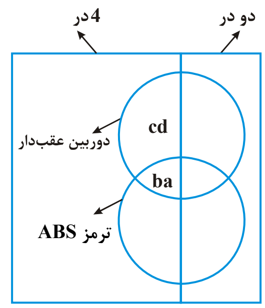
آزمون (۱)



۱ـ گزینه «۲» برای درک بهتر چنین سؤالاتی رسم شکل بسیار مفید است. از ۵۰۰ ماشین، ۱۶۵ ماشین دو در هستند، پس $۵۰۰-۱۶۵=۳۳۵$ ماشین چهار در داریم. ۱۲۰ ماشین چهار در داریم که مجهز به دوربین عقب هستند. اما نمی‌دانیم چند تای آن‌ها هم دوربین عقب دارند و هم ترمز ABS، پس فرض می‌کنیم C تعداد آن‌هایی باشد که هم دوربین عقب دارند و هم ترمز ABS و لذا $b+c=۱۲۰$ در نظر می‌گیریم.

از طرفی هجده درصد (۱۸%) همه ماشین‌ها، دارای دوربین عقب و ترمز ABS هستند:

$$a+b=\frac{۱۸}{۱۰۰}(a+b+c+d)=\frac{۹}{۵۰}(۱۲۰+a+d)$$

از آنجا که b و a اعداد طبیعی هستند، مجموع $(a+d)$ یا ماشین‌های دو در مجهز به دوربین عقب باید طوری باشد که مجموع آنها با ۱۲۰ بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد، پس $a+d$ یا تعداد ماشین‌های دو در مجهز به دوربین عقب باید ۳۰، ۸۰، ۱۳۰، ۱۸۰ و ... باشد. از آنجایی که تعداد کل ماشین‌های دو در ۱۶۵تاست، پس $a+d=۱۸۰$ نادرست است. فعلاً سه گزینه برای $a+d$ داریم: ۳۰، ۸۰ و ۱۳۰ که برای هرکدام تعداد $a+d$ یا تعداد ماشین‌های دارای هم سیستم دوربین عقب، هم ترمز ABS را به‌دست می‌آوریم:

$$a+d=۳۰\Rightarrow a+b=\frac{۹۰}{۵۰}(۱۲۰+۳۰)=۲۷$$

$$a+d=۸۰\Rightarrow a+b=\frac{۹}{۵۰}(۱۲۰+۸۰)=۳۶$$

$$a+d=۱۳۰\Rightarrow a+b=\frac{۹}{۵۰}(۱۲۰+۱۳۰)=۴۵$$

از طرفی داریم که ۴۰ درصد ماشین‌های مجهز به هر دو سیستم، ماشین دو در هستند، پس داریم:

$$a=۰/۴۰(a+b)=\frac{۲}{۵}(a+b)$$

چون a یک عدد طبیعی است، باید $a+b$ عددی باشد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، که از بین اعداد بالا فقط $a+b=۴۵$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

در نتیجه:

$$\Rightarrow a=\frac{۴}{۵}(۴۵)=۱۸$$

سؤال از ما تعداد ماشین‌های چهار در را خواسته که به هر دو سیستم مجهز هستند، یعنی b را خواسته است.

$$\Rightarrow b=(a+b)-a=۴۵-۱۸=۲۷$$

۲ـ گزینه «۳» وقتی با ۲۰ درصد سود ۹۶ تومان می‌فروشیم، قیمت تمام شده یک کیلو مخلوط برابر است با:

$$\frac{۹۶}{۱/۲}=۸۰$$

طبق فرمول میانگین وزنی داریم:

$$\frac{۶۰Q_A+۷۵Q_B+۱۰۰Q_C}{Q_A+Q_B+Q_C}=۸۰\Rightarrow ۶۰Q_A+۷۵Q_B+۱۰۰Q_C=۸۰Q_A+۸۰Q_B+۸۰Q_C$$

$$\Rightarrow ۲۰Q_C=۲۰Q_A+۵Q_B\Rightarrow ۴Q_C=۴Q_A+Q_B$$

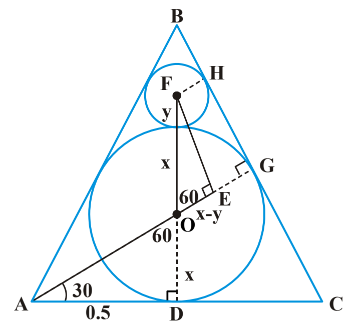
انتخاب $Q_A=۱$، $Q_B=۴$، $Q_C=۲$ مناسب است. البته مسأله جواب‌های دیگری هم دارد. اما در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۳) صحیح است. برای مثال اگر $Q_A=۳$ و $Q_B=۶$ باشد آن‌گاه $Q_C=\frac{۹}{۲}$ خواهد بود پس گزینه‌ی (۴) صحیح نیست.

۳ـ گزینه «۱» ارتباط به این شکل است که عدد قبل به علاوه‌ی عدد اول (شروع از ۲) می‌شود:

$$۱,۱+۲=۳,۳+۳=۶,۶+۵=۱۱$$

بنابراین ۵۹ باید با عدد اول ۱۹ جمع شود، که برابر با ۷۸ می‌شود.

۴ـ گزینه «۴»



روش اول: می‌دانیم که مرکز دایره محاط در دایره متساوی‌الاضلاع، محل تقاطع نیم‌سازهای زوایای مثلث و همچنین محل تقاطع ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث است. مثلث ADO مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰، ۶۰ و ۹۰ است. زاویه $O\hat{D}A$، ۹۰ درجه است؛ زیرا شعاع دایره بر خط مماس بر دایره عمود است. زاویه $O\hat{A}D$، ۳۰ درجه است؛ زیرا مرکز دایره محل تلاقی نیم‌سازهاست، پس پاره‌خط AD نیم‌ساز زاویه $\hat{A}$ از مثلث است که چون مثلث متساوی‌الاضلاع است زاویه $\hat{A}$، ۶۰ درجه است. پس داریم:

$$tg(O\hat{A}D)=tg(۳۰^\circ)=\frac{x}{۰/۵}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x=\frac{۰/۵}{\sqrt{۳}}=۰/۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

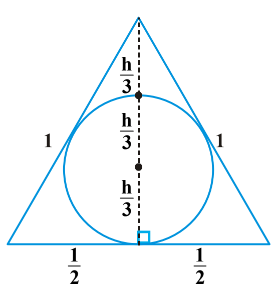
البته طبق فرمول کتاب می‌دانیم اگر شعاع دایره محاط درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع r باشد، طول اضلاع مثلث $۲\sqrt{۳}r$ می‌باشد، بنابراین بدون محاسبات فوق می‌شود گفت $۲\sqrt{۳}r=۱$ و لذا $r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$. حالا برای محاسبه‌ی شعاع دایره کوچک‌تر مثلث دیگری به اسم OEF به گونه‌ای می‌سازیم که ضلع EF موازی با ضلع CB مثلث بزرگ باشد. چون شعاع دایره بر خط مماس بر دایره عمود است، پس ادامه ضلع OE بر ضلع CB عمود می‌شود و چون ضلع EF مثلث کوچک‌تر موازی با ضلع CB مثلث بزرگ‌تر است، OE بر EF عمود است. از طرفی با توجه به موازی بودن دو خط EF و CB، فواصل آنها از هم در همه‌جا یکسان است، پس $FH=EG$ که FH در واقع شعاع دایره کوچک‌تر است که آن را y در نظر می‌گیریم؛ بنابراین طول ضلع OE برابر با اختلاف شعاع دو دایره است. $OE=x-y$

طول ضلع OF نیز با توجه به مماس بودن دو دایره برابر است با مجموع شعاع‌های دو دایره (توجه کنیم که F مرکز دایره کوچک‌تر است). $OF=x+y$

زاویه $E\hat{O}F$ ۶۰ درجه است.

$$\cos(E\hat{O}F)=\frac{x-y}{x+y}=\cos(۶۰^\circ)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x-y}{x+y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x-۲y=x+y\Rightarrow x=۳y\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۳}}{۶}}y=\frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$$

روش دوم: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، شعاع دایره‌ی محاطی برابر با $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع مثلث است.



طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم: $h^۲+(\frac{۱}{۲})^۲=۱^۲\Rightarrow h^۲=\frac{۳}{۴}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پس شعاع دایره بزرگ $R=\frac{۱}{۳}h=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است. اکنون توجه کنید که طبق قضیه‌ی تالس، دایره‌ی کوچک‌تر هم در یک مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر محاط شده است که ارتفاع آن مثلث $\frac{h}{۳}$ است. پس شعاع دایره کوچک برابر است با: $r=\frac{۱}{۳}(\frac{h}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$

۵ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌ی تعداد مثلث‌های موجود در شکل سعی می‌کنیم مثلث‌ها به ضلع ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را مطابق الگوی زیر شمارش کنیم. در هر مورد از قاعده مثلث شروع می‌کنیم.

روبه بالا ۱ تعداد مثلث به ضلع: $۶+۵+۴+۳+۲+۱=۲۱$

روبه پایین ۱ تعداد مثلث به ضلع: $۵+۴+۳+۲+۱=۱۵$

روبه بالا ۲ تعداد مثلث به ضلع: $۵+۴+۳+۲+۱=۱۵$

روبه پایین ۲ تعداد مثلث به ضلع: $۳+۲+۱=۶$

روبه بالا ۳ تعداد مثلث به ضلع: $۴+۳+۲+۱=۱۰$

روبه پایین ۳ تعداد مثلث به ضلع: ۱

روبه بالا ۴ تعداد مثلث به ضلع: $۳+۲+۱=۶$

روبه پایین ۴ تعداد مثلث به ضلع: ۰

روبه بالا ۵ تعداد مثلث به ضلع: $۲+۱=۳$

روبه پایین ۵ تعداد مثلث به ضلع: ۰

روبه بالا ۶ تعداد مثلث به ضلع: ۱

پس تعداد کل مثلث‌های قابل مشاهده در شکل برابر است با:

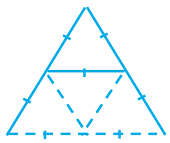
$$۲۱+۱۵+۱۵+۶+۱۰+۱+۶+۳+۱=۷۸$$

برای محاسبه‌ی تعداد شکل $\triangle$ در هر اندازه و هر جهتی کافی است ابتدا تعداد مثلث‌های به ضلع ۲ را از مرحله‌ی قبل در نظر بگیریم و سه برابر کنیم (چرا؟! چون اگر هر سه ضلع مثلث اصلی را به عنوان قاعده فرض کنیم می‌توانیم $\triangle$ یا $\triangleright$ یا $\triangleleft$ را داشته باشیم.)

دقت کنیم که شکل دقیقاً قسمتی از الگوی می‌باشد.

تعداد مثلث به ضلع ۲ $= ۱۵ + ۶ = ۲۱ \xrightarrow{\times ۳} = ۶۳$

چون تعداد در هر اندازه خواسته شده است، لذا در این مرحله سعی می‌کنیم تعداد مثلث‌های به ضلع ۴ را محاسبه کنیم و به دلیل قبلی در ۳ ضرب کنیم!

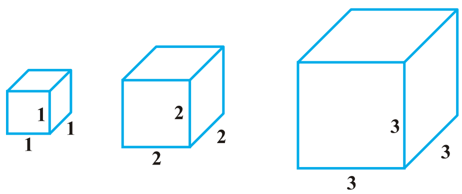


تعداد مثلث به ضلع ۴ $= ۶ \xrightarrow{\times ۳} = ۱۸$

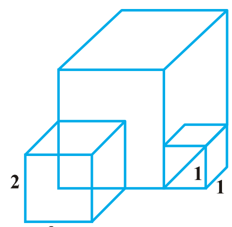
با استدلال مشابه: تعداد مثلث به ضلع ۶ $= ۱ \xrightarrow{\times ۳} = ۳$

پس تعداد شکل در هر اندازه و هر جهتی برابر است با: $۳ + ۱۸ + ۶۳ = ۸۴$ که با تعداد کل مثلث‌ها، ۶ عدد اختلاف دارد.

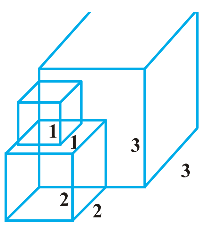
۶ـ گزینه «۴» مکعب‌ها به ضلع ۱، ۲ و ۳ هستند.



باید طوری سه مکعب را کنار هم قرار دهیم که بیشترین اشتراک را با هم داشته باشند. به‌عنوان مثال در حالت زیر، فقط مکعب به ضلع ۱ و مکعب به ضلع ۲ با مکعب بزرگ اشتراک دارند که مسلماً سطح بیرونی شکل کمترین عدد نخواهد شد.



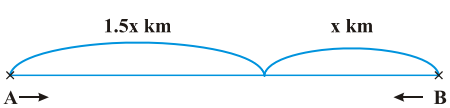
اگر به‌صورت زیر سه مکعب را کنار هم قرار دهیم، کمترین سطح بیرونی را خواهیم داشت:



$$\text{سطح بیرونی} = ۵ \times (۳ \times ۳) + ۴ \times (۲ \times ۲) + ۴ \times (۱ \times ۱) + (۳ \times ۳ - ۲ \times ۲ - ۱ \times ۱) + (۲ \times ۲ - ۱ \times ۱) = ۴۵ + ۱۶ + ۴ + ۴ + ۳ = ۷۲$$

۷ـ گزینه «۲» فرض کنیم دوچرخه‌سوار اول A و دوچرخه‌سوار دوم B باشد که اولی از نقطه A به سمت B و دومی از نقطه B به سمت A حرکت می‌کند. در لحظه برخورد اگر B به اندازه x کیلومتر طی کرده باشد، A باید ۱/۵x طی کند.

$$\text{متحرک } B: \begin{cases} \text{جابجایی} = x \\ \text{زمان} = t \\ \text{سرعت} = V_B \end{cases} \qquad \text{متحرک } A: \begin{cases} \text{جابجایی} = ۱/۵x \\ \text{زمان} = t \\ \text{سرعت} = V_A \end{cases}$$



$$\text{زمان} = \frac{\text{جابجایی}}{\text{سرعت}} \Rightarrow \frac{۱/۵x}{V_A} = \frac{x}{V_B} \Rightarrow V_A = ۱/۵ V_B$$

دوچرخه‌سوار A برای رسیدن از نقطه برخورد به نقطه B باید x کیلومتر را در مدت $\frac{۴}{۳}$ ساعت طی کند. همچنین دوچرخه‌سوار B نیز پس از ۲ ساعت باید در ۱۰ کیلومتری A باشد. یعنی در مدت ۲ ساعت ۱/۵x − ۱۰ کیلومتر را طی می‌کند.

$$\text{متحرک } B: \begin{cases} \text{جابجایی} = ۱/۵x - ۱۰ \\ \text{زمان} = ۲ \\ \text{سرعت} = V_B \end{cases} \qquad \text{متحرک } A: \begin{cases} \text{جابجایی} = x \\ \text{زمان} = \frac{۴}{۳} \\ \text{سرعت} = V_A \end{cases}$$

$$۱/۵x - ۱۰ = ۲ \times V_B \qquad x = \frac{۴}{۳} V_A$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۱/۵x - ۱۰} = \frac{\frac{۴}{۳} \times ۱/۵ V_B}{۲ \times V_B} \Rightarrow x = ۲۰ \Rightarrow AB \text{ طول} = ۲/۵ \times x = ۲/۵ \times ۲۰ = ۵۰ km$$

۸ــ گزینه «۲» دستگاه‌ها را A، B و C می‌نامیم. اگر A کاری را در t ساعت انجام دهد، B همان کار را در $(t-۲)$ ساعت و B و C باهم همان کار را در $(t-۴)$ ساعت انجام می‌دهند. همچنین بین A، B و C نیز ارتباط خاصی برقرار است. هدف محاسبه مقدار t می‌باشد.

$$A+B+C=۱/۵(B+A)\ \Rightarrow C=\frac{۱}{۲}(B+A)$$

$$\begin{matrix}(B+C)\times(t-۴/۸)=w\\ A\times t=w\\ B\times(t-۲)=w\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C=\frac{۱}{۲}(B+A)=\frac{۱}{۲}(\frac{w}{t}+\frac{w}{t-۲})\\ A=\frac{w}{t}\\ B=\frac{w}{t-۲}\end{cases}$$

$$B+C=\frac{w}{t-۴}\ \Rightarrow\frac{w}{t-۲}+\frac{w}{۲t}+\frac{w}{۲(t-۲)}=\frac{w}{t-۴}\ \Rightarrow\frac{۲t+t-۲+t}{۲t\times(t-۲)}=\frac{۱}{t-۴/۸}\ \Rightarrow\frac{۴t-۲}{۲t(t-۲)}=\frac{۱}{t-۴/۸}$$

با طرفین‌وسطین کردن تساوی فوق به معادله درجه دومی می‌رسیم که ریشه‌های آن $t=۸$ و $t=\frac{۳}{۵}$ خواهد بود. از طرفی چون t باید از ۲ بزرگ‌تر باشد، پس فقط $t=۸$ قبول است.

۹ــ گزینه «۲» فرض کنیم دو قطعه هر کدام به وزن A کیلوگرم داریم که یکی حاوی $\%x$ و دیگری حاوی $\%y$ کروم باشند. اگر هر دو را با هم ترکیب کنیم ۱۲ کیلوگرم کروم خالص داریم:

$$A\times x+A\times y=۱۲$$

اگر قطعه $\%x$ وزنش $۲A$ باشد، داریم:

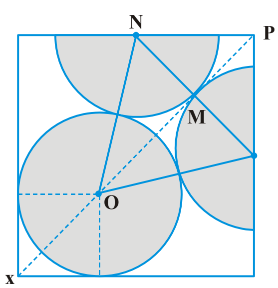
$$۲A\times x+A\times y=۱۶$$

از طرفی $x=y-۵$، بنابراین:

$$\begin{cases}A(x+y)=۱۲\\ A(۲x+y)=۱۶\end{cases}\xrightarrow{\text{بر هم تقسیم}}\frac{x+y}{۲x+y}=\frac{۱۲}{۱۶}\Rightarrow\frac{۲y-۵}{۳y-۱۰}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=۱۰$$

پس قطعات، ۵ و ۱۰ درصد کروم دارند.

۱۰ــ گزینه «۱» اگر مراکز نیم‌دایره‌ها و دایره را به هم وصل کنیم، یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌شود. از طرفی اگر از مرکز دایره بر اضلاع مربع شعاع وارد کنیم، شعاع وارد بر نقطه مماس بر نقطه تماس عمود خواهد شد.



قطر مربع خارجی از مجموع قطعات OX، OM و MP ساخته شده است.

$$OX=\text{قطر مربع به ضلع واحد}=۱\times\sqrt{۲}$$

$$OM=\text{ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲}=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

با توجه به تقارن شکل و اینکه $NM\perp MP$ است، پس $\overset{\Delta}{NMP}$ متساوی‌الساقین به رأس M می‌باشد. پس:

$$NM=MP=\text{واحد}$$

$$\Rightarrow\text{قطر مربع خارجی}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۱$$

$$\text{مساحت مربع}=\frac{۱}{۲}\times(\text{قطر})^{۲}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۱)^{۲}=۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}$$

آزمون (۲)

۱۱ـ گزینه «۴» ظاهراً سؤال وقت‌گیری است، ولی با کمی دقت حتی در ۲۵ ثانیه هم قابل پاسخ‌گویی به سؤال هستیم. ابتدا روش کلی حل سؤال را بررسی می‌کنیم. در ابتدا با نگاه به گزینه‌ها می‌بینیم که مقدار اول یعنی وقتی شرایط الف برقرار باشد، برای چهار گزینه متفاوت است، پس کافی است فقط با در نظر گرفتن شرایط الف مسأله را حل کنیم.

در این سؤالات بهتر است چند مرحله ابتدایی را انجام دهیم تا الگویی برای حل سؤال بیابیم. بعد از یک دقیقه شیر A، ۱۰۰ لیتر آب وارد مخزن می‌کند، در یک دقیقه بعدی شیر B، ۲۵ لیتر به آن اضافه می‌کند، سپس در دقیقه سوم شیر C، ۵۰ لیتر از آب را می‌کاهد. پس بعد از سه دقیقه ۷۵ لیتر آب در مخزن وجود دارد. پس مثلاً بعد از ۶ دقیقه ۱۵۰ لیتر آب در مخزن است، بعد از ۳۰ دقیقه حجم آب برابر ۷۵۰ لیتر است. چون ملاک لحظه‌ای است که مخزن برای بار اول پر می‌شود، باید نزدیک به عدد ۷۰۰۰ را بیابیم که بر ۷۵ بخش‌پذیر باشد، چرا که در پایان کار ترتیب باز شدن شیرها مهم است. ۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است و بر ۳. پس عددی که بر ۷۵ بخش‌پذیر است باید بر ۲۵ و ۳ بخش‌پذیر باشد. پس از ۷۰۰۰ که خود بر ۲۵ بخش‌پذیر است و بر ۳ نیست، ۲۵ تا ۲۵ تا پایین می‌آیم تا به عددی برسیم که بر ۳ بخش‌پذیر است. ۶۹۰۰ اولین عددی است که این ویژگی را دارد. حاصل تقسیم ۶۹۰۰ بر ۷۵ برابر ۹۲ است، یعنی پس از ۹۲ تا زمان سه دقیقه‌ای یعنی ۲۷۶ دقیقه به حجم آب ۶۹۰۰ لیتر می‌رسیم. حال باید شیر A باز شود. از انجا که شیر A در یک دقیقه ۱۰۰ لیتر آب وارد می‌کند، پس از یک دقیقه حجم آب برابر با ۷۰۰۰ خواهد شد. یعنی نهایتاً در ۲۷۷ دقیقه مخزن پر می‌شود.

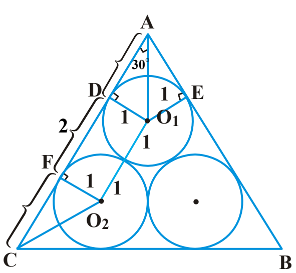
تا اینجا گزینه پاسخ مشخص است. برای بخش‌های «ب» و «پ» نیز از تحلیل مشابه استفاده می‌شود. یعنی ابتدا برای چند دقیقه اولی الگویی بیابیم سپس آن را تعمیم دهیم.

پاسخ بسیار سریع: با بررسی شرایط می‌بینیم که در حالت "پ" ابتدا شیر B باز است که ۲۵ لیتر آب وارد می‌کند، سپس شیر C باز است که چون می‌تواند در دقیقه ۵۰ لیتر آب خارج کند قاعدتاً ۲۵ لیتر وارد شده از سوی شیر B را خارج می‌کند. حال پس از دو دقیقه ترتیب همان ترتیب حالت "الف" و مخزن نیز خالی است. پس قاعدتاً زمان پر شدن مخزن در حالت "پ" دو دقیقه بیشتر از زمان برای پر شدن در حالت "الف" است که این شرایط تنها در گزینه (۴) دیده می‌شود. پس پاسخ گزینه (۴) است.

۱۲ـ گزینه «۴» سؤال نسبتاً راحتی است؛ اعداد طبیعی با شروع از عدد ۱ به ترتیب ابتدا به توان عدد ۴ رسیده‌اند، سپس ۳، ۲، ۱ و ... . هر عدد زمانی که به توان رسیده است، توان آن یک واحد از عدد قبلی کمتر بوده است. ارتباط به شکل زیر است:

$$۱^{۴}, ۲^{۳}, ۳^{۲}, ۴^{۱}, ۵^{۰}, ?=۶^{-۱}=\frac{۱}{۶}$$

۱۳ـ گزینه «۳» مرکز دو تا از دایره‌ها را طبق شکل به هم وصل می‌کنیم، فاصله این دو مرکز از هم برابر با $۱+۱=۲\text{cm}$ است. $O_۱O_۲=۲\text{cm}$.



از هرکدام از این مراکز دو دایره، به رأس نزدیک‌تر از مثلث، خطی رسم می‌کنیم، در مثلث $O_۱AD$ زاویه $O_۱\hat{A}D$، ۳۰ درجه است. برای نشان دادن اینکه چرا این زاویه ۳۰ درجه است از $O_۱$ به نقطه تماس دایره با ضلع دیگر یعنی نقطه OE خطی رسم می‌نماییم. OE بر AB عمود است (عمود بودن شعاع بر خط مماس بر دایره)،

$AD=AE \Leftarrow$ زیرا طول دو خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج از دایره با هم برابرند. پس دو مثلث ODA و OEA از طریق حالت ض‌زض یکسان هستند. پس $O_۱\hat{A}E=O_۱\hat{A}D$ و چون $\hat{A}$، ۶۰ درجه است، $O_۱\hat{A}D=O_۱\hat{A}E=۳۰^{\circ}$. در نتیجه داریم:

$$tg(O_۱\hat{A}D)=\frac{۱}{AD}=tg(۳۰^{\circ})=\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow AD=\sqrt{۳}$$

به طریق مشابه طول CF نیز برابر با $\sqrt{۳}$ می‌شود.

پس داریم:

$$AC=AD+DF+FC=\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۲+۲\sqrt{۳}$$

۱۴ـ گزینه «۱» وقتی می‌توانیم N کودک را به ۹ روش دسته‌بندی کنیم، یعنی N باید ۹ مقسوم‌علیه داشته باشد. می‌دانیم اعداد مربع کامل تعداد مقسوم‌علیه فرد دارند و اعدادی که مربع کامل نباشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌ها زوج است. مثلاً مقسوم‌علیه‌های ۲۵ اعداد ۱ و ۵ و ۲۵ است و تعدادشان فرد است. کوچک‌ترین عدد مربع کامل که ۹ مقسوم‌علیه دارد عدد ۳۶ است.

$$۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲$$

$$\text{مقسوم‌علیه ۳۶} = ۲^a \times ۳^b \;;\; a = \{۰,۱,۲\} \;,\; b = \{۰,۱,۲\} \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها} = ۳ \times ۳ = ۹$$

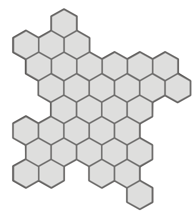
اگر دو کودک کم کنیم یعنی ۳۴ کودک، تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۴ موردنظر سؤال است.

$$۳۴ = ۲ \times ۱۷ = ۲^۱ \times ۱۷^۱$$

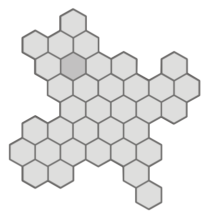
$$\text{مقسوم‌علیه ۳۴} = ۲^x \times ۱۷^y \;;\; x = \{۰,۱\} \;,\; y = \{۰,۱\} \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه ۳۴} = ۲ \times ۲ = ۴$$

پس ۳۴ کودک را می‌توان در دسته‌های ۱ و ۲ و ۱۷ و ۳۴ تایی دسته‌بندی کرد.

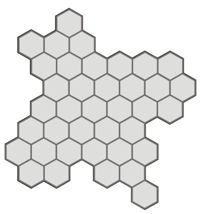
۱۵ـ گزینه «۳» شکل‌های B و C هر کدام با ۳۵ شش‌ضلعی و شکل A با ۳۸ شش‌ضلعی کامل می‌شود (کافی است در هر شکل از نقطه‌ای خاص شروع به تکمیل شکل کنیم) هر کدام از شکل‌های A، B و C توسط شش‌ضلعی‌هایی که در زیر آورده می‌شود تکمیل می‌گردد.



شکل مکمل (C)

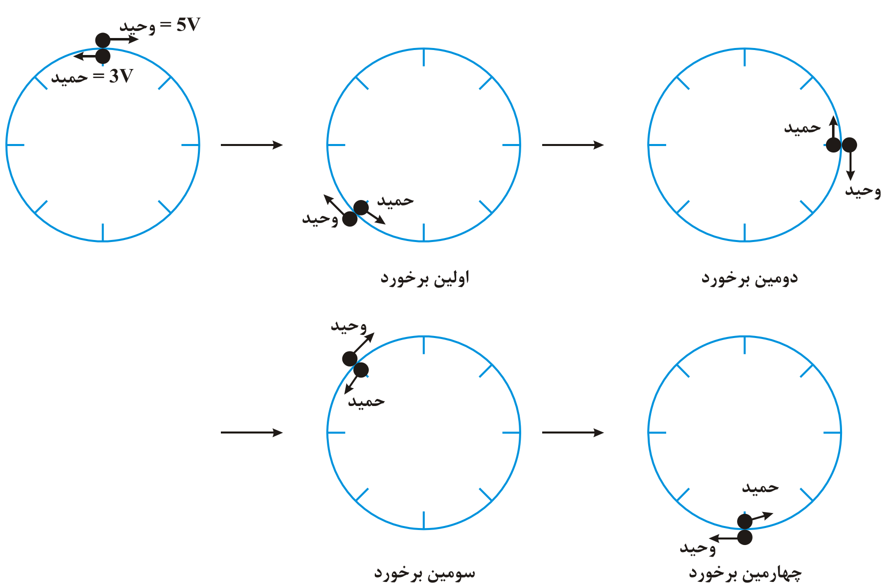


شکل مکمل (B)



شکل مکمل (A)

۱۶ـ گزینه «۲» فرض کنیم سرعت وحید ۵v باشد، آنگاه سرعت حمید $۳v = ۵v \times \frac{۳}{۵}$ خواهد بود. از آنجاکه جابه‌جایی ارتباط مستقیم با سرعت دارد، پس در یک زمان مشخص، نسبت جابه‌جایی وحید به جابه‌جایی حمید ۵ به ۳ خواهد شد. پس اگر محیط دایره را (که ۴۰۰ متر است) به ۸ قسمت مساوی تقسیم کنیم داریم:

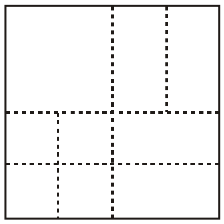


در لحظه‌ای که چهارمین برخورد رخ می‌دهد، وحید ۲/۵ محیط دایره را طی کرده است.

$$\begin{cases} \text{جابه‌جایی حمید} = ۱/۵ \times ۴۰۰ = ۶۰۰ \text{ متر} \\ \text{زمان} = ۲۰۰ \text{ ثانیه} \\ \text{سرعت حمید} = \frac{۶۰۰}{۲۰۰} = ۳\frac{m}{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{جابه‌جایی وحید} = ۲/۵ \times ۴۰۰ = ۱۰۰۰ \text{ متر} \\ \text{زمان} = ۲۰۰ \text{ ثانیه} \\ \text{سرعت وحید} = \frac{۱۰۰۰}{۲۰۰} = ۵\frac{m}{s} \end{cases}$$

پس سرعت وحید، $۲\frac{m}{s}$ از سرعت حمید بیشتر است.

۱۷ـ گزینه «۳»



پس از آنکه شکل را مطابق الگوی فوق تا می‌زنیم و در مرحله آخر برش می‌دهیم، شکل طوری برش می‌خورد که یک قطعه آن دقیقاً $\frac{۱}{۴}$ مربع می‌باشد. ۴ قطعه به اندازه $\frac{۱}{۸}$ مربع اولیه و ۴ قطعه نیز به اندازه $\frac{۱}{۱۶}$ مربع اولیه ایجاد می‌شود. دقت کنیم که قسمت مرکزی محل تا خوردن مربع بزرگ، قسمت‌های دولا که لبه هستند به $\frac{۱}{۸}$ مربع و لبه‌ها نیز به $\frac{۱}{۱۶}$ تقسیم می‌شوند.

پس شکل در مجموع به ۹ قسمت تقسیم می‌شود.

۱۸ـ گزینه «۱» تلمبه‌های A، B و C را درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که بین سرعت آنها ارتباط زیر برقرار است:

$$B = ۲A \quad , \quad C = B + ۸$$

هر متر مکعب آب را نیز یک واحد کار درنظر می‌گیریم، در این‌صورت A در مدت زمان t، ۶۰۰ واحد کار انجام می‌دهد. B در مدت t' باید ۲۴۰ واحد کار انجام دهد و C نیز در مدت t'' باید ۱۴۴۰ واحد کار انجام دهد. $۱۶۸۰ - ۲۴۰ = ۱۴۴۰$

همچنین ارتباط بین t و t' و t'' نیز در صورت سؤال مشخص شده است.

$$A \times t = ۶۰۰ \; ; \; B \times t' = ۲۴۰ \; ; \; C \times t'' = ۱۴۴۰ \; ; \; C \times (t + ۵) = ۱۶۸۰ \; ; \; t'' + t' = ۶ + t$$

$$\Rightarrow A = \frac{۶۰۰}{t} \; ; \; B = \frac{۲۴۰}{t'} \; ; \; C = \frac{۱۶۸۰}{t + ۵} = \frac{۱۴۴۰}{t''}$$

$$B = ۲A \;\Rightarrow \frac{۲۴۰}{t'} = ۲ \times \frac{۶۰۰}{t} \;\Rightarrow t = ۵t'$$

$$\frac{۱۶۸۰}{t + ۵} = \frac{۱۴۴۰}{t''} \;\Rightarrow ۶t + ۳۰ = ۷t''$$

$$t'' + t' = ۶ + t \;\Rightarrow \frac{۶}{۷}t + \frac{۳۰}{۷} + \frac{t}{۵} = ۶ + t \;\Rightarrow t = ۳۰$$

در مورد تلمبه A داریم:

$$A \times t = ۶۰۰ \;\Rightarrow A = \frac{۶۰۰}{t} \;\Rightarrow A = \frac{۶۰۰}{۳۰} = ۲۰$$

یعنی در هر ساعت می‌تواند ۲۰ متر مکعب آب بیرون بکشد.

۱۹ـ گزینه «۳» فرض کنیم ظرف ۴ کیلوگرمی و ۶ کیلوگرمی به ترتیب x% و y% اسید داشته باشند. مطابق فرمول زیر داریم:

$$\text{درصد اسید محلول حاصل} = \frac{\text{حجم اولی} \times \text{درصد اولی} + \text{حجم دومی} \times \text{درصد دومی}}{\text{حجم اولی} + \text{حجم دومی}} \Rightarrow ۳۵ = \frac{۴ \times x + ۶ \times y}{۴ + ۶} \Rightarrow ۴x + ۶y = ۳۵۰ \Rightarrow ۲x + ۳y = ۱۷۵$$

در حالت دوم فرض کنیم از هر ظرف M لیتر برداریم:

$$۳۶ = \frac{M \times x + M \times y}{۲M} \Rightarrow (x + y) \times M = ۷۲M \Rightarrow x + y = ۷۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳y = ۱۷۵ \\ x + y = ۷۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۳۱ \\ x = ۴۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{اسید اولی} = \frac{۴۱}{۱۰۰} \times ۴ = ۱/۶۴ \\ \text{اسید دومی} = \frac{۳۱}{۱۰۰} \times ۶ = ۱/۸۶ \end{cases}$$

البته دقت کنیم که ۱/۶۴ و ۱/۸۶ برحسب کیلوگرم هستند.

۲۰ـ گزینه «۴» فرض کنیم N کودک داشته باشیم که به هر کدام x عدد اسباب‌بازی بدهیم.

$$\text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = N \times x \xrightarrow{x = N - ۹} \text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = N(N - ۹)$$

اگر $N = ۹$ و به هر کودک $(N - ۹ + ۱)$ اسباب‌بازی بدهیم، اسباب‌بازی کم می‌آید و به همه کودکان نمی‌رسد. یعنی به زبان ریاضی:

$$۹ \times (N - ۹ + ۱) > N(N - ۹) \;\Rightarrow ۹N - ۷۲ > N^۲ - ۹N \;\Rightarrow N^۲ - ۱۸N + ۷۲ < ۰ \;\Rightarrow (N - ۶)(N - ۱۲) < ۰ \;\Rightarrow ۶ < N < ۱۲ \text{ و } N > ۹$$

پس $N = ۱۰$ و $N = ۱۱$ قبول است، ولی از آنجا که N باید فرد باشد، پس $N = ۱۱$.

$$\text{تعداد اسباب‌بازی هر بچه} \quad x = N - ۹ = ۱۱ - ۹ = ۲$$

$$\text{تعداد کل اسباب‌بازی‌ها} = ۲ \times ۱۱ = ۲۲$$

آزمون (۳)

۲۱ـ گزینه «۱» مجموع ارقام عدد در ۲ ضرب می‌شود و با همان عدد جمع می‌شود و به عنوان عدد بعد در نظر گرفته می‌شود.

$$۵\times۲+۵=۱۵\ ,\ (۵+۱)\times۲+۱۵=۲۷\ ,\ (۲+۷)\times۲+۲۷=۴۵$$

$$(۴+۵)\times۲+۴۵=۶۳\ ,\ (۶+۳)\times۲+۶۳=۸۱\ ,\ (۸+۱)\times۲+۸۱=۹۹\ \Rightarrow ?=(۹+۹)\times۲+۹۹=۳۶+۹۹=۱۳۵$$

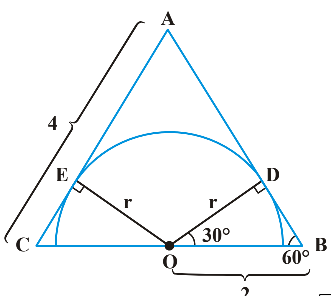
۲۲ـ گزینه «۳» وقتی ۲۰ مرد کار A را در ۱۲ روز کاری ۸ ساعته انجام می‌دهند، یعنی کار را در ۸×۱۲ ساعت انجام می‌دهند، در هر ساعت $\frac{۱}{(۸\times۱۲)}$ از کار را انجام می‌دهند، پس یک مرد در یک ساعت $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۲۰)}$ از کار A را انجام می‌دهد. به طریق مشابه یک زن در یک ساعت $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۲۴)}$ از کار و یک پسر $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۴۰)}$ از کار را انجام می‌دهد. حال اگر کار B چهار برابر بزرگ‌تر از کار A باشد، نسبتی از کار که در یک ساعت از سوی مرد و زن و پسر قابل انجام است به $\frac{۱}{۴}$ نسبت‌های فعلی می‌رسد، یعنی یک مرد و زن و پسر به ترتیب در هر ساعت $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۲۰\times۴)}$ ، $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۲۴\times۴)}$ و $\frac{۱}{(۸\times۱۲\times۴۰\times۴)}$ از کار B را می‌توانند انجام دهند.

حال X مرد داریم و شش زن و دو پسر که این کار B را در ۱۲ روز کاری ۵ ساعته یعنی در ۵×۱۲ ساعت انجام می‌دهند. پس با توجه به مقدار کار از B که هر مرد و زن و پسر می‌توانند انجام دهند و تعداد ساعت‌های کار می‌توان X را به‌دست آورد.

$$X\times\left(\frac{۱}{۱۲\times۸\times۲۰\times۴}\right)+۲\times\left(\frac{۱}{۸\times۱۲\times۴۰\times۴}\right)+۶\times\left(\frac{۱}{۸\times۱۲\times۲۴\times۴}\right)=\frac{۱}{۱۲\times۵}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } ۴\times۱۲}\ \frac{X}{۱۶۰}+\frac{۱}{۱۶۰}+\frac{۱}{۳۲}=\frac{۴}{۵}\ \Rightarrow\ \frac{X+۱+۵}{۱۶۰}=\frac{۱۲۸}{۱۶۰}\ \Rightarrow X=۱۲۲$$

۲۳ـ گزینه «۱» شعاع نیم‌دایره را رسم می‌نماییم، شعاع بر خط مماس بر دایره یعنی AB عمود است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، هریک از زوایای آن ۶۰° است؛ در نتیجه مثلث $\overset{\Delta}{ODB}$ مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰°، ۹۰° و ۶۰° است. توجه کنیم که طول ضلع OB نصف طول ضلع مثلث بزرگ‌تر یعنی نصف BC است. پس: $OB=۲$



$$OB=۲\Rightarrow \cos(D\hat{O}B)=\frac{r}{۲}=\cos(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow r=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow \text{طول قطر}=۲\times r=۲\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

دقت کنیم که سؤال از ما طول قطر را خواسته است، نه طول شعاع را. برخی ممکن است از روی بی‌دقتی وقتی $r=\sqrt{۳}$ را بیابند، سریع گزینه (۲) را انتخاب کنند که اشتباه است.

ممکن است سؤال پیش بیاید که چرا $OB=\frac{۱}{۲}(BC)$ یا اینکه چرا ادعا می‌کنیم مرکز نیم‌دایره وسط BC است. از راه‌های مختلف می‌توان آن را نشان داد، مثلاً با رسم شعاع OE، مثلث OEC مثلثی یکسان با ODB می‌شود؛ زیرا $r=r$، $O\hat{E}C=O\hat{D}B=۹۰^\circ$ و چون $AB=AC$ (متساوی‌الاضلاع) و $AD=AE$ (مساوی بودن طول دو مماس که از نقطه‌ای واحد بر دایره رسم می‌شوند)، پس $AB-AD=AC-AE\Rightarrow BD=CE$، پس دو مثلث ODB و OEC به دلیل مساوی بودن دو ضلع و زاویه بین یکسان هستند، پس داریم: $OB=OC\Rightarrow OB=OC=\frac{۱}{۲}BC=۲$

۲۴ـ گزینه «۱» می‌دانیم که اگر بخواهیم n شیء مختلف را در k دسته مختلف طوری قرار دهیم که در دسته $k_۱$، $n_۱$ عضو و در دسته $k_۲$، $n_۲$ عضو و ... در دسته kام، n عضو باشد، از رابطه زیر تعداد حالات را به دست می‌آوریم:

$$\binom{n}{n_۱ n_۲ \cdots n_k} = \frac{n!}{n_۱! n_۲! \cdots n_k!} \qquad n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$$

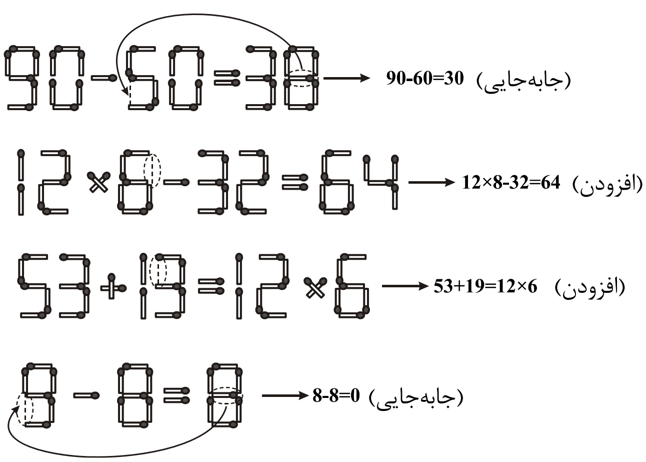
در این سؤال شی‌ها متفاوت هستند (توپ) ولی جعبه‌ها یکسان هستند. نحوه‌های مختلف تخصیص توپ‌ها به جعبه‌ها عبارتند از:

جعبه	۱	۲	۳	
تعداد توپ	۱	۱	۳	$\Rightarrow \frac{۵!}{۱!۱!۳!} = ۵ \times ۴ = ۲۰$
	۱	۳	۱	$\Rightarrow \frac{۵!}{۳!} = ۲۰$
	۱	۲	۲	$\Rightarrow \frac{۵!}{۲!۲!} = ۵۰ \times ۲ \times ۳ = ۳۰$
	۲	۱	۲	$\Rightarrow ۳۰$
	۲	۲	۱	$\Rightarrow ۳۰$
	۳	۱	۱	$\Rightarrow ۲۰$

برای حالتی که جعبه‌ها متفاوت باشند $۱۵۰ = (۳۰)۳ + (۲۰)۳ =$ تعداد

از طرفی چون ۳ تا جعبه با هم تفاوتی ندارند، پس حاصل را باید بر !۳ تقسیم کرد. $۲۵ = \frac{۱۵۰}{۶} = \frac{۱۵۰}{۳!} =$ تعداد برای حالتی که جعبه‌ها یکسان هستند.

۲۵ـ گزینه «۱» می‌توان به صورت زیر روابط را به تساوی تبدیل کرد.



پس در ۴ مورد می‌توان با افزودن یا جابه‌جا کردن دقیقاً یک چوب کبریت به تساوی رسید.

۲۶ـ گزینه «۳» سرعت کشتی را V_K فرض می‌کنیم و سرعت جریان آب نیز ۲ کیلومتر در ساعت است. زمانی‌که کشتی در جهت آب حرکت کند، سرعت نسبی آن $V_K + ۲$ است و زمانی‌که خلاف جهت آب حرکت کند، سرعت نسبی آن $V_K - ۲$ می‌باشد. از ساعت ۹ صبح تا ۱۷ کشتی یک ساعت توقف کرده است، یعنی جمعاً ۷ ساعت در راه بوده است. طول مسیر نیز ۴۸ کیلومتر است.

$$t_{رفت} = \frac{۴۸}{V_K + ۲} \; ; \; t_{برگشت} = \frac{۴۸}{V_K - ۲} \qquad t_{رفت} + t_{برگشت} = ۷$$

$$\Rightarrow ۴۸\left(\frac{۱}{V_K + ۲} + \frac{۱}{V_K - ۲}\right) = ۷ \Rightarrow ۴۸ \times \frac{۲V_K}{(V_K + ۲)(V_K - ۲)} = ۷ \Rightarrow ۹۶V_K = ۷(V_K^۲ - ۴) \Rightarrow V_K = ۱۴$$

۲۷ـ گزینه «۲» لوله‌های کوچک و بزرگ را به ترتیب با K و B نشان می‌دهیم. هر متر مکعب آب را نیز یک واحد کار درنظر می‌گیریم. بر این اساس در مورد روز اول و دوم و سوم می‌توانیم معادلات زیر را تنظیم کنیم:

روز اول هر دو با هم ۱۴ مترمکعب آب ریختند : $(K+B)\times t=۱۴$ (۱)

اگر روز اول t ساعت کار انجام شده باشد، روز دوم ۵ ساعت بیشتر کار انجام شده است، یعنی $t+۵$ ساعت روز دوم کار انجام شده است.

روز دوم، لوله کوچک‌تر ۵ ساعت بیشتر از روز اول کار کرد و ۱۴ مترمکعب آب ریخت : $K\times(t+۵)=۱۴$ (۲)

روز سوم نیز باید $t+۵$ ساعت کار انجام شده باشد، فرض کنیم t' ساعت را لوله کوچک و بزرگ با هم باشند، پس $t+۵-t'$ ساعت را لوله بزرگ به تنهایی فعالیت کرده است.

روز سوم به همان مدتی‌که روز دوم کار کرده بودند، : $(K+B)\times t'=۲۱$ (۳)

کار کردند، به مدت t' با هم بودند و بقیه زمان را فقط لوله بزرگ‌تر فعال بود $B\times(t+۵-t')=۲۰$ (۴)

هدف محاسبه راندمان K و B است:

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۳)}\begin{cases}K+B=\dfrac{۱۴}{t}\\ K+B=\dfrac{۲۱}{t'}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۴}{t}=\frac{۲۱}{t'}\Rightarrow t'=\frac{۳}{۲}t\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)\text{ و }(۴)}\left(\frac{۱۴}{t+۵}+\frac{۲۰}{۵-\frac{۱}{۲}t}\right)\times t=۱۴\Rightarrow t=۲$$

$$K=\frac{۱۴}{t+۵}\xrightarrow{t=۲}K=۲$$

$$(K+B)\times t=۱۴\xrightarrow[t=۲]{K=۲}(۲+B)\times ۲=۱۴\Rightarrow B=۵$$

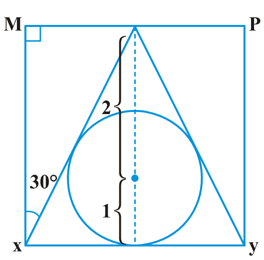
۲۸ـ گزینه «۳» وقتی یک ماده خام را از ناخالصی پاک می‌کنیم، در واقع فقط میزان ناخالصی‌ها را کاهش می‌دهیم و از میزان خالصی آن چیزی کم نمی‌شود. فرض کنیم M کیلوگرم ابتدای کار از ماده خام داشته باشیم و پس از پاک کردن n کیلوگرم از آن باقی بماند:

$$M\begin{cases}۰/۲M & \text{ناخالص}\\ ۰/۸M & \text{خالص}\end{cases}\xrightarrow{\text{پس از پاک کردن}}n\begin{cases}۰/۹۵n & \text{خالص}\\ ۰/۰۵n & \text{ناخالص}\end{cases}$$

قرار است پس از پاک کردن، ۱۶۰ کیلوگرم از ماده بماند، یعنی:

$$n=۱۶۰\begin{cases}۰/۹۵\times۱۶۰=۱۵۲ & \text{کیلوگرم خالص}\\ ۰/۰۵\times۱۶۰=۸ & \text{کیلوگرم ناخالص}\end{cases}$$

البته میزان خالصی موجود در ماده‌ی اولیه و ماده پس از پاک‌سازی با هم برابر است: $۱۵۲=۰/۸M\Rightarrow M=۱۹۰\text{kg}$



۲۹ـ گزینه «۴» $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است و دایره کوچک دایره محاطی آن می‌باشد. مرکز دایره و مثلث بر هم منطبق است. می‌دانیم فاصله مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع از قاعده‌ی $\frac{۱}{۳}$ کل ارتفاع می‌باشد. از طرفی چون شعاع دایره کوچک واحد می‌باشد، پس ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ۳ می‌باشد:

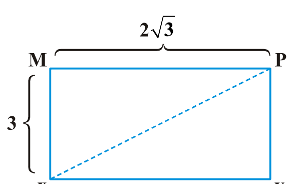
$$\text{ارتفاع متساوی‌الاضلاع}=\text{ضلع مثلث}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۳=\text{ضلع مثلث}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\text{ضلع مثلث}=۲\sqrt{۳}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است، پس:

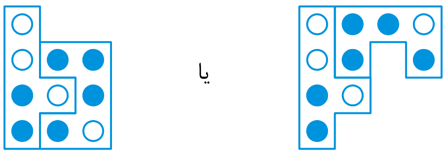
$$MN=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۳}=\sqrt{۳}=NP$$

$$\overset{\Delta}{MNX}\text{ فیثاغورث در}: Mx=\sqrt{xN^۲-MN^۲}=\sqrt{(۲\sqrt{۳})^۲-(\sqrt{۳})^۲}\Rightarrow Mx=۳$$



$$xP=\text{قطر مستطیل}=\sqrt{۳^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲۱}$$

۳۰ـ گزینه «۳» بیان دیگر سؤال می‌تواند این باشد که: یک مستطیل ۶×۴ به ۵ قطعه برش‌خورده است که تمام قطعات یک رو چاپ شده‌اند. جای یک قطعه در سمت چپ مستطیل معلوم است. با استفاده از ۴ قطعه دیگر، پازل (جورچین) را کامل کنید. قطعه $\cup$ شکل می‌تواند به‌صورت $\cap$ در بالا قرار گیرد یا به‌صورت $\supset$ به قطعه سمت چپ وصل شود.



با توجه به اینکه مسابقات در ۶ روز انجام شده است، قطعه مستطیلی شکل فقط می‌تواند گوشه بالای سمت راست باشد. با توجه به اینکه دو قطعه L شکل داریم و جایگاه‌های قطعه $\cup$ شکل، می‌توانیم مستطیل ۶×۴ را به دو صورت مجزای زیر تکمیل کنیم:

تیم‌ها	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه	شنبه
A	○	●	○	○	●	●
B	○	●	●	●	●	○
C	●	○	●	○	○	○
D	●	○	○	●	○	○

یا

تیم‌ها	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه	شنبه
A	○	●	●	○	○	○
B	○	●	○	●	●	○
C	●	○	○	●	●	●
D	●	○	●	○	○	●

اکنون به این مطلب توجه کنید:

توجه: از آن‌جا که در هر روز، هر کدام از تیم‌ها در برابر یک تیم دیگر بازی می‌کنند، تعداد کل بردها با تعداد کل باخت‌ها در هر روز باید برابر باشد؛ زیرا وقتی یک تیم برده باشد، حتماً تیم رقیب باخته است. به عبارت ساده‌تر، در هر ستون باید ۲ دایره مشکی و ۲ دایره سفید داشته باشیم. به همین دلیل به جز جدول نشان داده در سمت چپ، وضعیت دیگری نمی‌توان در نظر گرفت، مثلاً نمی‌توانید جای قطعات L مانند را در جدول‌های فوق با هم عوض کنید. طبق این جدول، C بیشترین تعداد بُرد را دارد و در نتیجه C تورنمنت را برده است.

آزمون (۴)

۳۱ـ گزینه «۳» نکات کلیدی این سؤال برابر بودن تعداد دانش‌آموزان تمام ردیف‌ها، حداقل سه نفر بودن افراد هر ردیف و حداقل تعداد ردیف‌هاست که باید بزرگ‌تر مساوی ۲ باشد. روش سریع برای این سؤال با نوشتن مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۸ است. چرا که با توجه به نیاز به یکسان بودن افراد با ردیف‌ها نهایتاً افراد طوری خواهند نشست که حاصل‌ضرب تعداد ردیف‌ها در افراد هر ردیف برابر ۴۸ شود.

مقسوم‌علیه‌های ۴۸ : ۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۱۶,۲۴,۴۸

تعداد ردیف:

۱ تا نمی‌تواند باشد. به دلیل شرط حداقل دوتا بودن ردیف‌ها

۲ تا می‌تواند باشد. که در این صورت تعداد افراد هر ردیف ۲۴ نفر است که بزرگ‌تر از ۳ است.

۳ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد می‌شود ۱۶ تا بزرگ‌تر از ۳

۴ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد ۱۲ تا

۶ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۸

۸ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۶

۱۲ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۴

۱۶ تا می‌تواند باشد. تعداد افراد هر ردیف ۳

۲۴ تا نمی تواند باشد. زیرا تعداد افراد هر ردیف ۲ تا خواهد بود که با شرط حداقل سه نفره بودن تعداد در هر ردیف تناقض دارد.

۴۸ تا نمی‌تواند باشد. زیرا تعداد افراد هر ردیف یک خواهد بود که با شرط حداقل سه نفره بودن تعداد در هر ردیف تناقض دارد.

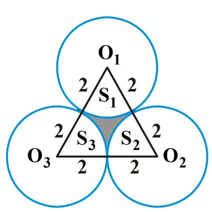
پس در مجموع ۷ آرایش ممکن وجود دارد.

۳۲ـ گزینه «۴» ارتباط بین اعداد به شکل زیر است:

$$\frac{۲۵۲۰}{۱}=۲۵۲۰\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۲}=۱۲۶۰\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۳}=۸۴۰\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۴}=۶۳۰\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۵}=۵۰۴\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۶}=۴۲۰\ ,\ \frac{۲۵۲۰}{۷}=۳۶۰$$

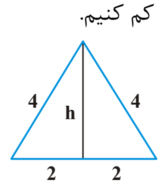
بنابراین به جای علامت سؤال باید عدد $۳۱۵=\frac{۲۵۲۰}{۸}$ قرار گیرد.

۳۳ـ گزینه «۴» مرکز سه دایره را به هم وصل می‌کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\Delta}{O_۱O_۲O_۳}$ تشکیل می‌شود که طول هر ضلع آن ۴ سانتی‌متر است.



برای به‌دست آوردن مساحت قسمت محصور بین سه دایره کافی است ابتدا مساحت مثلث $\overset{\Delta}{O_۱O_۲O_۳}$ را به‌دست آورد، سپس مساحت نواحی از دایره‌ها که در این مثلث وجود دارند را از مساحت مثلث کم کنیم.

مساحت مثلث $\overset{\Delta}{O_۱O_۲O_۳}$:



$$h=\sqrt{۱۶-۴}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}\ \Rightarrow S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})(۴)=۴\sqrt{۳}$$

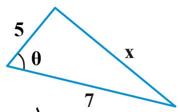
مساحت هرکدام از نواحی دایره‌ها که در مثلث قرار دارند، برابر با $\frac{۱}{۶}$ مساحت یک دایره کامل به شعاع ۲ است (توجه کنیم که این سطوح زاویه مرکزی $\frac{\pi}{۳}$ یا $\frac{۲\pi}{۶}$ دارند). پس مجموع این سه سطح برابر است با:

$$S_۱+S_۲+S_۳=۳S_۱=۳S_۲=۳S_۳=(۳)\times(\frac{۱}{۶})(\pi\times ۲^۲)=\frac{۱}{۲}\pi(۴)=۲\pi$$

بنابراین مساحت محصور شده برابر است با:

$$\Rightarrow S=۴\sqrt{۳}-۲\pi$$

۳۴ـ گزینه «۲» زاویه بین دو ضلع ۵ و ۷ سانتی‌متری را θ می‌نامیم.



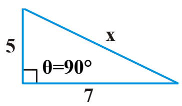
می‌دانیم مساحت مثلثی که دو ضلع a و b و زاویه θ بین آنها را داشته باشیم از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}\cdot a\cdot b\cdot \sin\theta \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\cdot ۷\times ۵\times \sin\theta \Rightarrow S=\frac{۳۵}{۲}\cdot \sin\theta$$

با توجه به رابطه به‌دست آمده، مساحت زمانی بیشینه می‌شود که $\sin\theta$ بیشینه شود؛ یعنی وقتی $\sin\theta=۱$، یعنی به بالاترین مقدار خود برسد، مساحت مثلث نیز بیشینه است.

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۵\times ۱=\frac{۳۵}{۲} \qquad \Leftarrow \theta=۹۰^\circ$$

$\theta=۹۰^\circ$ یعنی ۷ و ۵ دو ضلع قائمه مثلث باشند، ضلع‌های ۷ و ۵ سانتی‌متری بر هم عمود باشند، در این صورت ضلع سوم یعنی x از رابطه فیثاغورث به‌دست می‌آید:



$$x=\sqrt{۷^۲+۵^۲}=\sqrt{۴۹+۲۵}=\sqrt{۷۴}$$

۳۵ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن تعداد کسانی که در هیچ کدام از این دروس اسم ننوشته‌اند ابتدا تعداد افرادی که حداقل در یکی از این دروس اسم نوشته‌اند را به دست می‌آوریم. سپس عدد به دست آمده را از تعداد کل یعنی ۱۲۰ کم می‌کنیم.

تعداد کسانی که حداقل در یکی از سه درس ثبت نام کرده‌اند در واقع تعداد اعضای مجموعه اجتماع سه مجموعه است.

مجموعه ثبت‌نامی در درس فیزیک : اعداد زوج تقسیم‌پذیر بر ۲ : A تعداد اعضا : $۶۰=N_A$

مجموعه ثبت‌نامی در درس شیمی : اعداد بخش‌پذیر بر ۵ : B تعداد اعضا : $\left\lfloor\frac{۱۲۰}{۵}\right\rfloor=۲۴=N_B$

مجموعه ثبت‌نامی در درس ریاضی : اعداد بخش‌پذیر بر ۷ : C تعداد اعضا : $\left\lfloor\frac{۱۲۰}{۷}\right\rfloor=۱۷=N_C$

مجموعه کسانی که در دو درس شیمی و فیزیک اسم نوشته‌اند: $A\cap B$. اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۵ اعدادی هستند که بر ۱۰ بخش‌پذیرند = ۱۲

مجموعه کسانی که در دو درس ریاضی و فیزیک اسم نوشته‌اند: $A\cap C$. اعداد بخش‌پذیر بر ۲، ۵، ۷ $=۸=\left\lfloor\frac{۱۲۰}{۱۴}\right\rfloor$

مجموعه کسانی که در دو درس شیمی و ریاضی اسم نوشته‌اند: $B\cap C$ اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و ۷ : اعدا بخش‌پذیر بر ۳۵ : $۳=\left\lfloor\frac{۱۲۰}{۳۵}\right\rfloor$

مجموعه کسانی که در هر سه درس اسم نوشته‌اند: $A\cap B\cap C$ اعدادبخش‌پذیر بر ۲و ۵ و ۷ : بخش‌پذیر بر ۷۰ = ۱

$$N(A\cup B\cup C)=N_A+N_B+N_C-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)$$

$$N(A\cup B\cup C)=۶۰+۲۴+۱۷-۱۲-۸-۳+۱=۷۹$$

پس تعداد کسانی که در هیچ درسی اسم ننوشته‌اند برابر است با:

$$X=۱۲۰-۷۹=۴۱$$

۳۶ـ گزینه «۴» فرض کنیم در طرح اول x بلوک باشد که هر بلوک شامل n واحد است.

$$x\times n=۱۲۰۹۶=۲^۶\times ۳^۳\times ۷$$

در طرح دوم $(x+۸)$ بلوک داریم که هر کدام m واحد دارند و $m>n$:

$$(x+۸)\times m=۲۳۶۲۵=۵^۳\times ۳^۳\times ۷$$

با مقایسه دو عدد ۱۲۰۹۶ و ۲۳۶۲۵ متوجه می‌شویم که حاصل $(x+۸)\times m$ باید از دو برابر xn کمتر باشد. از طرفی از آنجا که $m>n$، پس:

$$xm>xn \Rightarrow xm>۲^۶\times ۳^۳\times ۷$$

پس $(x+۸)$ باید طوری درنظر گرفته شود که کمتر از دو برابر را اعمال کند. از طرفی m نیز نمی‌تواند دو برابر n باشد (باید کمتر باشد). باید xm را طوری درنظر بگیریم که اولاً از $xn=۲^۶\times ۳^۳\times ۷$ بیشتر باشد، ثانیاً $xm+۸m=۵^۳\times ۳^۳\times ۷$.

درواقع $m>n$ باید طوری لحاظ شود که $xm+۸m$ بتواند تساوی فوق را برقرار کند. با توجه به $x\times n=۲^۶\times ۳^۳\times ۷$ قطعاً x نمی‌تواند عامل ۵ داشته باشد. x را باید طوری مقدار دهیم که شرط $m>n$ نیز برقرار باشد.

$$x\times n=\underbrace{۳^۳}_{x}\times\underbrace{۲^۶\times ۷}_{n}$$

$$۳^۳\times m+۸\times m=۵^۳\times ۳^۳\times ۷ \Rightarrow m\times\underbrace{(۳^۳+۸)}_{۳۵}=۵^۳\times ۳^۳\times ۷ \Rightarrow m\times ۳۵=۵^۲\times ۳^۳\times ۳۵ \Rightarrow m=۵^۲\times ۳^۳ \Rightarrow m=۶۷۵$$

پس $x=۲۷$ و $n=۴۴۸$ و $m=۶۷۵$ می‌توانند در معادلات مسئله جای گیرند.

۳۷ـ گزینه «۳» فرض کنیم مبلغ N را بخواهیم در بانک‌ها بگذاریم. بانک اول در هر سال پول موجود را x برابر کند و بانک دوم نیز در هر سال پول موجود را y برابر کند. $\frac{۳}{۵}N$ را در بانک اول و $\frac{۲}{۵}N$ را در بانک دوم قرار می‌دهیم. بر این اساس داریم:

	آغاز سرمایه‌گذاری	پایان سال اول	پایان سال دوم
بانک اول	$\frac{۳}{۵}N$	$\frac{۳}{۵}N\times x$	$\frac{۳}{۵}N\times x^{۲}$
بانک دوم	$\frac{۲}{۵}N$	$\frac{۲}{۵}N\times y$	$\frac{۲}{۵}N\times y^{۲}$
مجموع موجودی در هر دو بانک		$=۵۹۰$	$=۷۱۰$

اکنون باید حالتی را فرض کنیم که $\frac{۲}{۵}N$ در بانک اول و $\frac{۳}{۵}N$ در بانک دوم باشد:

	آغاز سرمایه‌گذاری	پایان سال اول	پایان سال دوم
بانک اول	$\frac{۲}{۵}N$	$\frac{۲}{۵}N\times x$	$\frac{۲}{۵}N\times x^{۲}$
بانک دوم	$\frac{۳}{۵}N$	$\frac{۳}{۵}N\times y$	$\frac{۳}{۵}N\times y^{۲}$
مجموع موجودی در هر دو بانک		$=۶۱۰$	$=?$

$$\begin{cases}\frac{۳}{۵}Nx+\frac{۲}{۵}Ny=۵۹۰ \quad (۱)\\ \frac{۲}{۵}Nx+\frac{۳}{۵}Ny=۶۱۰ \quad (۲)\end{cases} \quad \begin{cases}\xrightarrow{(۲)-(۱)} \frac{۱}{۵}N(y-x)=۲۰\\ \xrightarrow{(۱)+(۲)} N(x+y)=۱۲۰۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۵}N(y-x)}{N(x+y)}=\frac{۲۰}{۱۲۰۰} \Rightarrow ۱۱y=۱۳x$$

ارتباط بین x و y را پیدا کردیم. در ادامه خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{۵}Nx^{۲}+\frac{۲}{۵}Ny^{۲}=۷۰۱ \Rightarrow \frac{۳}{۵}Nx^{۲}+\frac{۲}{۵}N\times\frac{۱۶۹}{۱۲۱}x^{۲}=۷۰۱ \Rightarrow Nx^{۲}(\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۱۶۹}{۱۲۱})=۷۰۱ \Rightarrow Nx^{۲}\times\frac{۷۰۱}{۵\times۱۲۱}=۷۰۱ \Rightarrow Nx^{۲}=۵\times۱۲۱$$

$$\text{مطلوب}=\frac{۲}{۵}Nx^{۲}+\frac{۳}{۵}Ny^{۲}=\frac{۲}{۵}Nx^{۲}+\frac{۳}{۵}N\times\frac{۱۶۹}{۱۲۱}x^{۲}=Nx^{۲}(\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۶۹}{۱۲۱})=Nx^{۲}\times\frac{۷۴۹}{۵\times۱۲۱}=۵\times۱۲۱\times\frac{۷۴۹}{۵\times۱۲۱}=۷۴۹$$

۳۸ـ گزینه «۲» آلیاژ اول، دوم و سوم را به ترتیب A، B و C می‌نامیم. با توجه به صورت سؤال داریم:

$$A:\begin{cases}\text{قلع } ۰/۴۵\\ \text{سرب } ۰/۵۵\end{cases} \qquad B:\begin{cases}\text{بیسموت } ۰/۱\\ \text{قلع } ۰/۴\\ \text{سرب } ۰/۵\end{cases} \qquad C:\begin{cases}\text{بیسموت } ۰/۳\\ \text{سرب } ۰/۷\end{cases}$$

می‌خواهیم آلیاژی درست کنیم که ۱۵ درصد بیسموت داشته باشد. پس حتماً باید از B یا C استفاده کنیم. فرض کنیم از هر کدام از آلیاژها به ترتیب A، B و C واحد داشته باشیم.

$$\text{درصد بیسموت}=\frac{\text{مقدار اولی}\times\text{درصد اولی}+\text{مقدار دومی}\times\text{درصد دومی}}{\text{مقدار اولی}+\text{مقدار دومی}}$$

اگر از آلیاژ B و C استفاده کنیم:

$$۱۵=\frac{۱۰B+۳۰C}{B+C} \Rightarrow B=۳C$$

$$\text{درصد سرب}=\frac{۵۰B+۷۰C}{B+C}=\frac{۱۵۰C+۷۰C}{۴C}=\%۵۵$$

اگر از A و C استفاده کنیم:

$$۱۵=\frac{۳۰C}{A+C} \Rightarrow A=C$$

$$\text{درصد سرب}=\frac{۵۵A+۷۰C}{A+C}=\frac{۱۲۵}{۲}=\%\,۶۲/۵$$

به این ترتیب حداقل و حداکثر درصد سرب می‌تواند ۵۵ و ۶۲/۵ درصد باشد.

۳۹ـ گزینه «۱» فرض کنیم ماشین‌های خاک‌برداری A، B و C باشند. A در مدت زمان t می‌تواند $\frac{۴}{۵}$ کار را انجام دهد. B در مدت t' می‌تواند $\frac{۱}{۱۵}$ کار را انجام دهد و ماشین C نیز در مدت $(t-t')$ باید $\frac{۹}{۲۸}$ از بقیه کار (یعنی $\frac{۱۴}{۱۵}$) را انجام دهد.

همچنین در مورد اختلاف A و C و اختلاف B و C رابطه زیر را داریم:

مطلوب ما محاسبه نسبت $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

$$|A-C| = ۳\times|B-C|$$

$$A\times t = \frac{۴}{۵}w$$

$$B\times t' = \frac{۱}{۱۵}w$$

$$C\times\underbrace{(t-t')}_{t''} = \frac{۹}{۲۸}\times\frac{۱۴}{۱۵}w \Rightarrow C\times t'' = ۰/۳w$$

$$t = t'+t'' \Rightarrow \frac{۴}{۵A} = \frac{۱}{۱۵B}+\frac{۳}{۱۰C} \xrightarrow{۳۰\times} \frac{۲۴}{A} = \frac{۲}{B}+\frac{۹}{C} \xrightarrow{B\times} ۲۴\frac{B}{A} = ۲+۹\frac{B}{C}$$

همچنین: $A-C = ۳(B-C) \Rightarrow A+۲C = ۳B \xrightarrow{\frac{۱}{B}\times} \frac{A}{B}+۲\frac{C}{B} = ۳$

$$\begin{cases}\frac{A}{B} = \alpha\\ \frac{C}{B} = \beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۲۴}{\alpha} = ۲+\frac{۹}{\beta}\\ \alpha+۲\beta = ۳\end{cases}$$

با قرار دادن $\beta = ۳-\frac{\alpha}{۲}$ در رابطه بالایی می‌توانیم به $\alpha = ۳$ برسیم که همان نسبت $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

۴۰ـ گزینه «۲» فرض کنیم بتوانیم کل بار را در n واگن ۵۰ تنی قرار دهیم. آنگاه اگر در $(n-۱۳)$ واگن ۸۰ تنی قرار دهیم، مقداری اضافه می‌آید و اگر در $(n-۵)$ واگن ۶۰ تنی قرار دهیم نیز مقداری اضافه می‌آید. می‌توانیم روابط زیر را تنظیم کنیم:

$$۶۰(n-۶) < ۵۰n < ۶۰(n-۵) \quad \Rightarrow ۳۰ < n < ۳۶$$

$$۸۰(n-۱۴) < ۵۰n < ۸۰(n-۱۳) \quad \Rightarrow ۳۴ < n < ۳۷$$

فقط $n = ۳۵$ می‌تواند در نامساوی‌های بالا صدق کند، پس:

وزن کل بار $= ۵۰n = ۵۰\times۳۵ = ۱۷۵۰$

آزمون (۵)

۴۱ـ گزینه «۲» از جمله سؤالات غیراستاندارد که در آزمون‌های بین‌المللی هوش مطرح شده است! هر جمله توضیحی از جمله‌ی قبل است. مثلاً صفر، یک صفر است که در جمله‌ی بعدی آن را با ۱۰ (یک صفر) توضیح داده؛ عدد ۱۰ هم یک، ۱ دارد و یک صفر که به صورت ۱۱۱۰ توضیح داده شده است. در واقع الگویی به شکل زیر وجود دارد:

$$\begin{cases} ۰ \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود به}} ۱۰ \\ ۱۰ \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود به}} ۱۱۱۰ \\ ۲ \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود به}} ۱۲ \\ ۳ \xrightarrow{\text{تبدیل می‌شود به}} ۱۳ \end{cases}$$

بنابراین به جای علامت سؤال باید گزینه (۲) قرار گیرد. در جمله‌ی قبل به ترتیب یک، ۱ داریم که سمت چپ عدد جدید باید ۱۱باشد، بعد از آن یک، ۳ داریم و بنابراین باید ۱۳ بنویسیم و بعد یک ۲ داریم که باید ۱۲ بنویسیم، و بعد از آن دو تا یک داریم که باید ۲۱ بنویسیم و بعد یک، صفر داریم و باید ۱۰ بنویسیم.

۴۲ـ گزینه «۴» استخر در ۴ ساعت پر می‌شود، یعنی شیر ورودی در هر ساعت می‌تواند $\frac{۱}{۴}$ استخر را پر کند. از طرفی شیر خروجی در هر ساعت می‌تواند حجمی معادل $\frac{۱}{۵}$ حجم استخر را خالی کند. شیر ورودی را ساعت ۱ عصر باز کرده‌اند و شیر خروجی را پس از مدت زمان T باز کرده‌اند. کل زمانی که طول کشیده است تا استخر پر شود ۱۰ساعت است یعنی از ساعت ۱ عصر تا ساعت ۱۱ عصر. در T ساعت اول که فقط شیر ورودی باز است حجمی معادل $\frac{۱}{۴}\times T$ از حجم استخر پر می‌شود. پس از باز شدن شیر خروجی در هر ساعت شیر ورودی حجمی معادل $\frac{۱}{۴}$ اضافه می‌کند و شیر خروجی معادل $\frac{۱}{۵}$ حجم استخر را خارج می‌کند. پس در این شرایط در هر ساعت معادل $\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۲۰}$ به حجم استخر به حجم آب اضافه می‌شود.

$$\frac{۱}{۴}\times T+(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵})\times(۱۰-T)=۱ \Rightarrow \frac{T}{۴}+\frac{۱۰}{۲۰}-\frac{T}{۲۰}=۱ \Rightarrow \frac{۴T}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow T=\frac{۲۰}{۸}=۲/۵$$

پس ۲/۵ ساعت پس از شیر ورودی شیر خروجی باز می‌شود. چون شیر ورودی ساعت ۱ عصر باز شده بود، پس باید شیر خروجی ساعت ۳:۳۰ عصر باز شده باشد.

۴۳ـ گزینه «۳» مخلوط را کیلویی ۲۲ تومان فروخته است و ۱۰ درصد سود به دست آورده است. یعنی قیمت فروش ۱/۱ برابر هزینه تمام شده هر کیلو مخلوط است و این یعنی هر کیلو مخلوط هزینه‌ای برابر با $۲۰=\frac{۲۲}{۱/۱}$ تومان دارد.

گندم با مقدار کمتر در مخلوط: A و گندم با مقدار بیشتر در مخلوط: B

طبق فرمول میانگین وزنی داریم:

$$۲۰=\frac{۱۴Q_A+X(Q_B)}{Q_A+Q_B}$$

از صورت سؤال می‌دانیم که $\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{۲}{۳}$ است، پس $Q_B=\frac{۲}{۳}Q_A$ است. با ساده کردن Q_A از صورت و مخرج داریم:

$$۲۰=\frac{۱۴+\frac{۲}{۳}X}{۱+\frac{۲}{۳}} \Rightarrow ۲۰+\frac{۴۰}{۳}=۱۴+\frac{۲}{۳}X \Rightarrow X=۲۴$$

۴۴ـ گزینه «۴»

فرض کنیم در ردیف اول x عدد پرتقال باشد. ردیف دوم $x+۴$، ردیف سوم $x+۸$ و به همین ترتیب الی آخر.

$$x\ ,\ x+۴\ ,\ x+۸\ ,\ \cdots\ ,\ x+(n-۱)\times ۴$$

مجموع آنها باید ۶۸۸ باشد. با توجه به فرمول مجموع در تصاعد حسابی داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}\Big(\underbrace{۲a}_{\text{جملهٔ اول}}+\underbrace{(n-۱)}_{\text{تعداد}}\times\underbrace{d}_{\text{قدرنسبت}}\Big)$$

$$۶۸۸=\frac{n}{۲}(۲x+(n-۱)\times ۴)\ \Rightarrow nx+۲n(n-۱)=۶۸۸$$

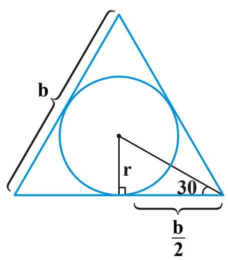
اختلاف ردیف اول و آخر $۴(n-۱)$ می‌باشد. در واقع هر گزینه را برابر با $۴(n-۱)$ قرار می‌دهیم. به دنبال آن باید x نیز صحیح باشد، فقط در مورد گزینه (۴) داریم:

$$۴(n-۱)=۶۰\ \Rightarrow n-۱=۱۵\ \Rightarrow n=۱۶\ \Rightarrow ۱۶x+۲\times ۱۶(۱۶-۱)=۶۸۸\ \Rightarrow x=۱۳$$

در مورد سایر گزینه‌ها، x عدد صحیح به‌دست نمی‌آید.

۴۵ـ گزینه «۲» پاسخ به سؤال، به روش‌های مختلف ممکن می‌باشد. ابتدا به این حل توجه کنید:

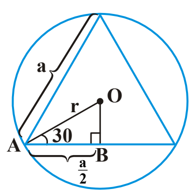
حل اول: اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، طبق فرمول کتاب طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر است بـا $۲\sqrt{۳}\,r$ و طـول ضـلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط‌شده بر دایره برابر است با $\sqrt{۳}\,r$، پس مساحت مثلث بزرگ‌تر چهار برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.



حل دوم: اگر نکته بالا را ندانیم، می‌توان نسبت اضلاع مثلث‌ها به طول شعاع دایره را به‌دست آورد.

مرکز دایره محل تلاقی نیم‌سازها، میانه‌ها و ارتفاعات مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره است.

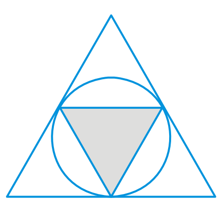
$$tg(۳۰)^\circ=\frac{r}{\frac{b}{۲}}\ \Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{r}{\frac{b}{۲}}=\frac{۲r}{b}\ \Rightarrow\boxed{b=۲\sqrt{۳}\,r}$$



از طرفی مرکز دایره محیط بر مثلث متساوی‌الاضلاع محل تلاقی نیم‌سازها، میانه‌ها و ارتفاعات مثلث محاط شـده است، پس مثلث OAB مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۶۰، ۹۰، ۳۰ است.

$$\cos(O\hat{A}B)=\frac{\frac{a}{۲}}{r}=\cos(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \Rightarrow\frac{a}{۲r}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ \Rightarrow a=\sqrt{۳}\,r$$

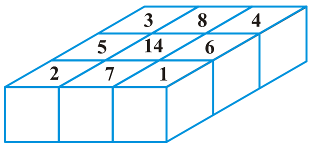
$$\Rightarrow\frac{S_{\text{بزرگ‌تر}}}{S_{\text{کوچک‌تر}}}=\left(\frac{\text{ضلع بزرگ‌تر}}{\text{ضلع کوچک‌تر}}\right)^۲=\left(\frac{b}{a}\right)^۲=\left(\frac{۲\sqrt{۳}\,r}{\sqrt{۳}\,r}\right)^۲=(۲)^۲=۴$$



حل سوم: اگر مثلث درونی را بچرخانیم، شکل به صورت مقابل خواهد شد. از آنجا که دایره محاط‌شده در مثلث بزرگ‌تر، در میانه اضلاع بر آنها مماس می‌شود، رئوس مثلث کوچک‌تر روی میانـه اضـلاع مثـلث بـزرگ‌تـر قـرار می‌گیرد؛ پس مساحت مثلث بزرگ‌تر چهار برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

۴۶ـ گزینه «۴» می‌خواهیم مجموع ۹ عدد طبیعی و متمایز نوشته شده بر روی ۹ مکعب پایینی ۵۰ باشد؛ از طرفی می‌دانیم:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹=۴۵$$



همان‌طور که مشخص است، هنوز ۵ تا، تا رسیدن به عدد ۵۰ فاصله داریم. سعی می‌کنیم ۵ تای باقی‌مانده را طوری اختصاص دهیم که بزرگ‌ترین عدد ممکن ایجاد شود (به دلیل این که مطلوب سؤال بزرگ‌ترین عدد روی مکعب بالایی می‌باشد). پس می‌توانیم اعداد ۱ تا ۸ و $(۵+۹)$ را در نظر بگیریم. اکنون باید بزرگ‌ترین اعداد را طوری در صفحه‌ی ۳×۳ پخش کنیم که بزرگ‌ترین اعداد در مشترک‌ترین قسمت‌ها باشد:

بر این اساس لایه وسطی که هر مکعبش مجموع ۴ مکعب زیرش می‌باشد، با اعداد زیر کامل می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}۱۴+۶+۱+۷=۲۸\\ ۱۴+۶+۸+۴=۳۲\\ ۱۴+۸+۳+۵=۳۰\\ ۱۴+۷+۲+۵=۲۸\end{array}\right\}\Rightarrow \text{عدد مکعب بالایی}=۲۸+۳۲+۳۰+۲۸=۱۱۸$$

و این حداکثر مقدار ممکن برای بالاترین مکعب می‌باشد.

۴۷ـ گزینه «۱» فرض کنیم تعداد کتاب‌های ریاضی، زبان و هنر به ترتیب R، Z و H عدد باشند، در این صورت داریم:

$$R+Z=\frac{۱۱}{۱۳}\times H$$

قرار است $\frac{۱}{۱۵}(R+Z)$ و $\frac{۱۸}{۱۹}H$ در واگن اول باشد و بقیه کتاب‌ها در واگن دوم و تعداد کتاب‌های داخل واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ و در واگن دوم کمتر از ۱۰۰۰۰ کتاب باشد، پس داریم:

$$\frac{۱}{۱۵}(R+Z)+\frac{۱۸}{۱۹}H>۱۰۰۰۰$$
$$\frac{۱۴}{۱۵}(R+Z)+\frac{۱}{۱۹}H<۱۰۰۰۰$$

واضح است که تعداد کتاب‌ها باید عدد صحیح باشد، یعنی H باید مضرب ۱۹ و $(R+Z)$ نیز مضرب ۱۵ باشد.

فرض می‌کنیم $\begin{cases}R+Z=۱۵x\\ H=۱۹y\end{cases}$ آنگاه داریم:

$$x+۱۸y>۱۰۰۰۰\Rightarrow x>۱۰۰۰۰-۱۸y$$
$$۱۴x+y<۱۰۰۰۰\Rightarrow y<۱۰۰۰۰-۱۴x$$

دو نامساوی داریم که در آنها باید x و y صحیح و مثبت باشند. با توجه به اینکه باید $y<۱۰۰۰۰-۱۴x$، پس x نمی‌تواند از ۷۱۴ بزرگ‌تر باشد. از طرفی باید طوری x را مقدار دهیم که شرط y نیز در هر دو نامساوی برقرار باشد.

به ازای $x=۶۲۷$ و $y=۵۸۵$ نامساوی‌های فوق برقرار است.

$$R+Z=۱۵\times x=۱۵\times۶۲۷=۹۴۰۵$$
$$H=۱۹\times y=۱۹\times۵۸۵=۱۱۱۱۵$$

$$\frac{۱}{۱۵}\times۹۴۰۵+\frac{۱۸}{۱۹}\times۱۱۱۱۵=۶۲۷+۱۰۵۳۰=۱۱۱۵۷>۱۰۰۰۰$$
$$\frac{۱۴}{۱۵}\times۹۴۰۵+\frac{۱}{۱۹}\times۱۱۱۱۵=۸۷۷۸+۵۸۵=۹۳۶۳<۱۰۰۰۰$$

۴۸ـ گزینه «۱» ظرف اول پر از گلیسیرین و ظرف دوم پر از آب است و حجم دومی ۴ برابر اولی است.
پس فرض کنیم ظرف اول به حجم x و دومی به حجم ۴x باشد. وقتی ملاقه اولی را در دومی و دومی را در اولی می‌ریزیم، یعنی بـه ظـرف اول ۲ لیتـر آب اضافه می‌کنیم و به ظرف دوم ۲ لیتر گلیسیرین.

گلیسیرین	آب
x	۴x

دفعه اول : $\% = \frac{x-۲}{x}\times ۱۰۰$ گلیسیرین اولی $\% = \frac{۲}{۴x}\times ۱۰۰$ گلیسیرین دومی

در ظرف اول x لیتر گلیسیرین است. وقتی دو لیتر از گلیسیرین را برمی‌داریم و به جای آن آب می‌ریزیم، میزان گلیسیرین موجود $(x-۲)$ لیتر می‌شود ولی حجم کل هنوز همان x لیتر می‌باشد.

$$\text{نسبت گلیسیرین موجود در ظرف اول} = \frac{\text{گلیسیرین خالص موجود}}{\text{حجم کل}} = \frac{x-۲}{x}$$

$$\text{نسبت گلیسیرین موجود در ظرف دوم} = \frac{\text{گلیسیرین خالص موجود}}{\text{حجم کل}} = \frac{۲}{۴x}$$

در ادامه، از ظرف دوم ۲ لیتر برمی‌داریم، از ظرف اولی نیز ۲ لیتر برمی‌داریم و از ظرف دوم، آنچه که برداشته‌ایم را در ظرف اول می‌ریزیم.

دفعه دوم : گلیسیرین اولی $\% = \dfrac{x-۲-۲\times\frac{x-۲}{x}+۲\times\frac{۲}{۴x}}{x} = \dfrac{۴}{۱۰۰}$

دقت کنیم وقتی از ظرف اول ۲ لیتر برمی‌داریم $\frac{x-۲}{x}$ آن گلیسیرین است. پس $۲\times\frac{x-۲}{x}$ از گلیسیرین آن کم می‌شود و وقتی از ظـرف دوم ۲ لیتـر بـرای اولی می‌ریزیم، $۲\times\frac{۲}{۴x}$ میزان گلیسیرین خالص است. با طرفین وسطین داریم:

$$۴x = ۱۰x - ۲۰ - ۲۰ + \frac{۴۰}{x} + \frac{۱۰}{x} \Rightarrow ۳x^۲ - ۲۰x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = \frac{۱۰}{۶} \end{cases}$$

که البته $x = \frac{۱۰}{۶}$ قبول نیست، چون از ۲ لیتر کمتر است! پس ظرف‌ها ۵ و ۲۰ لیتر می‌باشند.

۴۹ـ گزینه «۴» فرض کنیم A و B گروه اول و دوم باشند که به ترتیب در t و t' بتوانند کار را انجـام دهنـد. مـی‌دانـیم $t+t'=۱۲$ تفاضـل t و t' برابـر با ۴۵% زمانی است که هردو با هم کار کنند.

$$A\times t = w \qquad t+t' = ۱۲$$

$$B\times t' = w \qquad t-t' = ۰/۴۵\times t''$$

$$(A+B)\times t'' = w \Rightarrow (\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t'})\times t'' = ۱ \Rightarrow \frac{t+t'}{t\times t'}\times t'' = ۱ \Rightarrow \frac{۱۲}{t\times t'}\times t'' = ۱ \Rightarrow \begin{cases} t\times t' = ۱۲t'' \\ t-t' = ۰/۴۵t'' \end{cases}$$

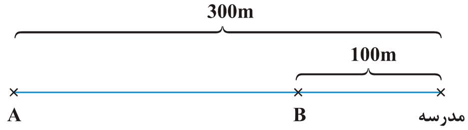
$$\Rightarrow ۱۲(t-t') = \frac{۴۵}{۱۰۰}t\times t' \Rightarrow ۱۲۰۰\times(t-t') = ۴۵t\times t' \Rightarrow ۸۰(t-t') = ۳t\times t' \xrightarrow{t'=۱۲-t} ۸۰(۲t-۱۲) = ۳t\times(۱۲-t)$$

$$\Rightarrow ۱۶۰t - ۹۶۰ = ۳۶t - ۳t^۲ \Rightarrow t = \frac{۲۰}{۳}$$

و چون $t+t'=۱۲$، پس $t' = \frac{۱۶}{۳}$ خواهد شد.

پس گزینه (۴) صحیح است.

۵۰ـ گزینه «۲» می‌توانیم موقعیت ایستگاه A و B و مدرسه را به‌صورت زیر فرض کنیم:



سرعت تراموا برابر U و سرعت دانش‌آموز را V فرض می‌کنیم. با توجه به رابطه بین جابه‌جایی، سرعت و زمان داریم:

$$\underbrace{\frac{۳۰۰}{V}}_{\text{مدت زمان رفتن از A تا مدرسه پیاده}} = \underbrace{\frac{۲۰۰}{U}}_{\text{مدت زمان رفتن از A تا B با تراموا}} + \underbrace{\frac{۱۰۰}{V}}_{\text{مدت زمان پیاده رفتن از B تا مدرسه}} + \underbrace{\frac{۱}{۶۰}}_{\text{یک دقیقه اضافه‌تر که البته برحسب ساعت نوشته شده است}}$$

اگر سرعت خود را دو برابر کند، رابطه زیر را نیز خواهیم داشت:

$$\frac{۳۰۰}{۲V} = \frac{۲۰۰}{U} \Rightarrow ۳U = ۴V \Rightarrow \begin{cases} ۳U = ۴V \\ \dfrac{۳۰۰}{V} = \dfrac{۲۰۰}{U} + \dfrac{۱۰۰}{V} + \dfrac{۱}{۶۰} \end{cases} \Rightarrow V = ۳۰۰۰\frac{m}{h}$$

چون زمان را برحسب ساعت و جابه‌جایی را برحسب متر لحاظ کردیم، پس واحد $\frac{m}{h}$ می‌باشد:

$$\frac{m}{h} \times \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{km}{h} \Rightarrow ۳۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۳\frac{km}{h}$$ سرعت دانش‌آموز

آزمون (۶)

۵۱ـ گزینه «۳» در ارتباط بین اعداد، گاهی لازم است هر عدد را با ارقامش مرتبط کنیم. مثلاً ۱۹۹ را هم به چشم یکصد و نود و نه نگاه کنیم هم بـه چشـم ۱ و ۹ و ۹. با کمی دقت در اعداد داده شده به این نتیجه می‌رسیم که هر عدد با مربع رقم وسط خودش جمع می‌شود و عدد بعدی حاصل می‌شود.

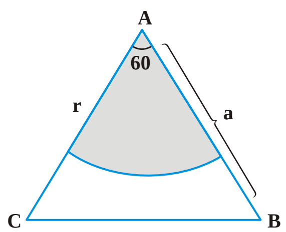
$199+9^2=280$

$280+8^2=344$

$\vdots$

$396+9^2=477 \leftarrow$ جواب

۵۲ـ گزینه «۳» می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع بر ضلع a برابر است با:



$$S_{\Delta}(ABC)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

می‌خواهیم مساحت قطاع به مرکز A و شعاع r نصف مساحت مثلث یعنی برابر با $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ باشد.

با توجه بـه متسـاوی‌الاضـلاع بـودن مثلـث ABC، هریـک از زوایـای آن 60° اسـت، پـس مسـاحت قطـاع مشخص‌شده $\frac{1}{6}$ مساحت دایره‌ای به شعاع r است.

$$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2=\frac{1}{6}(\pi r^2)\Rightarrow (r^2)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}a^2}{\frac{\pi}{6}}:\frac{\sqrt{3}\times 6a^2}{\pi\cdot 8}:\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\pi}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\pi}}=a\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$$

۵۳ـ گزینه «۴» با ارقام ۱ تا ۹ و چهار عمل اصلی سعی می‌کنیم جدول را کامل کنیم. حدس اولیه برای سطر اول می‌تواند $9\div3\times2=6$ باشد. در مورد ستون سمت راست نیز داریم: $6+3\div3=3$

اکنون اگر بخواهیم ستون سمت چپ را کامل کنیم دو حالت داریم: ۹ + ۱ ÷ ۲ = ۵ یا ۹ + ۶ ÷ ۳ = ۵ پس از قرار دادن در جدول و پرکردن بقیه خانه‌ها به این نتیجه می‌رسیم که حالت ۹ + ۶ ÷ ۳ = ۵ قبول است.

نهایتاً جدول به صورت زیر کامل خواهد شد:

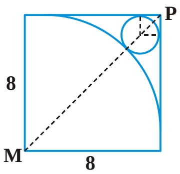
9	÷	3	×	2	=	6
+		−		×		+
6	+	1	−	4	=	3
÷		+		−		÷
3	×	3	−	6	=	3
=		=		=		=
5	÷	5	+	2	=	3

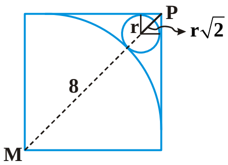
۵۴ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که A و B وسط اضلاع هستند، پس می‌توانیم چهارضلعی AMBO را مربع درنظر بگیریم، لذا:

$$S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{۲}=۳۲\Rightarrow OA\times OB=۶۴$$

از آنجا که $OA=OB$، پس داریم:

$$(OA)^{۲}=۶۴\Rightarrow OA=۸$$





پس شعاع دایره بزرگ ۸ می‌باشد و البته واضح است که در این صورت طول ضلع مربع کوچک نیز ۸ می‌شـود. فـرض کنیم شعاع دایره کوچک r باشد:

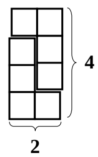
$$MP=۸\sqrt{۲}=۸+r+r\sqrt{۲}\Rightarrow ۸\sqrt{۲}-۸=r(۱+\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow r=\frac{۸(\sqrt{۲}-۱)}{\sqrt{۲}+۱}=۲۴-۱۶\sqrt{۲}$$

لازم به ذکر است که در مربع کوچک، بر نقاط مماس با اضلاع مربع، شعاع وارد کردیم، در نتیجه انگـار بـا مربعـی بـه ضلع r در گوشه سمت راست سروکار داریم:

$$MP=۸+r+r\sqrt{۲}$$

۵۵ـ گزینه «۳» ابتدا با کنار هم گذاشتن دو تا از موزائیک‌ها به یک مستطیل ۲ در ۴ می‌رسیم:



حالا با کنار هم گذاشتن این قطعاتِ ۲ در ۴ می‌توانیم بدون نیاز به شکستن موزائیک‌ها کل مساحتِ مستطیلِ ۱۲ در ۸ را بپوشانیم.

$$\text{تعداد قطعات ۲ در ۴}=\frac{\text{مساحت کل مستطیل ۱۲ در ۸}}{\text{مساحت قطعه‌ی ۲ در ۴}}=\frac{۱۲\times ۸}{۲\times ۴}=۱۲$$

۱۲ قطعه‌ی ۲ در ۴ داریم. در هر قطعه ۲ موزائیک به کار رفته است، پس تعداد موزائیک‌های مورد نیاز $۲۴=۲\times ۱۲$ است.

توجه: ایجاد یک قطعه‌ی مستطیل‌شکل با ابعاد ۲ در ۴ برای این انجام شد که مطمئن شویم نیازی به شکستن موزائیک‌ها برای پوشاندن کل سطح نداریم.

۵۶ـ گزینه «۳» فرض کنیم حجم کل کار برای هر گروه w باشد و هر نوبت را A و B و C بنامیم.

سرعت گروه دوم، ۱/۲ برابر گروه اول است $\Rightarrow B=۱/۲A$

نوبت سوم ساعتی ۰/۶ متر بیشتر از دومی کار انجام می‌دهد $\Rightarrow C-B=۰/۶$

مدت زمان انجام کار توسط نوبت دوم، یک ساعت کمتر از نوبت اول است و نوبت سوم برای نصف کار، ۳ ساعت بیشتر از نوبت دوم زمان لازم دارند

$$\Rightarrow\begin{cases}A\times(t+۱)=w\\ B\times t=w\\ C\times(t-۳)=\frac{w}{۲}\end{cases}$$

$$A=\frac{w}{t+۱}\ \text{و}\ B=\frac{w}{t}\ \text{و}\ C=\frac{w}{t-۳}$$

$$B=۱/۲A\Rightarrow\frac{w}{t}=۱/۲\times\frac{w}{t+۱}\Rightarrow t+۱=۱/۲t\Rightarrow t=۵$$

$$C-B=۰/۶\Rightarrow\frac{w}{۲(t-۳)}-\frac{w}{t}=۰/۶\xrightarrow{t=۵}\frac{w}{۴}-\frac{w}{۵}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow ۵w-۴w=۱۲\Rightarrow w=۱۲$$

یعنی کل کار برای هر نوبت ۱۲ متر می‌باشد. از طرفی A در هر ساعت $\frac{w}{t+۱}$ را انجام می‌دهد:

$$\frac{w}{t+۱}=\frac{۱۲}{۵+۱}=۲$$

۵۷ـ گزینه «۴» با شروع از سال ۱۹۵۶ تا پایان سال ۱۹۷۹ یعنی در ۲۴ سال متوالی باید ۳۱۵۰ ازدواج صورت پذیرد. با یک تصاعد حسابی روبه‌رو هستیم که جمله اول آن ۱۰۰ و قدر نسبت آن (۵+) می‌باشد.

$$\begin{cases} a = ۱۰۰ \\ d = ۵ \\ S_n = ۳۱۵۰ \end{cases} \text{تصاعد حسابی} \Rightarrow ۱۰۰+۱۰۵+۱۱۰+\cdots = ۳۱۵۰$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d) \Rightarrow ۳۱۵۰ = \frac{n}{۲}(۲\times۱۰۰+(n-۱)\times۵) \Rightarrow n = ۲۱$$

$$\text{تعداد ازدواج سال بیست و یکم} = a_{۲۱} = a_۱ + (۲۱-۱)\times ۵ = ۱۰۰+۲۰\times۵ = ۲۰۰$$

و طبق صورت سؤال، برای $a_{۲۲}$، $a_{۲۳}$ و $a_{۲۴}$ باید هر سال، ۱۱ عدد کمتر از ۲۰۰ ازدواج داشته باشیم، یعنی:

$$a_{۲۲} = a_{۲۳} = a_{۲۴} = ۲۰۰-۱۱ = ۱۸۹$$

$$\text{تعداد ازدواج‌هایی که رخ داد} = ۳۱۵۰+۳\times۱۸۹ = ۳۷۱۷$$

$$\text{تعداد ازدواج‌هایی که پیش‌بینی شد} = ۳۱۵۰$$

$$\text{اختلاف}\ \% = \frac{۳۷۱۷-۳۱۵۰}{۳۱۵۰} = \%۱۸$$

۵۸ـ گزینه «۴» حرکت اتومبیل در هر دقیقه یک تصاعد حسابی می‌باشد که جمله اول آن ۱۸۰۰ و قدر نسبت آن (۱۲۰−) است. حرکت موتورسیکلت نیز برای چهار دقیقه اول ثابت و هر دقیقه ۱۲۰ متر می‌باشد. ولی از شروع دقیقه پنجم به بعد، تصاعد حسابی است که جملـه اول آن ۱۲۰ و قـدر نسـبت آن (۶۰+) می‌باشد. جملات مربوط به جابه‌جایی اتومبیل و موتورسیکلت را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجموع جابه‌جایی هر دو ۱۹۵۰۰ متر باشد:

جابجایی اتومبیل	۱۸۰۰	۱۶۸۰	۱۵۶۰	۱۴۴۰	۱۳۲۰	۱۲۰۰	۱۰۸۰	۹۶۰	۸۴۰	۷۲۰	۶۰۰	۴۸۰	۳۶۰	۲۴۰	۱۲۰
جابجایی‌موتور	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰	۳۶۰	۴۲۰	۴۸۰	۵۴۰	۶۰۰	۶۶۰	۷۲۰
مجموع	۱۹۲۰	۱۸۰۰	۱۶۸۰	۱۵۶۰	۱۴۴۰	۱۳۸۰	۱۳۲۰	۱۲۶۰	۱۲۰۰	۱۱۴۰	۱۰۸۰	۱۰۲۰	۹۶۰	۹۰۰	۸۴۰

در واقع پس از ۱۵ دقیقه، هر دو به هم می‌رسند. در واقع جابه‌جایی اتومبیل یک تصاعد حسابی است که جمله اول آن ۱۸۰۰، قدر نسبت آن ۱۲۰− و تعداد جملات آن ۱۵ می‌باشد:

$$\text{مجموع جابه‌جایی اتومبیل برحسب متر} = \frac{۱۵}{۲}(۱۸۰۰+۱۲۰) = ۱۴۴۰۰$$

۵۹ـ گزینه «۳» فرض کنیم آلیاژ اول و دوم به ترتیب $x\%$ و $y\%$ روی داشته باشند. آلیاژ سوم نیز ۴۵% روی دارد و وزن آن ۵ کیلوگرم است. وزن آلیـاژ اول و دوم نیز به ترتیب ۲ و ۳ کیلوگرم است.

$$\text{درصد روی} = \frac{۲\times x + ۳\times y + ۵\times ۴۵}{۲+۳+۵} = ۵۰ \Rightarrow ۲x+۳y = ۲۷۵$$

اگر جای x و y را برای آلیاژها عوض کنیم و آنها را با ۵ کیلوگرم آلیاژ ۶۰% مخلوط کنیم، آلیاژ جدیدی با درصد روی ۵۵% ایجاد می‌شود:

$$۵۵ = \frac{۲y+۳x+۵\times۶۰}{۲+۳+۵} \Rightarrow ۲y+۳x = ۲۵۰$$

دستگاهی تشکیل می‌دهیم و x و y را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x+۳y = ۲۷۵ \\ ۳x+۲y = ۲۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴۰ \\ y = ۶۵ \end{cases}$$

۶۰ـ گزینه «۱» هرگاه بخواهیم بین دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$، کسر دیگری قرار دهیم می‌توانیم از الگوی زیر پیروی کنیم:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

می‌توانیم کسرهای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را نیز ساده کنیم، درنتیجه در کسر $\frac{a+c}{b+d}$ با اعداد کوچک‌تری در صورت و مخرج روبه‌رو هستیم. به عنوان مثال:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۴}{۳} < \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰} < \frac{۸}{۱۴} < \frac{۳}{۴}$$

وقتی می‌خواهیم حداقل تعداد کارگران را پیدا کنیم باید کسرها را تا جایی که ممکن است ساده کنیم و چون تعداد کارگران موردنظر است، می‌توانیم با کم و زیاد کردن صورت یا مخرج (به‌صورت محدود) بازه، مورد نظر سؤال را برقرار کنیم.

فرض کنیم M کل کارگران باشد و x تعداد کارگرانی که به مرخصی رفته‌اند:

$$\frac{۱/۷}{۱۰۰} < \frac{x}{M} < \frac{۲/۳}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{۱/۷+۲/۳}{۱۰۰+۱۰۰} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{۴}{۲۰۰} = \frac{۱}{۵۰} = \%۲$$

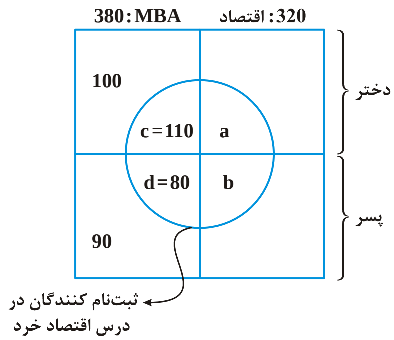
تعداد کارگران ۵۰ نفر می‌تواند باشد، ولی با کمی تغییر در صورت و مخرج $\frac{۱/۷}{۱۰۰}$ و $\frac{۲/۳}{۱۰۰}$ بدون اینکه از کلیت سؤال کاسته شود، می‌توانیم از زاویه دیگری مسئله را ببینیم:

$$\begin{array}{l} \frac{۱/۷}{۱۰۰} \simeq \frac{۲}{۱۰۰} \\ \frac{۲/۳}{۱۰۰} \simeq \frac{۳}{۱۲۵} \end{array} \Rightarrow \frac{۱}{۵۰} < \frac{x}{M} < \frac{۳}{۱۲۶} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{۴}{۱۷۶} \Rightarrow \frac{x}{M} = \frac{۴}{۱۷۶} = \frac{۱}{۴۴} \simeq \%\ ۲/۲۷$$

پس کمترین تعداد کارگران می‌تواند ۴۴ نفر باشد.

آزمون (۷)

۶۱ـ گزینه «۳» برای درک بهتر و گیج نشدن در روند حل سؤال رسم شکل بسیار مفید است. از ۷۰۰ نفر دانشجو، ۳۲۰ نفر اقتصاد هستند، پس ۳۸۰ نفر MBA داریم. تعداد دختران رشته MBA، ۲۱۰ نفر است، پس تعداد پسران این رشته برابر است با:



$۳۸۰-۲۱۰=۱۷۰$

۵۰ درصد دانشجویان MBA، یعنی ۱۹۰ نفر و ۴۰ درصد دانشجویان اقتصاد، یعنی $۰/۴\times(۳۲۰)=۱۲۸$ نفر درس اقتصاد خرد دارند.

$$\begin{cases} c+d=۱۹۰ \\ a+b=۱۲۸ \end{cases}$$

۹۰ نفر دانشجوی پسر رشته MBA درس اقتصاد ندارند، پس $d=۱۷۰-۹۰=۸۰$، ۸۰ نفر درس را دارند، از طرفی چون تعداد دانشجویان MBA که درس را داشتند ۱۹۰ نفر بودند، پس $c=۱۹۰-۸۰=۱۱۰$ نفر از دانشجویان دختر درس MBA را دارند.

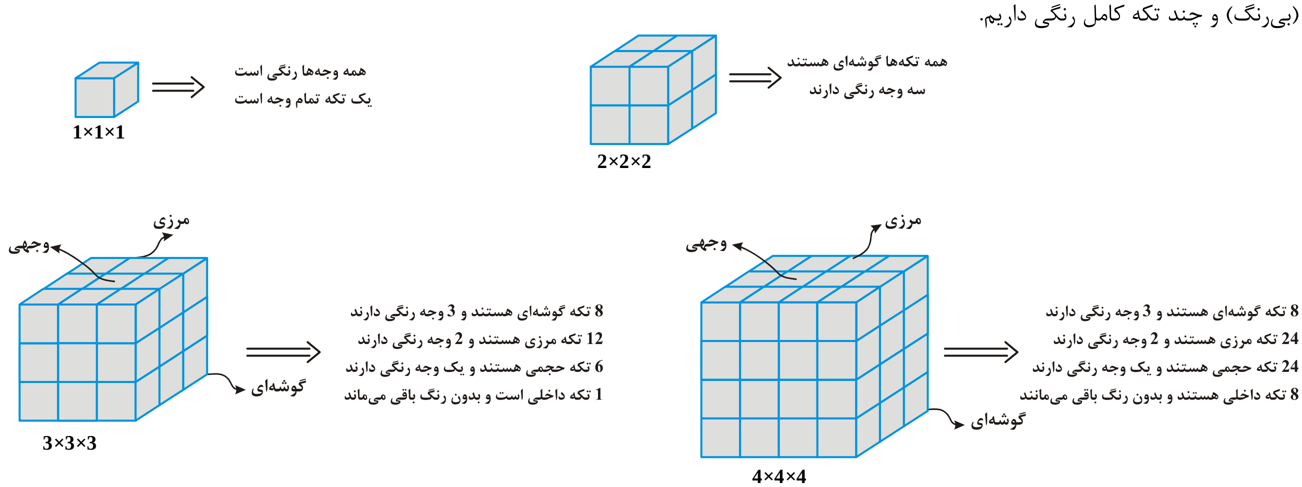
تعداد دانشجویان دختر رشته اقتصاد که درس را دارند (a) از نصف تعداد دختران رشته MBA که درس را دارند، یعنی $\frac{۱}{۲}\times ۱۱۰=۵۵$ کمتر است.

پس $a<۵۵ \Rightarrow a\le ۵۴$. سؤال تعداد دانشجویان پسر رشته اقتصاد را خواسته است که این درس را دارند، یعنی پیدا کردن b مورد نظر است:

$$a+b=۱۲۸ \Rightarrow b=۱۲۰-a \xrightarrow{a<۵۵} b>۱۲۸-۵۵=۷۳$$

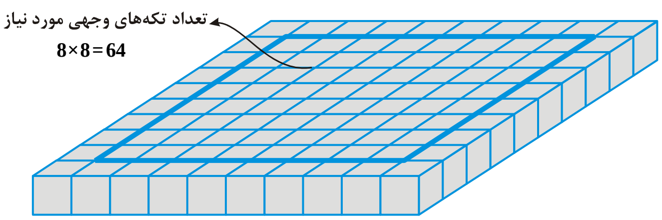
$b>۷۳$ پس درنتیجه گزینه (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرفی $a+b=۱۲۸$، پس a و b هر دو کوچک‌تر مساوی ۱۲۸ هستند، پس b نمی‌تواند ۱۳۰ باشد، پس تنها گزینه ممکن در این بین، گزینه (۳) یعنی $b=۱۰۰$ می‌باشد.

۶۲ـ گزینه «۳» ابتدا به مکعب‌های گفته شده دقت کنیم که در هر کدام چند تکه گوشه‌ای، چند تکه مرزی (لبه‌ای)، چند تکه وجهی، چند تکه داخلی (بی‌رنگ) و چند تکه کامل رنگی داریم.



شکل	هر ۶ وجه رنگی	گوشه‌ای، ۳ وجه رنگی	مرزی، ۲ وجه رنگی	وجهی، ۱ وجه رنگی	داخلی، بدون رنگ
۱×۱×۱	۱	–	–	–	–
۲×۲×۲	–	۸	–	–	–
۳×۳×۳	–	۸	۱۲	۶	۱
۴×۴×۴	–	۸	۲۴	۲۴	۸
کل	۱	۲۴	۳۶	۳۰	۹

در شکل نهایی که به صورت یک مکعب $1\times10\times10$ ساخته می‌شود، همه‌ی تکه‌ها حداقل باید یک وجه رنگ شده داشته باشند زیرا وجه بالایی باید رنگ شده باشد. در حالی که ما ۹ مکعب واحد داریم که هیچ‌وجه رنگی ندارند. پس برای ساخته شدن شکل نهایی، ناچاریم حداقل ۹ وجه از مکعب‌های واحد را رنگ‌آمیزی کنیم.



توضیح بیشتر:

در مربع 10×10 مسطح یا مکعب $1\times10\times10$:

۴ مکعب گوشه‌ای نیاز داریم.

$32 = 4\times8$ تکه مرزی (۲ وجه رنگی) نیاز داریم (بالا و کنار رنگی).

$64 = 8\times8$ تکه وجهی (یک وجه رنگی نیاز داریم).

$25 = 1 + 24$ تکه داریم که حداقل سه وجه آنها رنگی است و می‌توانند در گوشه باشند، ۴ تا از آنها را در گوشه می‌گذاریم و ۲۱ تا اضافه داریم. کلاً ۳۲ تکه مرزی می‌خواهیم که می‌توانیم از این ۲۱ تای ۳وجهی (گوشه‌ای) و همچنین ۳۶ تای ۲ وجهی (لبه‌ای) استفاده کنیم. از آن ۳۶ تا ۱۱ تا برمی‌داریم؛ می‌ماند ۲۵ تا. هر کدام از گوشه‌ای‌ها (سه وجه رنگی) و دو وجهی‌ها (لبه‌ای)ها را می‌توان طوری قرار داد که یک طرف رنگی آنها بالا باشد، پس از آنها برای تکه‌های وجهی نیز می‌توان استفاده کرد. پس ۲۵ تا به‌علاوه‌ی ۳۰ تا (که یک وجه رنگی دارند) می‌شود ۵۵ تا که تا ۶۴، ۹ تا کم داریم، پس آن ۹ تا که هیچ‌وجه رنگی ندارند هم باید رنگی شوند. پس تنها همان ۹ تکه بدون رنگ می‌مانند که باید یک وجه آنها (بالا) را رنگ کرد تا به طراحی دلخواه برسیم. پس حداقل باید ۹ وجه را رنگ‌آمیزی کنیم.

۶۳ـ گزینه «۲» ارتباط اعداد به صورت زیر است:

$$1\times2\times3=6\quad,\ 2\times3\times4=24\ ,\ 3\times4\times5=60\ ,\ 4\times5\times6=120\ ,\ 5\times6\times7=210\ ,\ 6\times7\times8=336\ ,\ 7\times8\times9=504 \Rightarrow ?=8\times9\times10=720$$

۶۴ـ گزینه «۴» فرض کنید $2x$، $5x$ و $6x$ طول اصلی بخش‌های مربوطه باشد. فرض کنید P و Q به ترتیب طول کاهش یافته گره A و B باشد. بنابراین طول جدید برابر با $6x-(5P+5Q)$، $5x-10Q$ و $2x-6P$ هستند، اما با توجه به این که نسبت‌های جدید ۱، ۷ و ۸ هستند، بنابراین: $2x-\frac{6P}{6x}-(5P+5Q)=\frac{1}{8}$ و $2x-\frac{6P}{5x}-10Q=\frac{1}{7}$. باید نسبت $\frac{P}{Q}$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases}\dfrac{2x-6P}{5x-10Q}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow 14x-42P=5x-10Q\\[2mm]\dfrac{2x-6P}{6x-5P-5Q}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow 16x-48P=6x-5P-5Q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x=42P-10Q\\10x=43P-5Q\end{cases}$$

از معادله‌ی اول x را برحسب P و Q به دست آورده و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$10\left(\frac{42}{9}P-\frac{10}{9}Q\right)=43P-5Q\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}}420P-100Q=9\times43P-9\times5Q\Rightarrow 420P-9\times43P=55Q$$

$$\Rightarrow 33P=55Q\Rightarrow\frac{P}{Q}=\frac{55}{33}=\frac{5}{3}$$

۶۵ـ گزینه «۴» حسین پس از هر ۹ روز کار، یک روز مرخصی دارد. در واقع حسین روزهای ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ و $\cdots$ مرخصی دارد. حسن نیز هر ۷ روز یکبار مرخصی دارد. یعنی روزهای ۷ و ۱۴ و ۲۱ و $\cdots$ حسن به مرخصی می‌رود. امروز حسین مرخصی است، پس باید از فردا سر کار برود.

فرض کنیم امروز ۳۱ تیر باشد (به عنوان مثال) پس حسین از یکم مرداد سر کار می‌رود و روزهای دهم و بیستم و سی‌ام مرداد مرخصی دارد. فردا حسن مرخصی است، یعنی با فرضی که درنظر گرفتیم (امروز ۳۱ تیر باشد) حسن باید از دوم مرداد سرکار برود و هر ۷ روز یک‌بار مرخصی می‌رود. حسین ۵۰ روز بعد مرخصی دارد و حسن ۴۹ روز بعد. ولی چون حسن یک روز دیرتر به مرخصی می‌رود، پس ۴۹ روز بعد برای حسن همان روز پنجاهم برای حسین می‌باشد. پس حداقل ۵۰ روز بعد هر دو با هم به مرخصی می‌روند.

۶۶ـ گزینه «۱» فرض کنیم در ظرف اول و دوم به ترتیب x و $۴۰-x$ کیلوگرم محلول نمک بریزیم و غلظت نمک نیز $A\%$ باشد.

در ظرفی که x کیلوگرم محلول ریخته‌ایم، میزان نمک خالص برابر است با: $x\times\frac{A}{۱۰۰}$

و در ظرف دوم نیز که $۴۰-x$ کیلوگرم محلول ریخته‌ایم، میزان نمک خالص برابر است با: $(۴۰-x)\times\frac{A}{۱۰۰}$

$\boxed{x}$ ظرف اول $\downarrow$ — $\boxed{۴۰-x}$ ظرف دوم $\downarrow$

نمک خالص $= x\times\frac{A}{۱۰۰}$ نمک خالص $= (۴۰-x)\times\frac{A}{۱۰۰}$ $\quad (۴۰-x)\frac{A}{۱۰۰}=\frac{xA}{۱۰۰}+۲$

اگر به ظرف دوم ۱ کیلوگرم نمک اضافه کنیم:

نمک خالص ظرف دوم $= (۴۰-x)\times\frac{A}{۱۰۰}+۱$

نمک خالص ظرف اول $= x\times\frac{A}{۱۰۰}$

$$\Rightarrow (۴۰-x)\frac{A}{۱۰۰}+۱=۲\times\frac{xA}{۱۰۰}$$

با استفاده از ۲ رابطه بالا داریم:

$$\frac{xA}{۱۰۰}+۲+۱=۲\times\frac{xA}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{xA}{۱۰۰}=۳$$

$$(۴۰-x)\times\frac{A}{۱۰۰}=\frac{xA}{۱۰۰}+۲\Rightarrow\frac{۴۰A}{۱۰۰}-\frac{xA}{۱۰۰}=\frac{xA}{۱۰۰}+۲\Rightarrow\frac{۲}{۵}A=۸\Rightarrow A=۲۰\Rightarrow\frac{xA}{۱۰۰}=۳\Rightarrow x=۱۵(\text{kg})$$

پس در ظرف اول ۱۵ کیلوگرم محلول ریخته‌ایم.

۶۷ـ گزینه «۲» فرض کنیم ابتدا آنها را در x واگن با ظرفیت ۱۲ نفر جای دهیم. یعنی $۱۲x$ تعداد کل زندانیان است. N نفر پیاده می‌شوند و بقیه را در $(x-۲)$ واگن جای می‌دهیم، به‌طوری‌که در هر واگن a نفر قرار دارد که a عددی اول است و $(x-۲)$ باید ۱۴ واحد از a کمتر باشد:

تعداد کل $=۱۲x$

N نفر پیاده شوند: $۱۲x-N=(x-۲)\times\underset{\text{عدد اول}}{a}\;;\; x-۲=a-۱۴$

تنها حالتی که a بتواند اول باشد و در روابط بالا صدق کند $a=۱۷$ است. درنتیجه داریم:

$x-۲=۱۷-۱۴\Rightarrow x=۵\Rightarrow$ تعداد کل زندانیان $=۶۰$

۶۸ـ گزینه «۱» سرعت قایق ۱۸ کیلومتر در ساعت است و سرعت آب رودخانه $۳\frac{km}{h}$.

سرعت جریان آب ورودی به رودخانه را V فرض می‌کنیم. قایق از نقطه A باید ۸۰ کیلومتر را با سرعت $(۱۸+V)$ طی کند تا به رودخانه برسد، سپس x کیلومتر را با سرعت $(۱۸-۳)$ در خلاف جهت رودخانه برود و به نقطه B برسد. پس داریم:

رفت: $\begin{cases}۸۰=(۱۸+V)\times t\\ x=(۱۸-۳)\times(۱۸-t)\end{cases}$

با توجه به اینکه قایق در مسیر برگشت ۱۵ ساعت در راه بوده است و با لحاظ کردن جهت جریان آب در رودخانه داریم:

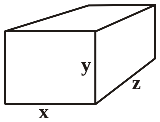
برگشت: $\begin{cases}۸۰=(۱۸-V)\times t'\\ x=(۱۸+۳)\times(۱۵-t')\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۸۰}{۱۸+V}+\frac{x}{۱۸-۳}=۱۸\\ \frac{۸۰}{۱۸-V}+\frac{x}{۱۸+۳}=۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۸۰}{۱۸+V}+\frac{x}{۱۵}=۱۸\\ \frac{۸۰}{۱۸-V}+\frac{x}{۲۱}=۱۵\end{cases}$

چون سمت راست تساوی‌ها عدد صحیح است، پس باید $\frac{X}{۱۵}$ و $\frac{X}{۲۱}$ عدد صحیح باشد، لذا X باید مضرب ۱۵ و ۲۱ باشد. از طرفی $\frac{۸۰}{۱۸-V}$ و $\frac{۸۰}{۱۸+V}$ نیز باید صحیح باشند، یعنی $۱۸-V$ و $۱۸+V$ باید مقسوم‌علیه ۸۰ باشد، اگر $V=۲$ باشد، آنگاه هم $\frac{۸۰}{۱۸-۲}$ هم $\frac{۸۰}{۱۸+۲}$ عدد صحیح می‌شود، پس $V=۲$. به همین ترتیب اگر $V=۲$ باشد، داریم:

$$\frac{۸۰}{۱۸+۲}+\frac{x}{۱۵}=۱۸\Rightarrow\frac{x}{۱۵}=۱۴\Rightarrow x=۲۱۰$$

و البته فاصله A و B ازهم $(x+۸۰)$ می‌باشد، یعنی ۲۹۰ کیلومتر فاصله دو ایستگاه A و B از هم می‌باشد.

۶۹ـ گزینه «۲» اگر ابعاد مکعب مستطیل به x، y و z قسمت تقسیم شود، کل قطعات برابر با $x\times y\times z$ خواهد بود. ابتدا ۱۸۰ را تجزیه کنیم:



$$۱۸۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵$$

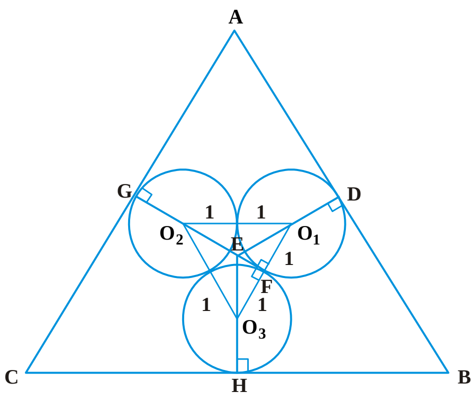
باید سعی کنیم طوری ۲، ۳ و ۵ را با هم ترکیب کنیم که حاصل‌ضرب آنها ۱۸۰ شود. به عنوان مثال $۱۸۰ = ۱۲\times ۳\times ۵$ نیز قبول است، ولی در این حالت تعداد برش‌ها حداقل نخواهد شد. یادآور می‌شویم که اگر بخواهیم پاره‌خطی به x قسمت مساوی تقسیم شود، باید $(x-۱)$ برش اعمال کنیم.

$$۱۸۰ = ۴\times ۹\times ۵$$

$$۱۸۰ = \underset{\text{۵ برش}}{\underset{\downarrow}{۶}} \times \underset{\text{۵ برش}}{\underset{\downarrow}{۶}} \times \underset{\text{۴ برش}}{\underset{\downarrow}{۵}}$$

یعنی اگر بُعدهای مکعب به ۶ و ۶ و ۵ قسمت تقسیم شوند، کمترین تعداد بُرش (یعنی ۱۴ بُرش) لازم است.

۷۰ـ گزینه «۲» با وصل کردن مرکز دوایر به هم یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲cm تشکیل می‌شود. شعاع عمود بر اضلاع مثلث را که ادامه دهیم در نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. چرا که مثلا $O_۳E = O_۱E = O_۲E$



$$\begin{cases} O_۱E = \sqrt{EF^۲ + ۱^۲} \\ O_۲E = \sqrt{EF^۲ + ۱^۲} \end{cases} \Rightarrow O_۱E = O_۲E$$

و به طریق مشابه $O_۲E = O_۱E$. پس E نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به یک فاصله است، پس این نقطه محل تلاقی نیمسازها، ارتفاع‌ها و میانه‌های مثلث $O_۱O_۲O_۳$ است؛ پس طول $O_۱E = O_۲E = O_۳E$ برابر با $\frac{۲}{۳}h$ است که h ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع درونی است و می‌دانیم $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول ضلع مثلث یعنی $۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

بنابراین داریم:

$$O_۱E = \frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times(۲) = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

پس فاصله نقطه E تا ضلع‌های مثلث برابر است با:

$$ED = EO_۱ + O_۱D = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} + ۱$$

نقطه E درون مثلث بزرگ‌تر از هر سه ضلع فاصله یکسانی دارد، پس این نقطه محل تلاقی نیمسازها، میانه‌ها و ارتفاع‌ها است و فاصله E تا هر ضلع یک‌سوم ارتفاع است. اگر طول ضلع مثلث بزرگ X باشد، داریم:

$$ED = \frac{۱}{۳}(AH) = \frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}X) = \frac{\sqrt{۳}}{۶}X \ ,\ ED = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} + ۱ \Rightarrow X = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۶}} = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۶}} : \frac{۴\sqrt{۳}+۶}{\sqrt{۳}} = ۴ + \frac{۶\sqrt{۳}}{۳} = ۴ + ۲\sqrt{۳}$$

آزمون (۸)

۷۱ـ گزینه «۲» فرض کنید که در ابتدا مقدار شیر در ظرف X لیتر بوده باشد. وقتی ۸ لیتر از آن را خالی کرده و جای آن آب می‌ریزیم، مقدار شیر موجود برابر با $X-۸$ لیتر و مقدار آب موجود برابر با ۸ لیتر خواهد شد. در واقع نسبت مقدار شیر به مخلوط برابر $(۱-\frac{۸}{X})=\frac{(X-۸)}{X}$ می‌شود. در مرحله دوم که ۸ لیتر برمی‌داریم. این ۸ لیتر شیر خالی نیست بلکه با توجه به نسبت شیر به کل مخلوط بخشی از این ۸ لیتر شیر است و بخش دیگر آب. با توجه به اینکه قبل از این مرحله نسبت شیر به مخلوط برابر با $۱-\frac{۸}{X}$ است. همین نسبت آن ۸ لیتر جدیداً خارج شده را شیر تشکیل می‌دهد. یعنی مقدار شیر خارج شده در مرحله دوم برابر است با:

$$۸\times(۱-\frac{۸}{X})$$

پس مقدار شیر مانده در ظرف پس از مرحله دوم برابر با $X-۸-(۸\times(۱-\frac{۸}{X}))$ است. یعنی نسبت شیر به مخلوط برابر با مقدار زیر خواهد شد:

$$\frac{(X-۸)-۸\times(۱-\frac{۸}{X})}{X}=\frac{X(۱-\frac{۸}{X})-۸\times(۱-\frac{۸}{X})}{X}=\frac{(X-۸)(۱-\frac{۸}{X})}{X}=(۱-\frac{۸}{X})^۲$$

به طریق مشابه برای مرحله سوم به دست می‌آید که نسبت شیر مانده به مخلوط برابر $(۱-\frac{۸}{X})^۳$ خواهد بود و در نهایت بعد از مرحله چهارم نسبت شیر به مخلوط برابر با $(۱-\frac{۸}{X})^۴$ است. در صورت سؤال بیان شده که بعد از چهار مرحله نسبت شیر به مخلوط برابر با $\frac{۱۶}{۸۱}$ است. پس داریم:

$$(۱-\frac{۸}{X})^۴=\frac{۱۶}{۸۱}\Rightarrow ۱-\frac{۸}{X}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{۸}{X}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow X=۸\times۳=۲۴$$

۷۲ـ گزینه «۱» اگر ساق‌های مثلث را با a و ضلع دیگر را با b نشان دهیم:

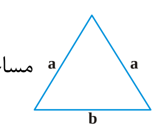
$$a+a+b=۲a+b=۱۸\Rightarrow\begin{cases}b=۱۸-۲a\\ b:\text{عدد طبیعی}\end{cases}\Rightarrow b\ \text{عدد زوج}$$

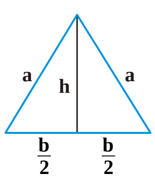
از طرفی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است، پس داریم:

$$\begin{cases}۲a>b\\ ۲a+b=۱۸\end{cases}\Rightarrow b\le ۹\xrightarrow{\text{زوج } b}b\le ۸$$

پس چهار ترکیب ممکن به شکل مقابل وجود دارد:

$$\begin{cases}b=۲\ ,\ a=۸\\ b=۴\ ,\ a=۷\\ b=۶\ ,\ a=۶\\ b=۸\ ,\ a=۵\end{cases}$$

در مثلث  مساحت برحسب a و b به طریق زیر به‌دست می‌آید:



$$\text{ارتفاع}=h=\sqrt{a^۲-(\frac{b}{۲})^۲}=\sqrt{a^۲-\frac{b^۲}{۴}}$$

$$S=\frac{۱}{۲}(b\times h)=\frac{b}{۲}\cdot\sqrt{a^۲-\frac{b^۲}{۴}}$$

$$b=۲\ ,\ a=۸\Rightarrow S=\frac{۲}{۲}\sqrt{۶۴-\frac{۴}{۴}}=\sqrt{۶۳}=\sqrt{۹\times۷}=۳\sqrt{۷}$$

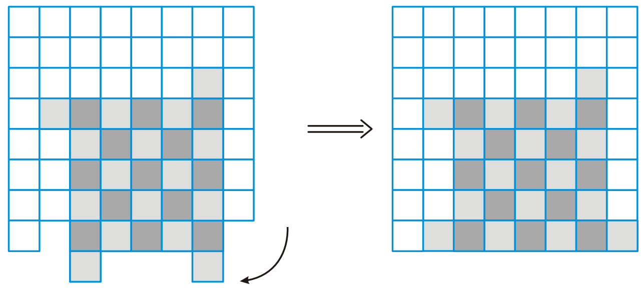
$$b=۴\ ,\ a=۷\Rightarrow S=\frac{۴}{۲}\sqrt{۴۹-\frac{۱۶}{۴}}=۲\sqrt{۴۵}=۶\sqrt{۵}$$

$$b=۶\ ,\ a=۶\Rightarrow \text{مثلث متساوی‌الاضلاع}: S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a)^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۶\times۶)=۹\sqrt{۳}$$

$$b=۸\ ,\ a=۵\Rightarrow S=\frac{۸}{۲}\sqrt{۲۵-\frac{۶۴}{۴}}=۴\sqrt{۲۵-۱۶}=۴\times۳=۱۲$$

پس کمترین مساحت برابر با $۳\sqrt{۷}$ به دست می‌آید.

۷۳ـ گزینه «۱» اولاً قسمتی که بریده می‌شود باید شامل دو مربع کوچک که از شکل اصلی بیرون هستند باشد. ثانیاً چون در سطر زیرین صفحه‌ی شطرنجی دو مربع کم می‌باشد، لذا باید حداقل ۷ مربع کنار هم و به هم وصل باشند تا بتوانیم سطر زیرین را پر کنیم. پس از طرفی باید حداقل یک ردیف هفت‌تایی از مربع‌ها انتخاب کنیم، از طرف دیگر باید انتخاب ما شامل دو مربع بیرون‌زده از شکل باشد. دقت کنیم که شکل انتخابی ما باید حداقل ۹۰ درجه دوران کند تا بتواند قسمت خالی شکل را پر کند و بیرون‌زدگی از شکل را به داخل هدایت کند. انتخابی شبیه شکل زیر می‌تواند با چرخش ۹۰ درجه ساعتگرد، داخل شکل قرار گیرد و آن را به صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ تبدیل کند.



۷۴ـ گزینه «۱» فرض کنیم خندق ۵ متری را در مدت t و خندق ۳ متری را در مدت t' انجام دهد. همچنین مدت زمان t'' را نیز در راه باشد که از خندق اول به خندق دوم برسد. ماشین خاکبرداری را با M نمایش می‌دهیم.

اگر ماشین بتواند در مدت زمان t خندق ۵ متری و در مدت زمان t' خندق ۳ متری را حفر کند، یعنی ماشین می‌تواند در هر ساعت $\frac{۵}{t}$ یا $\frac{۳}{t'}$ متر کار را انجام دهد.

$$M=\frac{۵}{t},\quad M=\frac{۳}{t'} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۵}{M} \\ t'=\frac{۳}{M} \end{cases}$$

از طرفی یک ساعت و ۱۲ دقیقه را اگر برحسب ساعت بنویسیم، معادل ۱/۲ ساعت خواهد شد که می‌توانیم رابطه زیر را بین t، t' و t'' برقرار کنیم:

$$M\times t=۵,\quad M\times t'=۳ \Rightarrow \frac{۵}{M}=t''+\frac{۳}{M}-۱/۲$$

اگر به‌جای M، $\frac{M}{۴}$ داشته باشیم (قدرت آن $\frac{۱}{۴}$ باشد)، آنگاه:

$$\frac{M}{۴}\times \underset{\text{زمان لازم}}{\underset{\uparrow}{?}}=۵ \Rightarrow ?=\frac{۵\times ۴}{M}=t'' \qquad \Rightarrow \frac{۵}{M}=\frac{۲۰}{M}+\frac{۳}{M}-۱/۲ \Rightarrow M=۱۵$$

بر این اساس M (فاعل) می‌تواند در هر ساعت ۱۵ واحد از کار را انجام دهد.

۷۵ـ گزینه «۴» شناگر دوم ۲۱ متر را با سرعت ۱/۵ متر در ثانیه طی می‌کند و به اولی می‌رسد. $۲۱=t\times ۱/۵ \Rightarrow t=۱۴$

یعنی شناگر دوم (که سریع‌تر از اولی می‌رود) ۱۴ ثانیه طول می‌کشد به اولی برسد. یعنی شناگر اول $(۱۴+t_{\circ})$ ثانیه را در آب بوده و ۲۱ متر را طی کرده است. شناگر دوم با سرعت $۱/۵\frac{m}{s}$ مسافت ۵۰ متر را می‌رود که به انتهای استخر برسد:

مدت زمانی‌که طول می‌کشد دومی به انتها برسد $\leftarrow$ ثانیه $۵۰=۱/۵\times ? \Rightarrow ?=\frac{۱۰۰}{۳}$

از طرفی $\frac{۲}{۳}$ ثانیه پس از آن نیز شنا می‌کند، یعنی جمعاً $(\frac{۱۰۰}{۳}+\frac{۲}{۳})$ ثانیه با سرعت $۱/۵\frac{m}{s}$ شنا کرده است. متر $۵۱=(\frac{۱۰۰}{۳}+\frac{۲}{۳})\times ۱/۵=$ جابه‌جایی

یعنی شناگر دوم ۵۰ متر رفته و ۱ متر برگشته و دوباره به اولی رسیده است. یعنی اولی جمعاً ۴۹ متر حرکت کرده است و کلاً $(\frac{۱۰۲}{۳}+t_{\circ})$ در راه بوده است.

$$\begin{cases} ۴۹=(\frac{۱۰۲}{۳}+t_{\circ})\times V \\ ۲۱=(۱۴+t_{\circ})\times V \end{cases} \Rightarrow t_{\circ}=۱$$

پس اختلاف زمانی آنها ۱ ثانیه است.

۷۶ـ گزینه «۳» اگر n میوه داشته باشیم و آن‌ها را در بشقاب‌های ۷ تایی و ۴ تایی و ۳ تایی قرار دهیم به ترتیب ۰ و ۲ و ۱ میوه اضافه می‌آید. می‌توانیم سه معادله‌ی زیر را بر این اساس تنظیم کنیم:

$$n = ۷k$$
$$n = ۴k' + ۲$$
$$n = ۳k'' + ۱$$

در واقع n باید مضربی از ۷ باشد که باقی‌مانده‌ی آن بر ۴ و ۳ به ترتیب ۲ و ۱ باشد. کوچک‌ترین مضرب ۷ که از این قاعده پیروی می‌کند عدد ۷۰ می‌باشد. سایر مقادیر n با جمع کردن ک‌م‌م مقسوم‌علیه‌ها یعنی (۷ و ۴ و ۳) با عدد ۷۰ به دست می‌آید. ک‌م‌م این سه عدد برابر است با: $۳ \times ۴ \times ۷ = ۸۴$

پس n می‌تواند مطابق جدول زیر باشد و در هر حالت باقی‌مانده‌ی آن را بر ۱۲۰ محاسبه می‌کنیم:

N	۷۰	۱۵۴	۲۳۸	۳۲۲	۴۰۶	۴۹۰	۵۷۴	۶۵۸	۷۴۲	۸۲۶	۹۱۰	۹۹۴
باقی‌مانده‌بر ۱۲۰	۷۰	۳۴	۱۱۸	۸۲	۴۶	۱۰	۹۴	۵۸	۲۲	۱۰۶	۷۰	۳۴

همان‌طور که از جدول معلوم است باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۱۲۰ می‌تواند ده عدد مختلف باشد. (مطابق جدول از ۷۰ تا ۱۰۶) و از آن به بعد دوباره تکرار همین ده عدد خواهد شد.

توضیح تکمیلی: در قسمت اضافه کردن ک‌م‌م سه عدد ۳ و ۴ و ۷ به عدد ۷۰ در حالت کلی توجه داشته باشیم که:

فرض کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی را می‌خواهیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر q_1 برابر با r_1 و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر q_2 برابر با r_2 باشد. اولین عدد طبیعی با این خاصیت را n_1 می‌نامیم:

$$n_1 = k_1 q_1 + r_1$$
$$n_1 = k_2 q_2 + r_2$$

حالا می‌خواهیم عدد طبیعی بعدی را که این ویژگی را دارد پیدا کنیم. فرض کنیم $n > n_1$ باشد و داشته باشیم:

$$n = k'_1 q_1 + r_1$$
$$n = k'_2 q_2 + r_2$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$n - n_1 = (k'_1 - k_1) q_1$$
$$n - n_1 = (k'_2 - k_2) q_2$$

یعنی $n - n_1$ باید مضرب مشترک q_1 و q_2 باشد. اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک q_1 و q_2 را با m نشان دهیم، خواهیم داشت:

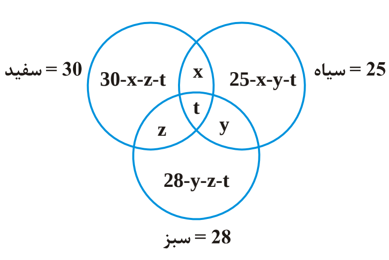
$$n = n_1 + m \ , \ n_1 + ۲m \ , \ n_1 + ۳m \ , \ldots$$

به همین ترتیب اگر ۳ مقسوم‌علیه به نام‌های q_1، q_2، q_3 داشته باشیم باید m را برابر با کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها بگیریم.

۷۷ـ گزینه «۱» او از هر مسیری که بگذرد تا به B برسد، به ناچار از ۴ مربع سیاه خواهد گذشت؛ این یعنی ۲۰ امتیاز قطعی دارد $(۲۰ = ۵ \times ۴)$. پس برای اینکه مجموع اعداد ۵۱ شود، باید از مربعات سفیدی بگذرد که مجموع آنها $۳۱ = ۲۰ - ۵۱$ شود. او در نهایت از ۳ مربع سفید خواهد گذشت که یک مربع آن از بین سه مربع ۱۵ و ۱۴ و ۱۳، یعنی سه مربع نزدیک‌تر به B انتخاب شود، یک مربع باید از بین ۱۰ و ۱۱ (روی قطر سفید مربع) انتخاب کند و یک مربع از بین ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ که نزدیک‌ترین مربعات به A است. اگر از هر مجموعه مربع کمترین را هم انتخاب کند، یعنی از ۱۰،۱۰،۱۳ بگذرد که می‌شود مسیری که از A مستقیم تا پایین‌ترین مربع از ستون اول بیاید و سپس باقی مسیر را تا نقطه B در جهت راست حرکت کند، باز مجموع ۳۳ می‌شود که بیشتر از ۳۱ است؛ پس هیچ مسیری وجود ندارد که مجموع در نهایت ۵۱ شود.

حل سریع‌تر: باید مجموع سه مربع سفید ۳۱ شود. با نگاه به اعداد متوجه می‌شویم که کوچک‌ترین عدد ۱۰ است $۳۰ = ۳ \times ۱۰$، تنها راه برای رسیدن به عدد ۳۱ این است که از دو مربع ۱۰ و یک مربع ۱۱ بگذرد. در لایه آخر حتماً باید از یکی از مربعات ۱۳، ۱۴ یا ۱۵ بگذرد، پس هیچ‌گاه برایش ممکن نخواهد بود که به ۳۱ و در نهایت به مجموع ۵۱ برسد.

۷۸ـ گزینه «۴» چون امکانات برحسب درصد مطرح شده‌اند می‌توانیم فرض کنیم که ۱۰۰ خودرو در نمایشگاه باشد، در این صورت ۷۰ و ۳۰ و ۴۰ خودرو به ترتیب کیسه هوا، ترمز ABS و سنسور عقب را دارا هستند. با نمودار وِن این سه مجموعه را نمایش می‌دهیم. چون قرار است اشتراک هر سه مجموعه حداکثر باشد پس باید در ناحیه‌هایی که دو مجموعه مشترک هستند، کمترین تعداد اتومبیل باشد. فرض کنیم x خودرو شامل هر سه امکان باشند.



$$\Rightarrow (۳۰ - x) + (۷۰ - x) + (۴۰ - x) + x = ۱۰۰ \Rightarrow ۱۴۰ - ۲x = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

پس حداکثر ۲۰ خودرو می‌تواند هر سه امکان را داشته باشند.

۷۹ـ گزینه «۲» ظرفیت خودروها ۵ و ۹ می‌باشد. فرض کنیم x خودرو ۵ نفره و y خودرو ۹ نفره پُر شوند. در مجموع ۱۸۶ نفر را می‌خواهیم توسط خودروها جابه‌جا کنیم:

$$5x+9y=186$$

با یک معادله سیاله روبه‌رو هستیم. ضریب کوچک‌تر را در یک طرف نگه داشته و بقیه را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. سپس دو طرف را بر ضریب کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$5x=186-9y \Rightarrow x=\frac{186}{5}-\frac{9y}{5} \Rightarrow x=37-y+\frac{1-4y}{5}$$

از آنجا که x و ۳۷ و y صحیح هستند، پس $\frac{1-4y}{5}$ نیز باید صحیح باشد. می‌توانیم مطابق جدول زیر x و y را مقداردهی کنیم:

x	۳۰	۲۱	۱۲	۳
y	۴	۹	۱۴	۱۹

همان‌طور که مشخص شده در چهار حالت مختلف می‌توان از خودروهای نوع اول و دوم برای جابه‌جایی ۱۸۶ نفر استفاده کرد.

۸۰ـ گزینه «۲» قیمت خرید سرب و روی و قلع را به ترتیب با x و y و z نمایش می‌دهیم. اگر آلیاژ اول به مبلغ $12A$ به فروش رفته باشد، آلیاژ دوم به مبلغ $36A$ فروخته شده است.

$$\begin{cases}(3x+4y+5z)\times 1/2=12A\\(3x+y+11z)\times 1/8=36A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+4y+5z=10A & (1)\\3x+y+11z=20A & (2)\end{cases} \xrightarrow{(2)-(1)} 6z-3y=10A \Rightarrow A=\frac{6z-3y}{10}$$

اکنون می‌توانیم به جای A در معادلات بالا قرار دهیم و ارتباطی بین x و y و z پیدا کنیم.

$$3x+4y+5z=10A \xrightarrow{A=\frac{6z-3y}{10}} 3x+4y+5z=6z-3y \Rightarrow z=3x+7y$$

در آلیاژ سوم سرب و روی و قلع به نسبت وزنی ۳ و ۷ و ۹ کیلوگرم با هم ترکیب می‌شوند. با احتساب سود ۳۰% و توجه به این که قیمت هر کیلوگرم قلع z تومان می‌باشد داریم:

$$(3x+7y+9z)\times 1/3=?\times z$$

هدف محاسبه‌ی ? در رابطه بالا می‌باشد. از آن‌جا که $z=3x+7y$ داریم:

$$(z+9z)\times 1/3=?\times z \Rightarrow 13z=?\times z \Rightarrow ?=13$$

پس قیمت فروش ۱۹ کیلوگرم از آلیاژ سوم برابر با قیمت خرید ۱۳ کیلوگرم قلع است.

آزمون (۹)

۸۱ـ گزینه «۳» عدد سمت راست، بزرگ‌ترین عدد n رقمی اول است که n همان عدد سمت چپ تساوی‌ها است. بنابراین پاسخ ما باید یک عدد ۵ رقمی باشد و ضمناً بزرگ‌ترین عدد اول هم باشد که این عدد ۹۹۹۹۱ است. این سؤال هم چندان منطقی به نظر نمی‌رسد، ولی به هر حال در آزمون‌های هوش بین‌المللی مطرح شده بود و گفتیم بهتر است با این نوع سؤالات هم آشنا شوید!

۸۲ـ گزینه «۳» فرض کنیم که علی (A) سریع‌تر از بهنام (B) و بهنام سریع‌تر از سجاد (C) باشد. یعنی برای انجام کار داریم: $A < B < C$

زمان انجام کار برای علی A روز است. یعنی علی به تنهایی در هر روز می‌تواند $\frac{1}{A}$ کار را انجام دهد.

اگر بهنام و سجاد با هم کار کنند (کندترها) : $\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{N}$. چون N روز طول می‌کشد کار را نجام دهند، در یک روز $\frac{1}{N}$ کار را انجام می‌دهند.

اگر علی و بهنام با هم کار کنند (سریع‌ترها): $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{M}$

مهم‌ترین بخش حل این سؤال مربوط می‌شود به تشخیص اینکه کدام یک از افراد است که می‌تواند زمان انجام کار توسط وی سه برابر زمان انجام کار توسط هر سه نفر با هم باشد. فرض کنیم هر سه نفر با سرعت مشابهی کار را انجام دهند. آنگاه این شرایط برای هر کدام صادق است. حال اگر دو نفر شبیه به هم باشند، یک نفر سریع‌تر باشد، یعنی در زمانی کمتر کار را انجام دهد، دیگر سه برابر بودن زمان وی به نسبت زمان هر سه برقرار نیست و درواقع زمان نفر اول، کمتر از سه برابر زمان هر سه نفر خواهد بود. برای نفر کندتر نیز استدلال مشابهی داریم و در این حالت قطعاً زمان فرد کندتر بیشتر از سه برابر زمان کار هر سه نفر با هم است. پس تنها حالتی که زمان‌ها مختلف باشند و زمان کار یک نفر سه برابر زمان کار هر سه باشد این است که نفر وسطی باشد.

اگر زمان انجام هر سه با هم را X بنامیم، داریم: $B = 3X$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{X} \Rightarrow (\frac{1}{A}+\frac{1}{B})+(\frac{1}{B}+\frac{1}{C})-\frac{1}{B}=\frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M}+\frac{1}{N}-\frac{1}{B}=\frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M}+\frac{1}{N}-\frac{1}{3X}=\frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{M}+\frac{1}{N}=\frac{4}{3X}$$

$$\Rightarrow \frac{M+N}{MN}=\frac{4}{3X} \Rightarrow X=\frac{4MN}{3(M+N)}$$

۸۳ـ گزینه «۱» فرض کنیم x عدد صندلی ۴ پایه و y عدد صندلی ۳ پایه داشته باشیم. میانگین آنها $\frac{x+y}{2}$ خواهد شد. پس از اضافه و کم کردن تعداد آنها برابر است با:

چهار پایه	سه پایه
x	y
$\downarrow$	$\downarrow$
$x+2\times\frac{x+y}{2}$	$y-\frac{x+y}{2}$

تعداد کل پایه‌ها قبل از اضافه و کم کردن $= 4x+3y$

تعداد کل پایه‌ها بعد از اضافه و کم کردن $= 6/5x++5/5y$

$$\Rightarrow 6/5x+5/5y=1/7(4x+3y) \Rightarrow y=\frac{3}{4}x$$

تعداد کل صندلی‌های اولیه برابر است با:

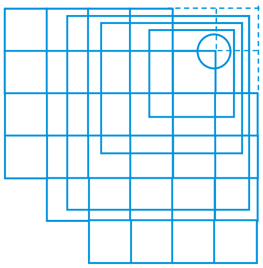
$$x+y=x+\frac{3}{4}x=\frac{7}{4}x$$

پس اولاً باید تعداد کل صندلی‌ها عدد صحیح مضرب $\frac{7}{4}$ باشد، ثانیاً میانگین آن یعنی $\frac{7}{8}x$ عدد صحیح باشد. از بین گزینه‌ها فقط ۲۳۸ می‌تواند هم زوج باشد و هم حاصل‌ضرب آن در $\frac{7}{4}$ عدد صحیح باشد.

۸۴ـ گزینه «۱» در حالت کلی در یک مربع مشبک $n \times n$ تعداد کل مربع‌ها برابر است با $n^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$. اگر شکل مورد نظر کامل بود، تعداد کل مربع‌ها برابر می‌شد با:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2 = 91$$

ولی ۶ مربع کوچک از شکل جدا شده است. باید تمام مربع‌های کوچک و مربع‌هایی که با آن‌ها درگیر بودند را حذف کنیم. (از طرفی خود مربع بزرگ ۶×۶ نیز حذف می‌شود.) به عنوان مثال در مورد مربع گوشه‌ی بالا سمت راست:

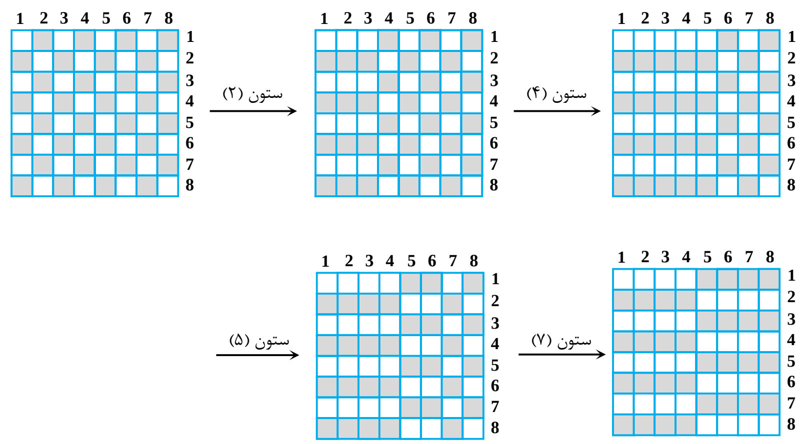


چهار مربع با این مربع می‌تواند ساخته شود که باید حذف شود.

۶مربع کوچک،۱ مربع اصلی، گوشه‌ای‌ترین مربع‌ها هر کدام ۴ تا (۲×۴) و هر کدام از مربع‌های کوچک کنار آن نیز ۳ مربع از کل کم می‌کنند. (۴×۳) همچنین دو مربع به‌صورت مشترک حذف می‌شود.

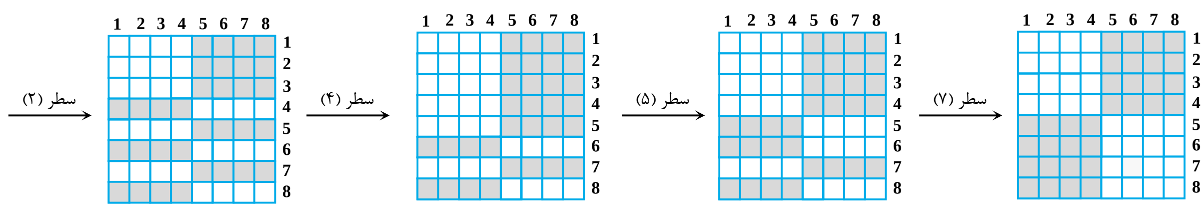
$$\text{جواب} = 91 - (6+1+8+12+2) = 91 - 29 = 62$$

۸۵ـ گزینه «۲» به سطر اول توجه کنید. در این سطر باید لامپ‌های ۲ و ۴ روشن شوند و لامپ‌های ۵ و ۷ خاموش شوند. البته نمی‌خواهیم سایر لامپ‌های سطر اول تغییر کنند بنابراین این ۴ ستون را تغییر وضعیت می‌دهیم:



اکنون به سراغ سطرها می‌رویم:

به ترتیب سطرهای دوم، چهارم، پنجم و هفتم را تغییر وضعیت می‌دهیم:



بنابراین با فشردن ۸ کلید می‌توانیم به تصویر موردنظر برسیم. در ضمن با توجه به آن که هر کلید فقط روی یک سطر یا یک ستون اثر می‌گذارد و این شکل دارای ۸ سطر و ستون است. بنابراین اطمینان داریم که با کمتر از ۸ حرکت این تصویر ساخته نمی‌شود.

۸۶ـ گزینه «۱» فرض کنیم دوچرخه در مدت زمان t با سرعت V_D نصف مسیر را طی کند. پس از اتومبیل در مدت $(t-\frac{۱}{۴})$ با سرعت V_M نصف مسیر را طی می‌کند و به دوچرخه می‌رسد. اگر کل مسیر x باشد، داریم:

$$\frac{x}{۲}=V_D\times t$$

$$\frac{x}{۲}=V_M\times(t-\frac{۱}{۴})$$

اتومبیل در مدت t' با سرعت V_M، $\frac{x}{۲}$ دیگر را طی می‌کند و به B می‌رسد. در این مدت (یعنی t') دوچرخه با سرعت V_D مسافت $(\frac{x}{۲}-\frac{x}{۳})$ را طی کرده است.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{۲}=V_M\times t'\\ \frac{x}{۶}=V_D\times t'\end{array}\right.\Rightarrow\frac{V_M}{V_D}=۳$$

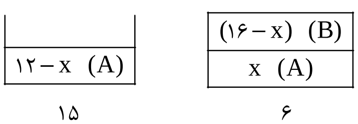
با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\begin{cases}V_D\times t=V_M\times(t-\frac{۱}{۴})\\ V_M=۳V_D\end{cases}\Rightarrow t=۳(t-\frac{۱}{۴})\Rightarrow t=\frac{۳}{۸}\ \text{ساعت}$$

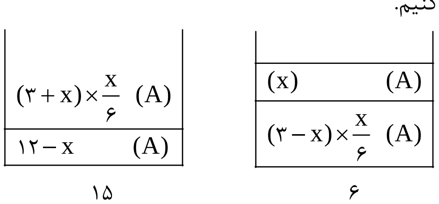
البته t مدت زمان طی کردن نصف مسیر توسط دوچرخه است و برای طی کردن کل مسیر به $2t$ زمان لازم دارد.

$$۲\times\frac{۳}{۸}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}h=۴۵\ \text{دقیقه}$$

۸۷ـ گزینه «۲» قرار است در مجموع، ۱۲ لیتر از مایع A در هر دو ظرف بریزیم. فرض کنیم در ظرف ۶ و ۱۵ لیتری به ترتیب x و $۱۲-x$ لیتر از مایع A بریزیم. بعد از آن ظرف کوچک را باید با B پُر کنیم. یعنی $(۶-x)$ لیتر از مایع B داخل ظرف کوچک می‌ریزیم.



اکنون می‌خواهیم از محتویات ظرف کوچک آنقدر به بزرگ بریزیم تا ظرف بزرگ پر شود؛ یعنی باید $(۳+x)$ لیتر از ظرف کوچک به بزرگ بریزیم. دقت کنیم که نسبت مایع A در ظرف کوچک $\frac{x}{۶}$ است. یعنی هر حجمی از ظرف کوچک انتخاب کنیم، $\frac{x}{۶}$ آن A است. پس در کل $(۳+x)\times\frac{x}{۶}$ از مایع A به ظرف بزرگ منتقل شده است. در این لحظه دوباره x لیتر از مایع A به ظرف کوچک اضافه می‌کنیم.



$$\text{نسبت مایع } A \text{ در ظرف بزرگ}=\frac{(۳+x)\times\frac{x}{۶}+(۱۲-x)}{۱۵}$$

$$\text{نسبت مایع } A \text{ در ظرف کوچک}=\frac{(۱۳-x)\times\frac{x}{۶}+x}{۳}$$

با توجه به این که دو نسبت با هم برابر هستند، از مساوی قرار دادن آن‌ها $x=۲$ به دست می‌آید.

۸۸ـ گزینه «۴» فرض کنیم حجم مخزن n لیتر باشد. اگر لوله دوم (B) در مدت t مخزن را پر کند، لوله اول (A) می‌تواند در مدت $(t-۱)$ همین حجم کار را انجام دهد.

$$A\times(t-۱)=n$$
$$B\times(t)=n$$

حال قدرت لوله دوم $(B+\frac{۴}{۳})$ و حجم مخزن نیز $n+۲$ درنظر می‌گیریم. لوله اول در مدت $t-۱$ می‌تواند n لیتر آب را عبور دهد. بنابراین مدت زمان لازم برای عبور ۲ لیتر آب از لوله اول برابر است با:

ساعت	لیتر
$t-۱$	n
?	۲

$$\Rightarrow\ ?=\frac{۲(t-۱)}{n}$$

همچنین در مدتی که لوله دوم می‌تواند کار را انجام دهد (t) لوله اول می‌تواند ۳ لیتر آب را عبور دهد.

$$\begin{matrix}A\times(t-۱)=n\\ A\times t=۳\end{matrix}\quad\Rightarrow\frac{t-۱}{t}=\frac{n}{۳}\ \Rightarrow n=\frac{۳(t-۱)}{t}$$

در مورد لوله دوم و حجم جدید مخزن داریم:

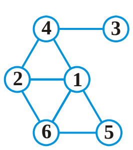
$$(B+\frac{۴}{۳})\times\frac{۲(t-۱)}{n}=n+۲\quad,\quad B=\frac{n}{t}\quad,\quad n=\frac{۳(t-۱)}{t}\ \Rightarrow(\frac{۳(t-۱)}{t^۲}+\frac{۴}{۳})\times\frac{۲(t-۱)}{\frac{۳(t-۱)}{t}}=\frac{۳(t-۱)}{t}+۲$$

از حل یک معادله یک مجهول ساده فوق به $t=۳$ می‌رسیم:

$$\text{ظرفیت مخزن}:\ n=\frac{۳\times(۳-۱)}{۳}=۲$$

۸۹ـ گزینه «۱» باید سعی کنیم با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ اعداد ۱۷، ۱۱، ۴، ۶، ۷ و ۸ را بسازیم. در مورد عدد ۱ چون $۱۷=۱$ یعنی مجموع اعداد وصل شده به (۱) باید ۱۷ باشد، تنها راه رسیدن به مجموع A با اعداد ۱ تا ۶ را باید به دست آوریم. مجموع دو عدد حداکثر ۱۱ و مجموع ۳ عدد ۱۵ است، پس حداقل به۴ عدد نیاز داریم. نتیجه می‌شود که ارقام ۲، ۴، ۵ ، ۶ باید جمع ۱۷ را به ما بدهند. عدد ۱ هم وسط است، پس تنها عددی که باقی‌مانده ۳ است که نباید به ۱ متصل باشد. با توجه به $۴=۳$، تک دایره‌ی متصل به ۳ باید ۴ باشد و از آن‌جا به بعد سایر دوایر نیز مشخص می‌شوند.

می‌توان به صورت یکتای زیر شکل را کامل نمود و A و B و C و D را مشخص کرد.



$$\rightarrow\begin{cases}A=۴\\B=۲\\C=۱\\D=۵\end{cases}\rightarrow A+B-۲C+D=۹$$

۹۰ـ گزینه «۳» هر کارگر را با A نمایش می‌دهیم. کارگر اول $\frac{۱}{۳}$ ساعت کار می‌کند. سپس دو کارگر $\frac{۱}{۳}$ ساعت با هم کار می‌کنند و به همین ترتیب الی آخر. چون ۸ ساعت انجام کار طول می‌کشد و هر ساعت به ۳ تا بیست دقیقه تقسیم می‌شود، پس داریم:

$$A\times\frac{۱}{۳}+۲A\times\frac{۱}{۳}+۳A\times\frac{۱}{۳}+\cdots+۲۴A\times\frac{۱}{۳}=w\ \Rightarrow\frac{A}{۳}\underbrace{(۱+۲+۳+\cdots+۲۴)}_{\frac{۲۴}{۲}(۱+۲۴)}=w\ \Rightarrow A=\frac{۶}{۲۴\times۲۵}w$$

اگر قرار باشد هر ۴۵ دقیقه یک کارگر اضافه شود، در مدت ۶ ساعت داریم:

$$A\times\frac{۳}{۴}+۲A\times\frac{۳}{۴}+\cdots+۸A\times\frac{۳}{۴}=xw$$
$$A\times\frac{۳}{۴}\underbrace{(۱+۲+\cdots+۸)}_{\frac{۸}{۲}(۱+۸)}=xw\ \Rightarrow\frac{۶}{۲۴\times۲۵}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۸\times۹}{۲}=x\ \Rightarrow x=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

پس از ۶ ساعت $\frac{۲۷}{۱۰۰}$ کار انجام می‌شود و ۷۳ درصد از آن باقی می‌ماند.

آزمون (۱۰)

۹۱ـ گزینه «۳» اگر سرعت ورود آب از شیر A را با V_A نشان دهیم که نشان دهنده مقدار آبی است که در یک ساعت از آن می‌گذرد و سرعت ورود آب از شیر B را با V_B نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$۱۹(V_A+V_B)=۴۷۵ \Rightarrow V_A+V_B=\frac{۴۷۵}{۱۹}=۲۵$$

از طرفی در حالتی که شیر A، ۵ ساعت بیشتر از شیر B باز باشد، داریم:

$$(t+۵)V_A+t\times V_B=۴۷۵ \Rightarrow t(V_A+V_B)+۵V_A=۴۷۵ \Rightarrow ۲۵t+۵V_A=۴۷۵ \Rightarrow ۵t+V_A=۹۵ \;\; ; (*)$$

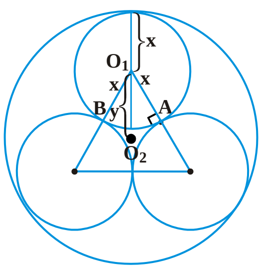
$$\Rightarrow t=\frac{۹۵-V_A}{۵}$$

با توجه به آن که $V_A+V_B=۲۵$ است، پس $۰<V_A<۲۵$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{۹۵-۲۵}{۵}<t<\frac{۹۵-۰}{۵} \Rightarrow ۱۴<t<۱۹$$

بنابراین در بین گزینه‌ها $T=۱۶$ قابل قبول است. البته از روی معادله (*) به روش حل معادله سیاله با روش طولانی‌تر هم می‌توان جواب را تعیین کرد.

۹۲ـ گزینه «۲» مطابق شکل اگر مرکز یکی از دایره‌های کوچک‌تر را $O_۱$ و مرکز دایره بزرگ‌تر را $O_۲$ نامگذاری کنیم، طول شعاع دایره کوچک‌تر را x بنامیم و فاصله مرکز دایره کوچک‌تر با مرکز دایره بزرگ‌تر $(O_۱O_۲)$ را y در نظر بگیریم، طول شعاع دایره بزرگ‌تر برابر با $x+y$ است.



مثلث $O_۱\overset{\Delta}{A}O_۲$ مثلثی قائم‌الزاویه با زوایای ۹۰، ۶۰ و ۳۰ درجه است. با توجه به اینکه زاویه $O_۱$ در مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است و با توجه به تساوی دو مثلث $O_۱AO_۲$ و $O_۱BO_۲$ زاویه $O_۲\hat{O}_۱A$، ۳۰ درجه است.

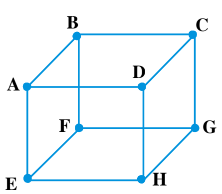
$$\cos(O_۲\hat{O}_۱A)=\frac{x}{y}=\cos(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow y=\frac{x}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲x}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ‌تر}=x+y=x+\frac{۲x}{\sqrt{۳}}=\frac{x\sqrt{۳}+۲x}{\sqrt{۳}}=\frac{x(۲+\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{نسبت شعاع دایره کوچک‌تر به شعاع دایره بزرگ‌تر}=\frac{\text{شعاع دایره کوچک‌تر}}{\text{شعاع دایره بزرگ‌تر}}=\frac{x}{x(\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}})}=\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳})}{(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۴-۳}=۲\sqrt{۳}-۳$$

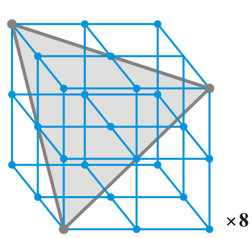
۹۳ـ گزینه «۳» در سه حالت مطابق شکل‌های زیر می‌توانیم مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل دهیم.

یادآوری: در یک مکعب اگر بخواهیم با قطرهای وجوه مثلث بسازیم ۸ حالت متصور خواهد بود. به عنوان مثال اگر قطر AC، AH و CH را به‌هم وصل کنیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌گردد. می‌توانیم ۷ حالت دیگر نیز با وصل‌کردن ۳ قطر از قطرهای وجوه مکعب، مثلث متساوی‌الاضلاع بسازیم:

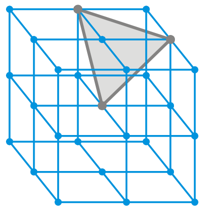


ACH, ACF
BDE, BDG
EGD, EGB
FHC, AFH

بنابراین داریم:

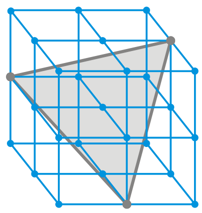


$\xrightarrow{\text{در هشت جهت مختلف}}$ = ۸ حالت



×64

$\xrightarrow[\text{در مجموع ۸ مکعب کوچک}]{\text{هر مکعب کوچک ۸ حالت}}$ $۸\times۸=۶۴$ حالت



×8

$\xrightarrow{\text{در هشت جهت مختلف}}$ $=۸$ حالت

پس جواب گزینه ۳ خواهد بود.

۹۴ـ گزینه «۳» وقتی عنوان می‌شود که «حداقل چند توپ باید بیرون بیاوریم» یعنی باید بدترین حالت ممکن را فرض کنیم. در این مسأله بدترین حالت ممکن این است که از ۳ رنگ، هر کدام ۹۰ توپ خارج شود. واضح است که تا الآن، به مطلوب سؤال نرسیده‌ایم. از این به بعد، بدترین حالت، حالتی است که از ۵ رنگ باقی‌مانده، هر کدام ۸ توپ خارج شود. توپ بعدی که خارج می‌شود، یقیناً از ۴ رنگ مختلف، هر کدام ۹ توپ خارج شده است.

تعداد کل $=۳\times۹۰+۵\times۸+۱=۳۱۱$

توضیح بیشتر: در حالت کلی، هرگاه بخواهیم از n شیء حداقل تعداد مشخصی داشته باشیم، سعی می‌کنیم $(n-۱)$ شیء را در بدترین حالت ممکن در نظر بگیریم. در این سؤال هم چون می‌خواهیم از ۴ رنگ مختلف حداقل ۹ عدد از هرکدام داشته باشیم، سعی می‌کنیم $(۴-۱)$ حالت را بدترین حالت طوری فرض کنیم که خواسته‌ی سؤال برآورده **نشود**. وقتی بدترین حالت را در نظر بگیریم اگر مثلاً x حالت باشد، قطعاً $x+۱$اُمین حالت، مطلوب سؤال خواهد بود. یعنی به جای این که پای رنگ چهارم را وسط بکشیم، فرض کنیم از سه رنگ، از هر کدام ۹۰ توپ خارج شود. این بدترین حالت ممکن است که برای ۳ توپ می‌تواند رخ دهد.

۹۵ـ گزینه «۳» فرض کنیم در هر ظرف به‌ترتیب x،y،z،t و q توپ سفید باشد. بر این اساس تعداد توپ‌های مشکی هر ظرف نیز مشخص می‌شود.

سفید	q	سفید	t	سفید	z	سفید	y	سفید	x
مشکی	$۱۱۳-q$	مشکی	$۱۱۵-t$	مشکی	$۱۰۰-z$	مشکی	$۱۰۵-y$	مشکی	$۱۱۰-x$

می‌خواهیم یک ظرف را کنار بگذاریم، به‌طوری که پس از این عمل، تعداد توپ‌های سفید باقی‌مانده ۳ برابر تعداد توپ‌های مشکی باشد.

فرض کنیم ظرف حاوی ۱۱۰ توپ را کنار بگذاریم:

توپ‌های سفید $=y+z+t+q$

توپ‌های مشکی $=(۱۰۵-y)+(۱۰۰-z)+(۱۱۵-t)+(۱۱۳-q)=۴۳۳-(y+z+t+q)$

توپ‌های سفید $=۳\times$ توپ‌های مشکی $\rightarrow y+z+t+q=۳\times۴۳۳-۳\times(y+z+t+q) \rightarrow ۴\times(y+z+t+q)=۳\times۴۳۳$

$\rightarrow y+z+t+q=۳۲۴/۷۵$

چون باید حاصل‌جمع $y+z+t+q$ صحیح باشد، پس قبول نیست و ظرف حاوی ۱۱۰ توپ نمی‌تواند حذف شده باشد.

اگر ظرف حاوی ۱۱۳ توپ را کنار بگذاریم:

توپ‌های سفید $=x+y+z+t$

توپ‌های مشکی $=۴۳۰-(x+y+z+t)$

$\rightarrow x+y+z+t=۳\times۴۳۰-۳\times(x+y+z+t)$

$\rightarrow ۴(x+y+z+t)=۳\times۴۳۰$

در واقع باید سمت راست تساوی مضرب ۴ باشد که نیست. پس این ظرف هم نمی‌تواند حذف شده باشد.

اگر ظرف حاوی ۱۰۰ و ۱۰۵ توپ نیز کنار روند، با استدلال مشابه امکان‌پذیر نخواهد بود.

اگر ظرف حاوی ۱۱۵ توپ را کنار بگذاریم، داریم:

توپ‌های سفید $=x+y+z+q$

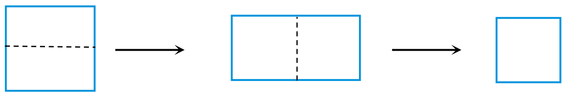
توپ‌های مشکی $=۴۲۸-(x+y+z+q)$

$\rightarrow (x+y+z+q)=۳\times۴۲۸-۳\times(x+y+z+q)$

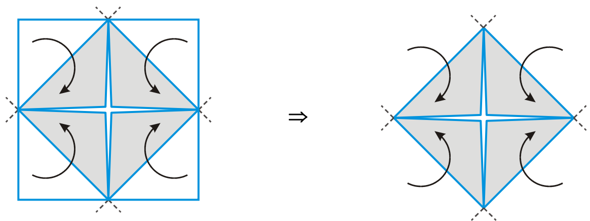
$\rightarrow ۴(x+y+z+q)=۳\times۴۲۸$

با توجه به اینکه ۴۲۸ مضرب ۴ می‌باشد، پس امکان‌پذیر است.

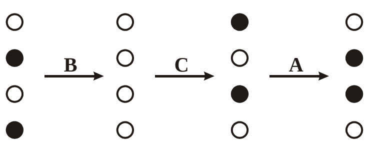
۹۶ـ گزینه «۳» اگر کاغذ را یک‌بار از وسط به موازات محور افقی و در ادامه نیز یک‌بار به موازات محور عمودی تا بزنیم به مربعی می‌رسیم که مساحت آن $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع اصلی است و هر دو طرف آن رنگی می‌باشد.



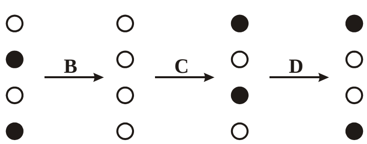
ولی این مربع بزرگ‌ترین مربعی که شرایط سؤال را تأمین کند، نمی‌باشد.
می‌توانیم مطابق الگوی زیر شکل را با ۴ بار تازدن به مربعی تبدیل کنیم که هر دو طرف آن رنگی است.



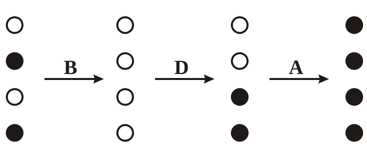
۹۷ـ گزینه «۲» اگر کلید D عمل نکند یعنی فقط کلیدزنی BCA اعمال شده است:



که وضعیت نهایی با آنچه که مطلوب سؤال است متفاوت می‌باشد، پس D عمل کرده است. به همین ترتیب اگر A عمل نکند انگار کلیدزنی BCD اعمال شده است:



در این حالت نیز وضعیت نهایی با آنچه که مطلوب سؤال است فرق دارد، پس A نیز سالم است.
اکنون فرض کنیم C عمل نکرده باشد، یعنی باید کلیدزنی BDA را اعمال کنیم:



در این حالت نیز به شکل مطلوب سؤال نرسیدیم، پس کلید C نیز سالم است. در نتیجه فقط کلید B عمل نکرده است.

راه حل تستی: حل این سؤال نیازی به دخالت دست ندارد! با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر ۴ کلید A، B، C و D با هر ترتیبی زده شوند (البته فقط ۱ بار)، هر لامپ باید ۲ بار تغییر وضعیت دهد، یعنی شکل نهایی باید به صورت شکل اول باشد. شکل دوم در لامپ‌های ۲ و ۴ با شکل اول تفاوت دارد، پس کلیدی که درست کار نکرده است کلیدی بوده که فقط بر دو لامپ ۲ و ۴ تأثیر داشته، یعنی کلید B، لذا جواب صحیح گزینه (۲) است.

۹۸ـ گزینه «۱» هر شبانه‌روز ۲۴ ساعت و هر ساعت ۶۰ دقیقه است. ابتدا حساب کنیم ۳ شبانه‌روز چند دقیقه است.

$$۳\times ۲۴\times ۶۰ = ۴۳۲۰ = ۳^{۳}\times ۵^{۱}\times ۲^{۵}$$

در مدت ۴۳۲۰ دقیقه همه‌ی درب‌ها ۲۷ بار با هم باز و بسته می‌شوند. اگر فاصله‌ی ۴۳۲۰ دقیقه را بر ۲۷ تقسیم کنیم، معلوم می‌شود که هر چند دقیقه یک‌بار درب‌ها با هم عمل می‌کنند.

$$\frac{۴۳۲۰}{۲۷} = ۱۶۰ = ۲^{۵}\times ۵^{۱}$$

هر ۱۶۰ دقیقه یک‌بار، درب‌ها با هم عمل می‌کنند. تعداد درب‌ها می‌تواند حداکثر برابر با تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۶۰ باشد:

$$\text{فرم کلی مقسوم علیه ۱۶۰} = ۲^{a}\times ۵^{b}\ ;\ a=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}\ ;\ b=\{۰,۱\}$$

در واقع ۶×۲ مقسوم‌علیه می‌توانیم برای ۱۶۰ در نظر بگیریم. پس تعداد درب‌ها حداکثر ۱۲ عدد می‌باشد.

۹۹ـ گزینه «۳» فرض این سؤال این است که آب هزینه‌ای برای شیرفروش ندارد. یعنی برای آب هزینه خاصی متحمل نمی‌شود و در واقع آن بخشی از مخلوط که آب است ولی به قیمت شیر فروخته می‌شود سود وی را به همراه دارد.

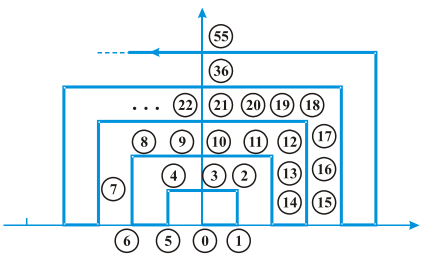
مقدار لیتر آب : W ، مقدار لیتر شیر : M ، قیمت هر واحد شیر : P

درصد سود شیرفروش متقلب: $100\times\frac{W}{M}=100\times\frac{(M+W)P-M\times P}{M\times P}$ و این یعنی $100\times\frac{W}{M}=25$ و لذا $\frac{W}{M}=\frac{1}{4}$ یعنی به ازای هر ۱ لیتر آب چهار لیتر شیر داریم. پس به ازای هر ۵ لیتر مخلوط یک لیتر آب داریم و این یعنی ۲۰% مخلوط را آب تشکیل می‌دهد.

اشتباه متداول در این سؤال این است که دانشجو به اینکه فرد ۲۵% سود می‌کند، سریع گزینه ۴ را انتخاب می‌کند.

۱۰۰ـ گزینه «۲» می‌توانیم با شروع از مبدأ مختصات بین مکان و زمان طی شده برای متحرک ارتباطی پیدا کنیم:

مطابق شکل موقعیت مکانی در هر لحظه برای متحرک به تصویر کشیده شده است.



به ارتباط بین محل تلاقی متحرک با محور عمودی و زمان آن توجه کنیم:

مکان	(۰و۱)	(۰و۲)	(۰و۳)	(۰و۴)	(۰و۵)	...
زمان	۳	۱۰	۲۱	۳۶	۵۵	...

در واقع می‌توان فهمید که پس از $t\times(2t+1)$ ثانیه، متحرک در مکان (۰و t) قرار دارد. سعی می‌کنیم از دل ۱۳۹۶ عبارتی شبیه $t(2t+1)$ خارج کنیم و رفتار متحرک را پیش‌بینی کنیم:

$$1396=\underbrace{26\times(2\times26+1)}_{\text{در این لحظه در مکان (۰و۲۶) قرار داشته}}+18$$

با دقت در شکل اصلی متوجه می‌شویم که هر جا متحرک در نقطه (۰و زوج) بوده، پس از آن به سمت راست حرکت کرده و هرجا که متحرک در نقطه (۰و فرد) بوده، به سمت چپ حرکت کرده است. پس انتظار داریم وقتی متحرک در نقطه (۰و۲۶) است، پس از آن به سمت راست حرکت کند. همچنین اگر به نمودار داده شده در صورت سؤال توجه کنیم، می‌بینیم که وقتی در نقطه‌ی (۰,۲) هستیم، ۲ گام بعدی به سمت راست هستند. وقتی در نقطه‌ی (۰,۴) هستیم، ۴ گام بعدی به سمت راست هستند. به همین ترتیب وقتی در نقطه‌ی (۰,۲۶) هستیم، ۲۶ گام بعدی به سمت راست خواهند بود. پس باید ۱۸ ثانیه بعدی را به اندازه ۱۸ واحد از (۰و۲۶) به سمت راست حرکت کند. یعنی موقعیت نهایی متحرک پس از ۱۳۹۶ ثانیه نقطه (۱۸و۲۶) خواهد بود.