\cos^7 \theta}{7} - \frac{\cos^9 \theta}{9} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi a^3 \times \frac{2}{63} = \frac{8}{63} \pi a^3$$

۸- گزینه «۱» طول منحنی $y = f(x)$ از رابطه $\int \sqrt{1+y'^2} dx$ و طول منحنی $r = f(\theta)$ از رابطه $\int \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ به دست می‌آید.

$$l_1 = \int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx, \quad l_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

پس طول دو منحنی با هم برابر است.

۹- گزینه «۳» ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$2 + \sin \theta = 2 + \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} ((2 + \cos 2\theta)^2 - (2 + \sin \theta)^2) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta - 4 \sin \theta - \sin^2 \theta) d\theta$$

مساحت موردنظر برابر است با:

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(4 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} - 4 \sin \theta - \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{51\sqrt{3}}{16}$$

بنابراین مساحت $\frac{51}{16}$ برابر $\sqrt{3}$ می‌باشد.

۱۰- گزینه «۳» برای این که مماس افقی داشته باشیم، باید شیب منحنی در آن نقطه صفر شود. برای این منظور باید $\frac{dy}{d\theta}$ را حساب کرده و مساوی صفر قرار

$$y = r \sin \theta = \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta$$

دهیم:

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta} + \sin \theta \frac{-2 \sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} = 0 \Rightarrow \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta + 2\theta) = \cos 3\theta = 0$$

$$\Rightarrow 3\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

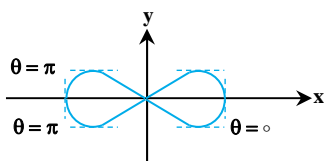
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

اگر $\theta \in [0, 2\pi]$ فرض شود، جواب‌های معادله برابر است با:

با جایگذاری تمامی این θ ها به نقاط $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6})$ و $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{6})$ و $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{6})$ و $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{11\pi}{6})$ می‌رسیم، همان‌طور که می‌دانید نقاطی که r منفی دارند را

با اضافه کردن (کم کردن) مقدار π به زاویه آن‌ها می‌توان به مثبت تبدیل نمود، پس با توجه به گزینه‌ها نقاط $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6})$ و $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{6})$ (متناظر با $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6})$)

جواب هستند.



توضیح: اگر منحنی $r^2 = \cos 2\theta$ را رسم کنیم، واضح است که در نقاط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$

مماس‌های قائم رخ می‌دهند و در چهار نقطه از منحنی مماس‌های افقی رخ می‌دهند. بنابراین با

رسم شکل می‌توانیم به راحتی گزینه (۳) را انتخاب کنیم. البته این به شرطی است که شکل را

حفظ باشیم که چون منحنی معروفی است، شرط سختی نیست!

۱۱- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $r = \frac{1}{\theta}$ و لذا $r'_\theta = -\frac{1}{\theta^2}$ و بنابراین طبق فرمول داریم:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\theta^4} + \frac{1}{\theta^2}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\theta^2} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^{-2} (\theta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

با استفاده از تغییر متغیر $\theta^2 + 1 = \theta^2 u^2$ و یا $\theta^2 = \frac{1}{u^2 - 1}$ خواهیم داشت:

$$\theta d\theta = \frac{-2u du}{(u^2 - 1)^2} \Rightarrow d\theta = \frac{-u du}{\theta(u^2 - 1)^2} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{5}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{5}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^{-2} u \left(\frac{-u du}{\theta(u^2 - 1)^2} \right) = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \frac{u^2 du}{u^2 - 1} = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{du}{u^2 - 1} \right) = \left[u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$$

حالا به راحتی داریم:

$$r = \frac{2}{\sin \theta - \cos \theta} \Rightarrow r \sin \theta - r \cos \theta = 2 \Rightarrow y - x = 2$$

۱۲- گزینه «۲» می‌توانیم معادله را به مختصات دکارتی ببریم و سؤال را حل کنیم:

$$\text{می‌دانیم فاصله‌ی این خط از مبدأ برابر با } \sqrt{2} = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1}} \text{ است.}$$

۱۳- گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی خم را در مختصات قطبی نمایش می‌دهیم:

$$x^2 + y^2 + xy = 16 \Rightarrow r^2 + (r \cos \theta)(r \sin \theta) = 16 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta = 16$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } 2} 2r^2 + r^2 \sin 2\theta = 32 \Rightarrow r^2 (2 + \sin 2\theta) = 32 \Rightarrow r^2 = \frac{32}{2 + \sin 2\theta}$$

دنبال بیشترین و کمترین مقدار فاصله از مبدأ یعنی همان r هستیم. هر مقدار θ که r^2 را ماکزیمم و یا مینیمم کند، r را نیز ماکزیمم و یا مینیمم خواهد کرد.

اما r^2 به ازای $\sin 2\theta = 1$ مینیمم و به ازای $\sin 2\theta = -1$ ماکزیمم خواهد شد. بنابراین مینیمم r^2 برابر با $\frac{32}{3} = \frac{32}{2+1}$ و ماکزیمم آن برابر با $\frac{32}{1} = 32$ است و

چون دنبال ماکزیمم و مینیمم r هستیم، لذا مینیمم r برابر با $\sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ و ماکزیمم r برابر با $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ می‌شود.



۱۴- گزینه «۳» راحت تر است که معادله را به فضای دکارتی ببریم: $r = \cos \theta + \sin \theta \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } r} r^2 = r \cos \theta + r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y$ دنبال به دست آوردن محل تلاقی منحنی فوق با محور قطبی و به عبارت دیگر تلاقی با $y = 0$ هستیم، لذا داریم:

$$x^2 + 0^2 = x + 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$$

پس فاصله‌ی دو نقطه از هم برابر با $1 - 0 = 1$ است. $x_2 - x_1 = 1 - 0 = 1$

۱۵- گزینه «۱» ابتدا r'_θ را حساب می‌کنیم:

$$r = a \operatorname{tgh} \frac{\theta}{\gamma} \Rightarrow r'_\theta = \frac{a}{\gamma} \operatorname{sech}^2 \frac{\theta}{\gamma} \Rightarrow (r'_\theta)^2 = \frac{a^2}{\gamma^2} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right)$$

حالا با استفاده از فرمول داریم:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{tgh}^2 \frac{\theta}{\gamma} + \frac{a^2}{\gamma^2} \operatorname{sech}^4 \frac{\theta}{\gamma}} d\theta = \int_0^{2\pi} a \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma^2} (1 - \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right))^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} (1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{\theta}{\gamma})^2} d\theta = \frac{a}{\gamma} \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{\theta}{\gamma}) d\theta$$

$$L = \frac{a}{\gamma} \int_0^{2\pi} (\gamma - \operatorname{sech}^2 \frac{\theta}{\gamma}) d\theta = \frac{a}{\gamma} \left[\gamma \theta - \gamma \operatorname{tgh} \frac{\theta}{\gamma} \right]_0^{2\pi} = \frac{a}{\gamma} (\gamma \pi - \gamma \operatorname{tgh} \pi) = a(\pi - \operatorname{tgh} \pi)$$

بخش پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۳» با فرض این که $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ ، برای منحنی C_1 باید قسمت حقیقی $\frac{1}{z}$ را حساب کنیم:

$$C_1 : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{x}{x^2+y^2}$$

بنابراین معادله C_1 به صورت $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}$ و به عبارت دیگر به صورت $x^2 + y^2 - 4x = 0$ و یا $(x-2)^2 + y^2 = 4$ می باشد، یعنی دایره‌ای با شعاع ۲ که مساحت آن $\pi(2)^2 = 4\pi$ می شود. حالا سراغ C_2 می رویم:

$$C_2 : z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 3 \Rightarrow (x+iy)(x+iy) + i[(x+iy) - (x-iy)] = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$$

یعنی دایره‌ای به شعاع ۲ که مساحت آن 4π می شود، پس گزینه ۳ صحیح است.

۲- گزینه «۱» اگر Z به صورت $z = x + iy$ تعریف شود، آن گاه $\operatorname{Re}z = x$ ، $\operatorname{Im}z = y$ و $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ خواهد بود، یعنی معادله‌ی زیر را داریم:

$$|x| + |y| = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 + y^2 + 2|x||y| = x^2 + y^2 \Rightarrow 2|x||y| = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0$$

در هر صورت $xy = 0$ است و به عبارت دیگر $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) = 0$ می شود.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

۳- گزینه «۱» با فرض این که $z = x + iy$ ، آن گاه داریم:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{e^z} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = e^{\bar{x}} \cdot e^{-iy}$$

مزدوج عدد حقیقی خودش می شود، چون e^x عدد حقیقی است پس $e^{\bar{x}} = e^x$ و مزدوج iy برابر با $-iy$ می شود، لذا داریم:

$$\overline{\exp(z)} = e^x \cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}} = \exp(\bar{z})$$

$$1 + \sqrt{-1} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1 - \sqrt{-1} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

۴- گزینه «۳» سؤال ساده‌ای است، با فرض این که $i = \sqrt{-1}$ لذا داریم:

$$A = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2n} + (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{2n} = (\sqrt{2})^{2n} [e^{2n\pi i} + e^{-2n\pi i}] = 2^{2n} [2 \cos(2n\pi)] = 2^{2n} \times 2 \times 1 = 2^{2n+1}$$

۵- گزینه «۳» واضح است ابتدا باید مقادیر Z را حساب کنیم:

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } z} z^2 + 1 = z(2 \cos \frac{\pi}{12}) \Rightarrow z^2 - 2 \cos \frac{\pi}{12} z + 1 = 0 \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{12} \pm \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1}$$

$$\Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{12} \pm \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{12}} = \cos \left(\frac{\pi}{12}\right) \pm i \sin \left(\frac{\pi}{12}\right) = e^{\pm i\frac{\pi}{12}}$$

$$z^6 + \frac{1}{z^6} = (e^{i\frac{\pi}{12}})^6 + (e^{-i\frac{\pi}{12}})^6 = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

اگر $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، آن گاه $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ، لذا داریم:

$$z^6 + \frac{1}{z^6} = (e^{-i\frac{\pi}{12}})^6 + (e^{i\frac{\pi}{12}})^6 = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

اگر $z = e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ، آن گاه $\frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، لذا داریم:

پس در هر حالت، مقدار خواسته شده برابر با صفر است.

$$z = 3 + i\sqrt{3} \Rightarrow \bar{z} = 3 - i\sqrt{3}$$

۶- گزینه «۴» می دانیم \bar{z} یعنی مزدوج z ، لذا داریم:

$$\operatorname{Arg}(\bar{z}) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad |\bar{z}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

با توجه به این که نقطه $3 - i\sqrt{3}$ در ربع چهارم قرار دارد، لذا داریم:

$$\bar{z} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow (\bar{z})^3 = (2\sqrt{3})^3 e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z})^3 = -\frac{\pi}{2}$$

۷- گزینه «۱» با توجه به نکته متن کتاب، $|z - z_1| + |z - z_2| = a$ معادله یک بیضی می باشد.

۸- گزینه «۲» سری داده شده یک سری هندسی با جمله‌ی اول $t_1 = 1$ و $r = i$ است، لذا داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} i^k = \frac{t_1(1-r^{101})}{1-r} = \frac{1(1-i^{101})}{1-i} = \frac{1-i^{101}}{1-i} = \frac{1-(i^{100})i}{1-i} = \frac{1-(i^2)^{50}i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

بنابراین $x + iy = 1$ و لذا $x = 1$ و $y = 0$ و بنابراین $y - x = 0 - 1 = -1$.

۹- گزینه «۱» با توجه به اینکه $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ می‌باشد، داریم: $i^{1+i} + i^{1-i} = i \times i^i + i \times i^{-i} = i(i^i + i^{-i}) = i(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = i(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}})$

۱۰- گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که: $|z| = 3 \Rightarrow |z|^2 = 3^2 \Rightarrow \begin{cases} |z|^2 + 1 = 10, & |z|^2 - 1 = 8 \\ |z|^2 + 2 = 11, & |z|^2 - 2 = 7 \end{cases}$

از طرفی می‌دانیم $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ و $|a - b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2}}{\frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 - 2}} \leq \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 + 2} \leq \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 - 2}$$

توضیح: هرگاه صورت را بزرگ و مخرج را کوچک کنیم، کسر بزرگتر می‌شود. هرگاه صورت را کوچک و مخرج را بزرگ کنیم، کسر کوچک می‌شود.

۱۱- گزینه «۳» چون $1+i$ ریشه معادله می‌باشد، لذا در معادله صدق می‌کند: $(1+i)^5 + a(1+i)^3 + b = 0$

طبق نکته حاصل $(1+i)^n$ برای n های فرد برابر $(1+i)^{n-1}$ می‌باشد، لذا با توجه به این که در این تست $n = 5$ و $n = 3$ است، داریم:

$$(1+i)^5 + a(1+i)^3 + b = 0 \Rightarrow (1+i)^3(1+i)^2 + a(1+i)^3 + b = 0 \Rightarrow (1+i)^3(1+i)^2 + a(1+i)^3 + b = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 2i + 2ai - 2a + b = 0 \Rightarrow (-4 + 2a)i - 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2a = 0 \\ -4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 8 \Rightarrow a - b = 2 - 8 = -6$$

البته بدون استفاده از نکته نیز می‌توانیم $1+i$ را در معادله قرار دهیم و به طور عادی محاسبات را انجام دهیم.

۱۲- گزینه «۴» واضح است باید $\bar{z} = x - iy$ قرار دهیم:

$$\frac{1}{\bar{z}} + 1 = \frac{1}{x - iy} + 1 \Rightarrow \frac{x + iy}{x^2 + y^2} + 1 \Rightarrow \text{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}} + 1\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 1$$

طرفین ضرب در $x^2 + y^2$ با شرط $(x, y) \neq (0, 0)$ $\rightarrow x^2 + y^2 \geq x \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$

که محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است (که البته چون $(x, y) \neq (0, 0)$ یعنی نقطه‌ی $(0, 0)$ جزء ناحیه نیست) پس گزینه (۴) صحیح است.

۱۳- گزینه «۳» با توجه به سؤال، لازم است تمام گزینه‌ها بررسی شوند:

۱) $\text{Im}(z^2) = 2 \Rightarrow \text{Im}[(x + iy)^2] = 2 \Rightarrow \text{Im}[x^2 + i^2y^2 + 2xiy] = 2 \Rightarrow \text{Im}(x^2 - y^2 + 2xiy) = 2 \Rightarrow 2xy = 2 \Rightarrow xy = 1$
که نمایش یک منحنی غیر از دایره است. (معادله‌ی یک هذلولی است)

۲) $\text{Re}[(\bar{z})^2] = 2 \Rightarrow \text{Re}[(x - iy)^2] = 2 \Rightarrow \text{Re}[x^2 + i^2y^2 - i2xy] = 2 \Rightarrow \text{Re}[x^2 - y^2 - i2xy] = 2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 2$
که معادله‌ی یک دایره نیست و معادله‌ی یک هذلولی است.

۳) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \text{Re}\left(\frac{1}{x - iy}\right) = 1 \Rightarrow \text{Re}\left[\frac{x + iy}{x^2 - (iy)^2}\right] = 1 \Rightarrow \text{Re}\left[\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{iy}{x^2 + y^2}\right] = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

که معادله‌ی یک دایره به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است. هر چند نیاز نیست و پاسخ به تست تمام است، اما منحنی داده شده در گزینه (۴) را نیز بررسی می‌کنیم:

۴) $|z| - \text{Re}(z) = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 12 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 + y^2 = (12 + x)^2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 + y^2 = 144 + x^2 + 24x$
 $\Rightarrow y^2 - 24x - 144 = 0 \Rightarrow$ که معادله‌ی یک سهمی است

۱۴- گزینه «۴» بهتر است هر دو پارانتر را در مختصات نمایی نمایش دهیم:

$$A = (3e^{i\frac{\pi}{6}})(4e^{i\frac{\pi}{3}}) = 12e^{i\frac{\pi}{2}} = 12[\cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ)] = 12[\cos(180^\circ - 60^\circ) + i\sin(180^\circ - 60^\circ)]$$

$$= 12[-\cos(-60^\circ) + i(-\sin(-60^\circ))] \Rightarrow A = 12\left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 + i6\sqrt{3}$$

۱۵- گزینه «۲» فرض می‌کنیم $z = x + iy$ و لذا $\bar{z} = x - iy$ ، بنابراین داریم:

$$(1-i)(x - iy) = (1+i)(x + iy) \Rightarrow x - iy - ix + i^2y = x + iy + ix + i^2y \Rightarrow -2ix - 2iy = 0 \Rightarrow i(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.



پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۴» اگر $z = x + iy$ باشد، می‌دانیم اندازه z برابر با $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ است و با توجه به این که $|z^n| = |z|^n$ می‌باشد، داریم:
 $|z|^n = |z^n| = |(1+i)(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})\dots(1+i\sqrt{n})|^n = |1+i|^n |1+i\sqrt{2}|^n |1+i\sqrt{3}|^n \dots |1+i\sqrt{n}|^n \Rightarrow$
 $|z|^n = (\sqrt{2})^n (\sqrt{3})^n (\sqrt{4})^n \dots (\sqrt{1+n})^n = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+1) = (n+1)!$
 البته با قرار دادن $n = 2$ و محاسبه $|(1+i)(1+i\sqrt{2})|^2$ می‌توان به روش سریع به سؤال پاسخ داد.

۲- گزینه «۱» ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:
 $(\frac{z-1}{z})^4 = 16 \Rightarrow \frac{z-1}{z} = \sqrt[4]{16} \Rightarrow \frac{z-1}{z} = \sqrt[4]{16} e^{\frac{rk\pi i}{4}} \Rightarrow \frac{z-1}{z} = 2e^{\frac{k\pi i}{2}}$
 $k = 0 \Rightarrow \frac{z-1}{z} = 2 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow x + iy = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$
 که مقادیر فوق، فقط در معادله‌ی داده شده در گزینه «۱» صدق می‌کند.

۳- گزینه «۴» با توجه به این که حاصل عبارت به صورت توان‌های متوالی برای Z و \bar{Z} ، داده شده است، لذا در حالت کلی مقادیر $z^n - \bar{z}^n$ را حساب می‌کنیم:
 $z = r \cos \theta + ir \sin \theta \Rightarrow z^n = r^n \cos n\theta + ir^n \sin \theta$
 $\bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta \Rightarrow (\bar{z})^n = r^n \cos n\theta - ir^n \sin \theta$
 $\Rightarrow z^n - (\bar{z})^n = 2ir^n \sin n\theta \xrightarrow{r=\sqrt{2}, \theta=\frac{\pi}{4}} z^n - (\bar{z})^n = i2(\sqrt{2})^n \sin n(\frac{\pi}{4})$
 کافیست به جای n اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم:

$n = 1 \Rightarrow z - \bar{z} = i2(\sqrt{2})^1 \sin(\frac{\pi}{4}) = i2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2i$
 $n = 2 \Rightarrow z^2 - \bar{z}^2 = i2(\sqrt{2})^2 \sin(2 \times \frac{\pi}{4}) = i2 \times 2 \times 1 = 4i$
 $n = 3 \Rightarrow z^3 - \bar{z}^3 = i2(\sqrt{2})^3 \sin(3 \times \frac{\pi}{4}) = i4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4i$
 $\Rightarrow A = (2i)(4i)(4i) = -32i$
 توضیح: اگر $A = (z - \bar{z})(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3) \dots (z^n - \bar{z}^n)$ مورد سؤال بود، حاصل آن به صورت زیر می‌شد:

$$A = 2^n i^n r^{\frac{n(n+1)}{2}} (\sin \theta \sin 2\theta \sin 3\theta \dots \sin n\theta)$$

۴- گزینه «۲» ابتدا به سمت چپ $A\bar{A}$ را اضافه و کم می‌کنیم:

$z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + A\bar{A} - A\bar{A} + B = 0 \Rightarrow z(\bar{z} + \bar{A}) + A(\bar{z} + \bar{A}) = A\bar{A} - B$
 $\Rightarrow (z + A)(\bar{z} + \bar{A}) = A\bar{A} - B \Rightarrow (z + A)(\overline{z + A}) = A\bar{A} - B \Rightarrow |z + A|^2 = A\bar{A} - B \Rightarrow |z + A| = \sqrt{A\bar{A} - B}$
 بنابراین معادله‌ی فوق، دایره‌ای به مرکز $z = -A$ و به شعاع $\sqrt{A\bar{A} - B}$ می‌باشد، برای این که مطمئن باشیم زیر رادیکال منفی نیست، چون $A\bar{A} = |A|^2$ مثبت است، پس B باید عددی منفی باشد.

۵- گزینه «۱» برای این که معادله فقط دارای ریشه‌های حقیقی باشد، باید $y = 0$ و لذا $z = x$ و بنابراین داریم:

$$|(\frac{1+ix}{1-ix})^n| = |a+bi| \Rightarrow |\frac{1+ix}{1-ix}|^n = |a+bi| \Rightarrow (\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}})^n = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

۶- گزینه «۲» سؤال راحتی است، کافیست ریشه‌های غیرحقیقی معادله‌ی $Z^3 = 1$ و به عبارت دیگر ریشه‌های سوم موهومی عدد ۱ را حساب کنیم:

$$z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} z_1 + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ z_2 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{-\pi}{3}) + i \sin(\frac{-\pi}{3}) \end{cases}$$

حالا طبق قاعده‌ی دموآور داریم:

$$\left. \begin{aligned} (z_1 + 1)^3 &= \cos(\frac{\Delta\pi}{3}) + i \sin(\frac{\Delta\pi}{3}) \\ (z_2 + 1)^3 &= \cos(\frac{\Delta\pi}{3}) - i \sin(\frac{\Delta\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (z_1 + 1)^3 + (z_2 + 1)^3 = 2 \cos \frac{\Delta\pi}{3} = 2 \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = 2 \cos(\frac{\pi}{3}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

۷- گزینه «۱»

$$|1-z_1| = |1-z_2| \Rightarrow |1-(3+i\sqrt{5})| = |1-(x+iy)| \Rightarrow |-2-i\sqrt{5}| = |(1-x)-iy| \Rightarrow$$

$$4+5 = (1-x)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 8 \quad (1)$$

$$|z_1| = |z_2| \Rightarrow |3+i\sqrt{5}| = |x+iy| \Rightarrow 9+5 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 14 \quad (2)$$

در رابطه (۲) قرار می‌دهیم $\rightarrow y = \pm\sqrt{5}$

که با توجه به شرط $z_1 \neq z_2$ ، $y = -\sqrt{5}$ قابل قبول است.

۸- گزینه «۳» با توجه به این که $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ، لذا داریم:

$$f(z) = 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2i\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4}\right) + 2i\left(\frac{z^2+(\bar{z})^2-2z\bar{z}}{4}\right) = z^2 + (\bar{z})^2 + 2z\bar{z} - i(z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z})$$

$$\Rightarrow f(z) = (1-i)z^2 + (2+2i)z\bar{z} + (1-i)\bar{z}^2$$

۹- گزینه «۳» واضح است ابتدا باید از Z فاکتور بگیریم، لذا داریم:

دقت کنید؛ $z = 0$ ، ریشه‌ی بدیهی معادله است و در گزینه‌ها هم آن را نداریم، پس باید دنبال ریشه‌های معادله‌ی درجه (۴) باشیم. اما برای حل معادله‌ی $z^4 + z^2 + 1 = 0$ ، دو راه داریم؛ اول این که فرض کنیم $z^2 = A$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم $A^2 + A + 1 = 0$ را حل کنیم و بعد از پیدا کردن A ، z را تعیین کنیم. راه دیگر این است که دقت کنید $1 + z^2 + z^4$ یک تصاعد هندسی با قدرنسبت z^2 و $q = z^2$ و $t_1 = 1$ است و لذا سمت چپ برابر با $\frac{z^6 - 1}{z^2 - 1}$ است:

$$z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z^6 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1 \times e^{0i}} = e^{\frac{2k\pi + 0i}{6}} = e^{\frac{k\pi i}{3}} \xrightarrow{k=1} z = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

۱۰- گزینه «۴» ابتدا با استفاده از تساوی $\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، خواهیم داشت:

$$A = \left(\frac{1+itgx}{1-itgx}\right)^n = \left(\frac{1+i\frac{\sin x}{\cos x}}{1-i\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^n = \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}\right)^n$$

حالا می‌توانیم از قانون دموآور استفاده کنیم:

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\cos nx + i\sin nx}{\cos nx - i\sin nx}\right) \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos nx} A = \frac{1+itg nx}{1-itg nx}$$

۱۱- گزینه «۱» می‌دانیم $1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ لذا داریم:

$$A = \sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

اگر $k = 0$ ، آن‌گاه داریم:

اگر $k = 1$ ، آن‌گاه داریم:

$$A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right] + \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6} = (-2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{6}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۲- گزینه «۲»

$$a(z\bar{z} + \frac{d}{a}\bar{z} + \frac{\bar{d}}{a}z) + c = 0 \Rightarrow a\left(z + \frac{d}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{d}}{a}\right) + c = 0$$

دایره‌ای به مرکز $\left(-\frac{\alpha}{a}, -\frac{\beta}{a}\right)$ می‌باشد $\Rightarrow \left|z + \frac{d}{a}\right|^2 = \frac{-c}{a}$

۱۳- گزینه «۴» ابتدا Δ را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - ac = (1+i)^2 - i \times 1 = 1 + i^2 + 2i - i = 1 - 1 + i = i$$

بنابراین داریم:

$$z_{1,2} = \frac{-(1+i) \pm \sqrt{i}}{i} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در } i} z_{1,2} = \frac{-i(1+i) \pm i\sqrt{i}}{i^2} = \frac{-i - i^2 \pm i\sqrt{i}}{-1} = -1 + i \mp i\sqrt{i}$$

اما $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ و $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ و بنابراین داریم:

$$z_{1,2} = -1 + i \mp i\sqrt{i} = -1 + i \mp i\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = -1 + i \mp i\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$



$$\left. \begin{aligned} p^{i+1} &= \sqrt{1+p^2} e^{i \operatorname{tg}^{-1} p} \\ p^{i-1} &= \sqrt{1+p^2} e^{i(\pi - \operatorname{tg}^{-1} p)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p^{i+1}}{p^{i-1}} = e^{i(-\pi + 2 \operatorname{tg}^{-1} p)}$$

۱۴- گزینه «۱»

$$\frac{p^{i+1}}{p^{i-1}} = e^{i(-\pi + 2 \operatorname{tg}^{-1} p)} \Rightarrow \left(\frac{p^{i+1}}{p^{i-1}} \right)^n = e^{i(-2n \operatorname{tg}^{-1} p)}$$

می‌دانیم $\operatorname{tg}^{-1} p + \operatorname{cotg}^{-1} p = \frac{\pi}{2}$ ، لذا $-\pi + 2 \operatorname{tg}^{-1} p = -2 \operatorname{cotg}^{-1} p$ و لذا داریم:

$$e^{i(2n \operatorname{cotg}^{-1} p)} \cdot e^{i(-2n \operatorname{cotg}^{-1} p)} = e^0 = 1$$

بنابراین داریم:

۱۵- گزینه «۲» برای راحتی کار، ابتدا $\frac{1}{z+1}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{x+iy+1} = \frac{1}{(x+1)+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - i \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right) = 1 + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right) = 2 - \frac{y}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2x^2+4x+2+2y^2-y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right) + \operatorname{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x^2+3x+y^2+2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2x^2+4x+2+2y^2-y}{(x+1)^2+y^2} = 4 \Rightarrow \frac{3x^2+7x+3y^2-y+4}{(x+1)^2+y^2} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{پس از ساده کردن}} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

پس شعاع دایره $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.