پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۳» مقادیر خاص یا ویژه ماتریس، همان ریشه‌های معادله $f(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ هستند، پس داریم:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-4)+2\lambda+4-4-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4=0$$

چون مجموع ضرایب معادله صفر است، یکی از جواب‌ها $\lambda=1$ می‌باشد و جواب‌های دیگر از تقسیم معادله بر $(\lambda-1)$ به دست می‌آیند.

برای فاکتورگیری از $(\lambda-1)$ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)-4(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-4)=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)=0$$

پس مقادیر ویژه ماتریس ۱، ۲ و ۲- می‌باشند، بنابراین بزرگترین مقدار ویژه‌ی آن برابر با ۲ است. یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۲ـ گزینه «۲» دترمینان ماتریس A^n برابر است با دترمینان ماتریس A به توان n، یعنی $|A^n|=|A|^n$. پس ابتدا دترمینان A را حساب می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \to |A|=3(-3+4)+3(2-0)+4(-2-0)=3+6-8=1 \Rightarrow |A^5|=|A|^5=|1|^5=1$$

۳ـ گزینه «۲» برداری هادی خط $\vec{V}(1,2,4)$ و بردار نرمال صفحه $\vec{N}(0,2,-1)$ است، چون $\vec{N}.\vec{V}=0$، بنابراین خط و صفحه موازی‌اند. نقطه دلخواه $P(2,-3,1)$ را روی خط در نظر می‌گیریم، در این صورت فاصله مورد نظر برابر است با:

$$\text{فاصله}=\frac{|2(-3)-1-1|}{\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

۴ـ گزینه «۱» حجم چهار وجهی برابر با حاصل‌ضرب مختلط بردارهایی است که از رأس مشترکی مانند A آغاز می‌شوند. چون $\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)$، $\overrightarrow{AC}=(2,2,-3)$ و $\overrightarrow{AD}=(1,0,1)$ بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}3 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=21 \Rightarrow \text{حجم}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

۵ـ گزینه «۲» برداری که موازی با هر دو صفحه باشد را به دست می‌آوریم. این بردار، حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه است:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت $\frac{z+1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{x-1}{-1}$ است.

۶ـ گزینه «۳» از برخورد دو صفحه‌ی اول یعنی $\begin{cases}x+y=2\\ z-y=2\end{cases}$ خواهیم داشت $x+z=4$. پس این دو صفحه، شامل خطِ $x=4-z$ هستند. همین خط در معادله‌ی سومین صفحه هم صدق می‌کند. در نتیجه همه‌ی این صفحات شامل خط $x=4-z$ هستند.

۷ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه مورد نظر برابر ضرب خارجی بردار هادی خط و بردار $\vec{V}$ می‌باشد.

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$$

با انتخاب نقطه‌ی دلخواه $A(1,1,3)$ از خط داده شده و بردار نرمال $\vec{n}=(-1,7,4)$ داریم:

$$\text{معادله صفحه مورد نظر}: -1(x-1)+7(y-1)+4(z-3)=0 \Rightarrow -x+7y+4z=18$$

۸ـ گزینه «۴»

$$\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a\times1+1\times0+1\times(-1)\\ 2\times1+3\times0+2(-1)\\ 3\times1+3\times0+4(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ 0\\ -\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\ 0\\ -\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}a-1=\lambda\\ 3-4=-\lambda\end{vmatrix} \Rightarrow \lambda=1\ ,\ a=2$$

۹ـ گزینه «۲»

$$6x+4y+3z+5+k(2x+y+z-2)=0$$

چون نقطه $(2,-3,2)$ بر صفحه واقع است، لذا داریم:

$$(12-12+6+5)+k(4-3+2-2)=0 \Rightarrow 11+k=0 \Rightarrow k=-11$$

بنابراین معادله‌ی صفحه خواسته شده به صورت زیر است:

$$6x+4y+3z+5-11(2x+y+z-2)=0 \Rightarrow -16x-7y-8z+27=0 \Rightarrow 16x+7y+8z=27$$

۱۰ــ گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه همان $tr(A)$ می‌باشد و چون $tr(A)=۳$، پس تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۱۱ــ گزینه «۱» صفحات داده شده را به این صورت نامگذاری می‌کنیم:
$$P_1: x+y-z-۲=۰ \quad ; \quad P_۲: x-y+z+۳=۰ \quad ; \quad P_۳: ۲x+۱=۰$$

صفحات P_1 و $P_۲$ موازی نیستند زیرا $\frac{-۱}{۱}=\frac{۱}{-۱}\neq\frac{۱}{۱}$، بنابراین با یکدیگر برخورد می‌کنند و فصل مشترک آن‌ها یک خط خواهد بود. می‌توانیم به راحتی معادله‌ی این خط را به‌دست آوریم:
$$\begin{cases} x+y-z-۲=۰ \\ x-y+z+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x+۰+۰+۱=۰ \Rightarrow ۲x+۱=۰$$

پس فصل مشترک P_1 و $P_۲$ در معادله‌ی صفحه‌ی $P_۳$ صدق می‌کند. بنابراین خط $۲x+۱=۰$ قسمت مشترک هر ۳ صفحه را نشان می‌دهد.

۱۲ــ گزینه «۱»

روش اول: برای یافتن محل برخورد یک خط با سایر رویه‌ها بهترین کار استفاده از معادله‌ی پارامتری خط و جایگذاری آن در معادله رویه است:
$$\frac{x-۴}{-۶}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{z+۲}{۴}=t \Rightarrow x=-۶t+۴ \ , \ y=۳t+۳, z=۴t-۲$$

این‌ها را در معادله‌ی رویه قرار می‌دهیم:
$$\frac{x^۲}{۳۶}+\frac{y^۲}{۸۱}+\frac{z^۲}{۹}=۱ \Rightarrow \frac{(-۶t+۴)^۲}{۳۶}+\frac{(۳t+۳)^۲}{۸۱}+\frac{(۴t-۲)^۲}{۹}=۱ \Rightarrow t^۲-t=۰ \Rightarrow t(t-۱)=۰ \Rightarrow t=۰,۱$$

به ازای $t=۰$ به نقطه‌ی $(۴,۳,-۲)$ می‌رسیم و به ازای $t=۱$ نقطه‌ی $(-۲,۶,۲)$ به‌دست می‌آید.

روش دوم: در چنین سؤال‌هایی قرار دادن گزینه‌ها در معادله‌ی خط و معادله‌ی رویه، سریع‌ترین راه پیدا کردن گزینه‌ی صحیح است. ما نقاطی را می‌خواهیم که در هر دو معادله، صدق کنند.

۱۳ــ گزینه «۴» ابتدا بردارهای هادی دو خط و یک نقطه از هر کدام را پیدا می‌کنیم، معادله‌ی اولین خط به صورت $\frac{x-۱}{۲}=\frac{۱-y}{۱}=\frac{z}{۱}$ است. ابتدا آن را به صورتی می‌نویسیم که ضریب x، y و z در صورت کسرها، یک باشد:
$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z}{۱}$$

این معادله نشان می‌دهد که این خط از نقطه‌ی $P(۱,۱,۰)$ می‌گذرد و بردار هادی آن $\vec{V}=(۲,-۱,۱)$ است. معادله‌ی دومین خط را هم به صورت $\frac{x}{۱}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z-۱}{۲}$ می‌نویسیم. این معادله نشان می‌دهد که خط دوم از نقطه‌ی $P'(۰,۲,۱)$ می‌گذرد و بردار هادی آن $\vec{V}'=(۱,۲,۲)$ است. حالا از فرمول فاصله‌ی دو خط از یکدیگر استفاده می‌کنیم:
$$d=\frac{|\overrightarrow{PP'}.(\vec{V}\times\vec{V}')|}{|\vec{V}\times\vec{V}'|}$$
$$|\vec{V}\times\vec{V}'|=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}=(-۴,-۳,۵)$$
$$\overrightarrow{PP'}=(۰-۱,۲-۱,۱-۰)=(-۱,۱,۱) \Rightarrow d=\frac{|۴-۳+۵|}{\sqrt{۱۶+۹+۲۵}}=\frac{۶}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$$

۱۴ــ گزینه «۴» معادله‌ی مشخصه‌ی این ماتریس را تشکیل می‌دهیم:
$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{دستور ساروس}} f(\lambda)=(a-\lambda)(۲-\lambda)(۳-\lambda)-(۲-\lambda)=(۲-\lambda)[\lambda^۲-(۳+a)\lambda+۳a-۱]$$

طبق فرض دو تا از ریشه‌ها باید $\lambda=۲$ باشند، به عبارتی $\lambda=۲$ باید ریشه‌ی مضاعف باشد. پس علاوه بر عاملِ $(۲-\lambda)$ که خارج از کروشه است، عبارت داخل کروشه هم باید در $\lambda=۲$ مقدارش صفر شود:
$$\lambda^۲-(۳+a)\lambda+۳a-۱=۰ \xrightarrow{\lambda=۲} ۴-۲(۳+a)+۳a-۱=۰ \Rightarrow a=۳$$

۱۵ــ گزینه «۲» مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ریشه‌های معادله‌ی مشخصه:
$$\lambda=۲,۲,۳,۳$$

دترمینان A برابر است با حاصل‌ضرب مقادیر ویژه‌اش: $det(A)=۲\times۲\times۳\times۳=۳۶$ و می‌دانیم که $det(A^t)=det(A)$ پس $det(A^t)=۳۶$.

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ -2 & 2-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

برای راحت‌تر شدن محاسبه‌ی دترمینان؛ سطر سوم را از سطر اول کم می‌کنیم:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & \lambda\\ -2 & 2-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right]-0+(\lambda)\left[-2+2-\lambda\right]$$

$$=-\lambda(\lambda^2-3\lambda+1)-\lambda^2=-\lambda(\lambda^2-3\lambda+1+\lambda)=-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)=-\lambda(\lambda-1)^2=0$$

ریشه‌های این تابع عبارتند از $\lambda=0$ و $\lambda=1$. البته $\lambda=1$ ریشه‌ی مضاعف دارد، پس باید گفت مقادیر ویژه عبارتند از: $1,1,0$.

توضیح: این که در صورت سؤال می‌گوید ماتریس A روی میدان اعداد مختلط داده شده است، به این معناست که اگر ریشه‌های $f(\lambda)=0$ عدد مختلط شدند، آنها را حساب می‌کنیم یعنی اگر $\Delta<0$ شد؛ نمی‌گوئیم معادله جواب ندارد، بلکه ریشه‌های آن را به شکل اعداد مختلط حساب می‌کنیم.

۲ـ گزینه «۳» مطابق متن درس، ابتدا دترمینان ماتریس $A_{3\times3}$ را حساب می‌کنیم. اگر دترمینان صفر نشود، رتبه‌ی A برابر با ۳ است. اگر دترمینان A، صفر باشد به ماتریس‌های 2×2 که در A وجود دارند، دقت می‌کنیم.

$$\det A=(1)(0+24)-(3)(0+3)+(1)(-16+1)=24-9-15=0$$

پس رتبه‌ی A کمتر از ۳ است. حالا به ماتریس‌های 2×2 که در A هستند، دقت می‌کنیم:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=1-6\neq0$$

پس رتبه‌ی A برابر با ۲ است.

۳ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادلات پارامتری، مختصات نقطه‌ی A را برحسب t می‌نویسیم:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=z=t\Rightarrow A\left|\begin{array}{l}x=3t+2\\ y=2t\\ z=t\end{array}\right.$$

مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی صفحه قرار می‌دهیم:

$$2(3t+2)-5(2t)+t+1=0\Rightarrow 6t+4-10t+t+1=0\Rightarrow -3t+5=0\Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow z=t=\frac{5}{3}\ ,\ y=2t=\frac{10}{3}\ ,\ x=3t+2=7\Rightarrow a+b+c=x+y+z=7+\frac{10}{3}+\frac{5}{3}=12$$

۴ـ گزینه «۱» طبق متن درس، برای محاسبه‌ی فاصله‌ی یک نقطه از یک خط، به دو چیز احتیاج داریم. ابتدا باید بردار هادی خط موردنظر را تشخیص دهیم و سپس یک نقطه از آن خط را در نظر بگیریم. برای یافتن بردار هادی، معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم. برای مثال اگر فرض کنیم $x=t$ آن‌گاه داریم $y=1-t$ و با جایگذاری در معادله‌ی اول داریم $z=t-(1-t)=2t-1$ پس $x=t$، $y=1-t$ و $z=2t-1$، معادلات پارامتری خط را می‌دهند. با توجه به ضریب t در این معادلات، بردار هادی خط $\vec{V}=(1,-1,2)$ است و اگر مثلاً $t=0$ را انتخاب کنیم نقطه‌ی $P_0(0,1,-1)$ نقطه‌ای از این خط خواهد بود. طبق فرمول داریم:

$$L \text{ فاصله‌ی } P \text{ از خط } =\frac{|\overrightarrow{PP_0}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

$$\overrightarrow{PP_0}=(0+4,1-1,-1-1)=(4,0,-2)\Rightarrow \overrightarrow{PP_0}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{PP_0}\times\vec{V}=-2\vec{i}-10\vec{j}-4\vec{k}$$

$$L \text{ فاصله‌ی } P \text{ از خط } =\frac{\sqrt{4+100+16}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{6}}=\sqrt{20}$$

۵ـ گزینه «۴» به یک نقطه دلخواه از خط L و بردار هادی آن نیاز داریم. با جایگذاری $t=0$ در معادلات پارامتری، می‌بینیم که نقطه $P_0(-2,0,1)$ روی خط قرار دارد و با توجه به ضرایب t در معادلات پارامتری داده شده، معلوم است که بردار هادی این خط $\vec{V}=(3,-2,4)$ می‌باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L برابر است با $\frac{|\overrightarrow{AP_0}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$. با توجه به مختصات نقاط A و P_0 داریم:

$$\overrightarrow{AP_0}=(-2-3,0+1,1-4)=(-5,1,-3)$$

اکنون حاصل‌ضرب خارجی مورد نیاز را حساب می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AP_0}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-2\vec{i}+11\vec{j}+7\vec{k}$$

$$\text{فاصله}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}$$

۶ـ گزینه «۳» معادلات پارامتری خطوط L و L' را می‌نویسیم تا بردار هادی آن‌ها مشخص شود. در مورد خط L با فرض $x=t$ داریم $y=2-2t$ و $z=1$ پس با توجه به ضریب t در این معادله‌ها، بردار هادی خط L به صورت $\vec{V}=(1,-2,0)$ است. در مورد L' با فرض $x=t$ داریم $y=-\frac{1}{2}-\frac{t}{2}$ و $z=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t$، پس بردار هادی این خط $\vec{V}'=(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ است. اکنون با مقایسه‌ی بردارهای هادی به‌دست آمده معلوم می‌شود که این دو خط موازی نیستند، زیرا بردارهای هادی آنها با هم موازی نیست.

حال به بررسی متقاطع یا متنافر بودن دو خط می‌پردازیم. برای بررسی شرط متنافر بودن، به بردارهای هادی و دو نقطه‌ی دلخواه از این خطوط نیاز داریم. با جایگذاری مثلاً $t=0$ در معادلات پارامتری، نقطه‌ی $P(0,2,1)$ روی خط L و نقطه‌ی $P'(0,-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ روی خط L' به‌دست می‌آید. حاصل‌ضرب مختلط زیر را حساب می‌کنیم:

$$\overrightarrow{PP'}.(\vec{V}\times\vec{V}')=(0-0,-\frac{1}{2}-2,\frac{5}{2}-1).\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&0\\1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{vmatrix}=(0,-\frac{5}{2},\frac{3}{2}).(-3,-\frac{3}{2},\frac{3}{2})=0+\frac{15}{4}+\frac{9}{4}\neq 0$$

این حاصل‌ضرب مختلط، صفر نشده است در نتیجه این دو خط متنافر هستند.

توضیح: گاهی اوقات که برخورد دادن معادلات L و L' ساده باشد، می‌توانیم به صورت زیر وضعیت آن‌ها را نسبت به هم بررسی کنیم:
ابتدا شرط موازی بودن را بررسی می‌کنیم. اگر موازی نبودند، یا متقاطع هستند یا متنافرند. دستگاهی را که از برخورد L و L' به وجود می‌آید حل می‌کنیم. اگر جوابی به‌دست نیامد، آن دو خط متنافر هستند. در این مثال ابتدا دیدیم که $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ موازی نیستند. حالا اگر دو خط متقاطع باشند، لازم است دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases}z=1\\2x+y=2\\x+2y=-1\\3y+z=1\end{cases}\xrightarrow{z=1}y=0\Rightarrow\begin{cases}2x=2\\x=-1\end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد یعنی غیرممکن است که هم‌زمان $2x=2$ و $x=-1$ باشد پس این دو خط یکدیگر را قطع نمی‌کنند و متنافر هستند.

۷ـ گزینه «۱» بردار هادی فصل مشترک دو صفحه‌ی P_1 و P_2 حاصل‌ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه می‌باشد لذا داریم:

$$\vec{n}=(2,-3,1)\ \text{و}\ \vec{n}_2=(\frac{1}{3},2,-4)$$

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&1\\\frac{1}{3}&2&-4\end{vmatrix}=10\vec{i}+\frac{25}{3}\vec{j}+5\vec{k}$$

این بردار با بردار $6\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ موازی است زیرا $\frac{5}{3}=\frac{\frac{25}{3}}{5}=\frac{10}{6}$ است.

۸ـ گزینه «۲» سه صفحه نقطه مشترکی ندارند، هرگاه دستگاه مقابل جواب نداشته باشد و برای اینکه دستگاه جواب نداشته باشد، لازم است دترمینان ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{cases}x+2y+3z=6\\x+5y+2z=7\\2x+7y+az=8\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&2&3\\1&5&2\\2&7&a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=5$$

۹ـ گزینه «۱»

$$\begin{vmatrix}2&k&1\\k-1&-1&2\\4&1&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4k^2-13k+9=0\Rightarrow k=1\ ,\ k=\frac{9}{4}$$

۱۰ـ گزینه «۱» کافیست اتحاد لاگرانژ را که در متن درس آمده است به‌کار بگیریم:

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c}&\vec{a}.\vec{d}\\\vec{b}.\vec{c}&\vec{b}.\vec{d}\end{vmatrix}=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$$

۱۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم که مجموع مقادیر ویژه، برابر است با $tr(A)$ و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه برابر است با $det(A)$. محاسبه‌ی دترمینان A لازم نیست زیرا در صورت سؤال گفته شده که A وارون‌پذیر نیست پس $\det A = 0$ است.

$$\begin{cases} tr(A) = 8+7+3 = 18 \\ \det(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 18 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda_1=3} \begin{cases} 3+\lambda_2+\lambda_3 = 18 \\ 3\lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 15 \\ \lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

پس $\lambda_2 = 0$ و $\lambda_3 = 15$ است.

۱۲ـ گزینه «۲» صفحات را به این صورت نامگذاری می‌کنیم: $P_1 : x+2y+3z = 6 \quad , \quad P_2 = x+5y+2z = 7 \quad , \quad P_3 = 2x+7y+az = 8$

صفحات P_1 و P_2 موازی نیستند، زیرا $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{1}{1}$ پس یکدیگر را قطع می‌کنند. فصل مشترک P_1 و P_2 یک خط است. بردار هادی این خط را تعیین می‌کنیم:

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-11,1,3)$$

اگر این خط، صفحه‌ی P_3 را قطع کند، نقطه‌ای به‌دست می‌آید که هم روی فصل مشترک P_1 و P_2 است و هم روی P_3 قرار گرفته است. طبق صورت سؤال، این ۳ صفحه نباید نقطه‌ی مشترک داشته باشند، پس فصل مشترک P_1 و P_2 باید با صفحه‌ی P_3 موازی باشد.

بردارهادی فصل مشترک P_1 و P_2 $= \vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-11,1,3)$

بردار نرمال صفحه‌ی P_3 $= \vec{n}_3 = (2,7,a)$

برای موازی بودن یک خط و یک صفحه باید بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمود باشند: $\vec{V}.\vec{n} = 0 \Rightarrow -22+7+3a = 0 \Rightarrow a = 5$

۱۳ـ گزینه «۲» طبق متن درس اگر λ مقدار ویژه‌ی A باشد، $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} است. مقادیر ویژه‌ی A، ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی A هستند: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_3 = 1$ پس مقادیر ویژه‌ی A^{-1} عبارتند از $\frac{1}{\lambda_3} = 1$، $\frac{1}{\lambda_2} = 3$ و $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{9}$ پس ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی A^{-1} باید ۱ و ۳ و $\frac{1}{9}$ باشند. در نتیجه داریم:

$$|A^{-1}-\lambda I| = (\lambda-\tfrac{1}{9})(\lambda-3)(\lambda-1) = (\lambda-\tfrac{1}{9})(\lambda^2-4\lambda+3) = \lambda^3-(4+\tfrac{1}{9})\lambda^2+(3+\tfrac{4}{9})\lambda-\tfrac{3}{9} = \lambda^3-\tfrac{37}{9}\lambda^2+\tfrac{31}{9}\lambda-\tfrac{1}{3}$$

۱۴ـ گزینه «۴» طبق متن درس شرط لازم و کافی برای معین مثبت بودن A آن است که دترمینان‌های زیر مثبت باشند:

$$H_1 = m \;,\; H_2 = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \;,\; H_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & m-2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} H_1 > 0 \Rightarrow m > 0 \\ H_2 > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ H_3 > 0 \Rightarrow -12m-8(m-2)+12 > 0 \Rightarrow 20m < 28 \Rightarrow m < 1/4 \end{cases} \Rightarrow 1 < m < 1/4$$

۱۵ـ گزینه «۱» ابتدا معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از A می‌گذرد و عمود بر P است. بردار هادی این خط همان بردار نرمال صفحه است: $\vec{n} = (1,1,1)$ معادله‌ی این خط $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$ است. در گام بعدی معادله‌ی پارامتری خط را نوشته و برخورد آن با صفحه را به‌دست می‌آوریم: $x = t+1, y = t+2, z = t+2$. با قرار دادن در معادله‌ی صفحه داریم:

$$x+y+z = 8 \Rightarrow (t+1)+(t+2)+(t+2) = 8 \Rightarrow 3t+5 = 8 \Rightarrow t = 1$$

پس نقطه‌ی $x_0 = 2$، $y_0 = 3$ و $z_0 = 3$ به‌دست می‌آید که محل برخورد خط و صفحه است. این نقطه وسط پاره‌خط AA' قرار دارد. پس داریم:

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_0 \Rightarrow \frac{1+x_{A'}}{2} = 2 \Rightarrow x_{A'} = 3$$

به همین ترتیب $\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_0$ پس $\frac{2+y_{A'}}{2} = 3$ یعنی $y_{A'} = 4$ است. $\frac{z_A + z_{A'}}{2} = z_0$ پس $\frac{2+z_{A'}}{2} = 3$ یعنی $z_{A'} = 4$. نقطه‌ی $A'(3,4,4)$ به‌دست می‌آید.

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن بردار سرعت کافی است از معادله‌ی حرکت مشتق بگیریم:

$$\vec{R}(t)=3\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}+t\vec{k}\Rightarrow \vec{R}'(t)=-3\sin t\vec{i}+4\cos t\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow |\vec{R}'(t)|=\sqrt{9\sin^2 t+16\cos^2 t+1}$$

بنابراین اندازه سرعت در $t=\pi$ برابر $\sqrt{17}$ خواهد بود.

۲ـ گزینه «۱» می‌دانیم انحناء از رابطه $\kappa=\dfrac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$ به دست می‌آید.

$$\vec{R}(t)=(\sin t\cos t,\sin^2 t,\cos t)\Rightarrow \vec{R}'(t)=(\cos 2t,\sin 2t,-\sin t)\Rightarrow \vec{R}''(t)=(-2\sin 2t,2\cos 2t,-\cos t)$$

به ازای $t=0$ داریم $R'=(1,0,0)$ و $R''=(0,2,-1)$ پس $|R'|=\sqrt{1^2+0+0}=1$ است. برای تعیین $|R'\times R''|$ ابتدا حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$R'\times R''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&2&-1\end{vmatrix}=+\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow |R'\times R''|=\sqrt{5}\Rightarrow \kappa=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$$

۳ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه بوسان، بردار $\vec{v}\times\vec{a}$ است. $\vec{R}(t)=(2\cos t,2\sin t,t)\Rightarrow \vec{v}(t)=(-2\sin t,2\cos t,1)\Rightarrow \vec{a}(t)=(-2\cos t,-2\sin t,0)$

در نقطه $t=0$، این بردارها به صورت $\vec{v}=(0,2,1)$ و $\vec{a}=(-2,0,0)$ خواهند بود، در نتیجه داریم:

$$\text{بردار نرمال صفحه بوسان}=\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&2&1\\-2&0&0\end{vmatrix}=-2\vec{j}+4\vec{k}$$

همچنین با توجه به این که در $t=0$، $\vec{R}(0)=(2,0,0)$ است، پس صفحه بوسان از نقطه‌ی $(2,0,0)$ می‌گذرد و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$0(x-2)-2(y-0)+(4)(z-0)=0\Rightarrow -2y+4z=0\Rightarrow y=2z$$

۴ـ گزینه «۲» فرم استاندارد رویه‌های درجه دوم به صورت $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ می‌باشد که اگر $A,B,C>0$ باشند، معادله نشان‌دهنده یک بیضی‌گون (بیضی‌وار) است. پس معادله‌ی $4x^2+y^2+4z^2-4y+24z+36=0$ معادله یک بیضی‌گون یا بیضی‌وار است. برای تشخیص نوع معادله $z^2=-4x^2+9y^2+3y$، معادله را باید طوری مرتب کنیم که عدد ثابت با علامت مثبت در طرف راست ظاهر شود، تعداد جملات منفی سمت چپ تساوی یکپارچه یا دوپارچه بودن هذلولی را به ما می‌دهد، پس داریم:

$$z^2=-4x^2+9(y^2+\frac{1}{3}y)$$

$$z^2=-4x^2+9((y+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36})$$

$$z^2=-4x^2+9(y+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{4}\Rightarrow -4x^2+9(y+\frac{1}{6})^2-z^2=\frac{1}{4}$$

چون تعداد جملات منفی سمت چپ ۲ تا می‌باشد، پس هذلولی‌وار دو تکه است.

۵ـ گزینه «۲» بردار سرعت $\vec{V}(t)=\vec{R}'(t)$ است. طول بردار سرعت را تندی ذره می‌نامیم که با اکسترمم‌سازی آن ماکزیمم تندی به‌دست می‌آید:

$$\vec{V}=(-4\sin t,4\cos t,-4\sin t)\Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{16\sin^2 t+16\cos^2 t+16\sin^2 t}=\sqrt{16(\sin^2 t+\cos^2 t)+16\sin^2 t}=4\sqrt{1+\sin^2 t}$$

حالا باید بیشترین مقدار این تابع را به‌دست آوریم. ابتدا نقطه‌ی بحرانی را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}|\vec{V}(t)|=0\Rightarrow 2\sin t.\cos t=0\Rightarrow t=0,\frac{\pi}{2}\xrightarrow{\text{جایگذاری در }|\vec{V}|}|\vec{V}|_{max}=4\sqrt{2}\ ,\ |\vec{V}|_{min}=4$$

۶ـ گزینه «۱» بردارهای سرعت و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}(t)=(3\cos t,3\sin t,t^2)\Rightarrow \vec{v}=\vec{R}'(t)=(-3\sin t,3\cos t,2t)\Rightarrow \vec{a}=\vec{R}''(t)=(-3\cos t,-3\sin t,2)$$

هنگامی که بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمود باشند، خواهیم داشت: $\vec{v}.\vec{a}=0\Rightarrow 9\cos t\sin t-9\cos t\sin t+4t=0\Rightarrow 4t=0\Rightarrow t=0$

۷ـ گزینه «۲» برای تابع $y=f(x)$، انحنا از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\frac{-1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}|}{(1+(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

که در $x=0$ نتیجه می‌دهد: $\kappa(0)=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$، و شعاع انحناء برابر ۲ $\rho=\frac{1}{\kappa}=2$ می‌باشد.

۸ـ گزینه «۱» شعاع دایره بوسان از رابطه‌ی $\rho=\frac{1}{\kappa}$ به دست می‌آید. ابتدا انحنا را در این نقطه حساب می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لذا داریم:

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\Rightarrow y''=\frac{\cos^3 x+2\sin^2 x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

در $x=0$ داریم: $y'=0\ ,\ y''=1$. پس $\kappa=\frac{1}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=1\Rightarrow\rho=\frac{1}{\kappa}=1$.

۹ـ گزینه «۲» انحنای منحنی‌های قطبی، از این رابطه به دست می‌آید:

$$\kappa(\theta)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{r=e^\theta}\kappa(\theta)=\frac{|e^{2\theta}+2e^{2\theta}-e^{2\theta}|}{(e^{2\theta}+e^{2\theta})^{\frac{3}{2}}}=\frac{2e^{2\theta}}{2\sqrt{2}e^{3\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}e^\theta}$$

شعاع انحناء، عکس انحناء است. پس داریم:

$$\text{شعاع انحنا}=\rho=\sqrt{2}e^\theta\xrightarrow{\theta=\text{Ln}3}\rho=3\sqrt{2}$$

۱۰ـ گزینه «۴» منحنی $z=\frac{1}{x}$ در صفحه‌ی xoz قرار دارد. محور دوران، محور xها است پس با متغیر x کاری نداریم اما به جای z باید $\sqrt{z^2+y^2}$ قرار بدهیم:

$$z=\frac{1}{x}\Rightarrow\sqrt{z^2+y^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow z^2+y^2=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2(z^2+y^2)=1\Rightarrow x^2z^2+x^2y^2=1$$

۱۱ـ گزینه «۲» مطابق متن درس، ساده‌ترین راه تشخیص رویه‌ها، بررسی مقطع آن‌ها با صفحات مختصات است. با جایگذاری $x=0$ در این معادله داریم $z=\frac{25}{400}y^2$ که یک سهمی است. با جایگذاری $y=0$ در آن به معادله‌ی $z=-\frac{16}{400}x^2$ که باز هم یک سهمی است. حالا، اگر هر دو سهمی رو به بالا یا هر دو رو به پایین بودند، یک سهمی‌وار (سهمی‌گون) داشتیم. اما چون $z=\frac{25}{400}y^2$ سهمی رو به بالا و $z=-\frac{16}{400}x^2$ سهمی رو به پایین است، متوجه می‌شویم که رویه‌ی موردنظر زین اسبی یا همان سهمی‌وار هذلولوی است. صفت هذلولوی به این خاطر در نام این رویه آمده است که اگر به جای z عدد ثابتی قرار دهیم (مثلاً $z=1$) به معادله‌ی هذلولی می‌رسیم.

۱۲ـ گزینه «۳» ضرایب این معادله به ترتیب عبارتند از: $a=5$، $2b=8$ و $c=5$ در نتیجه داریم:

$$\Delta=b^2-ac=(4)^2-(5)(5)=-9<0$$

پس این معادله یک بیضی (یا در حالت خاص دایره) است. برای تشخیص شعاع‌های آن بهتر است فرم استاندارد معادله را بنویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\Rightarrow|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda&4\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(5-\lambda)-16=\lambda^2-10\lambda+9=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-9)=0\Rightarrow\lambda=1,9$$

پس در دستگاه جدید، ضرایب x'^2 و y'^2 عبارتند از ۱ و ۹ در ضمن جمله‌ی ثابت معادله، تغییری نمی‌کند:

$$x'^2+9y'^2=36\Rightarrow\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{4}=1$$

یک بیضی با شعاع‌های ۶ و ۲ داریم. مساحت آن برابر است با:

$$S=\pi(2)(6)=12\pi$$

۱۳ـ گزینه «۳» ضرایب $x^۲$، xy و $y^۲$ به ترتیب $a=۳$، $۲b=۲\sqrt{۳}$ و $c=۳$ هستند. نوع منحنی را با توجه به علامت Δ به سرعت می‌توان تعیین کرد:

$$\Delta=b^۲-ac=(\sqrt{۳})^۲-۳\times۳=-۶$$

$\Delta<۰$ نشان‌دهنده‌ی بیضی یا در حالت خاص، دایره است. برای یافتن فرم استاندارد باید ماتریس A را تشکیل داده و مقادیر ویژه‌ی آن را پیدا کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & \sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}۳-\lambda & \sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۳-\lambda\end{vmatrix}=(۳-\lambda)(۳-\lambda)-۳=\lambda^۲-۶\lambda+۶=۰\Rightarrow\Delta=۳۶-۲۴=۱۲\Rightarrow\lambda=\frac{۶\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۳\pm\sqrt{۳}$$

بنابراین ضرایب $x'^۲$ و $y'^۲$ عبارتند از $۳+\sqrt{۳}$ و $۳-\sqrt{۳}$. جمله‌ی ثابت معادله نباید تغییر کند. در معادله‌ی داده شده $+۱$ را سمت راست تساوی داریم پس با تغییر متغیر به معادله‌ی $(۳+\sqrt{۳})x'^۲+(۳-\sqrt{۳})y'^۲=۱$ خواهیم رسید. ممکن است جای ضرایب $x'^۲$ و $y'^۲$ عوض شود اما جمله‌ی ثابت سمت راست باید $+۱$ باشد.

۱۴ـ گزینه «۳» برای آن‌که یک منحنی در صفحه قرار داشته باشد باید تاب آن صفر باشد. طبق فرمول کتاب، برای آن‌که $\tau=۰$ شود باید دترمینان ماتریس زیر صفر شود:

$$\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}=۰\Rightarrow\begin{vmatrix}۳bt^۲+۱ & at^۳ & ۲\\ ۶bt & ۳at^۲ & ۰\\ ۶b & ۶at & ۰\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۷۲abt^۲-۳۶abt^۲=۳۶abt^۲=۰$$

برای آن‌که این دترمینان همواره صفر باشد باید $ab=۰$ شود. به عبارتی حداقل یکی از ضرایب a یا b باید صفر باشد.

۱۵ـ گزینه «۱» در نقطه‌ی A داریم $e^t=۱$ پس $t=۰$ است. فرمول تاب را می‌نویسیم:

$$\tau=\frac{|\vec{R}'.(\vec{R}''\times\vec{R}''')|}{|\vec{R}'\times\vec{R}''|^۲}$$

بردارهای موردنظر را در $t=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\vec{R}'(t)=(e^t,۲e^{۲t},۳e^{۳t})\\ \vec{R}''(t)=(e^t,۴e^{۲t},۹e^{۳t})\\ \vec{R}'''(t)=(e^t,۸e^{۲t},۲۷e^{۳t})\end{cases}\xrightarrow{t=۰}\begin{cases}\vec{R}'(t)=(۱,۲,۳)\\ \vec{R}''(t)=(۱,۴,۹)\\ \vec{R}'''(t)=(۱,۸,۲۷)\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{R}'.(\vec{R}''\times\vec{R}''')=\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۹\\ ۱ & ۸ & ۲۷\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{برای سادگی بیشتر از هر سطر، سطر قبلی را کم می‌کنیم.}}\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۶\\ ۰ & ۴ & ۱۸\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{دستور ساروس}}۳۶-۲۴=۱۲$$

حالا $\vec{R}'\times\vec{R}''$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۴ & ۹\\ ۱ & ۸ & ۲۷\end{vmatrix}=(۳۶,-۱۸,۴)$$

در نتیجه داریم:

$$\tau=\frac{۱۲}{\sqrt{۳۶^۲+۱۸^۲+۴^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۲^۲(۱۸^۲+۹^۲+۲^۲)}}=\frac{۱۲}{۲\sqrt{۴۰۹}}=\frac{۶}{\sqrt{۴۰۹}}$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۲» مطابق متن درس، منحنی $y=f(x)$ را معمولاً به صورت $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$ پارامتری می‌کنیم. در این مثال داریم $\begin{cases}x=t\\ y=t^{2}\end{cases}$ پس معادله‌ی مسیر حرکت به صورت $\vec{R}(t)=(t,t^{2})$ نوشته می‌شود. با مشتق‌گیری نسبت به t می‌توانیم بردار سرعت را تعیین کنیم: $\vec{R}'(t)=(1,2t)$

اندازه‌ی بردار سرعت را تندی می‌نامند. طبق صورت سؤال، تندی ثابت و برابر با ۵ است. در حالی که طبق معادله‌ی پارامتری به‌دست آمده، $|\vec{R}'(t)|=\sqrt{1+4t^{2}}$ یعنی تندی حرکت، ثابت نیست. از این‌جا متوجه می‌شویم که باید مسیر حرکت را به صورتی پارامتری کنیم که تندی حرکت، ثابت و برابر با ۵ شود. برای پیدا کردن معادلات پارامتری موردنظرِ طراح سؤال، به جای t از $g(t)$ استفاده می‌کنیم. به این صورت که داریم $\begin{cases}x=g(t)\\ y=g^{2}(t)\end{cases}$

پس $\vec{R}(t)=(g(t),g^{2}(t))$ با مشتق‌گیری نسبت به t خواهیم داشت:

$$g'(t)\sqrt{1+4g^{2}(t)}=5 \xrightarrow[g(t)=1]{\text{در }(1,1)} g'(t)\sqrt{1+4\times1}=5 \Rightarrow g'(t)=\sqrt{5}$$

حال از رابطه‌ی بالا یک بار دیگر مشتق می‌گیریم:

$$g''(t)\sqrt{1+4g^{2}}+\frac{g'(t)\times 8g(t)g'(t)}{2\sqrt{1+4g^{2}(t)}}=0$$

$$g''\times\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}\times4\times1\times\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}}=0 \Rightarrow g''(t)=-4$$

$$R(t)=(g(t),g^{2}(t)) \Rightarrow R'(t)=(g'(t),2g'(t)g(t)) \Rightarrow R''(t)=(g''(t)\ ,\ 2g''(t)g(t)+2g'^{2}(t)) \Rightarrow R''(t)=(-4,\ 2\times-4\times1+10)=(-4,2)$$

۲ـ گزینه «۱» اگر به معادلات y و z دقت کنید متوجه می‌شوید که تساوی $y+z=4$ برقرار است. می‌دانیم اگر یک منحنی در صفحه واقع باشد، تاب آن صفر است و چون منحنی داده شده در صفحه‌ی $y+z=4$ قرار دارد پس تاب آن صفر است.

۳ـ گزینه «۲» ابتدا بردارهای سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم.

$$\vec{R}(t)=(e^{t},\sqrt{2}t,e^{-t}) \Rightarrow \vec{R}'(t)=(e^{t},\sqrt{2},-e^{-t})\Big|_{t=\ln\sqrt{2}}=(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2})\quad,\quad \vec{a}=(e^{t},0,e^{-t})\Big|_{t=\ln\sqrt{2}}=(\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$R'\times R''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \sqrt{2}&\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=(1,-2,-2) \Rightarrow |\vec{R}'\times\vec{R}''|=3$$

بنابراین انحنای منحنی برابر است با:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^{3}}=\frac{3}{(\sqrt{2+2+\frac{1}{2}})^{3}}=\frac{3}{(\sqrt{\frac{9}{2}})^{3}}=\frac{3}{\frac{9}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

۴ـ گزینه «۱» با محاسبه‌ی $\vec{R}'(t)$ و تقسیم آن بر اندازه‌اش آغاز می‌کنیم:

$$\vec{T}=\frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|}\ ,\ \vec{R}'=(-3\sin t\cos^{2}t\ ,\ 3\sin^{2}t\cos t) \Rightarrow \vec{T}=\frac{(-3\sin t\cos^{2}t\ ,\ 3\cos t\sin^{2}t)}{\sqrt{9\sin^{2}t\cos^{4}t+9\cos^{2}t\sin^{4}t}}=\frac{(-3\sin t\cos^{2}t\ ,\ 3\cos t\sin^{2}t)}{\sqrt{9\sin^{2}t\cos^{2}t\underbrace{(\sin^{2}t+\cos^{2}t)}_{1}}}$$

$$\Rightarrow \vec{T}=\frac{(-3\sin t\cos^{2}t\ ,\ 3\cos t\sin^{2}t)}{3\sin t\cos t}=(-\cos t,\sin t)$$

با مشتق‌گیری از $\vec{T}(t)$ و تقسیم آن بر اندازه‌اش به بردار $\vec{N}$ می‌رسیم:

$$\vec{N}=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=\frac{(\sin t,\cos t)}{1}=(\sin t,\cos t)$$

در نهایت داریم:

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ -\cos t&\sin t&0\\ \sin t&\cos t&0\end{vmatrix}=(0,0,-1)$$

۵ـ گزینه «۱» با توجه به فرمول، ابتدا x'، x''، y' و y'' را حساب می‌کنیم:

$$x' = \cos t - t\sin t$$
$$x'' = -\sin t - \sin t - t\cos t = -2\sin t - t\cos t$$
$$y' = \sin t + t\cos t$$
$$y'' = \cos t + \cos t - t\sin t = 2\cos t - t\sin t$$

$$\kappa(t) = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2\cos^2 t - 3t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 3t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t|}{(\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2+t^2|}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{t=\sqrt{3}} \kappa = \frac{2+3}{(1+3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{8}$$

۶ـ گزینه «۱» ابتدا انحنای منحنی را به دست می‌آوریم. برای منحنی‌های پارامتری که در صفحه‌ی (x,y) قرار دارند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|x'_t y''_t - y'_t x''_t|}{\left[(x'_t)^2 + (y'_t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

مشتق‌های اول و دومِ x و y را نسبت به t حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t \\ y'_t = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t \end{cases} , \quad \begin{cases} x''_t = a(\cos t - t\sin t) \\ y''_t = a(\sin t + t\cos t) \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{|a^2(t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t) - a^2(t\sin t\cos t - t^2\sin^2 t)|}{\left[a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t\right]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \kappa = \frac{a^2t^2}{(a^2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2t^2}{a^3t^3} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{at} \xrightarrow{t=2} \kappa = \frac{1}{2a}$$

شعاع انحنا، از رابطه‌ی $\rho = \frac{1}{\kappa}$ به دست می‌آید.

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \rho = 2a \xrightarrow{\rho=6} 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

۷ـ گزینه «۲»

روش اول: استفاده از فرمول عادی شعاع انحناء، وقت‌گیر است. بررسی می‌کنیم که شرط استفاده از فرمول نیوتن را داریم یا نه؟ منحنی داده شـده از $(0,0)$ می‌گذرد. در ضمن با استفاده از قاعده‌ی کمترین درجه در نزدیکی مبدأ داریم $y=0$، پس محور xها بر منحنی داده شده مماس است و می‌تـوان از فرمـول نیوتن استفاده کرد:

$$\rho = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y} \Rightarrow 2\rho = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y}$$

از معادله‌ی منحنی برای محاسبه‌ی این حد استفاده می‌کنیم، با تقسیم طرفین معادله بر y داریم:

$$x^2\left(\frac{x^2}{y}\right) - y^3 + x\left(\frac{x^2}{y}\right) - y^2 + 2\left(\frac{x^2}{y}\right) - y - 5 = 0$$

وقتی $x \to 0$ میل می‌کند، داریم $y \to 0$ و $\frac{x^2}{y} \to 2\rho$ پس داریم:

$$0 - 0 + 0 - 0 + 2(2\rho) - 0 - 5 = 0 \Rightarrow \rho = \frac{5}{4}$$

روش دوم: برای استفاده از فرمول عادیِ $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ابتدا y' و y'' را حساب می‌کنیم. بهتر است از طرفین معادله دو بار مشتق بگیریم.

$$x^4 - y^4 + x^3 - y^3 + 2x^2 - y^2 - 5y = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4y^3y' + 3x^2 - 3y^2y' + 4x - 2yy' - 5y' = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 12y^2y' - 4y^3y'' + 6x - 6yy'y' - 3y^2y'' + 4 - 2y'y' - 2yy'' - 5y'' = 0$$

حالا در دو معادله‌ی قبلی $x = y = 0$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0 - 5y' = 0 \\ 0 + 4 - 2y'y' - 0 - 5y'' = 0 \end{cases}$$

بنابراین $y' = 0$ و $y'' = \frac{4}{5}$. با جایگذاری در فرمول انحناء داریم:

$$\kappa = \frac{|\frac{4}{5}|}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{5}$$

پس شعاع انحناء برابر با $\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{5}{4}$ است.

۸ـ گزینه «۳» با توجه به فرمول باید y' و y'' را حساب کنیم:

$$y=\cosh x \;\rightarrow\; y'=\sinh x \;\;\Rightarrow y''=\cosh x$$

توجه داشته باشید که $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{۲}$ و $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{۲}$ می‌باشد.

$$x=۱\rightarrow y'(۱)=\sinh(۱)=\frac{e-e^{-۱}}{۲}=\frac{e-\frac{۱}{e}}{۲}=\frac{e^۲-۱}{۲e} \quad و \quad x=۱\rightarrow y''(۱)=\cosh(۱)=\frac{e+e^{-۱}}{۲}=\frac{e+\frac{۱}{e}}{۲}=\frac{e^۲+۱}{۲e}$$

$$\kappa=\frac{\frac{e^۲+۱}{۲e}}{(۱+(\frac{e^۲-۱}{۲e})^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{e^۲+۱}{۲e}}{(۱+\frac{e^۴+۱-۲e^۲}{۴e^۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{e^۲+۱}{۲e}}{(\frac{e^۴+۲e^۲+۱}{۴e^۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{e^۲+۱}{۲e}}{(\frac{(e^۲+۱)^۲}{(۲e)^۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{e^۲+۱}{۲e}}{\frac{(e^۲+۱)^۳}{۸e^۳}}=\frac{۴e^۲}{(e^۲+۱)^۲}$$

۹ـ گزینه «۱» با توجه به آن که x و y به صورت پارامتری داده شده‌اند، باید x'، x'' و y' و y'' را حساب کنیم:

$$x'_t=a\sqrt{\pi}(\cos\frac{\pi t^۲}{۲})\;\rightarrow x''_t=-\pi ta\sqrt{\pi}(\sin\frac{\pi t^۲}{۲}) \quad و \quad y'_t=a\sqrt{\pi}(\sin\frac{\pi t^۲}{۲})\;\rightarrow y''_t=\pi ta\sqrt{\pi}(\cos\frac{\pi t^۲}{۲})$$

$$\kappa=\frac{ta^۲\pi^۲\cos^۲(\frac{\pi t^۲}{۲})+ta^۲\pi^۲\sin^۲(\frac{\pi t^۲}{۲})}{[(\pi a^۲\cos^۲(\frac{\pi t^۲}{۲})+\pi a^۲\sin^۲(\frac{\pi t^۲}{۲})]^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow \kappa=\frac{ta^۲\pi^۲(\cos^۲\frac{\pi t^۲}{۲}+\sin^۲\frac{\pi t^۲}{۲})}{[\pi a^۲(\cos^۲\frac{\pi t^۲}{۲}+\sin^۲\frac{\pi t^۲}{۲})]^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{ta^۲\pi^۲\times ۱}{(\pi a^۲\times ۱)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{a}t$$

۱۰ـ گزینه «۴» اگر $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ باشد آن‌گاه طول قوس این منحنی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$ds=\sqrt{x'^۲+y'^۲+z'^۲}dt \;\Rightarrow s=\int_۰^t\sqrt{x'^۲+y'^۲+z'^۲}dt$$

با توجه به صورت سؤال و مقایسه آن با بردار $\vec{R}(t)$ مذکور داریم:

$$x(t)=t\cos t\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}x'(t)=\cos t-t\sin t$$

$$y(t)=t\sin t\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}y'(t)=\sin t+t\cos t$$

$$z(t)=\frac{\sqrt{۸}}{۳}t^{\frac{۳}{۲}}\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}z'(t)=\frac{\sqrt{۸}}{۳}\times\frac{۳}{۲}t^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}t^{\frac{۱}{۲}}$$

$$s=\int_۰^t\sqrt{(\cos t-t\sin t)^۲+(\sin t+t\cos t)^۲+(\sqrt{۲}t^{\frac{۱}{۲}})^۲}dt=\int_۰^t\sqrt{۱+t^۲+۲t}dt\;\Rightarrow s=\int_۰^t\sqrt{(t+۱)^۲}dt\Rightarrow s=\int_۰^t(t+۱)\,dt=\frac{t^۲}{۲}+t$$

$$s=\frac{t^۲}{۲}+t\;\Rightarrow ۲s=t^۲+۲t\;\Rightarrow ۲s+۱=t^۲+۲t+۱$$

$$۲s+۱=(t+۱)^۲\;\Rightarrow t+۱=\sqrt{۲s+۱}\;\Rightarrow t=\sqrt{۲s+۱}-۱$$

۱۱ـ گزینه «۲» ابتدا باید انحنای منحنی را در $t=۰$ محاسبه کنیم:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^۳}$$

به بردارهای $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ نیاز داریم:

$$\vec{R}'(t)=(e^t,e^t\cos(۱+e^t),-e^t\sin(۱+e^t))\;\Rightarrow\vec{R}''(t)=(e^t,e^t\cos(۱+e^t)-e^{۲t}\sin(۱+e^t),-e^t\sin(۱+e^t)-e^{۲t}\cos(۱+e^t))$$

به ازای $t=۰$ خواهیم داشت:

$$\vec{R}''=(۱,\cos۲-\sin۲,-\sin۲-\cos۲)\;,\;\vec{R}'=(۱,\cos۲,-\sin۲)$$

ضرب خارجی این بردارها را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۱&\cos۲&-\sin۲\\ ۱&\cos۲-\sin۲&-\sin۲-\cos۲\end{vmatrix}=(-\cos۲\sin۲-\cos^۲۲+\sin۲\cos۲-\sin^۲۲,\sin۲+\cos۲-\sin۲,\cos۲-\sin۲-\cos۲)$$

$$=(-۱,\cos۲,-\sin۲)$$

به این ترتیب با محاسبه‌ی اندازه‌ی این بردار و اندازه‌ی بردار $\vec{R}'$ داریم:

$$\kappa=\frac{\sqrt{۱+\cos^۲۲+\sin^۲۲}}{(\sqrt{۱+\cos^۲۲+\sin^۲۲})^۳}=\frac{\sqrt{۲}}{(\sqrt{۲})^۳}=\frac{۱}{(\sqrt{۲})^۲}=\frac{۱}{۲}$$

انحنای این منحنی در $t=۰$ برابر با $\kappa=\frac{۱}{۲}$ است، پس شعاع انحنای آن برابر است با:

$$\rho=\frac{۱}{\kappa}=۲$$

۱۲ـ گزینه «۲» می‌خواهیم دوران حول محور y انجام شود. پس به متغیر y کاری نداریم اما به جای x باید $\sqrt{x^2+z^2}$ قرار دهیم.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y = (\sqrt{x^2+z^2})^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + z^2 + 1$$

مقاطع مختلف را بررسی می‌کنیم:

اگر $x = 0$ قرار دهیم $y = z^2 + 1$ یک سهمی است.

اگر $z = 0$ قرار دهیم $y = x^2 + 1$ یک سهمی است.

هر دو سهمی رو به بالا هستند پس تا این‌جا مطمئن شدیم که یک سهمی‌گون (سهمی‌وار) به‌دست می‌آید.

اگر $y = c$ قرار دهیم، $x^2 + z^2 = c - 1$ یک دایره است $(c > 1)$ پس سهمی‌گون موردنظر، دایروی است.

۱۳ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادله‌ی رویه $z = x^2 + y^2$ و صفحه‌ی $z = 2x$ معادله‌ی پارامتری منحنی c را به‌دست آوریم:

$$x = t \Rightarrow z = 2t \Rightarrow (2t)^2 = t^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 3t^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}t$$

به این ترتیب برای منحنی C داریم:

$$\vec{R}(t) = (t, \sqrt{3}t, 2t)$$

در نقطه‌ی $A(0,1,0)$ داریم $t = 0$ و در نقطه‌ی $B(1, \sqrt{3}, 2)$ داریم $t = 1$.

$$\text{طول قوس} = s = \int_0^1 |\vec{R}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+3+4}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 dt = 2\sqrt{2}$$

۱۴ـ گزینه «۱» فاصله‌ی این ذره از مبدأ مختصات یعنی اندازه‌ی بردار $\vec{R}(t)$. همان‌طور که می‌دانید $\vec{R}(t).\vec{R}(t) = |\vec{R}(t)|^2$ بنابراین با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\vec{R}'(t).\vec{R}(t) + \vec{R}(t).\vec{R}'(t) = \frac{d}{dt}|\vec{R}(t)|^2$$

طبق فرض $\vec{R}(t).\vec{R}'(t) > 0$ است پس $\frac{d}{dt}|\vec{R}(t)|^2 > 0$ یعنی $|\vec{R}(t)|^2$ تابعی صعودی است پس $|\vec{R}(t)|$ هم به مرور زمان در حال افزایش است.

یعنی این ذره در حال دور شدن از مبدأ است. اکنون به تندی حرکت یعنی $|\vec{R}'(t)|$ دقت کنیم. می‌دانیم که: $|\vec{R}'(t)|^2 = \vec{R}'(t).\vec{R}'(t)$ پس:

$$\frac{d}{dt}|\vec{R}'(t)|^2 = \vec{R}''(t).\vec{R}'(t) + \vec{R}'(t).\vec{R}''(t) = 2\vec{R}''(t).\vec{R}'(t)$$

طبق فرض $\vec{R}''.\vec{R}' < 0$ است پس: $\frac{d}{dt}|\vec{R}'(t)|^2 < 0$

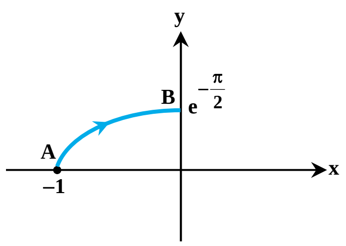
یعنی $|\vec{R}'(t)|$ تابعی نزولی است پس تندی حرکت به مرور زمان در حال کاهش است.

۱۵ـ گزینه «۱» فاصله از مبدأ برابر است با $|\vec{R}(t)|$ پس با محاسبه‌ی اندازه‌ی این بردار داریم:

$$|\vec{R}(t)| = \sqrt{e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t} = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}$$

تابع e^{-t} نزولی است و وقتی $t \to \infty$ میل کند، $e^{-t} \to 0$ به صفر میل می کند. پس این ذره در حال نزدیک شدن به مبدأ است. برای تشخیص جهت حرکت آن کافیست محل آن را در $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ حساب کنیم.

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B(0, e^{-\frac{\pi}{2}}) \qquad t = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$



به محل این دو نقطه دقت کنید.

این ذره در خلاف جهت مثلثاتی یعنی در جهت عقربه‌ها حرکت می‌کند.

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۱»

$$z=t^{۳}+t^{-۳}=t^{۳}+\frac{۱}{t^{۳}}=(t+\frac{۱}{t})^{۳}-۳(t+\frac{۱}{t}) \Rightarrow z=x^{۳}-۳x \Rightarrow \frac{dz}{dx}=۳x^{۲}-۳ \Rightarrow \frac{d^{۲}z}{dx^{۲}}=۶x \Rightarrow \frac{d^{۲}z}{dx^{۲}}=۶(t+\frac{۱}{t})$$

۲ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم $g=۴x+۳y-۲z-c=۰$ و با توجه به این که x متغیر مستقل است پس y و z تابع بوده و لذا داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ ۴ & -۲\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ ۳ & -۲\end{vmatrix}}=-\frac{-۲f_x-۴f_z}{-۲f_y-۳f_z}=-\frac{۲f_x+۴f_z}{۲f_y+۳f_z}$$

۳ـ گزینه «۱» ژاکوبین موردنظر برابر است با:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} ۲x+۲z & ۲y & ۲z+۲x \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix}$$

چون ستون اول و سوم ماتریس با هم برابر هستند، دترمینان بالا صفر می‌شود.

روش دوم: ابتدا توجه کنید که $v^{۲}+w^{۲}=۲u$ و می‌دانیم اگر رابطه‌ی مستقل از متغیرها بین توابع وجود داشته باشد ژاکوبین صفر است.

۴ـ گزینه «۲» حجم جعبه به طول x، عرض y و ارتفاع z برابر $V=xyz$ و آهنگ تغییرات حجم $\frac{dV}{dt}$ است.

$$\frac{dV}{dt}=yz\frac{dx}{dt}+xz\frac{dy}{dt}+xy\frac{dz}{dt}=۸۰(۳)+۱۲۰(-۰/۵)+۱۵۰(۲)=۴۸۰$$

۵ـ گزینه «۱» $\vec{r}$ یک میدان برداری و r تابع حقیقی است. می‌دانیم $\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r}=\vec{\nabla}.(r^{-۱}\vec{r})$ بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r}=r^{-۱}(\vec{\nabla}.\vec{r})+(\nabla r^{-۱}).\vec{r}=r^{-۱}\left[(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}).(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\right]+(\vec{i}\frac{\partial r^{-۱}}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial r^{-۱}}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial r^{-۱}}{\partial z}).\vec{r}$$

$$=۳r^{-۱}+(-r^{-۲}(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}-r^{-۲}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}-r^{-۲}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}).\vec{r}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \Rightarrow r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r}=۳r^{-۱}-r^{-۲}(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}).\vec{r}=۳r^{-۱}-r^{-۲}(\frac{\vec{r}}{r}).\vec{r}=۳r^{-۱}-r^{-۲}\frac{(\vec{r}.\vec{r})}{r}=۳r^{-۱}-r^{-۲}(\frac{r^{۲}}{r})=۲r^{-۱}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r})=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(۲r^{-۱})+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(۲r^{-۱})+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(۲r^{-۱})=-۲r^{-۲}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}-۲r^{-۲}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}-۲r^{-۲}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=-۲r^{-۲}(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k})=-۲r^{-۲}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{۲}{r^{۳}}\vec{r}$$

۶ـ گزینه «۴» فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y,z) از نقطه‌ی $(۱,۲,-۱)$ برابر است با $d=\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}+(z+۱)^{۲}}$ برای سادگی بیشتر، تابع $f=(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}+(z+۱)^{۲}$ را در نظر می‌گیریم و در پایان از مقدار f، جذر می‌گیریم.

قید یا محدودیت هم از معادله‌ی کره به دست می‌آید:

$$g=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۲۴=۰$$

حالا دستگاه لاگرانژ را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \frac{۲(x-۱)}{۲x}=\frac{۲(y-۲)}{۲y}=\frac{۲(z+۱)}{۲z}$$

با استفاده از این تساوی‌ها y و z را برحسب x می‌نویسیم:

$$y(x-۱)=x(y-۲) \Rightarrow -y=-۲x \Rightarrow y=۲x$$

$$z(x-۱)=x(z+۲) \Rightarrow -z=x \Rightarrow z=-x$$

با جایگذاری در معادله‌ی g داریم:

$$x^{۲}+(۲x)^{۲}+(-x)^{۲}=۲۴ \Rightarrow ۶x^{۲}=۲۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

پس $y=۲x=\pm ۴$ و $z=-x=\mp ۲$. نقاط $A(۲,۴,-۲)$ و $B(-۲,-۴,+۲)$ به دست می‌آیند.

در نقطه‌ی A داریم:

$$d=\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۶}$$

در نقطه‌ی B داریم:

$$d=\sqrt{(-۳)^{۲}+(-۶)^{۲}+(۳)^{۲}}=\sqrt{۵۴}$$

پس $\sqrt{۶}$ کمترین فاصله و $\sqrt{۵۴}$ بیشترین فاصله‌ی آن نقطه از کره را نشان می‌دهد.

روش کوتاه‌تر: هرگاه فاصله‌ی یک نقطه از یک کره را می‌خواهید، معادله‌ی خطی را بنویسید که از آن نقطه و از مرکز کره می‌گذرد. با برخورددادن این خط و کره به نقاط مورد نظر خواهید رسید.

در این مثال نقطه‌ی داده شده: $P(1,2,-1)$ و مرکز کره، $O(0,0,0)$ است.

معادله‌ی خطی که از P و O می‌گذرد این است:
$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{-1-0}\Rightarrow y=2x\ ,\ z=-x$$

با برخورددادن این خط و معادله‌ی کره داریم:
$$x^2+(2x)^2+(-x)^2=24\Rightarrow 6x^2=24\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow y=\pm 4\Rightarrow z=\mp 2$$

پس نقاط $A(2,4,-2)$ و $B(-2,-4,2)$ به‌دست می‌آیند. حالا فاصله‌ی این نقاط را از $P(1,2,-1)$ حساب می‌کنیم:
$$d_A=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}\qquad d_B=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}$$

۷ـ گزینه «۳» چون صورت و مخرج کسر هر دو نامنفی هستند پس $z\ge 0$ و از طرفی صورت کسر کوچکتر از مخرج است بنابراین $z<1$. در نتیجه برد تابع $[0,1)$ می‌باشد.

۸ـ گزینه «۴» ابتدا گرادیان تابع f را در نقطه $(1,1)$ به‌دست می‌آوریم:
$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=(1\,,-1)$$

حال جهت موردنظر را $\vec{u}(x,y)$ در نظر می‌گیریم، در این صورت لازم است $D_{\vec{u}}f(1,1)$ یا همان $\vec{\nabla}f.\vec{u}$ برابر صفر شود.
$$D_{\vec{u}}f(1,1)=\vec{\nabla}f.u=(1,-1).(x,y)=x-y=0\Rightarrow x=y$$

۹ـ گزینه «۳» از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم.
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\quad \text{و}\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=2\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

۱۰ـ گزینه «۳» صورت کسر دارای درجه ۲ و مخرج دارای درجه $2n$ است. اگر $n=1$ درجه صورت و مخرج مساوی بوده و لذا f در $(0,0)$ فاقد حد و ناپیوسته می‌باشد اما اگر $n=\frac{1}{2}$ مخرج از درجه یک و لذا کسر برابر $f(0,0)=0$ و لذا f در $(0,0)$ پیوسته خواهد بود.

۱۱ـ گزینه «۳» شرط داده شده را به‌صورت $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ برای $0\le x\le 1$ می‌نویسیم پس:
$$f(x,y)=x^2+8y^2=x^2+8(1-\sqrt{x})^4=g(x)$$
$$g'(x)=2x-\frac{16}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^3=0\Rightarrow 2x=\frac{16(1-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}=8(1-\sqrt{x})^3\Rightarrow \sqrt{x}=2(1-\sqrt{x})\Rightarrow 3\sqrt{x}=2\Rightarrow x=\frac{4}{9}$$

چون $g(\frac{4}{9})=\frac{8}{27}$ و $g(0)=8$ و $g(1)=1$ پس ماکزیمم ۸ و مینیمم $\frac{8}{27}$ خواهد بود.

۱۲ـ گزینه «۳» چون $g=e^{2x-y}+\frac{y}{x^2}-z=0$ پس بردار $\vec{\nabla}g$ بردار هادی خط قائم است. به ازای $x=1$ و $y=2$ داریم $z=3$ و لذا در نقطه $(1,2,3)$ معادله خط قائم نوشته می‌شود.
$$\vec{\nabla}g=(2e^{2x-y}-\frac{2y}{x^3},-e^{2x-y}+\frac{1}{x^2},-1)=(-2,0,-1)\Rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$$
$$:z=0\Rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{-3}{-1}=3\Rightarrow x=-5,y=2$$

۱۳ـ گزینه «۴» ابتدا گرادیان f را به‌دست می‌آوریم:
$$\vec{\nabla}f=(12x^3+y,x+3y^2)\Rightarrow \vec{\nabla}f(1,2)=(14,13)$$

جهت موردنظر را $\vec{u}$ در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:
$$\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)=(\cos 135^\circ,\sin 135^\circ)=(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\Rightarrow D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(14,13).(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۳» نقطه بحرانی از حل $\vec{\nabla} f=(0,0)$ به‌دست می‌آید.

$$\vec{\nabla} f=(4x^3+2xy^2,-4y^3+2x^2y)=(0,0)\ \Rightarrow \begin{cases}2x(2x^2+y^2)=0 & (1)\\ 2y(x^2-2y^2)=0 & (2)\end{cases}$$

اگر x,y همزمان برابر صفر نباشند، پس $2x^2+y^2\neq 0$ از معادله (۱) نتیجه می‌شود $x=0$ که با جایگذاری در معادله (۲) به رابطه $-4y^3=0$ مـی‌رسیم که $y=0$ را نتیجه می‌دهد. پس تنها جواب $(0,0)$ است. چون $\Delta(0,0)=0$، آزمون مشتق دوم نتیجه‌ای نمی‌دهـد. پـس روی مسـیرهای خاصـی بـه $(0,0)$ نزدیک می‌شویم.

$$\begin{cases}y=0\ \Rightarrow f(x,0)=x^4 & \Rightarrow (0,0)\text{ نقطه min است}\\ x=0\ \Rightarrow f(0,y)=-y^4 & \Rightarrow (0,0)\text{ نقطه max است}\end{cases}\Rightarrow (0,0)\text{ زینی است}$$

۱۵ـ گزینه «۱» چون کمان مقابل سینوس به سمت صفر میل می‌کند، از هم‌ارزی $\sin u\sim u$ استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}$$

چون درجه صورت بیشتر از درجه مخرج است و تنها ریشه مخرج $(0,0)$ است و مخرج کسر همگن است پس حد موردنظر موجود و برابر صفر است.

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا فصل مشترک مخروط $z^2=x^2+y^2$ و صفحه‌ی $x-2z=3$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$x=3+2z$$

$$\Rightarrow z^2=x^2+y^2\ \Rightarrow z^2=(3+2z)^2+y^2=9+4z^2+12z+y^2\ \Rightarrow y^2+3z^2+12z+9=0$$

با توجه به اینکه ضرایب y^2 و z^2 هم علامت و نابرابر هستند پس معادله رویه به دست آمده، معادله یک بیضی است.

از طرفی چون $x^2+y^2=z^2$ می‌باشد، این معادله را در f قرار می‌دهیم و داریم:

$$f=z^2+z^2=2z^2$$

در واقع می‌خواهیم کمترین مقدار f را بیابیم که برابر است با $2z^2$. از معادله بیضی به دست آمده داریم:

$$3z^2+12z+9=-y^2\ \Rightarrow y^2=-(3z^2+12z+9)$$

با توجه به اینکه y^2 همواره مثبت است پس باید $3z^2+12z+9\leq 0$ باشد و داریم:

$$3(z^2+4z+3)\leq 0\ \Rightarrow 3(z+3)(z+1)\leq 0\ \Rightarrow -3\leq z\leq -1$$

که کمترین مقدار برابر z^2 برابر است با ۱ پس کمترین مقدار $f=2z^2$ نیز می‌شود ۲ و این یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۱۷ـ گزینه «۲» ابتدا ضابطه u را ساده می‌کنیم:

$$u=\frac{x(x^3-8y^3)}{x-2y}=\frac{x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}{x-2y}=x^3+2x^2y+4xy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2+8xy\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4x+8y\ \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=4$$

۱۸ـ گزینه «۲» حداکثر مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان است.

$$\vec{\nabla} f=(3x^2y-z^2+1\,,\ x^3+4z-1\,,\ -2xz+4y-1)=(4,0,3)$$

$$\Rightarrow \text{جهت گرادیان}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{1}{5}(4,0,3)$$

۱۹ـ گزینه «۱» اگر $g_1=x+y-3z=0$ و $g_2=x^2-y^2-2z^2-1=0$ بردار نرمال صفحه قائم بر c برابر $u=\vec{\nabla} g_1\times\vec{\nabla} g_2$ است.

$$\vec{\nabla} g_1=(1,1,-3)\ ,\ \vec{\nabla} g_2=(2x,-2y,-4z)=(4,-2,-4)\ \Rightarrow u(-10,-8,-6)\,||\,u(5,4,3)\xrightarrow{A(2,1,1)}5x+4y+3z=17$$

۲۰ـ گزینه «۴» تابع داده شده همگن درجه صفر است، بنابراین قضیه اویلر:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\ \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=-y\frac{\partial z}{\partial y}\ \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{-y}{x}$$

۲۱ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار A را حساب می‌کنیم؛ به کمـک تغییـر متغیـر $u=x-1$، $v=y-2$ و $w=z-1$، حـد بـه‌صـورت $\lim\limits_{(u,v,w)\to(0,0,0)}\dfrac{uvw}{u^2+v^2+w^2}$ در می‌آید، که چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است، حد موجود و برابر صفر است.

اما برای تعیین B به راحتی معلوم است چون درجه صورت و مخرج برابر است، حد وجود ندارد.

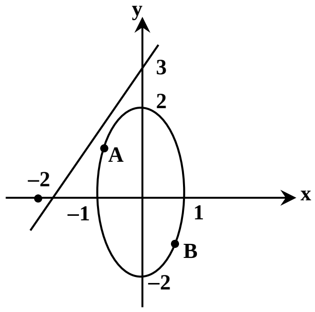
۲۲ــ گزینه «۴»

فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه (x,y) از خط $۳x-۲y+۶=۰$ با فرمول مقابل به دست می‌آید:

$$d=\frac{|۳x-۲y+۶|}{\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲}}$$

می‌توانیم ابتدا کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x,y)=\frac{۳x-۲y+۶}{\sqrt{۱۳}}$ را به دست آوریم و در پایان اگر مقدار d را خواستیم از مقادیر به دست آمده قدر مطلق می‌گیریم. نقطه‌ی (x,y) روی بیضی قرار دارد پس داریم $۴x^۲+y^۲=۴$ حالا می‌توان از ۲ راه مختلف مسأله را حل کرد:

روش اول (ریاضی عمومی ۱):



از معادله بیضی داریم $y=\pm ۲\sqrt{۱-x^۲}$ با جایگذاری در ضابطه‌ی f داریم $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۳x\mp ۴\sqrt{۱-x^۲}+۶)$ حالا نقاط بحرانی f را پیدا می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۳\mp\frac{-۸x}{۲\sqrt{۱-x^۲}})=۰\Rightarrow ۳=\mp\frac{۴x}{\sqrt{۱-x^۲}}\Rightarrow ۳\sqrt{۱-x^۲}=\mp ۴x$$

$$\Rightarrow ۹(۱-x^۲)=۱۶x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow x=\pm\frac{۳}{۵}$$

با توجه به معادلات $y=\pm ۲\sqrt{۱-x^۲}$ و کمی دقت به شکل، می‌بینیم که در $x=-\frac{۳}{۵}$ داریم $y=\frac{۸}{۵}$ و در $x=\frac{۳}{۵}$ داریم $y=-\frac{۸}{۵}$.

$$\text{فاصله A از B}=\sqrt{(-\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۵})^۲+(\frac{۸}{۵}+\frac{۸}{۵})^۲}=\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}+\frac{۲۵۶}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۲۹۲}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۴\times ۷۳}{۲۵}}=\frac{۲\sqrt{۷۳}}{۵}$$

روش دوم (ریاضی عمومی ۲):

کمترین و بیشترین مقدار تابع $f=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(۳x-۲y+۶)$ را با قید $g:۴x^۲+y^۲=۴$ می‌خواهیم. بهتر است دستگاه لاگرانژ را به این صورت بنویسیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}۳}{۸x}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}(-۲)}{۲y}\Rightarrow\frac{۶}{\sqrt{۱۳}}y=-\frac{۱۶}{\sqrt{۱۳}}x\Rightarrow y=-\frac{۸}{۳}x$$

با جایگذاری در معادله‌ی g داریم:

$$۴x^۲+\frac{۶۴}{۹}x^۲=۴\Rightarrow\frac{۱۰۰}{۹}x^۲=۴\Rightarrow x^۲=\frac{۳۶}{۱۰۰}\Rightarrow x=\pm\frac{۶}{۱۰}=\pm\frac{۳}{۵}\xrightarrow{y=-\frac{۸}{۳}x}y=\mp\frac{۸}{۵}$$

حالا نقاط $A(-\frac{۳}{۵},\frac{۸}{۵})$ و $B(\frac{۳}{۵},-\frac{۸}{۵})$ به دست می‌آیند و مانند روش اول:

$$\text{فاصله A از B}=\frac{۲\sqrt{۷۳}}{۵}$$

۲۳ــ گزینه «۳» قرار می‌دهیم $u=\frac{\cos\frac{x}{y}}{x+y-\sqrt{xy}}$، در این صورت u همگن درجه ۱- است، و $u=e^z$، در این صورت داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(-۱)\times\frac{e^z}{e^z}=-۱$$

۲۴ــ گزینه «۴» می‌توانیم به روش عادی بسط تیلور f را به‌دست آوریم، ولی کمی طولانی خواهد بود و در ضمن نیازی به این کار نیست. می‌دانیم در همسایگی مبدأ داریم $\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x,y)=\cos(x^۲+y)\sim ۱-\frac{(x^۲+y)^۲}{۲}=۱-\frac{x^۴}{۲}-\frac{y^۲}{۲}-x^۲y$$

و چون فقط بسط را تا درجه دوم نیاز داریم، پس $f\sim ۱-\frac{y^۲}{۲}$ خواهد بود و در این صورت داریم:

$$f(۰/۰۵,۰/۰۴)\sim ۱-\frac{(۰/۰۴)^۲}{۲}=۱-۰/۰۰۰۸=۰/۹۹۹۲$$

۲۵ــ گزینه «۱» ابتدا صورت کسر داده شده را به‌صورت مقابل تجزیه می‌کنیم:

$$y(x^۲-۱)+۲(x-۱)=(x-۱)(y(x+۱)+۲)$$

$$\text{حد}=\lim_{(x,y)\to(۱,۱)}\frac{(x-۱)(۲+xy+y)}{x-۱}=\lim_{(x,y)\to(۱,۱)}(۲+xy+y)=۴$$

پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه می‌کنیم، بدین منظور از رابطه داده شده نسبت به x و y مشتق می‌گیریم در حالی که z را تابع x, y فرض می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مشتق بر حسب } x \Rightarrow yz+xyz_x=(1+z_x)\phi' \\ \text{مشتق بر حسب } y \Rightarrow xz+xyz_y=(1+z_y)\phi' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطه اول به دوم}} \frac{yz+xyz_x}{xz+xyz_y}=\frac{1+z_x}{1+z_y}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} yz+yzz_y+xyz_x+xyz_xz_y=xz+xzz_x+xyz_y+xyz_xz_y \Rightarrow (xy-xz)z_x+(yz-xy)z_y=xz-yz$$

$$\Rightarrow x(y-z)z_x+y(z-x)z_y=(x-y)z$$

۲ـ گزینه «۲» برای محاسبه مقدار موردنظر قرار می‌دهیم: $f(x,y)=x^y$ و $x_\circ=2$ و $y_\circ=3$ و $\Delta x=0/01$ و $\Delta y=0/03$

در این صورت به کمک فرمول تقریب داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1} \Rightarrow f_x(2,3)=12 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\text{Ln}x \Rightarrow f_y(2,3)=8\text{Ln}2$$

$$f(2/01,3/03)\simeq f(2,3)+f_x(2,3)\times(0/01)+f_y(2,3)\times(0/03) \Rightarrow f(2/01,3/03)\simeq 8+0/12+0/24\text{Ln}2=8/288$$

۳ـ گزینه «۲» می‌دانیم که $r^2=x^2+y^2+z^2$ بنابراین $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ و $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^n}=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})r^{-n}=(-nr^{-n-1})\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+(-nr^{-n-1})\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+(-nr^{-n-1})\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=(-nr^{-n-1})(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k})=\frac{-n}{r^{n+1}}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{n}{r^{n+2}}\vec{r}$$

$$\vec{\nabla}.(r\vec{\nabla}\frac{1}{r^n})=\vec{\nabla}.\left[r(-\frac{n}{r^{n+2}}\vec{r})\right]=-n\vec{\nabla}.(r^{-n-1}\vec{r})$$

از طرفی طبق اتحاد $\vec{\nabla}.(\phi\vec{F})=\phi(\vec{\nabla}.\vec{F})+(\vec{\nabla}\phi).\vec{F}$ خواهیم داشت:

$$-n\vec{\nabla}.(r^{-n-1}\vec{r})=-n\left[\frac{1}{r^{n+1}}(\vec{\nabla}.\vec{r})+(\vec{\nabla}r^{-n-1}).\vec{r}\right]=-n\left[\frac{3}{r^{n+1}}+\left\{(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z})(r^{-n-1})\right\}.\vec{r}\right] \quad \left[\because \vec{\nabla}.\vec{r}=3\right]$$

$$=-n\left[\frac{3}{r^{n+1}}-(n+1)r^{-n-2}(\vec{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial r}{\partial z}).\vec{r}\right]=-n\left[\frac{3}{r^{n+1}}-\frac{(n+1)}{r^{n+2}}(\vec{i}\frac{x}{r}+\vec{j}\frac{y}{r}+\vec{k}\frac{z}{r}).\vec{r}\right]$$

$$=-n\left[\frac{3}{r^{n+1}}-\frac{(n+1)}{r^{n+2}}\frac{\vec{r}.\vec{r}}{r}\right]=-n\left[\frac{3}{r^{n+1}}-\frac{(n+1)r^2}{r^{n+2}r}\right]=-\frac{n(2-n)}{r^{n+1}}=\frac{n(n-2)}{r^{n+1}}$$

۴ـ گزینه «۲» تابع f یک تابع همگن از درجه ۱ است، و می‌دانیم توابع همگن از درجه ۱ فقط وقتی مشتق‌پذیرند که خطی باشند (یعنی به‌صورت $ax+by+c$).

۵ـ گزینه «۱»

$$u=\text{Ln}\frac{1}{r} \Rightarrow u=-\text{Ln}\,r=-\text{Ln}((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u=-\frac{1}{2}\text{Ln}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\times\frac{2(x-a)}{r^2}=\frac{-(x-a)}{r^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\times\frac{2(y-b)}{r^2}=\frac{-(y-b)}{r^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{2}\times\frac{2(z-c)}{r^2}=\frac{-(z-c)}{r^2}$$

اندازه بردار گرادیان باید برابر ۱ باشد. پس داریم:

$$|\text{grad}u|=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{r^4}+\frac{(y-b)^2}{r^4}+\frac{(z-c)^2}{r^4}=1 \Rightarrow \frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{r^4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{r^4}=1 \Rightarrow \frac{1}{r^2}=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که $1+x^2+y^2\geq 1$ بنابراین $0<\frac{1}{1+x^2+y^2}\leq 1$.

۷ـ گزینه «۲» معادله مشخصه معادله داده شده به‌صورت $\lambda^2-2\lambda+1=0$ است که دارای ریشه مضاعف $\lambda=1$ است بنابراین با تغییر متغیر $t=-x+y$ و $s=y$ به معادله $u_{ss}=0$ تبدیل می‌شود.

۸ــ گزینه «۱» چون نقطه $P(0,0,1)$ روی سطح قرار ندارد، پس نمی‌توان بردار نرمال را از معادله سطح محاسبه نمود. اگر نقطه‌ای که صفحه بر سطح مماس است را $P_0(x,y,z)$ بگیریم، نرمال سطح $g=x^2-y^2+3z=0$ به‌صورت $\vec{\nabla}g=(2x,-2y,3)$ است. چون صفحه با خطی که بردار هادی آن $\vec{u}=(2,1,-2)$ می‌باشد، موازی است پس نرمال صفحه یعنی $\vec{\nabla}g$ بر u عمود است و لذا $\vec{\nabla}g.u=4x-2y-6=0$ و معادلاً $2x-y-3=0$. از طرفی بردار $\overrightarrow{PP_0}=(x,y,z-1)$ روی صفحه موردنظر قرار دارد و لذا بر $\vec{\nabla}g$ عمود است. $\vec{\nabla}g.\overrightarrow{PP_0}=2x^2-2y^2+3z-3=0 \Rightarrow x^2-y^2=-\frac{3}{2}z+\frac{3}{2}$

با جایگذاری در معادله سطح به رابطه $\frac{3}{2}z+\frac{3}{2}=0$ می‌رسیم و لذا $z=-1$ پس روی سطح $x^2-y^2-3=0$ و از طرفی $2x-y-3=0$ و با جایگذاری $y=2x-3$ در رابطه اخیر و ساده کردن $x=2$ و $y=1$ به‌دست می‌آید و بنابراین نقطه $P_0(2,1,-1)$ نقطه تماس و $\vec{\nabla}g=(4,-2,3)$ هادی صفحه بوده و بنابراین معادله آن $4x-2y+3z-3=0$ خواهد بود.

۹ــ گزینه «۴» چون $\sin y \sim y$ پس $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0=g(0,0)$ و لذا g در $(0,0)$ پیوسته است. برای محاسبه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ منحنی $y=x^{\frac{3}{4}}$ برای $x>0$ را در نظر می‌گیریم و روی آن داریم:

$$f(x,y)=f(x,x^{\frac{3}{4}})=\frac{x^2x^{\frac{3}{4}}}{x^3+x^3}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}}$$

که برابر $f(0,0)$ نبوده و ناپیوسته است.

۱۰ــ گزینه «۳» به طور کلی می‌دانیم دیورژانس $(f(|\vec{r}|)\vec{r})$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\operatorname{div}(f(|\vec{r}|)\vec{r})=f'(|\vec{r}|)|\vec{r}|+3f(|\vec{r}|)$$

بنابراین داریم:

$$\operatorname{div}(|\vec{r}|^n\ \vec{r})=n|\vec{r}|^{n-1}|\vec{r}|+3|\vec{r}|^n=|\vec{r}|^n\ (n+3)$$

در نتیجه به ازای $n=-3$، دیورژانس برابر صفر است.

۱۱ــ گزینه «۴»

روش اول: نقطه (x,y) را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله این نقطه تا مبدأ یعنی نقطه $(0,0)$ را d می‌نامیم و داریم:

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow d^2=x^2+y^2$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ برای به‌دست آوردن ماکزیمم توابع مقیّد داریم:

$$\phi(x,y)=3x^2+4xy+6y^2-140$$

و قرار می‌دهیم $f(x,y)=x^2+y^2$ پس داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$$

$$2x+\lambda(6x+4y)=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

$$2y+\lambda(4x+12y)=0 \qquad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\lambda=-\frac{x}{3x+2y}=\frac{-y}{2x+6y}$$

$$-\lambda=\frac{x^2}{3x^2+2xy}=\frac{y^2}{2xy+6y^2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{3x^2+6y^2+4xy}=\frac{f(x,y)}{140}$$

اکنون با قراردادن λ در معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2x-\frac{f}{140}(6x+4y)=0 \quad , \quad 2y-\frac{f}{140}(4x+12y)=0$$

پس داریم:

$$(140-3f)x-2fy=0 \qquad (3)$$

و همچنین:

$$-2fx+(140-6f)y=0 \qquad (4)$$

از معادله (۳)، x را می‌یابیم و در معادله (۴) قرار می‌دهیم و داریم:

$$x=\frac{2fy}{140-3f} \Rightarrow -4f^2+(140-3f)(140-6f)=0 \Rightarrow 14f^2-1260f+(140)^2=0 \overset{\div 14}{\Rightarrow} f^2-90f-1400=0$$

$$\Rightarrow (f-70)(f-20)=0 \Rightarrow f=70, f=20$$

بنابراین داریم:

$$f=70 \Rightarrow d^2=70 \Rightarrow d=\sqrt{70}$$

$$f=20 \Rightarrow d^2=20 \Rightarrow d=\sqrt{20}$$

بنابراین ماکزیمم مسافت برابر $\sqrt{70}$ و مینیمم مسافت برابر $\sqrt{20}$ می‌باشد.

روش دوم: فاصله از مبدأ را در مختصات قطبی با $r=\sqrt{x^2+y^2}$ نشان می‌دهند. می‌توانیم از مختصات قطبی به این صورت استفاده کنیم:

$$3x^2+4xy+6y^2=140 \Rightarrow 3r^2\cos^2\theta+4r^2\sin\theta\cos\theta+6r^2\sin^2\theta=140 \Rightarrow r^2(3\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta)=140$$

$$\Rightarrow r^2(3+2\sin 2\theta+3\sin^2\theta)=140 \Rightarrow r^2(3+2\sin 2\theta+\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta))=140 \Rightarrow r^2=\frac{140}{\frac{9}{2}+2\sin 2\theta-\frac{3}{2}\cos 2\theta}=\frac{2\times 140}{9+4\sin 2\theta-3\cos 2\theta}$$

کافی است بیشترین مقدار r را پیدا کنیم. می‌دانیم که برای هر زاویه، نامساوی مقابل برقرار است: $-\sqrt{4^2+3^2}\le 4\sin 2\theta-3\cos 2\theta\le\sqrt{4^2+3^2}$

بنابراین $-5\le 4\sin 2\theta-3\cos 2\theta\le 5$ پس با اضافه کردن ۹ واحد به طرفین داریم $4\le 9+4\sin 2\theta-3\cos 2\theta\le 14$. حالا با وارونه کردن طرفین و ضرب آن‌ها در 2×140 خواهیم داشت:

$$\frac{2\times 140}{4}\ge\frac{2\times 140}{9+4\sin 2\theta-3\cos 2\theta}\ge\frac{2\times 140}{14} \Rightarrow 70\ge r^2\ge 20 \Rightarrow \sqrt{70}\ge r\ge\sqrt{20}$$

بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ برابر با $\sqrt{70}$ و کمترین فاصله برابر با $\sqrt{20}$ است.

۱۲ـ گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u_x=xy^2-4y-5x=0 & (1)\\ u_y=x^2y-4x-5y=0 & (2)\end{cases}$$

اگر این دو معادله را از هم کم کنیم داریم:

$$xy^2-x^2y+y-x=0 \Rightarrow xy(y-x)+(y-x)=0 \Rightarrow (y-x)(xy+1)=0 \Rightarrow y=x \text{ یا } y=-\frac{1}{x}$$

اگر $y=-\frac{1}{x}$ را در معادله (۲) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$-x-4x+\frac{5}{x}=0 \Rightarrow -5x^2+5=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس دو نقطه بحرانی $(1,-1)$ و $(-1,1)$ حاصل می‌شود.

اگر $y=x$ را در معادله (۲) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$x^3-4x-5x=0 \Rightarrow x(x^2-9)=0 \Rightarrow x=0,3,-3$$

پس سه نقطه بحرانی $(0,0)$ و $(3,3)$ و $(-3,-3)$ حاصل می‌شود.

برای تشخیص نوع این نقاط مبین را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta=U_{xx}U_{yy}-U_{xy}^2=(2y^2-10)(2x^2-10)-(4xy-8)^2$$

چون در نقاط $(1,-1)$ و $(-1,1)$ و $(3,3)$ و $(-3,-3)$ علامت Δ منفی است پس این نقاط زینی هستند.

$$(0,0) \Rightarrow \begin{cases}\Delta=100-64>0\\ f_{xx}=2y^2-10=-10<0\end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ ماکسیمم نسبی است}$$

۱۳ـ گزینه «۳»

$$\omega=f(xg(y)) \Rightarrow \omega_x=g(y)f'(xg(y)) \Rightarrow \omega_{xx}=g^2(y)f''(xg(y)) \Rightarrow \omega_{xx}=g^2(y)f''(u)$$

۱۴ـ گزینه «۳» به خاطر وجود قدر مطلق از تعریف مشتق جزئی استفاده می‌کنیم.

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-|h||-|h|}{h}=0$$

۱۵ـ گزینه «۴» دما در زمان t برای متحرک عبارت است از:

$$T=50+(2t)^2+(6t^2-2-(t+1)^2)^4=50+4t^2+(5t^2-2t-3)^4$$

پس آهنگ تغییر دما در $t=1$ بر ابر است با:

$$\frac{dT}{dt}=8t+4(10t-2)(5t^2-2t-3)^3=8$$

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به این که f در مبدأ دو ضابطه‌ای است، از تعریف مشتق سوئی استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\alpha,h\beta)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\alpha h^2\beta^2}{h^2\alpha^2+h^2\beta^2}-0}{h}=\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha\beta^2$$

توضیح: چون $\vec{u}$ بردار یکه است، بنابراین $\alpha^2+\beta^2=1$ است.

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه به روش ضمنی z_x و z_y را به‌دست می‌آوریم.

$$z_x=\frac{-2xF_1}{-2F_1-3F_2}=\frac{2xF_1}{2F_1+3F_2} \quad , \quad z_y=-\frac{3y^2F_2}{-2F_1-3F_2}=\frac{3y^2F_2}{2F_1+3F_2} \Rightarrow y^2z_x+xz_y=\frac{2xy^2F_1+3xy^2F_2}{2F_1+3F_2}=xy^2\frac{2F_1+3F_2}{2F_1+3F_2}=xy^2$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا گزینه‌هایی که گفته آنها صحیح است را بررسی می‌کنیم و داریم:

$$\text{مشتق سوئی} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}.\vec{\nabla}f$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{۶۴+۲۲۵} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

$$\vec{\nabla}f = (\cos(x-y)e^{\sin(x-y)}, -\cos(x-y)e^{\sin(x-y)}) \xrightarrow{(۱,۱)} \vec{\nabla}f = (\cos(\circ)e^{\circ}, -\cos(\circ)e^{\circ}) = (۱,-۱)$$

$$\text{مشتق سوئی} = \frac{۸\vec{i}-۱۵\vec{j}}{۱۷}.(\vec{i}-\vec{j}) = \frac{۸}{۱۷}+\frac{۱۵}{۱۷} = \frac{۲۳}{۱۷}$$

پس این گزینه صحیح است.

اکنون صحیح بودن گزینه (۳) را بررسی می‌کنیم. اگر فرض کنیم $g = x^۲+۲y^۲-۱=\circ$ آنگاه $\vec{\nabla}g$ جهت عمود بر g را نشان می‌دهد. پس مشتق سوئی f در جهت $\vec{\nabla}g$ را می‌خواهیم. حاصل‌ضرب داخلی بردارهای گرادیان دو رویه را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f = (\frac{۲x}{y}, \frac{-x^۲}{y^۲}) \Rightarrow \vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g = \frac{۴x^۲}{y} - \frac{۴x^۲}{y} = \circ$$

$$\text{بیضی}: x^۲+۲y^۲-۱=\circ \Rightarrow \vec{\nabla}g = (۲x, ۴y)$$

چون ضرب داخلی بردارهای گرادیان دو رویه صفر است، پس مشتق سوئی f در جهت $\vec{\nabla}g$ صفر است و این گزینه نیز صحیح است.

حال صحیح بودن گزینه ۴ را بررسی می‌کنیم و داریم:

ماکزیمم مقدار مشتق سویی همواره برابر است با اندازه بردار گرادیان، پس داریم:

$$\vec{\nabla}f = (y+z, x+z, x+y) \xrightarrow{(-۳,۵,-۱)} \vec{\nabla}f = ۴\vec{i}-۴\vec{j}+۲\vec{k}$$

$$|\vec{\nabla}f| = \sqrt{۱۶+۱۶+۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

چون بردار $۲\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}$ مضرب مثبتی از بردار گرادیان است، پس این دو بردار موازی و هم‌جهت هستند و این گزینه نیز صحیح است.

بررسی گزینه (۲): برخورد $x=۲$ با سطح $z=\frac{۱}{۳}(x^۲+y^۲)$ منحنیِ $f(y,z)=۳z-y^۲-۴=\circ$ را می‌دهد. برخورد $x=۲$ با سطح $z=\frac{۱}{۶}x^۲+y^۲$ منحنیِ $g(y,z)=۶z-y^۲-۴=\circ$ را می‌دهد. ما زاویه‌ی بین منحنی‌های f و g را در محل برخورد آن‌ها با هم می‌خواهیم. ابتدا نقطه‌ی برخورد را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳z-y^۲-۴=\circ \\ ۶z-۶y^۲-۴=\circ \end{cases}$$

از معادله‌ی اول $۳z=y^۲+۴$ است. در دومی قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$۲(y^۲+۴)-۶y^۲-۴=\circ \Rightarrow -۴y^۲+۴=\circ \Rightarrow y=\pm۱ \Rightarrow z=\frac{۵}{۳}$$

نقطه‌ی $(۲,۱,\frac{۵}{۳})$ یکی از نقاط برخورد دو منحنی با یکدیگر است. زاویه‌ی بین دو منحنی، برابر است با زاویه‌ی بین بردارهای گرادیان پس داریم:

$$\vec{\nabla}f = (\circ,-۲y,۳) = (\circ,-۲,۳) \quad , \quad \vec{\nabla}g = (\circ,-۱۲y,۶) = (\circ,-۱۲,۶)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}f|.|\vec{\nabla}g|} = \frac{۲۴+۱۸}{\sqrt{۴+۹}\sqrt{۱۴۴+۳۶}} = \frac{۴۲}{\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۸۰}}$$

واضح است که $\alpha \neq \frac{\pi}{۳}$.

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا نقاط بحرانی f را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} f_x = ۲x-۴y=\circ \Rightarrow x=۲y \\ f_y = ۸y-۴x=\circ \Rightarrow x=۲y \end{cases}$$

هر دو معادله به نتیجه $x=۲y$ می‌رسند. همه‌ی نقاطی که روی خط $x=۲y$ قرار داشته باشند، نقطه بحرانی f هستند. پس f بی‌نهایت نقطـه‌ی بحرانی دارد. اکنون نقاط بحرانی g را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} g_x = -۲(x^۲-۱)(۲x)-۲(x^۲y-x-۱)(۲xy-۱)=\circ \\ g_y = -۲(x^۲y-x-۱)(x^۲)=\circ \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم: $x=\circ$ یا $x^۲y-x-۱=\circ$. اگر $x=\circ$ باشد، با قرار دادن در معادله‌ی اول داریم: $g_x = \circ-۲(-۱)(-۱)=\circ \Rightarrow -۲=\circ$ که غیرممکن است.

اگر $x^۲y-x-۱=\circ$، آن‌گاه با جایگذاری در معادله‌ی اول داریم: $g_x = -۲(x^۲-۱)(۲x)=\circ \Rightarrow x=\circ$ یا $x=۱$ یا $x=-۱$

این نتایج را در $x^2y-x-1=0$ قرار می‌دهیم. می‌بینیم که $x=0$ به تساوی غیرممکن $-1=0$ می‌رسد. به ازای $x=1$ داریم $y=2$ و به ازای $x=-1$ داریم $y=0$. پس نقاط $A(1,2)$ و $B(-1,0)$ تنها نقاط بحرانی g هستند. با استفاده از آزمون Δ، نوع آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} g_{xx}=-4(3x^2-1)-2(2xy-1)(2xy-1)-2(x^2y-x-1)(2y) \\ g_{xy}=g_{yx}=-2(4x^3y-3x^2-2x) \\ g_{yy}=-2(x^2)(x^2) \end{cases}$$

در نقطه‌ی $A(1,2)$ داریم $g_{xx}=-44$، $g_{xy}=-6$ و $g_{yy}=-2$ پس $\Delta=(-44)(-2)-(-6)^2>0$. مقدار Δ مثبت و g_{xx} منفی است پس A نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

در نقطه $B(-1,0)$ داریم $g_{xx}=-10$، $g_{xy}=2$ و $g_{yy}=-2$ پس $\Delta=(-10)(-2)-2^2>0$. مقدار Δ مثبت و g_{xx} منفی است پس B هم نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

توضیح: در توابع حقیقی یک متغیره که پیوسته و مشتق‌پذیر باشند، وقتی تابع دارای دو نقطه اکسترمم است، هر دوی آن‌ها نمی‌توانند ماکزیمم نسبی باشند یا هر دوی آن‌ها نمی‌توانند مینیمم نسبی باشند. اما در توابع چندمتغیره چنین حالتی می‌تواند رخ دهد. در این سؤال دیدیم که تابع پیوسته و مشتق‌پذیر g دارای دو نقطه بحرانی است که هر دوی آن‌ها ماکزیمم نسبی هستند.

۲۰ـ گزینه «۱» ابتدا تابع $f(x,0)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x,0)=\begin{cases} 0 & 0\ge x^2 \\ -x & 0<x^2 \end{cases}=\begin{cases} 0 & x=0 \\ -x & x\neq 0 \end{cases}$$

چون تابع f در $x=0$ پیوسته است، با مشتق گرفتن نسبت به x داریم $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1$.

۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا L_1 را به شکل مقابل حساب می‌کنیم:

$$L_1=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است، حاصل حد فوق صفر شد. حالا سراغ تعیین مقدار L_2 می‌رویم:

$$L_2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}{x^2y^2(x^2+y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}$$

چون درجه صورت کوچکتر از درجه مخرج است، حد وجود ندارد.

۲۲ـ گزینه «۲»

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1-\cos(h^2u_1u_2)}{h^2u_1^2+h^2u_2^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^4u_1^2u_2^2}{2}}{h^3(u_1^2+u_2^2)}=\lim_{h\to0}\frac{h}{2}\left(\frac{u_1^2u_2^2}{u_1^2+u_2^2}\right)=0$$

۲۳ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $u=x^2y^3z^{\frac{1}{10}}$ باشد، از طرفین این تساوی Ln می‌گیریم و داریم:

$$\ln u=2\ln x+3\ln y+\frac{1}{10}\ln z$$

اکنون از طرفین دیفرانسیل کامل می‌گیریم:

$$\frac{du}{u}=2\times\frac{1}{x}dx+3\times\frac{1}{y}dy+\frac{1}{10}\times\frac{1}{z}\times dz$$

و داریم:

$$x_0=2\ ,\ \Delta x=-0/01\ ,\ y_0=3\ ,\ \Delta y=0/01\ ,\ z_0=1\ ,\ \Delta z=-0/02$$

$$u=(2)^2(3)^3(1)^{\frac{1}{10}}=108$$

حال این مقادیر را در دیفرانسیل گرفته شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{108}du=\cancel{\left(-\frac{1}{100}\right)}+\cancel{\left(\frac{1}{100}\right)}+\frac{1}{10}\left(-\frac{2}{100}\right)$$

$$\frac{du}{108}=\frac{-2}{1000}\Rightarrow du=108\times\frac{-2}{1000}=-0/216$$

بنابراین مقدار تقریبی u برابر است با:

$$u+\Delta u=108-0/216=107/784$$

۲۴ـ گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که $\begin{vmatrix} f_x = ۴x^۳ - ۲xy^۲ \\ f_y = ۴y^۳ - ۲yx^۲ \end{vmatrix}$، در نقطه $(۰,۰)$، مقدار f_x و f_y برابر صفر است، پس این نقطه بحرانی است. از طرفی $\Delta = (۱۲x^۲ - ۲y^۲)(۱۲y^۲ - ۲x^۲) - (-۴xy)^۲$، و در نقطه $(۰,۰)$، مقدار Δ برابر صفر است، پس نمی‌توان نتیجه‌ای در مورد نوع نقطه گرفت. ولی تابع f را می‌توان به‌صورت $f(x,y) = (x^۲ - y^۲)^۲ + x^۲y^۲$ نوشت و بنابراین همواره $f \geq ۰$ است و در نقطه $(۰,۰)$، مقدار f برابر صفر است، پس مبدأ مینیمم f است.

۲۵ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $f = x^۲ - y^۲ - u = ۰$ ، $g = xy - v - ۲ = ۰$، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,y)}{\partial(x,y)}} = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & -۲y \\ -۱ & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲x & -۲y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{۲y}{۲x^۲ + ۲y^۲} = \frac{y}{x^۲ + y^۲}$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: به علت وجود عامل x^2+y^2 متوجه می‌شویم استفاده از مختصات قطبی مناسب است. روی $\mathbb{R}^2$ داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r<\infty$.

$$I=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}(\cos\theta+\sin\theta)drd\theta$$

حدود انتگرال‌ها عدد ثابت هستند و تابع زیر انتگرال قابل تفکیک به دو تابع یک متغیره است پس می‌توانیم انتگرال‌ها را از هم جدا کنیم:

$$I=(\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr)(\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta)$$

محاسبه‌ی انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr$ شاید کمی وقت‌گیر باشد اما انتگرال دوم نسبت به θ خیلی راحت حل می‌شود و جواب آن برابر با صفر است:

$$\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=[\sin\theta-\cos\theta]_0^{2\pi}=0\ \Rightarrow I=0$$

توجه: اگر بخواهیم مقدار $\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr$ را نیز به‌دست آوریم، با استفاده از تغییر متغیر $t=r^2$ تابع گاما را به وجود می‌آوریم: $\sqrt{t}=r$ پس $dr=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

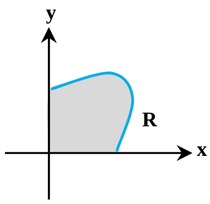
$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr=\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

روش دوم: توابع $f(x,y)=\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}x$ و $g(x,y)=\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}y$ را در نظر بگیرید، تابع f نسبت به متغیر x فرد است، پس در هر ناحیه‌ای که نسبت به محور y متقارن باشد، انتگرال f برابر صفر است و لذا $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dydx=0$.

تابع g هم نسبت به متغیر y فرد است. پس در هر ناحیه‌ای که نسبت به محور x متقارن باشد انتگرال g صفر است. پس $\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy=0$.

به همین دلیل جواب انتگرال که مجموعی از انتگرال‌های f و g روی $\mathbb{R}^2$ است برابر صفر است.

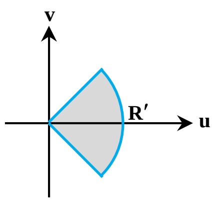
۲ـ گزینه «۱» برای راحتی بیشتر در نوشتن محاسبات، فرض می‌کنیم $a=\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$ باشد. داریم $x=au-bv$ و $y=au+bv$ پس:



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} a & -b \\ a & b\end{vmatrix}=2ab=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

ناحیه R دارای ۳ مرز است. معادله این مرزها را در دستگاه (u,v) بازنویسی کنیم.

$$x=0\Rightarrow au=bv\Rightarrow v=\frac{a}{b}u=\sqrt{3}u$$



$$y=0\Rightarrow au=-bv\Rightarrow v=-\frac{a}{b}u=-\sqrt{3}u$$

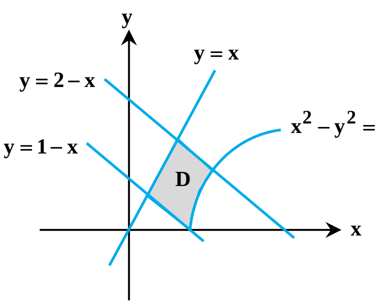
$$x^2-xy+y^2=2\Rightarrow 3b^2v^2+a^2u^2=2\Rightarrow 2v^2+2u^2=2\Rightarrow u^2+v^2=1$$

خطوط $v=\pm\sqrt{3}\,u$ در دستگاه uv که V محور قائم آن باشد زوایای $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$ را می‌دهند.

$$I=\iint_R(x^2-xy+y^2)\,dA=\iint_{R'}(2v^2+2u^2)(\frac{4}{3}\sqrt{3})\,dvdu=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1(2r^2)(r)(\frac{4}{3}\sqrt{3})\,dr\,d\theta=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 r^3drd\theta=\frac{8}{\sqrt{3}}(\frac{1}{4})\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=\frac{8}{\sqrt{3}}(\frac{1}{4})(\frac{2\pi}{3})=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

۳ـ گزینه «۴» ناحیه‌ی D دارای ۴ مرز مختلف است. معمولاً این نواحی لوزی‌گون هستند و برای حل انتگرال روی آن‌ها باید از تغییر متغیر u و v استفاده کنیم. معادله‌ی مرزهای D را طوری می‌نویسیم که سمت راست، عدد ثابت باشد:



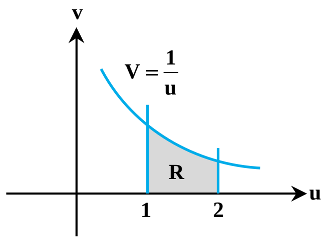
$$(x-y)(y+x)=1\ ,\ x-y=0\ ,\ y+x=2\ ,\ y+x=1$$

پس با تغییر متغیر $u=y+x$ و $v=x-y$ این معادله‌ها را به شکل ساده‌تری خواهیم داشت.

اکنون معادله مرزها در صفحه‌ی uov به این صورت است:

$u=1$ و $u=2$ و $v=0$ و $uv=1$.

ناحیه جدید را R می‌نامیم. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.



$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{J_{xy}} = -\frac{1}{2}$$

که قدرمطلق آن در انتگرالده ضرب خواهد شد.

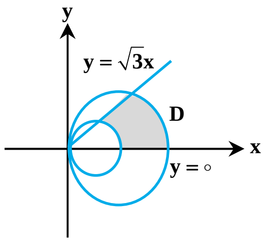
همچنین از روابط بین u و v با x و y معلوم است که $\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} = e^{x^2-y^2} = e^{uv}$

به این ترتیب:

$$I = \iint_D \frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} dydx = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{u}} e^{uv} \frac{1}{2} dvdu = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[\left(\frac{1}{u}e^{uv}\right)\right]_0^{\frac{1}{u}} du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}(e-1)du = \left(\frac{1}{2}\right)(e-1)\mathrm{Ln}(u)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e-1)\mathrm{Ln}2$$

پس جواب برابر است با $\frac{1}{2}(e-1)$.

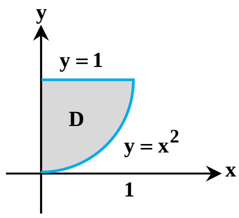
۴ـ گزینه «۴» این‌که $y = 0$ و $y = \sqrt{3}x$ مرزهای این ناحیه هستند، معلوم می‌کند $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. از معادله دوایر $x^2 + y^2 = x$ و $x^2 + y^2 = 2x$ داریم $r = \cos\theta$ و $r = 2\cos\theta$. پس خواهیم داشت:



$$D \text{ مساحت ناحیه } = \iint_D dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{4\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{3}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

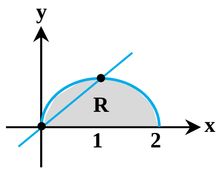
۵ـ گزینه «۳» انتگرال $\int x^3 \sin y^3 dy$ لاینحل یا حداقل حل آن مشکل است. اما $\int x^3 \sin y^3 dx$ به سادگی حل می‌شود چون $\sin y^3$ به عدد ثابت تبدیل شده است. پس ترتیب مناسب برای این انتگرال به صورت $I = \iint_D x^3 \sin y^3 dxdy$ است. مطابق اطلاعات داده شده $x^2 \le y \le 1$ و $0 \le x \le 1$. اما این کران‌ها برای ترتیبی که موردنظر ما است مناسب نیستند. در ترتیب $I = \iint_D x^3 \sin y^3 dxdy$ حدود y که در انتگرال بیرونی نوشته می‌شوند باید دو عدد ثابت باشند و حدود x که در انتگرال وسطی نوشته می‌شوند باید برحسب y باشند. بنابراین ابتدا ناحیه‌ی D را رسم می‌کنیم و با توجه به آن حدود x و y را طبق ترتیب انتخاب شده می‌نویسیم. کمترین و بیشترین مقدار y در این ناحیه $0 \le y \le 1$ هستند و اگر در جهت محور xها حرکت کنیم از $x = 0$ وارد شده و از $x = \sqrt{y}$ (یعنی همان $y = x^2$) خارج می‌شویم یعنی $0 \le x \le \sqrt{y}$ است.



$$I = \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3)dxdy = \int_0^1 \sin(y^3)\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4}y^2\sin(y^3)dy = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\int_0^1 3y^2\sin(y^3)dy = -\frac{1}{12}\cos(y^3)\Big|_0^1 = -\frac{1}{12}[\cos(1)-1] = \frac{1}{12}[1-\cos(1)]$$

۶ـ گزینه «۱» حضور عامل $x^2 + y^2$ نشان می‌دهد که بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم. ناحیه انتگرال‌گیری را با توجه به حدود داده شده مشخص می‌کنیم.



$$0 \le x \le 2 \;,\; 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}$$

منحنی $y = \sqrt{2x - x^2}$ بخشی از دایره $x^2 + y^2 = 2x$ است که در ناحیه $y \ge 0$ قرار دارد.

این ناحیه در ربع اول قرار دارد و داریم $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، برای تعیین حدود r اگر پرتوی از مبدأ رسم کنید که از این ناحیه عبور کند، از $r = 0$ یعنی از همان مبدأ مختصات وارد ناحیه می‌شویم و از منحنی $x^2 + y^2 = 2x$ خارج می‌شویم. روی این منحنی داریم:

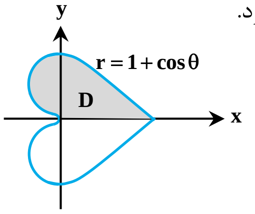
$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$$

پس $0 \le r \le 2\cos\theta$ است. در نتیجه داریم:

$$I = \iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta + \sin\theta)drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)d\theta =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) + \cos\theta\sin\theta\right]d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + 1$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به آن‌که معادله مرز D را در دستگاه قطبی به ما داده‌اند بهتر است انتگرال را در این دستگاه حل کنیم. کران‌های r در این ناحیه واضح هستند زیرا درون قرص $r \le ۱+\cos\theta$ قرار داریم بنابراین، حدود r به صورت $۰ \le r \le ۱+\cos\theta$ هستند. برای تعیین حدود θ توجه کنید که در منحنی $r = ۱+\cos\theta$ با توجه به آن‌که $r \ge ۰$ است باید $۱+\cos\theta \ge ۰$ باشد یعنی $\cos\theta \ge -۱$، اما این نامساوی برای همه‌ی زاویه‌ها برقرار است به عبارتی، در منحنی $r = ۱+\cos\theta$ حدود θ به صورت $۰ \le \theta \le ۲\pi$ هستند. البته طبق صورت سؤال ما نیمه‌ی بالایی این شکل را می‌خواهیم که در آن $۰ \le \theta \le \pi$ است. البته اگر نمودار $r = ۱+\cos\theta$ را که یک دلوار افقی است رسم کرده باشیم تشخیص حدود r و θ بسیار ساده‌تر می‌شود.



$$\iint ydA = \int_۰^{\pi}\int_۰^{۱+\cos\theta} r\sin\theta . rdrd\theta = \frac{۱}{۳}\int_۰^{\pi}\sin\theta(۱+\cos\theta)^۳ d\theta = \frac{-۱}{۱۲}(۱+\cos\theta)^۴\Big|_۰^{\pi} = \frac{۴}{۳}$$

۸ـ گزینه «۳» صفحه $x-y$ یعنی صفحه‌ی $z=۰$ بنابراین کران‌های z در این ناحیه عبارتند از $z=۰$ و $z = x+y+۴$. از معادله‌ی استوانه‌ای $x^۲+y^۲=۴$ متوجه می‌شویم که تصویر این ناحیه روی صفحه‌ی xoy درون دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ قرار دارد. پس بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. $۰ \le \theta \le ۲\pi$ و $۰ \le r \le ۲$ است. حدود z نیز در این دستگاه عبارتند از $z=۰$ و $z = r\cos\theta + r\sin\theta + ۴$.

$$\text{حجم} = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}\int_۰^{r\cos\theta+r\sin\theta+۴} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}(r^۲\cos\theta + r^۲\sin\theta + ۴r)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}(\frac{r^۳}{۳}\cos\theta + \frac{r^۳}{۳}\sin\theta + ۲r^۲)\Big|_۰^۲ d\theta = \int_۰^{۲\pi}(\frac{۸}{۳}\cos\theta + \frac{۸}{۳}\sin\theta + ۸)d\theta = ۱۶\pi$$

۹ـ گزینه «۴»

روش اول: صفحه xoy یعنی صفحه $z=۰$ بنابراین، این ناحیه بین دو صفحه‌ی $z=۰$ و $z=۲+x$ قرار گرفته است. استوانه‌ی $x^۲+۴y^۲=۴$ نشان می‌دهد که تصویر این شکل در صفحه xoy یک بیضی خواهد بود. اگر به نقاط برخورد این بیضی با محورها توجه کنیم متوجه می‌شویم که شعاع افقی آن ۲ و شعاع عمودی آن ۱ است. در این بیضی $-۲ \le x \le ۲$ است و حدود y عبارتند از $y = \pm\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}$. بنابراین داریم:

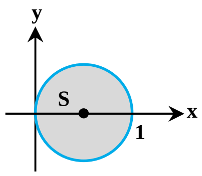
$$V = \iiint_D dzdydx = \int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}}^{\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}}\int_۰^{۲+x} dzdydx = \int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}}^{\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}}(۲+x)dydx$$

در این مرحله می‌خواهیم از فرد بودن تابع x و متقارن بودن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری استفاده کنیم. در معادله‌ی $x^۲+۴y^۲=۴$ تبدیل x به $-x$ تغییری ایجاد نمی‌کند. پس انتگرالِ تابع x برابر با صفر می‌شود و خواهیم داشت:

$$V = \int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}}^{\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۴}}} ۲dydx = ۲\times(\text{مساحت بیضی}) = ۲\times ۲\pi = ۴\pi$$

روش دوم: اگر از انتگرال دوگانه برای محاسبه‌ی حجم استفاده کنیم حجم مورد نظر برابر است با: $\iint_D (۲+x)dA$ معادله‌ی بیضی $\frac{x^۲}{۴}+y^۲=۱$. با تبدیل x به $-x$ عوض نمی‌شود اما تابع x فرد است بنابراین، حاصل انتگرال x روی ناحیه برابر صفر است، بنابراین حجم برابر $۲\iint_D dA$ یا دو برابر مساحت درون بیضی یعنی برابر $۲(۲\pi) = ۴\pi$ است.

۱۰ـ گزینه «۲» حضور $x^۲+y^۲$ و دایره بودنِ ناحیه‌ی S نشانه‌های استفاده از دستگاه قطبی هستند. دایره $x^۲+y^۲=x$ در دستگاه قطبی به صورت $r^۲ = r\cos\theta$ نوشته می‌شود یعنی روی آن $r=\cos\theta$ است، در ناحیه موردنظر داریم $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ و $۰ \le r \le \cos\theta$. پس داریم:



$$I = \iint_S \frac{dydx}{\sqrt{x^۲+y^۲}} = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\cos\theta}(\frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^۲}}) = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\cos\theta} drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta d\theta = \sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = ۲$$

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به دایره بودن ناحیه انتگرال‌گیری انتگرال را در مختصات قطبی می‌نویسیم، درون دایره‌ی واحد داریم $۰ \le \theta \le ۲\pi$ و $۰ \le r \le ۱$ در نتیجه داریم:

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{[-Ln(x^۲+y^۲)]^p} = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ \frac{rdrd\theta}{[-Ln(r^۲)]^p} = (\int_۰^{۲\pi} d\theta)(\int_۰^۱ \frac{rdr}{(-۲Lnr)^p}) = \frac{۲\pi}{(۲)^p}\int_۰^۱ \frac{rdr}{(-Lnr)^p}$$

این انتگرال ناسره است برای بررسی همگرایی آن از تغییر متغیر $t = -Lnr$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $r = e^{-t}$ و $dr = -e^{-t}dt$ است. به ازای $r = ۰$ داریم $t = \infty$ و به ازای $r = ۱$ داریم $t = ۰$.

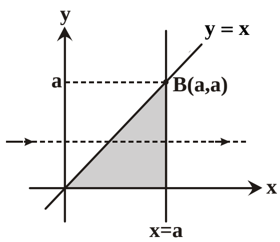
با جابجا کردن کران‌ها، انتگرال قرینه می‌شود. پس داریم:

$$I = \frac{۲\pi}{۲^p}\int_\infty^۰ \frac{e^{-t}(-e^{-t})dt}{t^p} = \frac{۲\pi}{۲^p}\int_\infty^۰ \frac{-e^{-۲t}}{t^p}dt = \frac{۲\pi}{۲^p}\int_۰^\infty \frac{e^{-۲t}}{t^p}dt = \frac{۲\pi}{۲^p}\int_۰^\infty t^{-p}e^{-۲t}dt$$

حالا با تغییر متغیر $x = ۲t$ داریم $dx = ۲dt$ و در نتیجه:

$$I = \frac{۲\pi}{۲^p}\int_۰^\infty \frac{x^{-p}}{۲^{-p}}e^{-x}\frac{dx}{۲} = \pi\int_۰^\infty x^{-p}e^{-x}dx = \pi\Gamma(-p+۱)$$

بنابراین به ازای $p < ۱$ انتگرال همگراست.



۱۲ـ گزینه «۱» با توجه به حدود داده شده برای x و y ابتدا جای dx و dy را عوض می‌کنیم تا $f'(y)$ را بتوانیم از انتگرال dx بیرون بیاوریم، پس داریم:

$$I = \int_۰^a\int_۰^x \frac{f'(y)dxdy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_۰^a\int_{x=y}^{x=a} \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx\,dy = \int_۰^a f'(y)(\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}})dy$$

اکنون برای محاسبه انتگرال داخل از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم و داریم:

$$x = a\cos^۲\theta + y\sin^۲\theta \Rightarrow \begin{cases} x = a(۱-\sin^۲\theta) + y\sin^۲\theta \\ x = a\cos^۲\theta + y(۱-\cos^۲\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a - a\sin^۲\theta + y\sin^۲\theta \\ x = a\cos^۲\theta + y - y\cos^۲\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - x = (a-y)\sin^۲\theta \\ x - y = (a-y)\cos^۲\theta \end{cases}$$

اگر y ثابت باشد dx به صورت زیر محاسبه می‌شود و داریم:

$$-dx = ۲(a-y)\sin\theta\cos\theta \Rightarrow dx = ۲(y-a)\sin\theta\cos\theta$$

اگر $y = x$ باشد، داریم:

$$y = a\cos^۲\theta + y\sin^۲\theta$$

$$y = a\cos^۲\theta + y(۱-\cos^۲\theta) \Rightarrow \cancel{y} = a\cos^۲\theta + \cancel{y} - y\cos^۲\theta \Rightarrow (y-a)\cos^۲\theta = ۰ \overset{y\ne a}{\Rightarrow} \cos^۲\theta = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

در جایی‌که $x = a$ باشد، داریم:

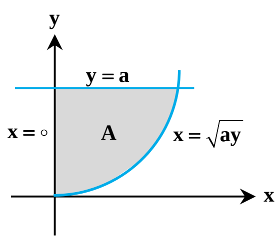
$$a - y = (a-y)\cos^۲\theta \Rightarrow a - y = (a-y)(۱-\sin^۲\theta) \Rightarrow a - y = (a-y) - (a-y)\sin^۲\theta = ۰ \Rightarrow (a-y)\sin^۲\theta = ۰ \overset{a\ne y}{\Rightarrow} \sin^۲\theta = ۰$$
$$\Rightarrow \theta = ۰$$

اکنون با جایگذاری $(a-x)$ و $(x-y)$ و dx داریم:

$$\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_{\frac{\pi}{۲}}^۰ -\frac{۲(\cancel{a-y})\cancel{\sin\theta\cos\theta}d\theta}{(\cancel{a-y})\cancel{\sin\theta\cos\theta}} = -۲\int_{\frac{\pi}{۲}}^۰ d\theta = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta = ۲(\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \pi$$

پس در انتها داریم:

$$I = \pi\int_۰^a f'(y)dy = \pi(f(y))\Big|_۰^a = \pi(f(a) - f(۰))$$



۱۳ـ گزینه «۴» معادله‌ی $x = \sqrt{ay}$ همان سهمی $y = \frac{x^۲}{a}$ است اما تساوی $x = \sqrt{ay}$ این شرط را ایجاب می‌کند که $x \ge ۰$ باشد پس نیمه‌ی راست سهمی $y = \frac{x^۲}{a}$ به‌دست می‌آید. با این توضیحات و با رسم این نیمه سهمی و خط $y = a$ و محور y ها (یعنی خط $x = ۰$) ناحیه A را نشان می‌دهیم.

می‌توانیم انتگرال دوگانه را با هر دو ترتیب dxdy و dydx به‌راحتی حل کنیم. فرض کنید همان ترتیب نوشته شده در صورت سؤال را انتخاب کرده باشیم. حدود y عبارتند از $۰ \le y \le a$ و اگر در جهت محور x ها از چپ به راست از این ناحیه عبور کنید مرز ورودی $x = ۰$ و مرز خروجی $x = \sqrt{ay}$ است پس $۰ \le x \le \sqrt{ay}$.

$$I = \iint_A xydxdy = \int_۰^a\int_۰^{\sqrt{ay}} xydxdy = \int_۰^a y[\frac{x^۲}{۲}]_۰^{\sqrt{ay}}dy = \int_۰^a \frac{a}{۲}y^۲dy = [\frac{a}{۶}y^۳]_۰^a = \frac{a^۴}{۶}$$

۱۴ـ گزینه «۲» حدود z از معادله‌ی کره به‌دست می‌آیند $z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}$ و معادله‌ی استوانه به ما نشان می‌دهد که تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy دایره $x^2+y^2=3x$ است. چون تصویر شکل بر صفحه xoy یک دایره است، بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. معادله‌ی این دایره برحسب r و θ به این صورت نوشته می‌شود:

$$x^2+y^2=3x \Rightarrow r^2=3r\cos\theta \Rightarrow r=3\cos\theta$$

اگر نتوانیم این دایره را رسم کنیم با کمک معادله‌ی $r=3\cos\theta$ حدود θ را مشخص می‌کنیم. از این‌که r هیچ‌گاه منفی نمی‌شود استفاده می‌کنیم.

$$r\ge 0 \Rightarrow \cos\theta \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

(البته دایره‌ی $x^2+y^2=ax$ جزء دایره‌های مهم است که باید نحوه‌ی رسم آن را به خاطر داشته باشید) حدود z نیز در دستگاه استوانه‌ای نوشته می‌شوند:

$$z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}=\pm\sqrt{9-r^2}$$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\theta}\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\theta}2r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta$$

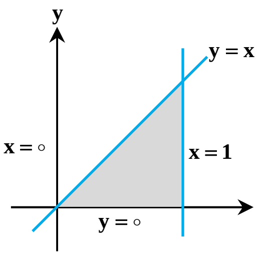
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{3\cos\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-18\sin^3\theta+18)d\theta=-36(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=18\pi-24$$

۱۵ـ گزینه «۴» برای ناحیه‌ی درون کره از دستگاه وقتی ناحیه‌ی انتگرال‌گیری درون یک کره است، از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. درون کره‌ای به شعاع یک داریم $0\le\theta\le 2\pi$ ، $0\le\varphi\le\pi$ و $0\le\rho\le 1$. در تابع زیر انتگرال هم جایگزینی $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ را انجام می‌دهیم. ژاکوبین دستگاه کروی $\rho^2\sin\varphi$ است.

$$I=\iiint_R(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint_R(x^2+y^2+z^2)dxdydz\xrightarrow{\text{مختصات کروی}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\rho^2.\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\theta$$

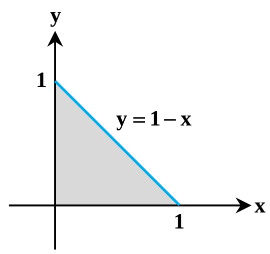
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\rho^5}{5})\Big|_0^1\sin\varphi\,d\varphi d\theta\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{5}\sin\varphi\,d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{5}d\theta=\frac{2}{5}(2\pi-0)=\frac{4\pi}{5}$$

۱۶ـ گزینه «۴» حدود z به وضوح $z=0$ و $z=xy$ هستند. برای تعیین حدود x و y ابتدا معادلاتی را که فقط برحسب x و y هستند در نظر می‌گیریم: $y=x$ ، $x=1$ و $x=0$ هر کدام یک خط در صفحه xoy هستند (در واقع هر کدام از این‌ها صفحاتی در فضای سه بعدی هستند که تصویر آن‌ها بر صفحه‌ی xoy به صورت خط است.)
با رسم این سه خط ناحیه محدودی به‌دست نمی‌آید. پس رویه‌های $z=0$ و $z=xy$ را نیز برخورد می‌دهیم. از برخورد آن‌ها به معادله‌ی $xy=0$ می‌رسیم یعنی خطوط $x=0$ و $y=0$ به‌دست می‌آیند. ناحیه‌ی موردنظر بین سه خط $y=x$ ، $x=1$ و $y=0$ قرار دارد. بنابراین $0\le x\le 1$ است و از پایین به بالا خط $y=0$ مرز ورودی و خط $y=x$ مرز خروجی است.



$$I=\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}xy^2z^3dzdydx=\int_0^1\int_0^x xy^2(\frac{z^4}{4})\Big|_0^{xy}dydx=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{4}x^5y^6dydx=\int_0^1\frac{1}{4}x^5(\frac{y^7}{7})\Big|_0^x dx=\int_0^1\frac{1}{28}x^{12}=\frac{1}{28}(\frac{x^{13}}{13})\Big|_0^1=\frac{1}{364}$$

۱۷ـ گزینه «۱» صفحات مختصات یعنی صفحات $x=0$ ، $y=0$ و $z=0$ بنابراین حدود z در این ناحیه عبارتند از $z=0$ و $z=x^2+y^2$. برای تعیین حدود x و y از معادله‌ی $x+y=1$ استفاده می‌کنیم تصویر این ناحیه در صفحه‌ی xoy یک مثلث است که در آن $0\le x\le 1$ است و بین خطوط $y=0$ تا $y=1-x$ قرار دارد. بنابراین داریم:

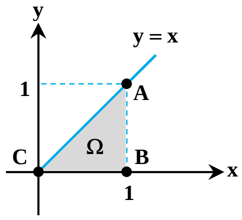


$$I=\iiint_R dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+y^2}dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dydx=\int_0^1(x^2y+\frac{y^3}{3})\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3})dx=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{(1-x)^4}{-12})\Big|_0^1=((\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-\frac{1}{-12})=\frac{1}{6}$$

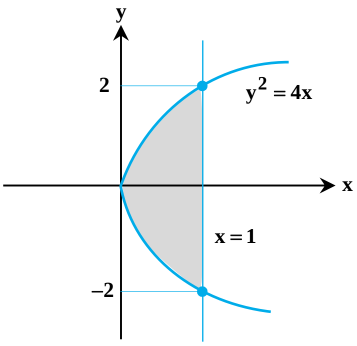
تذکر: در این مثال عامل x^2+y^2 در معادله‌ی رویه‌ها حضور داشت اما از مختصات استوانه‌ای استفاده نکردیم. چرا؟ چون تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy یک مثلث است، نه یک دایره، پس استفاده از مختصات استوانه‌ای نوشتن حدود انتگرال را سخت‌تر می‌کند.

۱۸ــ گزینه «۲» ناحیه Ω به صورت مقابل است. معادله‌ی خطی که از نقاط $A(1,1)$ و $C(0,0)$ می‌گذرد، به صورت $y=x$ است. اگر بخواهیم ابتدا حدود x و سپس حدود y را بنویسیم خواهیم داشت $0\le x\le 1$ و از پایین به بالا که حرکت کنیم $y=0$ مرز ورودی و $y=x$ مرز خروجی است. اما اگر بخواهیم ابتدا حدود y و سپس حدود x را بنویسیم داریم $0\le y\le 1$ و با حرکت از چپ به راست، خط $x=y$ مرز ورودی و خط $x=1$ مرز خروجی است. پس این ناحیه را به دو صورت می‌توان توصیف کرد:



الف) $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$ ب) $\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 1\end{cases}$

۱۹ــ گزینه «۲» این انتگرال را می‌توانیم با ترتیب dxdy یا dydx حل کنیم. فرض کنید بخواهیم با ترتیب dydx آن را حل کنیم. پس از رسم منحنی‌های $y^2=4x$ و $x=1$ ناحیه انتگرال‌گیری به صورت مقابل است:



بنابراین حدود انتگرال به این صورت است:

$$0\le x\le 1\quad,\quad -2\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}$$

از معادله‌ی $y^2=4x$ به کران‌های $y=\pm 2\sqrt{x}$ رسیده‌ایم. حالا انتگرال را حل می‌کنیم:

$$\iint_D xy^2\,dydx=\int_0^1\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}xy^2\,dydx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}xy^3\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 16x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{16}{3}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{32}{21}$$

۲۰ــ گزینه «۱» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری دایره‌ی واحد است. پس بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم. در این ناحیه $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ است. از این رو داریم:

$$\iint_{x^2+y^2=1}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,f(r)\,drd\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 rf(r)dr\right)=2\pi\int_0^1 r\,f(r)dr$$

۲۱ــ گزینه «۳» جرم این جسم توسط فرمول $M=\iiint_D\rho(x,y,z)\,dv$ به دست می‌آید. در این سؤال تابع چگالی؛ $\rho(x,y,z)=|z|$ است. معادله‌ی $|x|+|y|+|z|=1$ که مرز D را نشان می‌دهد؛ با تبدیل x به $-x$ یا y به $-y$ یا z به $-z$ تغییری نمی‌کند پس می‌توانیم جرم $\frac{1}{8}$ اول را حساب کرده و جواب را ۸ برابر کنیم. در $\frac{1}{8}$ اول داریم $x\ge 0$، $y\ge 0$ و $z\ge 0$. کران بالای z از معادله‌ی $x+y+z=1$ به صورت $z=1-x-y$ به دست می‌آید. برخورد این صفحه با صفحه xoy خط $x+y=1$ است. پس در صفحه‌ی xoy داریم $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1-x$.

$$M=8\times\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}z\,dzdydx\Rightarrow M=8\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}dydx=\frac{8}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dydx=\frac{8}{2}\int_0^1-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_0^{1-x}dx$$

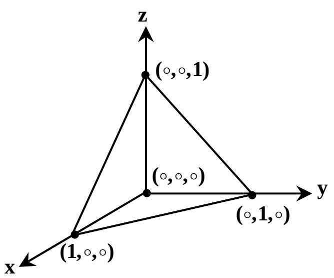
$$=-\frac{8}{2\times 3}\int_0^1[0-(1-x)^3]dx=-\frac{8}{2\times 3}\int_0^1-(1-x)^3dx=-\frac{8}{2\times 3}\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1=-\frac{8}{6}\left(0-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{4\times 6}=\frac{1}{3}$$

نکته: برای محاسبه‌ی انتگرالِ z^1 یک روش سریع‌تر هم وجود دارد. به شرط ان که بتوانید در آن ناحیه مرکز شکل را به سرعت پیدا کنید.

$$M=8\iiint z\,dzdydx=8\times\bar{z}\times(\text{حجم } D)$$

حجم ۴ وجهی برابر است با:

$$V=\frac{1}{6}\times a\times b\times c=\frac{1}{6}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{6}$$



$\bar{z}$ از میانگین z ها در ۴ رأس شکل به دست می‌آید:

$$\bar{z}=\frac{0+0+0+1}{4}=\frac{1}{4}$$

پس:

$$\text{جواب}=8\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

۲۲ـ گزینه «۴» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری $\frac{1}{8}$ اول از کره‌ی واحد است، بنابراین انتگرال را در مختصات کروی می‌نویسیم. درون کره‌ی واحد داریم $0\le\rho\le1$ و چون $\frac{1}{8}$ اول از کره را می‌خواهیم، پس $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ است.

$$I=\iiint_V(xyz)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho\sin\varphi\cos\theta.\rho\sin\varphi\sin\theta.\rho\cos\varphi.\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^5\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\rho d\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^1\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\varphi d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\,d\theta=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{48}\times1\times\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{48}\times\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)=\frac{1}{48}$$

۲۳ـ گزینه «۱» با توجه به صفحات $x=\pm1$، $y=\pm1$ و $z=\pm1$، حدود x، y و z به صورت $-1\le x\le1$، $-1\le y\le1$ و $-1\le z\le1$ است. بنابراین:

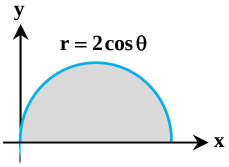
$$M=\iiint_R\delta dv=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)dxdydz=\int_{-1}^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\cdot\int_{-1}^1\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)dy\cdot\int_{-1}^1\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)dz$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_{-1}^1\right)\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\Big|_{-1}^1\right)\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Big|_{-1}^1\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi}=\left(\frac{4}{\pi}\right)^3$$

۲۴ـ گزینه «۴» با توجه به وجود عامل x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، به نظر می‌آید استفاده از دستگاه استوانه‌ای مناسب‌تر باشد. با توجه به کران‌های داده شده در صورت سؤال معلوم می‌شود که $x\ge0$، $y\ge0$ و $z\ge0$. یعنی ناحیه‌ی موردنظر در $\frac{1}{8}$ اول قرار دارد. همچنین $z=3$ و $y=\sqrt{2x-x^2}$ از مرزهای آن هستند. رویه‌ی $y=\sqrt{2x-x^2}$ همان استوانه‌ی $x^2+y^2=2x$ است. (البته $\frac{1}{8}$ اول از آن را داریم.) در دستگاه استوانه‌ای این معادله به شکل $r^2=2r\cos\theta$ نوشته می‌شود که از آن داریم:

$$r^2=2r\cos\theta\Rightarrow r=0\ ,\ r=2\cos\theta$$

در ضمن معادله‌ی $r=2\cos\theta$ نشان می‌دهد که باید $\cos\theta\ge0$ باشد یعنی $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. اما چون فقط $\frac{1}{8}$ اول از استوانه را داریم باید $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیریم.



$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^3\sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^3r^2dzdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}r^2[z]_0^3drd\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\cos^3\theta}{3}d\theta=\int 8\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=\left(8\sin\theta-\frac{8}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

۲۵ـ گزینه «۴» ناحیه $x^2+y^2+z^2\ge1$ خارج از کره به شعاع واحد و به مرکز مبدأ است. در مختصات کروی حدود θ,ϕ,ρ چنین است: $0\le\theta\le2\pi$، $0\le\phi\le\pi$ ، $1\le\rho<\infty$.

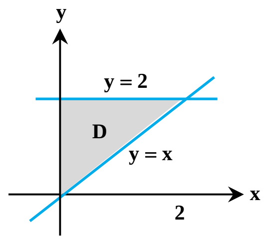
$$I(\alpha)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\rho^2\sin(\phi)}{(\rho^2)^\alpha}d\rho d\phi d\theta$$

از آنجا که حدود انتگرال‌ها ثابت هستند و تابع انتگرالده قابل تفکیک به صورت ضربی است می‌توان نوشت:

$$I(\alpha)=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi\right)\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^{2\alpha-2}}d\rho\right)$$

بدیهی است که انتگرال‌های θ و ϕ کران‌دار هستند و مقادیر حقیقی دارند. برای آن که انتگرال سوم نیز همگرا باشد باید $2\alpha-2>1$ باشد یعنی $\alpha>\frac{3}{2}$.

۲۶ـ گزینه «۲» ایـن انتگـرال بـا ترتیب داده شـده نیـاز بـه اسـتفاده از روش جـزء بـه جـزء دارد امـا اگـر ترتیـب متغیرهـا را عـوض کـنیم محاسـبه‌ی $\iint y^2 \sin(xy)dxdy$ خیلی راحت‌تر است زیرا در انتگرال میانی y^2 و y به عدد ثابت تبدیل می‌شـوند. بنـابراین روش حـل ایـن مسـأله، تعـویض ترتیـب متغیرهاست. ابتدا به حدود انتگرال داده شده دقت می‌کنیم تا ناحیه‌ی D را تشخیص دهیم. به ویژه حدود انتگرال وسطی یعنی خطـوط $y=x$ و $y=2$ را رسم می‌کنیم. با توجه به حدود انتگرال بیرونی داریم $0 \le x \le 2$ به این ترتیب ناحیه‌ی D مشخص مـی‌شـود. حـال مـی‌خـواهیم ابتـدا حـدود y و سـپس حدود x را بنویسیم. به وضوح $0 \le y \le 2$ است و با حرکت در جهت محور xها یعنی از چپ به راست می‌بینیم که خـط $x=0$ مـرز ورودی و خـط $x=y$ مرز خروجی است پس $0 \le x \le y$.



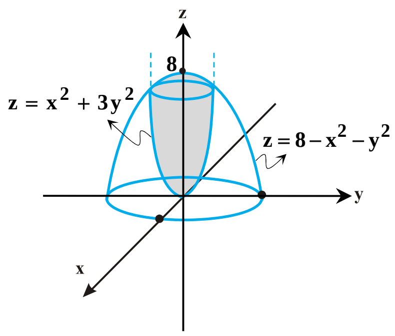
$$I=\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=y} y^2 \sin(yx)\,dx\,dy=\int_{y=0}^{y=2}[-y\cos(xy)]_{x=0}^{x=y}.dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2} -y(\cos y^2-1)\,dy=\int_{y=0}^{y=2}[y-y\cos(y^2)]\,dy$$

$$I=[\frac{y^2}{2}]_0^2-\frac{1}{2}[\sin(y^2)]_0^2=[(\frac{2^2-0^2}{2})-\frac{1}{2}(\sin 4-0)]=2-\frac{1}{2}\sin(4)$$

۲۷ـ گزینه «۳» ناحیه محدود بین دو معادله $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+3y^2$ را ترسیم می‌کنیم.

کران‌های z به وضوح داده شده‌اند و خواهیم داشت:



$$V=\iint_A\int_{z=x^2+3y^2}^{z=8-x^2-y^2} dzdydx=\iint_A(8-2x^2-4y^2)dydx$$

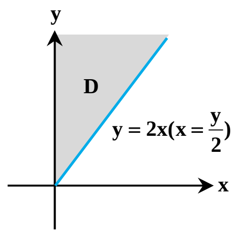
منظور از A، تصویر این جسم بر صفحه‌ی xoy است. برای یافتن آن رویه‌های داده شـده را برخـورد مـی‌دهـیم. برای اینکار باید معادله‌ی $8-x^2-y^2=x^2+3y^2$ را حل کنیم:

$$2x^2+4y^2=8 \to (\frac{x}{2})^2+(\frac{y}{\sqrt{2}})^2=1 \xrightarrow{\text{تغییـر متغـیر بیضـوی}} \begin{cases} x=2r\cos\theta & 0\le r\le 1 \\ y=\sqrt{2}\,r\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ |J|=2\sqrt{2}\,r \end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1(8-8r^2\cos^2\theta-8r^2\sin^2\theta)(2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta)=(8\times 2\sqrt{2})(\int_0^{2\pi}d\theta).(\int_0^1(r-r^3)dr)=(16\sqrt{2})(2\pi)(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4})\Big|_0^1=8\pi\sqrt{2}$$

۲۸ـ گزینه «۲» می‌دانیم که انتگرال دوگانه‌ی نوشته شده در صورت سؤال در واقع همان انتگرال دوگانه‌ی $I=\int_0^\infty\int_{2x}^\infty xe^{-y}(\frac{\sin y}{y^2})dydx$ است.

انتگرال این تابع برحسب متغیر x خیلی راحت‌تر گرفته مـی‌شـود. بنـابراین ایـده‌ی حـل ایـن سـؤال، تعـویض ترتیـب متغیرهاست. ابتدا به کران‌های داده شده توجه می‌کنیم تا ناحیه‌ی D را تشخیص دهـیم. در ایـن ناحیـه $2x \le y < \infty$ است پس بالای خط $y=2x$ قرار دارد و در ضمن $0 \le x \le \infty$ است. حالا ترتیب متغیرها را عـوض مـی‌کـنیم. در ایـن صورت داریم $0 \le y < \infty$ و با حرکت در جهت محور xها متوجه می‌شویم که خط $x=0$ کـران پـایین اسـت و خـط $x=\frac{y}{2}$ کران بالاست.



$$I=\int_0^\infty\int_0^{\frac{y}{2}} xe^{-y}(\frac{\sin y}{y^2})dxdy=\int_0^\infty e^{-y}(\frac{\sin y}{y^2})[\frac{x^2}{2}]_0^{\frac{y}{2}}dy=\frac{1}{8}\int_0^\infty e^{-y}\sin y\,dy$$

برای حل این انتگرال، علاوه بر روش جزء به جزء می‌توانید از فرمول زیر هم استفاده کنید:

$$\begin{cases}\int_0^\infty e^{-sy}\sin(ay)dy=\frac{a}{s^2+a^2}\\ \int_0^\infty e^{-sy}\cos(ay)dy=\frac{s}{s^2+a^2}\end{cases}$$

در این مثال به ازای $s=1$ و $a=1$ داریم:

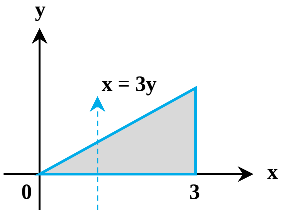
$$I=\frac{1}{8}\times\frac{1}{1^2+1^2}=\frac{1}{16}$$

۲۹ـ گزینه «۳» در صورت سؤال حدود y به صورت دو عدد ثابت $(y=a$ و $y=3a)$ داده شده‌اند و حدود x را می‌توان برحسب y نوشت $(x=y\,,\,x=y-a)$ بنابراین داریم:

$$I=\int_a^{3a}\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dxdy=\int_a^{3a}\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{y-a}^{y}dy=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}+y^3-\frac{(y-a)^3}{3}-y^2(y-a)\right]dy=\int_a^{3a}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{(y-a)^3}{3}+ay^2\right]dy$$

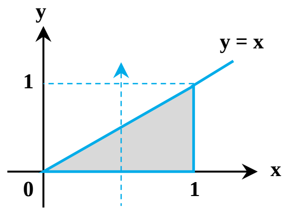
$$=\left[\frac{y^4}{12}-\frac{(y-a)^4}{12}+\frac{ay^3}{3}\right]_a^{3a}=\frac{81a^4}{12}-\frac{16a^4}{12}+\frac{27a^4}{3}-\frac{a^4}{12}+0-\frac{a^4}{3}=\left(\frac{81}{12}-\frac{16}{12}+\frac{108}{12}-\frac{1}{12}-\frac{4}{12}\right)a^4=\frac{168}{12}a^4=14a^4$$

۳۰ـ گزینه «۳» محاسبه انتگرال $\int e^{x^2}dx$ ممکن نیست لذا باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم برای این منظور باید ناحیه $0<y<1\ ,\ 3y\le x<3$ را رسم کنیم ملاحظه می‌شود که پس از رسم این ناحیه خط موازی محور yها مرز منحنی را در $x=0$ و $x=3y$ قطع می‌کند لذا داریم:



$$I=\int_0^3\int_0^{\frac{x}{3}}e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^3[ye^{x^2}]_0^{\frac{x}{3}}\,dx=\int_0^3\frac{1}{3}xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{6}e^{x^2}\right]_0^3=\frac{e^9-1}{6}$$

۳۱ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه محاسبه انتگرال $\int e^{\frac{y}{x}}dx$ ممکن نیست لذا با رسم ناحیه $0<y<1$ و $y<x<1$ داریم:

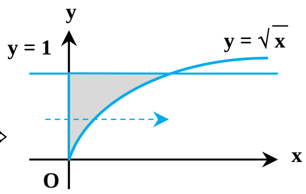


$$I=\int_0^1\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy\,dx=\int_0^1[xe^{\frac{y}{x}}]_0^x\,dx=\int_0^1x(e-1)\,dx=(e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

۳۲ـ گزینه «۴»

محاسبه انتگرال نسبت به y ممکن نیست و باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

$$\left.\begin{matrix}0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\le y\le 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$



ملاحظه می‌گردد هر خط موازی محور xها مرز ناحیه را در خطوط $x=0$ و $x=y^2$ قطع می‌کند، و y بین ۰ تا ۱ تغییرات دارد، پس داریم:

$$I=\int_0^1\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1\left[\ ye^{\frac{x}{y}}\ \right]_0^{y^2}dy=\int_0^1y(e^y-1)\,dy=\int_0^1ye^y-\int_0^1ydy=[ye^y-e^y]_0^1-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۳۳ـ گزینه «۱» از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. ابتدا برخورد کره و مخروط را حساب می‌کنیم تا حدود r و θ مشخص شود.

$$\begin{cases}x^2+y^2=4-4z\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}\Rightarrow 4-4z+z^2=4\Rightarrow z(z-4)=0\Rightarrow z=0\ ,\ z=4$$

$z=4$ قابل قبول نیست چون $x^2+y^2=-12$ به‌دست می‌آید. به ازای $z=0$ داریم $x^2+y^2=4$ پس $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 2$. حدود z را هم مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}r^2=4-4z & \Rightarrow z=\dfrac{4-r^2}{4}\\ r^2+z^2=4 & \Rightarrow z=\sqrt{4-r^2}\end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}}r\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2[rz]_{\frac{4-r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}}drd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[r\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{4}(4r-r^3)\right]drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\right]_0^2d\theta=(2\pi)\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{10\pi}{3}$$

۳۴ـ گزینه «۲»

$$V=۲\int_{۰}^{\frac{a}{۲}}\int_{۰}^{\sqrt{a^{۲}-۴x^{۲}}} my\,dy\,dx=m\int_{۰}^{\frac{a}{۲}}[y^{۲}]_{۰}^{\sqrt{a^{۲}-۴x^{۲}}}dx=\frac{ma^{۳}}{۳}$$

۳۵ـ گزینه «۲»

$$y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta\ ,\ \theta=\pi\Rightarrow y=\sqrt{۴-x^{۲}}\ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۴\ \Rightarrow r=۲$$

$$\Rightarrow I=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۲}(r\sin\theta)r\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}[\int_{۰}^{۲}r^{۲}\sin\theta\,dr]d\theta=\int_{۰}^{\pi}[\frac{r^{۳}}{۳}\sin\theta]_{۰}^{۲}d\theta=\frac{۸}{۳}\int_{۰}^{\pi}\sin\theta\,d\theta=[-\frac{۸}{۳}\cos\theta]_{۰}^{\pi}=\frac{۱۶}{۳}$$

۳۶ـ گزینه «۳» چون ناحیه انتگرال‌گیری محدود به استوانه می‌باشد، با استفاده از مختصات استوانه‌ای حاصل انتگرال را به‌دست می‌آوریم و داریم: (ناحیه تصویر روی صفحه xoy یک دایره به شعاع $\sqrt{۵}$ می‌باشد)

$$x^{۲}+y^{۲}=۵\ \Rightarrow\ r^{۲}=۵\ \Rightarrow\ r=\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ ۰\le r\le\sqrt{۵}\ ,\ z=۱+r^{۲}$$

$$I=\iiint_{E}e^{z}dv=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۵}}\int_{۰}^{۱+r^{۲}}e^{z}r\,dz\,dr\,d\theta$$

اگر $u=۱+r^{۲}$ باشد $du=۲rdr$ می‌باشد و داریم:

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۵}}(e^{z})_{۰}^{۱+r^{۲}}\times r\,dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\sqrt{۵}}(e^{۱+r^{۲}}-۱)\times r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}(\int_{۰}^{\sqrt{۵}}e^{۱+r^{۲}}\times r\,dr-\int r\,dr)d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{۱}{۲}(e^{u})du-\frac{r^{۲}}{۲})d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{۱}{۲}(e^{۱+r^{۲}})-\frac{r^{۲}}{۲})_{۰}^{\sqrt{۵}}\ d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}(e^{۶}-۵-e)\,d\theta=\frac{۱}{۲}(e^{۶}-e-۵)(\theta)_{۰}^{۲\pi}=\frac{۱}{۲}(e^{۶}-e-۵)(۲\pi)=\pi(e^{۶}-e-۵)$$

۳۷ـ گزینه «۳»

$$\begin{cases}x=a\\x=۰\end{cases},\ \begin{cases}y=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\\y=۰\end{cases}\ \Rightarrow y^{۲}+x^{۲}=a^{۲}\ \Rightarrow r^{۲}=a^{۲}\ \Rightarrow r=a$$

ناحیه موردنظر ربع اول دایره‌ای به شعاع a می‌باشد:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{a}r^{۲}\sin^{۲}\theta\times r\times rdrd\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{a}r^{۴}\sin^{۲}\theta drd\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲}\theta[\frac{r^{۵}}{۵}]_{۰}^{a}d\theta=\frac{a^{۵}}{۵}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲}\theta d\theta=\frac{a^{۵}}{۵}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi a^{۵}}{۲۰}$$

۳۸ـ گزینه «۲» نواحی کاملاً نامنظم هستند، لذا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$u=xy\ ,\ v=xy^{۱/۴}$$

$$J=\frac{۱}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}y & x\\ y^{۱/۴} & ۱/۴xy^{۰/۴}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{۱/۴xy^{۱/۴}-xy^{۱/۴}}=\frac{۱}{۰/۴xy^{۱/۴}}=\frac{۱۰}{۴xy^{۱/۴}}=\frac{۲/۵}{xy^{۱/۴}}=\frac{۲/۵}{v}$$

$$S=\iint_{D}dxdy=\int_{۱}^{۳}\int_{۱}^{۲}\frac{۲/۵}{v}dvdu=\int_{۱}^{۳}۲/۵[Lnv]_{۱}^{۲}du=\int_{۱}^{۳}۲/۵Ln۲du=۲/۵Ln۲[u]_{۱}^{۳}\ =۵Ln۲$$

۳۹ـ گزینه «۲»

$$\left.\begin{matrix}x+y=u\\x-y=v\end{matrix}\right\}\Rightarrow J=\frac{۱}{\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}}=-\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow |J|=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}y+x=۲\ \Rightarrow u=۲\ \ ,\ \ y=-x\ \Rightarrow x+y=۰\ \Rightarrow u=۰\\x-y=۲\ \Rightarrow v=۲\ \ ,\ \ y=x\ \Rightarrow x-y=۰\ \Rightarrow\ v=۰\end{cases}$$

$$\iint_{D}(x^{۲}+y^{۲})\ dxdy=\iint_{D}\frac{۱}{۲}[(x-y)^{۲}+(x+y)^{۲}]dxdy=\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{۲}(u^{۲}+v^{۲})\frac{۱}{۲}dudv=\frac{۸}{۳}$$

۴۰ـ گزینه «۱»

$$I=۲۰\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}(\int_{۰}^{xy}dz)x^{۳}y\,dy\,dx=۲۰\int_{۰}^{۱}[\int_{۰}^{x}x^{۴}y^{۲}dy]dx=۲۰\int_{۰}^{۱}[x^{۴}(\frac{y^{۳}}{۳})]_{۰}^{x}dx=۲۰\int_{۰}^{۱}(\frac{x^{۷}}{۳})dx=۲۰[\frac{x^{۸}}{۲۴}]_{۰}^{۱}=\frac{۲۰}{۲۴}=\frac{۵}{۶}$$

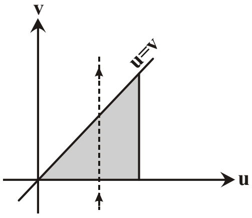
پاسخنامه آزمون (۲)

۱ـ گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر ژاکوبین و سپس انتگرال ژاکوبین حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم.

با توجه به این‌که در فاصله صفر تا $+\infty$ هم x و هم y هر دو مثبت هستند، ناحیه انتگرال‌گیری به‌طور کامل مثبت است.

حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow x = u - y \Rightarrow x = u - v$$



$$y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$dxdy = |j|dudv \Rightarrow dxdy = dudv$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = v \\ y = 0 \Rightarrow v = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases} \Rightarrow u, v \to +\infty$$

پس حاصل انتگرال برابر است با:

$$I = \iint f(x,y)dxdy = \iint |J| f(u,v)dudv$$

$$I = \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=v}^{\infty} e^{-u}\sin(\frac{\pi v}{u})dudv \Rightarrow$$

حال جای du و dv را عوض می‌کنیم و داریم:

$$\int_{u=0}^{\infty}\int_{v=0}^{v=u} e^{-u}\sin(\frac{\pi v}{u})dvdu = \int_0^{+\infty} e^{-u}(-\frac{u}{\pi}\cos(\frac{\pi v}{u}))\Big|_0^u du = \int_0^{\infty} e^{-u}(\frac{-u}{\pi}\underbrace{(\cos\pi - \cos 0)}_{-2})du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}(u)du$$

⊗	u	e^{-u}
⊙	1	$-e^{-u}$
	0	e^{-u}

$$\Rightarrow I = \frac{2}{\pi}(-ue^{-u} - e^{-u})\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}(0 - (0 - e^0)) = \frac{2}{\pi}$$

۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم که حجم از فرمول $V = \iiint_D dzdydx$ به‌دست می‌آید. کران‌های z از معادله‌ی دو سهمی‌گون مشخص هستند اما برای تعیین حدود x و y، فصل مشترک این سهمی‌گون‌ها را به‌دست می‌آوریم: $8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$ پس $x^2 + 2y^2 = 4$. چون این ناحیه یک بیضی است و کار کردن با آن ممکن است مشکل باشد، تغییر متغیر $Y = \sqrt{2}y$ را در مسأله ایجاد می‌کنیم. در واقع از دستگاه جدید $X = x$ و $Z = z$ و $Y = \sqrt{2}y$ استفاده می‌کنیم. ژاکوبین دستگاه جدید $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. به بیان ساده‌تر $dx = dX$ و $dz = dZ$ و $dy = \frac{1}{\sqrt{2}}dY$، به این ترتیب $V = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{2}}dZdYdX$ است که D به سهمی‌گون‌های $Z = X^2 + \frac{3}{2}Y^2$ و $Z = 8 - X^2 - \frac{1}{2}Y^2$ محدود شده است. برخورد این دو رویه دایره $X^2 + Y^2 = 4$ است. پس در مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le 2$ و کران‌های Z نیز همان معادلات سهمی‌گون‌ها هستند. ابتدا باید آن‌ها را در دستگاه استوانه‌ای بنویسیم. پس کران‌های Z عبارتند از:

$$(I) \qquad Z = 8 - X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 8 - r^2(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$$

$$(II) \qquad Z = X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = r^2(\cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta)$$

اگر تردید داریم که کدام‌یک از آن‌ها کران بالا است باید به محدوده‌ی r و θ توجه کنیم و یک مقدار از آن‌ها را در کران‌های Z قرار دهیم. برای مثال اگر $r = 0$ و $\theta = 0$ را قرار دهیم متوجه می‌شویم که اولی $Z = 8$ و دومی $Z = 0$ می‌شود پس $Z = r^2(\cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta)$ کران پایین است.

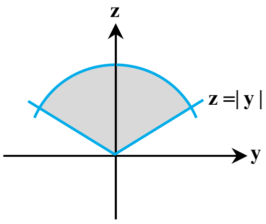
$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2(\cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta)}^{8 - r^2(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta)} rdzdrd\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (8 - r^2(2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta))rdrd\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r - 2r^3)drd\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(4r^2 - \frac{1}{2}r^4)\Big|_0^2 d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} 8d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8 \times 2\pi = 8\sqrt{2}\pi$$

توضیح: با توجه به اینکه ناحیه انتگرال‌گیری درون بیضی $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1$ است، بنابراین می‌توانیم از تغییر متغیر $X = 2r\cos\theta$، $Y = \sqrt{2}r\sin\theta$ نیز استفاده کنیم.

۳ـ گزینه «۱» برای ناحیه‌ی محدود به کره و مخروط از مختصات کروی استفاده می‌کنیم: $V=\iiint_D dzdydx=\iiint_D \rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

حدود θ در دستگاه کروی همیشه $۰\le\theta\le ۲\pi$ هستند مگر آن‌که شرط خاصی روی x و y داشته باشیم. در این مثال هیچ محدودیتی روی x و y (از قبیل $y\ge ۰$ یا $x\ge ۰$ یا $y\ge x$) نداریم پس $۰\le\theta\le ۲\pi$ است. حدود ρ به وضوح $۰\le\rho\le a$ هستند زیرا این ناحیه درون کره‌ای به شعاع a قرار دارد.
برای تشخیص حدود ϕ در معادله‌ی رویه‌ها $x=۰$ قرار می‌دهیم و تصویر آن‌ها را در صفحه‌ی yoz بررسی می‌کنیم. از معادله‌ی کره به دایره‌ی $y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ و از معادله‌ی مخروط به $z=\sqrt{y^{۲}}=|y|$ می‌رسیم. بنابراین حدود ϕ از $\phi=۰$ (روی محور z ها) تا $\phi=\frac{\pi}{۴}$ (روی خط $z=|y|$) هستند.



$$V=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{a}\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta(\int_{۰}^{۲\pi}d\theta)(\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi d\phi)(\int_{۰}^{a}\rho^{۲}d\rho)=(۲\pi)(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱)(\frac{a^{۳}}{۳})=\frac{\pi a^{۳}}{۳}(۲-\sqrt{۲})$$

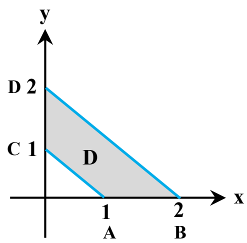
۴ـ گزینه «۱» عامل $x^{۲}+y^{۲}$ نشان می‌دهد استفاده از دستگاه قطبی بهتر است. ناحیه‌ی انتگرال‌گیری تمام صفحه‌ی xoy است. در مختصات قطبی روی $\mathbb{R}^{۲}$ داریم $۰\le\theta\le ۲\pi$ و $۰\le r<\infty$:

$$I=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{rdrd\theta}{(۱+r^{۲})^{p}}=(\int_{۰}^{۲\pi}d\theta)(\int_{۰}^{\infty}\frac{r}{(۱+r^{۲})^{p}}dr)$$

انتگرالِ θ شامل متغیر کران‌دار است. برای انتگرال روی r باید اختلاف درجه مخرج از صورت بیشتر از یک باشد: $۲p-۱>۱\Rightarrow p>۱$

یادآوری می‌کنیم در انتگرال ناسره‌ی $I=\int_{a}^{\infty}\frac{p(r)}{q(r)}dr$ که $p(r)$ و $q(r)$ دو چند جمله‌ای هستند و $a\in\mathbb{R}$ شرط لازم برای همگرایی آن است که (درجه صورت − درجه‌ی مخرج <۱) باشد.

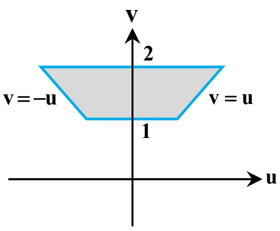
۵ـ گزینه «۲» با توجه به آن‌که در انتگرالده عبارت $e^{\frac{y-x}{y+x}}$ را داریم بهتر است با معرفی $u=y-x$ و $v=y+x$ تغییر دستگاه بدهیم. ناحیه D دارای ۴ مرز است که عبارتند از: خطوط $y+x=۱$ و $y+x=۲$ و $x=۰$ و $y=۰$. با قرار دادن هر کدام از این معادله‌ها در ضابطه‌ی u و v سعی می‌کنیم مرزهای جدید را برحسب u و v پیدا کنیم. مثلاً وقتی معادله‌ی $x=۰$ را در u و v قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود $u=y$ و $v=y$ یعنی آن‌که $u=v$ است. به همین ترتیب از این ۴ معادله در صفحه‌ی xoy باید به ۴ معادله در صفحه‌ی uov برسیم:



$(y+x=۱\ \to\ v=۱)$ و $(x=۰\ \to\ u=v)$

$(y+x=۲\ \to\ v=۲)$ و $(y=۰\ \to\ u=-v)$

ژاکوبین دستگاه جدید را نیز حساب می‌کنیم: $J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}=-۲\Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{J_{xy}}=-\frac{۱}{۲}$



که قدر مطلق آن یعنی $\frac{۱}{۲}$ در انتگرالده ضرب خواهد شد.

توجه به یک نکته ضروری است. در سیستم جدید داریم: $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dydx=\iint_D e^{\frac{u}{v}}\frac{۱}{۲}dvdu$

همان‌طور که می‌دانید در توابعی مانند $e^{\frac{u}{v}}$ یا $\sin\frac{u}{v}$ یا $\cos\frac{u}{v}$ متغیری که در صورت کسر آمده است باید در انتگرال وسطی باشد یعنی ترتیب حل این انتگرال باید به شکل $\iint_D e^{\frac{u}{v}}\frac{۱}{۲}dudv$ باشد. پس حدود v یعنی $v=۱$ و $v=۲$ کران‌های انتگرال بیرونی و حدود u یعنی $u=v$ و $u=-v$ کران‌های انتگرال وسطی‌اند.

$$I=\int_{۱}^{۲}\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}(\frac{۱}{۲})du\,dv=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}(ve^{\frac{u}{v}})\Big|_{-v}^{v}dv=\frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲}v(e-e^{-۱})dv=\frac{۱}{۲}(e-e^{-۱})\frac{v^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۲}=\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۲}(e-e^{-۱})=\frac{۳}{۲}\sinh(۱)$$

۶ـ گزینه «۴» می‌دانیم که گشتاور ماند از رابطه‌ی $I=\iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dydx$ به‌دست می‌آید که در این مثال چگالی ثابت $\rho(x,y)=k$ را داریم و منظور از R همان ناحیه‌ی داده شده است. معمولاً برای ناحیه‌هایی که به چهار مرز محدود شده‌اند ابتدا معادله‌ی مرزها را طوری می‌نویسیم که سمت راست آن‌ها عدد ثابت باشد. معادله مرزهای این ناحیه عبارتند از $\frac{y}{x}=2$ و $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$ و $yx=2a^2$ و $yx=a^2$.

پس با معرفی $u=\frac{y}{x}$ و $v=yx$ خواهیم داشت $\frac{1}{2}\le u\le 2$ و $a^2\le v\le 2a^2$. همچنین ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-\frac{2y}{x}\Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=-\frac{x}{2y}$$

البته چون $u=\frac{y}{x}$ است داریم $J_{uv}=-\frac{x}{2y}=-\frac{1}{2u}$ و در این ناحیه $u>0$ است پس قدرمطلق ژاکوبین برابر با $\frac{1}{2u}$ است.

اکنون آماده هستیم که گشتاور ماند نسبت به مبدأ را حساب کنیم.

$$I=\iint_R (x^2+y^2)kdydx=k\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{a^2}^{2a^2}\left(\frac{v}{u}+vu\right)\frac{1}{2u}dvdu=\frac{k}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{a^2}^{2a^2}v\left(\frac{1}{u^2}+1\right)dvdu=\frac{k}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{3a^4}{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du$$

$$=\frac{3ka^4}{4}\left(-\frac{1}{u}+u\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3ka^4}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{9ka^4}{4}$$

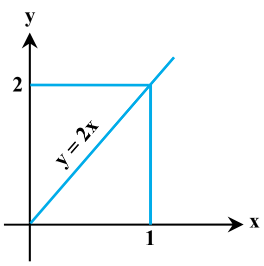
۷ـ گزینه «۲» ناحیه‌ی موردنظر را با D نشان می‌دهیم. حجم این ناحیه برابر است با $V=\iiint_D dzdydx$ با توجه به آن‌که $\frac{1}{8}$ اول از این ناحیه را می‌خواهیم شرط $x\ge 0$، $y\ge 0$ و $z\ge 0$ را داریم. ابتدا کران‌های z را پیدا می‌کنیم. از صورت سؤال دو معادله برای z به‌دست می‌آید: $z=1-x$ و $z=\frac{1}{2}(2-y)$ همچنین به علت قرار داشتن در $\frac{1}{8}$ اول باید $z\ge 0$ باشد. در شرایط عادی $z=1-x$ و $z=\frac{1}{2}(2-y)$ حدود z را مشخص می‌کنند مگر آن‌که متوجه شویم یکی از آن‌ها منفی است که در این صورت به جای آن باید از $z=0$ استفاده کنیم. برای بحث دقیق‌تر در این مورد لازم است حدود تغییرات x و y را مشخص کنیم. در صفحه‌ی xoy فعلاً دو شرط $x\ge 0$ و $y\ge 0$ را داریم که ناحیه‌ای را محدود نمی‌کنند. لازم است با برخورد دادن رویه‌ها و حذف z از آن‌ها روابطی بر حسب x و y به‌دست آوریم. معادلات $z=0$، $z=1-x$ و $z=\frac{1}{2}(2-y)$ را به دو دو برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases}z=0\\ x+z=1\end{cases}\Rightarrow x=1\qquad,\qquad\begin{cases}z=0\\ y+2z=2\end{cases}\Rightarrow y=2$$

$$\begin{cases}x+z=1\\ y+2z=2\end{cases}\Rightarrow y=2x$$

به این ترتیب در صفحه xoy داریم $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 2$ از طرف دیگر از برخورد دو صفحه با هم داریم:

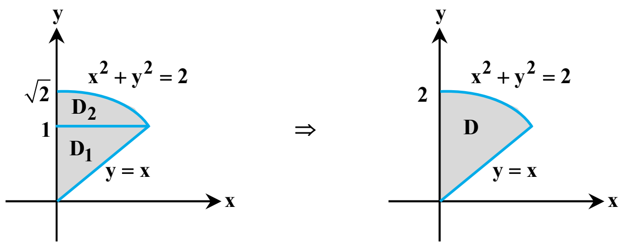
پس باید ناحیه R (تصویر D روی xoy) را به دو بخش تقسیم کنیم. در یک نیمه داریم $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 2x$ و در نیمه بالایی داریم $0\le x\le 1$ و $2x\le y\le 2$. نیمه پائینی به خطِ $x=1$ محدود است که از صفحه‌ی $x+z=1$ به دست آمده است. پس در این ناحیه داریم $0\le z\le 1-x$. نیمه بالایی به خط $y=2$ محدود است که از صفحه‌ی $y+2z=2$ به دست آمده است، پس در این ناحیه داریم $0\le z\le\frac{2-y}{2}$.



$$V=\int_0^1\int_0^{2x}\int_0^{1-x}dz\,dy\,dx+\int_0^1\int_{2x}^{2}\int_0^{\frac{2-y}{2}}dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 2x(1-x)\,dx+\int_0^1\int_{2x}^{2}\frac{2-y}{2}dy\,dx=2\int_0^1(x-x^2)\,dx+\int_0^1\frac{1}{2}\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{2x}^{2}dx$$

$$=2\int_0^1(x-x^2)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1(2-4x+2x^2)\,dx=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$



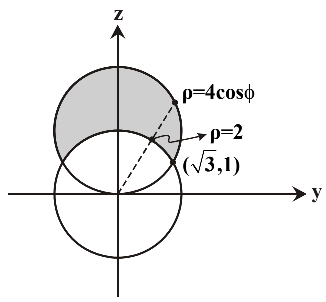
۸ـ گزینه «۳» به علت حضور عامل $x^۲+y^۲$ در تابع زیر انتگرال حدس می‌زنیم این انتگرال بهتر است در دستگاه قطبی حل شود. برای این کار ابتدا باید ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را تشخیص دهیم تا حدود θ و r معلوم شود. در انتگرال سمت چپ داریم $x\le y\le ۱$ و $۰\le x\le ۱$. این ناحیه را $D_۱$ بنامیم. در انتگرال سمت راست $۰\le x\le \sqrt{۲-y^۲}$ و $۱\le y\le \sqrt{۲}$ است این ناحیه را $D_۲$ بنامیم. ناحیه $D=D_۱\cup D_۲$ درون دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲$ قرار دارد و به خط $y=x$ و محور y ها در ربع اول محدود شده است.

در دستگاه قطبی این ناحیه را می‌توان به صورت $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le\sqrt{۲}$ بیان کرد. پس داریم:

$$I=\int_۰^۱\int_x^۱ e^{x^۲+y^۲}dy\,dx+\int_۱^{\sqrt{۲}}\int_۰^{\sqrt{۲-y^۲}} e^{x^۲+y^۲}dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{\sqrt{۲}} e^{r^۲}r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}e^{r^۲}\Big|_۰^{\sqrt{۲}}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(e^۲-۱)\,d\theta=\frac{۱}{۲}(e^۲-۱)(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=\frac{\pi}{۸}(e^۲-۱)$$

۹ـ گزینه «۱» در مختصات کروی وقتی محدودیتی روی x و y نداشته باشیم $۰\le\theta\le ۲\pi$ است. برای تعیین حدود ϕ می‌توانیم در معادله‌ی کره‌ها $x=۰$ قرار دهیم و تصویر را در صفحه‌ی yoz رسم کنیم. دایره‌های $y^۲+z^۲=۴$ و $y^۲+z^۲=۴z$ در $z=۱$ با هم برخورد می‌کنند $(۴z=۴\Rightarrow z=۱)$. در این نقطه داریم $y=\sqrt{۳}$ ، $z=۱$ پس $\phi=tg^{-۱}(\frac{y}{z})=tg^{-۱}(\sqrt{۳})=\frac{\pi}{۳}$ پس در این ناحیه $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۳}$ است. کران‌های ρ از معادله‌ی دو کره معلوم هستند: $\rho=۲$ و $\rho=۴\cos\phi$. در نتیجه داریم:



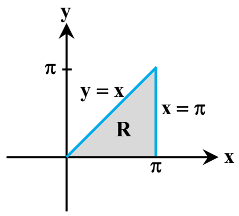
$$V=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۲^{۴\cos\phi}\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

توضیح: تصویر شکل در صفحه‌ی yoz نشان می‌دهد که $\rho=۲$ کران پایین و $\rho=۴\cos\phi$ کران بالاست. در نقطه‌ی $(\sqrt{۳},۱)$ داریم $\phi=\frac{\pi}{۳}$.

۱۰ـ گزینه «۱» با توجه به سطوح $z=۰$ و $z=\sin\frac{\pi y}{۲x}$ محدوده متغیر z معلوم است: $۰\le z\le \sin(\frac{\pi y}{۲x})$

در مورد y,x نیز با توجه به معادله مرزهای داده شده تصویر این جسم در صفحه xoy در فاصله‌ی $۰\le x\le\pi$ قرار دارد و خط $y=x$ یکی از کران‌های y است. اما یک مرز دیگر برای y نیاز داریم. به همین خاطر سطوح $z=۰$ و $z=\sin\frac{\pi y}{۲x}$ را با هم برخورد می‌دهیم:

$$\sin(\frac{\pi y}{۲x})=۰\ \Rightarrow y=۰$$



پس $y=۰$ و $y=x$ مرزهای y هستند. در شکل مقابل تصویر این جسم بر صفحه‌ی xoy را نشان داده‌ایم.

به این ترتیب:

$$V=\int_۰^{\pi}\int_۰^{x}\int_۰^{\sin(\frac{\pi y}{۲x})}dzdydx=\int_۰^{\pi}\int_۰^{x}\sin(\frac{\pi y}{۲x})dydx=\int_۰^{\pi}-\frac{۲x}{\pi}\cos(\frac{\pi y}{۲x})\Big|_۰^{x}dx=\int_۰^{\pi}-\frac{۲x}{\pi}(۰-۱)dx=\int_۰^{\pi}\frac{۲}{\pi}x\,dx=\frac{۲}{\pi}\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^{\pi}=\pi$$

۱۱ـ گزینه «۴» در معادله‌ی هر دو رویه عامل $x^۲+y^۲$ حضور دارد بنابراین از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله رویه‌ها به صورت $az=r^۲$ و $z=۲a-r$ درمی‌آید، از تلاقی رویه‌ها داریم:

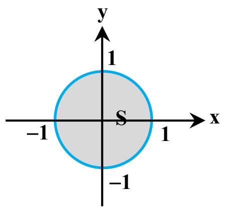
$$\frac{r^۲}{a}=۲a-r\ \Rightarrow r^۲+ar-۲a^۲=۰\ \Rightarrow r=a$$

یعنی تصویر این جسم بر صفحه‌ی xoy دایره‌ای به شعاع a است. در این دایره $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le a$ است. حدود z نیز از معادله‌ی رویه‌ها به‌دست آمده‌اند. بنابراین حجم موردنظر برابر است با:

$$V=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}\int_{\frac{r^۲}{a}}^{۲a-r}rdzdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{a}r(۲a-r-\frac{r^۲}{a})drd\theta=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{a}(۲ar-r^۲-\frac{r^۳}{a})dr=\theta\Big|_۰^{۲\pi}\times(ar^۲-\frac{r^۳}{۳}-\frac{r^۴}{۴a})\Big|_۰^{a}$$

$$=۲\pi(a^۳-\frac{a^۳}{۳}-\frac{a^۳}{۴})=\frac{۵\pi}{۶}a^۳$$

۱۲ــ گزینه «۲» ناحیه‌ی S درون دایره واحد است و به آسانی در دستگاه قطبی به شکل $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le 1$ بیان می‌شود.



$$I = \iint_S \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)rdrd\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\mathrm{Ln}(r)drd\theta$$

ابتدا انتگرال $\int_0^1 r\mathrm{Ln}(r)dr$ را با استفاده از روش «جزءبه جزء» حل کنیم.

$$(u = \mathrm{Ln}(r) \Rightarrow du = \frac{1}{r}dr) \quad , \quad (dv = rdr \Rightarrow v = \frac{1}{2}r^2)$$

$$\int_0^1 \mathrm{Ln}(r)dr = \frac{1}{2}r^2\mathrm{Ln}(r)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}r^2\frac{1}{r}dr = (0-0) - \frac{1}{2}\int_0^1 rdr = -\frac{1}{4}r^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین با جایگذاری در انتگرال I داریم:

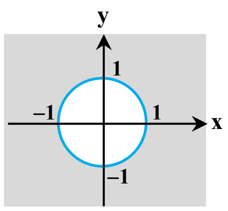
$$I = -\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{1}{4}2\pi = \frac{\pi}{2}$$

۱۳ــ گزینه «۲» محاسبه حجم ناحیه محدود مابین صفحه و کره به طور مستقیم سخت است، می‌خواهیم صفحه داده شده را حول مبدأ که مرکز کره نیز هست، دوران دهیم تا معادله ساده‌تری برای صفحه به دست آید. فاصله مبدأ مختصات تا صفحه داده شده برابر $\frac{a}{\sqrt{3}}$ می‌باشد، بنابراین معادله صفحه داده شده را با یک دوران می‌توان به صورت $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$ تبدیل کرد و در این صورت می‌خواهیم حجم محدود مابین $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$ از پایین و $x^2+y^2+z^2 = a^2$ از بالا را محاسبه کنیم. از تلاقی معادله صفحه و کره نتیجه می‌شود $x^2+y^2 = \frac{2}{3}a^2$. پس تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی xoy یک دایره به شعاع $\sqrt{\frac{2}{3}}a$ است، در نتیجه برای محاسبه حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این دایره داریم $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le \sqrt{\frac{2}{3}}a$. حدود z نیز از $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$ تا نیم‌کره بالایی یعنی $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2}$ به‌دست می‌آیند.

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}a}\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}a} r\left(\sqrt{a^2-r^2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)dr = 2\pi\left(\frac{-1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{\sqrt{3}}\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}a}$$

$$\Rightarrow \text{حجم} = 2\pi\left(\frac{-1}{9\sqrt{3}}a^3 - \frac{1}{3\sqrt{3}}a^3 + \frac{1}{3}a^3\right) = 2\pi a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9\sqrt{3}}\right)$$

۱۴ــ گزینه «۴» می‌خواهیم حجم را با استفاده از انتگرال سه‌گانه به‌دست آوریم. وجود x^2+y^2 در معادله‌ی رویه‌ها نشان می‌دهد استفاده از مختصات استوانه‌ای بهتر است. معادله‌ی رویه را برحسب مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم:



$$z = -\mathrm{Ln}(x^2+y^2) = -\mathrm{Ln}r^2 = -2\mathrm{Ln}r$$

صفحه‌ی xoy هم‌صفحه‌ی $z = 0$. با برخورد دادن رویه‌ها داریم:

$$-2\mathrm{Ln}r = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}r = 0 \Rightarrow r = 1$$

که معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع ۱ در صفحه‌ی xoy است.

$$V = \iiint_R dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{-2\mathrm{Ln}r} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2\mathrm{Ln}r)\,rdrd\theta$$

برای محاسبه‌ی انتگرال وسط از روش جزءبه‌جزء داریم:

$$\mathrm{Ln}r = u \Rightarrow \frac{1}{r}dr = du \ , \ rdr = dv \Rightarrow \frac{1}{2}r^2 = v$$

$$-2\int_0^1 r\mathrm{Ln}rdr = -2\left[\frac{1}{2}r^2\mathrm{Ln}r - \frac{1}{2}\int_0^1 rdr\right] = \left[-r^2\mathrm{Ln}r + \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$V = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\times 2\pi = \pi$$

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به وجود عبارت $x^2+y^2+z^2$ تابع تحت انتگرال به نظر می‌رسد که استفاده از مختصات کروی محاسبه انتگرال را ساده‌تر می‌کند. ناحیه انتگرال‌گیری یک هشتم اول از دستگاه مختصات است، بنابراین $0\le \rho<\infty$ ، $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ، $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+\pi^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\frac{\rho^2\sin\phi}{(\rho^2+\pi^2)^2}d\rho d\phi d\theta=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi)(\int_0^\infty\frac{\rho^2}{(\rho^2+\pi^2)^2}d\rho)=(\frac{\pi}{2})(1)(\frac{1}{4})=\frac{\pi}{8}$$

تذکر: برای حل انتگرال $\int\frac{\rho^2d\rho}{(\rho^2+\pi^2)^2}$ از تغییر متغیر $\rho=\pi\text{tg}x$ استفاده کنید.

۱۶ـ گزینه «۳» صفحه‌ی xoy یعنی همان صفحه‌ی $z=0$ بنابراین کران‌های z عبارتند از $z=0$ و $z=\frac{1}{8}(x^2+y^2)$. البته حضور x^2+y^2 در معادله‌ی رویه‌ها نشان می‌دهد که استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب‌تر است. پس حدود z عبارتند از $z=0$ و $z=\frac{1}{8}r^2$. برای تشخیص حدود r و θ از معادله‌ی استوانه استفاده می‌کنیم. در دستگاه استوانه‌ای داریم:

$$x^2+y^2-4y=0\Rightarrow r^2-4r\sin\theta=0\Rightarrow r(r-4\sin\theta)=0\Rightarrow r=0\ ,\ r=4\sin\theta$$

حدود r مشخص شدند و اگر به معادله‌ی $r=4\sin\theta$ دقت کنید با توجه به آن‌که r نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$r\ge0\Rightarrow\sin\theta\ge0\Rightarrow0\le\theta\le\pi$$

(البته دایره‌ی $x^2+y^2=ay$ جزء دایره‌های معروفی است که بهتر است رسم آن را به یاد داشته باشید اما ما سعی کردیم روش تشخیص حدود انتگرال را بدون ترسیم شکل بیان کنیم.)

$$\Rightarrow V=\int_0^\pi\int_0^{4\sin\theta}\int_0^{\frac{1}{8}r^2}rdzdrd\theta=\int_0^\pi\int_0^{4\sin\theta}\frac{1}{8}r^2.rdrd\theta=\int_0^\pi\frac{1}{8}[\frac{r^4}{4}]_0^{4\sin\theta}d\theta=8\int_0^\pi\sin^4\theta d\theta$$

با استفاده از روابط مثلثاتی و فرمول‌های توان‌شکن داریم:

$$\sin^4\theta=(\sin^2\theta)^2=(\frac{1-\cos2\theta}{2})^2=\frac{1}{4}[1-2\cos2\theta+\cos^22\theta]=\frac{1}{4}[1-2\cos2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos4\theta)]$$

$$\Rightarrow V=\frac{8}{4}\int_0^\pi[1-2\cos2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos4\theta)]d\theta=2(\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\sin4\theta-\sin2\theta)\Big|_0^\pi=3\pi$$

۱۷ـ گزینه «۲» حدود z عبارتند از $z=2$ و $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ برخورد آن‌ها با هم دایره‌ی $x^2+y^2=4$ را در صفحه‌ی xoy به ما می‌دهد پس بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. در این صورت کران‌های z به شکل $z=2$ و $z=\frac{1}{2}r^2$ نوشته می‌شوند و درون دایره‌ای به شعاع ۲ داریم $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le r\le2$.

$$I=\iiint_S(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{1}{2}r^2}^2r^2.rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2r^3(2-\frac{1}{2}r^2)drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(2r^3-\frac{1}{2}r^5)dr$$

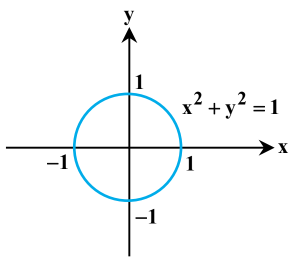
$$=2\pi(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12})\Big|_0^2=2\pi(8-\frac{16}{3})=\frac{16\pi}{3}$$

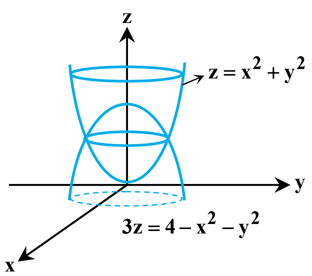
توضیح: بدون رسم شکل چگونه متوجه می‌شویم که $z=\frac{1}{2}r^2$ و $z=2$ کران پایین هستند یا کران بالا؟ برای این‌کار به محدوده‌ی تغییرات r دقت می‌کنیم چون $0\le r\le2$ است، معلوم می‌شود که $z=\frac{1}{2}r^2$ از $z=2$ کمتر است. در مواردی که مقایسه‌ی کران‌ها مشکل باشد می‌توانید با قرار دادن یک مقدار r مثلاً $r=0$ در آن‌ها متوجه شوید کدام‌یک از آن‌ها از دیگری کوچک‌تر است.

۱۸ـ گزینه «۲» رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $z=\frac{1}{3}(4-x^2-y^2)$ حدود z را به ما می‌دهند. برای تشخیص حدود x و y رویه‌ها را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases}z=x^2+y^2\\3z=4-x^2-y^2\end{cases}\Rightarrow3(x^2+y^2)=4-x^2-y^2$$

$$\Rightarrow4x^2+4y^2=4\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=1}$$





پس تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر صفحه‌ی xoy یک دایره به شعاع یک است و در مختصات قطبی $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le r\le1$است. کران‌های z نیز باید بر حسب r و θ نوشته شوند:

$$z=\frac{1}{3}(4-x^2-y^2)=\frac{1}{3}(4-r^2)\ ,\ z=x^2+y^2=r^2$$

اگر رویه‌ها را رسم نکرده باشید برای تشخیص آن که کدام‌یک از این‌ها کران پایین و کدام کران بالا است باید یکی از مقادیر r را در آن‌ها قرار دهید.

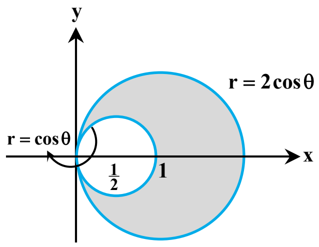
مثلاً $r=\circ$ را امتحان کنیم. $r=\circ \Rightarrow z=\frac{۱}{۳}(۴-r^۲)=\frac{۴}{۳}$ و $z=r^۲=\circ$

پس $z=r^۲$ کران پایین و $z=\frac{۱}{۳}(۴-r^۲)$ کران بالا است. در نتیجه داریم:

$$V=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۱\int_{r^۲}^{\frac{۱}{۳}(۴-r^۲)} rdzdrd\theta \Rightarrow V=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۱(\frac{r}{۳}(۴-r^۲)-r(r^۲))drd\theta \Rightarrow V=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۱(\frac{۴}{۳}r-\frac{۱}{۳}r^۳-r^۳)drd\theta=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۱(\frac{۴}{۳}r-\frac{۴}{۳}r^۳)dr$$

$$=\int_\circ^{۲\pi}[(\frac{۲}{۳}r^۲-\frac{۱}{۳}r^۴)]_\circ^۱ d\theta=\int_\circ^{۲\pi}\frac{۱}{۳}d\theta=\frac{۱}{۳}(۲\pi)=۲(\frac{\pi}{۳})$$

۱۹ـ گزینه «۴» حجم محدود به زیر رویه $z=x^۲+y^۲$ و محدود به دو استوانه $x^۲+y^۲=x$ و $x^۲+y^۲=۲x$ بالای صفحه xoy مدنظر می‌باشد. با توجه به معادله رویه‌ها، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.



$$x^۲+y^۲=x \Rightarrow r^۲=r\cos\theta \Rightarrow r=\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$$

$$x^۲+y^۲=۲x \Rightarrow r^۲=۲r\cos\theta \Rightarrow r=۲\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$$

دقت کنید که بدون داشتن شکل هم حدود θ معلوم می‌شوند، زیرا از معادله‌ی $r=\cos\theta$ و $r=۲\cos\theta$ معلوم است که باید $\cos\theta\ge\circ$ باشد؛ یعنی $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$.

$$\text{حجم}=\iint(x^۲+y^۲)dA=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\cos\theta}^{۲\cos\theta}r^۲.rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{r^۴}{۴}\Big|_{\cos\theta}^{۲\cos\theta}d\theta=۲\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱۵}{۴}\cos^۴\theta d\theta=\frac{۱۵}{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۴\theta d\theta=\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۳\pi}{۱۶}=\frac{۴۵\pi}{۳۲}$$

یادآوری: $\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۴\theta d\theta=\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۴\theta d\theta=\frac{۳\pi}{۱۶}$

۲۰ـ گزینه «۲» جمله‌ی $x^۲+y^۲$ در معادله‌ی مرزها نشان می‌دهد استفاده از دستگاه استوانه‌ای راحت‌تر است. معادله‌ی مرزهای z را در مختصات استوانه‌ای به صورت $z=\circ$ و $z=e^{-(x^۲+y^۲)}=e^{-r^۲}$ به دست می‌آوریم. حدود تغییرات r و θ با توجه به دایره‌ی $x^۲+y^۲=۴$ به صورت $\circ\le r\le۲\ ,\ \circ\le\theta\le۲\pi$ است. بنابراین داریم:

$$V=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۲\int_\circ^{e^{-r^۲}}rdzdrd\theta=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^۲e^{-r^۲}r\,drd\theta=\int_\circ^{۲\pi}(-\frac{۱}{۲}e^{-r^۲})\Big|_\circ^۲d\theta=\int_\circ^{۲\pi}(-\frac{۱}{۲}e^{-۴}+\frac{۱}{۲}e^\circ)d\theta=۲\pi(-\frac{۱}{۲}(e^{-۴}-۱))=\pi(۱-e^{-۴})$$

بنابراین $A=\pi$ و $B=۴$ است و لذا $\frac{A}{B}=\frac{\pi}{۴}$ است.

۲۱ـ گزینه «۳» وجود عامل $x^۲+y^۲$ در این معادله نشان می‌دهد بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم. پس ابتدا معادله منحنی را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

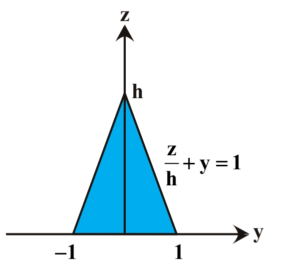
$$(r^۲)^۳=۱۶(r^۲\cos^۲\theta)(r^۲\sin^۲\theta) \Rightarrow r^۶=۱۶r^۴\sin^۲\theta\cos^۲\theta \Rightarrow r=۴\sin\theta\cos\theta\ ,\ r=\circ \Rightarrow r=۲\sin۲\theta\ ,\ r=\circ$$

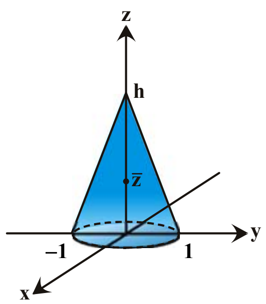
بنابراین منحنی موردنظر رُز چهار برگ است، کافی است مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را چهار برابر کنیم.

$$S=۴\times\frac{۱}{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}(۲\sin۲\theta)^۲d\theta=۸\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲۲\theta d\theta=۲\pi$$

توجه کنید که حدود θ را می‌توانیم از تساوی $r=۲\sin۲\theta$ تشخیص دهیم، چون r همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. پس باید $\sin۲\theta\ge\circ$ باشد، یعنی $\circ\le۲\theta\le\pi$ پس $\circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$.

۲۲ـ گزینه «۴» این یک مسأله‌ی کاملاً مفهومی است که در آن، معادله‌ی مخروط را خودمان باید بنویسیم. ابتدا یک برش عرضی از مخروط موردنظر را در صفحه‌ی yoz رسم می‌کنیم.





معادله‌ی خطی که از نقاط $(۱,\circ)$ و $(\circ,h)$ در صفحه‌ی yoz می‌گذرد به‌صورت $\frac{z}{h}+y=۱$ است. به عبارتی داریم $z=h(۱-y)$. اگر همین خط را حول محور zها دوران دهیم، مخروط موردنظر به‌دست خواهد آمد. همان‌طور که در فصل‌های پیشین مطالعه کرده‌اید، برای دوران حول محور zها باید به جای y عبارت $\sqrt{y^۲+x^۲}$ را قرار دهیم.

پس معادله‌ی مخروط به‌صورت $z = h(1-\sqrt{x^2+y^2})$ خواهد بود. قاعده‌ی این شکل، صفحه‌ی $z = 0$ است. از برخورد دادن $z = 0$ با معادله‌ی مخروط داریم $h(1-\sqrt{x^2+y^2}) = 0$ و از اینجا معلوم می‌شود که سایه‌ی این شکل بر صفحه‌ی xoy درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. به همین خاطر تصمیم می‌گیریم به جای دستگاه دکارتی، از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. کران‌های θ و r به‌صورت $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le 1$ هستند. حدود z نیز به وضوح از $z = 0$ تا $z = h(1-\sqrt{x^2+y^2})$ است که در مختصات استوانه‌ای به‌صورت $0 \le z \le h(1-r)$ نوشته می‌شود. بنابراین برای مخروط توپر D داریم: $0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le r \le 1 \;,\; 0 \le z \le h(1-r)$

فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y,z) از قاعده‌ی شکل یعنی از $z = 0$ برابر است با مقدار z در آن نقطه. پس طبق توضیحات صورت سؤال تابع چگالی برابر است با $\rho(x,y,z) = kz$. حالا آماده هستیم که با محاسبه‌ی انتگرال‌های موردنیاز، مرکز جرم شکل را پیدا کنیم. اگر $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ مختصات مرکز جرم باشد، فاصله‌ی آن تا قاعده‌ی شکل برابر است با $\bar{z}$ بنابراین فقط مقدار $\bar{z}$ را می‌خواهیم.

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)dv}{\iiint_D \rho(x,y,z)dv}$$

با جایگذاری $\rho(x,y,z) = kz$ و نوشتن حدود انتگرال در مختصات استوانه‌ای ادامه می‌دهیم:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{h(1-r)} krz^2 dzdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{h(1-r)} krzdzdrd\theta}$$

صورت و مخرج را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$M = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{2}[z^2]_0^{h(1-r)} drd\theta = \frac{kh^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-2r^2+r^3)drd\theta = \frac{kh^2}{2}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}r^2-\frac{2}{3}r^3+\frac{1}{4}r^4]_0^1 d\theta = \frac{k\pi h^2}{12}$$

و در صورت کسر داریم:

$$M_{xy} = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{3}[z^3]_0^{h(1-r)} drd\theta = \frac{kh^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-3r^2+3r^3-r^4)drd\theta = \frac{kh^3}{3}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}r^2-r^3+\frac{3}{4}r^4-\frac{1}{5}r^5]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{kh^3}{3}(2\pi)(\frac{1}{20}) = \frac{k\pi h^3}{30}$$

بنابراین ارتفاعِ مرکز جرم این شکل برابر است با:

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{30}k\pi h^3}{\frac{1}{12}k\pi h^2} = \frac{2}{5}h$$

۲۳ـ گزینه «۳» فرض کنیم ناحیه‌ی D به رویه‌ی $z = x^2+y^2$ و صفحه‌ی $z = 2x+2y$ محدود باشد. کران‌های z روی D همین دو معادله هستند. برای مشخص شدن کران‌های x و y رویه‌ها را برخورد می‌دهیم. از برخورد رویه‌ها داریم $x^2+y^2 = 2x+2y$ به عبارتی $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$. با تغییر دستگاه $(u,v,w) = (x-1,y-1,z)$ در دستگاه جدید خواهیم داشت $u^2+v^2 = 2$ که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$ است. همچنین کران‌های z عبارتند از: $z = x^2+y^2 = (u+1)^2+(v+1)^2$ و $z = 2x+2y = 2(u+1)+2(v+1)$. با این کار توانستیم دایره‌ای را که مرکزش در $(1,1)$ قرار داشت به دایره‌ای به مرکز مبدأ تبدیل کنیم.

اکنون می‌توانیم به جای کران‌های u و v از کران‌های r و θ استفاده کنیم. (مختصات استوانه‌ای) در دایره‌ی $u^2+v^2 = 2$ داریم $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le \sqrt{2}$. ژاکوبی دستگاه (u,v,w) و همچنین ژاکوبی دستگاه استوانه‌ای (r) را باید در انتگرالده ضرب کنیم.

$$J_{uvw} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad J_{zr\theta} = r$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$V = \iiint_D dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)+2}^{2r(\cos\theta+\sin\theta)+4} rdzdrd\theta$$

در مورد کران‌های z دقت کنید که در دستگاه استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$z = (u+1)^2+(v+1)^2 = u^2+v^2+2(u+v)+2 = r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)+2 \;\text{ و }\; z = 2(u+1)+2(v+1) = 2r(\cos\theta+\sin\theta)+4$$

با محاسبه‌ی انتگرال میانی داریم:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} rz\Big|_{r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)+2}^{2r(\cos\theta+\sin\theta)+4} drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}(2r-r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi}(r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

بنابراین حجم D، دو برابر π است.

۲۴ـ گزینه «۴» ناحیه‌ی D نسبت به متغیرهای x و y تقارن دارد، یعنی معادله‌ی بیضی‌گون با تبدیل x و y به یکدیگر تغییری نمی‌کند. بنابراین در تابع زیر انتگرال تبدیل متغیرهای x و y به یکدیگر تغییری در مقدار انتگرال نمی‌دهد، یعنی داریم:

$$I=\iiint_D \frac{۱۳۹۳x^۴+z^۲}{۱۳۹۳x^۴+۱۳۹۳y^۴+۲z^۲}dv \Rightarrow I=\iiint_D \frac{۱۳۹۳y^۴+z^۲}{۱۳۹۳x^۴+۱۳۹۳y^۴+۲z^۲}dv$$

$$۲I=I+I=\iiint_D \frac{۱۳۹۳x^۴+۱۳۹۳y^۴+۲z^۲}{۱۳۹۳x^۴+۱۳۹۳y^۴+۲z^۲}dv=\iiint_D dv=(\text{D حجم ناحیه})=\frac{۴}{۳}\pi(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})(۱)=\frac{۸\pi}{۳}$$

$۲I=\frac{۸\pi}{۳}$ پس $I=\frac{۴\pi}{۳}$ است.

یادآوری: حجم بیضی با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ برابر با $\frac{۴}{۳}\pi abc$ است.

۲۵ـ گزینه «۳» از تقارن ناحیه‌ی V نسبت به متغیرهای x، y و z استفاده می‌کنیم. دقت کنید که با تغییر نقش x، y و z نسبت به یکدیگر معادله‌ی ناحیه تغییری نمی‌کند، بنابراین در تابع زیر انتگرال هم با عوض کردن نقش y و z یا با عوض کردن نقش x و z مقدار I تغییر نمی‌کند:

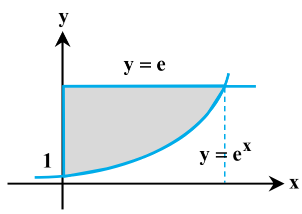
$$I=\iiint_V \frac{z^۲+۱}{x^۲+y^۲+z^۲+۳}dv=\iiint_V \frac{y^۲+۱}{x^۲+y^۲+z^۲+۳}dv=\iiint_V \frac{x^۲+۱}{x^۲+y^۲+z^۲+۳}dv$$

بنابراین با جمع کردن این ۳ انتگرال داریم:

$$\Rightarrow ۳I=\iiint_V \frac{x^۲+y^۲+z^۲+۳}{x^۲+y^۲+z^۲+۳}dv=(\text{V حجم ناحیه})=\frac{۴}{۳}\pi\times۴^۳=\frac{۲۵۶}{۳}\pi$$

دیدیم که $۳I=\frac{۲۵۶}{۳}\pi$ است، پس $I=\frac{۲۵۶}{۹}\pi$ خواهد بود.

۲۶ـ گزینه «۲» محاسبه‌ی انتگرال $\int\frac{dy}{Lny}$ مشکل است اما با تعویض ترتیب متغیرها، انتگرال $\int\frac{dx}{Lny}$ بسیار ساده حل می‌شود؛ پس این انتگرال به تعویض ترتیب متغیرها نیاز دارد. در گام اول با دقت به کران‌های داده شده، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم. داریم $e^x\le y\le e$ و $۰\le x\le ۱$، همیشه اول نمودار کران‌های انتگرال وسطی را رسم کنید. با رسم منحنی $y=e^x$ و خط $y=e$ ناحیه مشخص می‌شود. محل برخورد این دو نمودار، نقطه‌ای به طول $x=۱$ است. البته نیم‌نگاهی هم به شرط $۰\le x\le ۱$ می‌اندازیم و مطمئن می‌شویم که ناحیه را درست تشخیص داده‌ایم.



اگر بخواهیم ابتدا کران‌های y و سپس کران‌های x را بنویسیم، برای y به کمترین و بیشترین مقدار y نیاز داریم. کمترین مقدار y در محل برخورد $y=e^x$ با خط $x=۰$ روی می‌دهد یعنی $y=e^{۰}=۱$. بیشترین مقدار y، $y=e$ است. پس $۱\le y\le e$. حال اگر در جهت محور xها از این ناحیه عبور کنیم، خط $x=۰$ ورودی است و منحنی $x=Lny$ خروجی خواهد بود. $(y=e^x \leftrightarrow x=Lny)$. پس $۰\le x\le Lny$. با نوشتن کران‌های جدید انتگرال را حل می‌کنیم:

$$I=\int_۱^e\int_۰^{Lny}\frac{۱}{Lny}dxdy=\int_۱^e(\frac{x}{Lny})\Big|_۰^{Lny}dy=\int_۱^e\frac{Lny}{Lny}dy=\int_۱^e dy=y\Big|_۱^e=e-۱$$

۲۷ـ گزینه «۳» حدود x و y به روشنی مشخص شده‌اند: $۰\le x\le ۱$ و $-۱\le y\le ۱-x$ است. البته باید مراقب باشیم که حدود x اعداد ثابت هستند پس مربوط به انتگرال بیرونی‌اند و حدود y که به صورت $-۱\le y\le ۱-x$ به‌دست آمده‌اند مربوط به انتگرال وسطی‌اند، پس ترتیب موردنظر ما به صورت $\int_۰^۱\int_{-۱}^{۱-x}\arcsin(x+y)dydx$ است. برای حل اولین انتگرال نسبت به متغیر y از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$(u=\arcsin(x+y)\Rightarrow du=\frac{dy}{\sqrt{۱-(x+y)^۲}})\ ,\ (dv=dy\Rightarrow v=y)$$

$$\iint_S\arcsin(x+y)dydx=\int_۰^۱\int_{-۱}^{۱-x}\arcsin(x+y)dydx=\int_۰^۱[(x+y)\arcsin(x+y)+\sqrt{۱-(x+y)^۲}\,]_{-۱}^{۱-x}dx$$

$$=\int_۰^۱([(x+۱-x)\arcsin(x+۱-x)+\sqrt{۱-(x+۱-x)^۲}\,]-[(x-۱)\arcsin(x-۱)+\sqrt{۱-(x-۱)^۲}\,]dx$$

$$=\int_۰^۱\frac{\pi}{۲}-[(x-۱)\arcsin(x-۱)+\sqrt{۱-(x-۱)^۲}\,]dx\qquad(I)$$

حال برای انتگرال فوق، از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\int\sqrt{a^۲-x^۲}dx=\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲-x^۲}+\frac{a^۲}{۲}\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c\\ \int x\sin^{-۱}xdx=\frac{۱}{۴}(۲x^۲-۱)\sin^{-۱}x+\frac{x}{۴}\sqrt{۱-x^۲}+c\end{cases}$$

لذا، حاصل (I) به صورت زیر خواهد بود:

$$I=\Big[\frac{\pi}{2}x-\Big[\frac{1}{4}(2(x-1)^2-1)\sin^{-1}(x-1)+\frac{x-1}{4}\sqrt{1-(x-1)^2}\Big]-\frac{(x-1)}{2}\sqrt{1-(x-1)^2}-\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)\Big]_0^1$$

$$=\Big[\frac{\pi}{2}-[0-0-0-0]-[0-\frac{1}{4}\sin^{-1}(-1)+0-0-\frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)]\Big]=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}(-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

۲۸ـ گزینه «۴» با توجه به تساوی داده شده می‌توانیم به جای $\frac{arctgx}{x}$ در انتگرال I، عبارت معادل آن یعنی $\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$ را قرار دهیم. با این‌کار به یک انتگرال دوگانه خواهیم رسید:

$$I=\int_0^1(\frac{arctgx}{x})(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})=\int_0^1\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\,\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\int_0^1\frac{dydx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

اگر این انتگرال را دوگانه را با همین ترتیب حل کنیم، به جای اول بر می‌گردیم، بنابراین ابتدا ترتیب متغیرها را عوض می‌کنیم. حدود انتگرال اعداد ثابت هستند در نتیجه تعویض ترتیب انتگرال به سادگی انجام می‌شود:

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

برای حل انتگرال میانی نسبت به x، از تغییر متغیر $x=\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. بنابراین $dx=\cos\theta d\theta$ است، به ازای $0\le x\le 1$ داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$، پس در ربع اول قرار داریم، $\cos\theta$ مثبت است و داریم: $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$.

$$I=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta dy}{(1+y^2\sin^2\theta)\cos\theta}=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta dy}{1+y^2\sin^2\theta}$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $y\sin\theta=tgt$ استفاده می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت: $\sin\theta=\frac{1}{y}tgt$

پس $\cos\theta d\theta=\frac{1}{y}(1+tg^2t)dt$ به عبارتی داریم:

$$d\theta=\frac{1}{y}\frac{1+tg^2t}{\cos\theta}dt=\frac{1}{y}\frac{1+tg^2t}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}tg^2t}}dt=\frac{1}{y}\frac{1+tg^2t}{\frac{1}{y}\sqrt{y^2-tg^2t}}dt=\frac{1+tg^2t}{\sqrt{y^2-tg^2t}}dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{dyd\theta}{1+y^2\sin^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\frac{1}{\sin^2\theta}tg^{-1}(y\sin\theta)\Big]_0^1d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}[tg^{-1}(\sin\theta)]d\theta$$

۲۹ـ گزینه «۱» ابتدا از تغییر دستگاه $u=\frac{x}{t}$ و $v=\frac{y}{t}$ استفاده می‌کنیم. با این کار سعی می‌کنیم متغیر t را از حدود انتگرال خارج کنیم:

$$0\le x\le t\Rightarrow 0\le u\le 1$$
$$0\le y\le t\Rightarrow 0\le v\le 1$$

ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}\frac{1}{t}&0\\0&\frac{1}{t}\end{vmatrix}=\frac{1}{t^2}\Rightarrow J_{uv}=t^2$$

با این دستگاه جدید داریم:

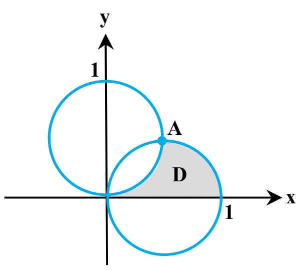
$$F(t)=\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{t^2u}{t^2v^2}}t^2\,dudv=t^2\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}dudv$$

حالا با مشتق‌گیری نسبت به t داریم:

$$F'(t)=2t\int_0^1\int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}}dudv$$

با مقایسه‌ی F(t) و F′(t) داریم:

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=\frac{2t}{t^2}=\frac{2}{t}\Rightarrow F'(t)=\frac{2F(t)}{t}$$



۳۰ـ گزینه «۱» منحنی‌های $x^2+y^2=y$ و $x^2+y^2=x$ دایره‌های شناخته شده‌ای هستند. ناحیه‌ی D درون دایره $x^2+y^2=x$ و خارج از دایره‌ی $x^2+y^2=y$ قرار دارد. البته شرط $y\ge 0$ را هم در نظر می‌گیریم. واضح است که استفاده از مختصات قطبی مناسب‌تر است.

کران پایین θ به صورت $\theta=0$ است اما برای یافتن کران بالای آن باید مختصات نقطه‌ی A معلوم شود. این نقطه از برخورد دو دایره به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x^2+y^2=x\\x^2+y^2=y\end{cases}\Rightarrow x=y\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

یعنی در نقطه A داریم $y=x$ در نتیجه $\theta=\frac{\pi}{۴}$ است. حدود r هم از معادله‌ی دو دایره معلوم خواهد شد:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=x \Rightarrow r=\cos\theta \\ x^۲+y^۲=y \Rightarrow r=\sin\theta \end{cases}$$

اگر نمی‌دانید که کدام‌یک از آن‌ها کران پایین و کدام کران بالا است کافیست از محدوده‌ی $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ زاویه‌ای را انتخاب کرده و در آن‌ها قرار دهید. مثلاً در $\theta=۰$ داریم $r=\cos(۰)=۱$ و $r=\sin(۰)=۰$ پس $r=\cos\theta$ کران بالا است.

$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}(r^۲)(rdrd\theta)=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}[\frac{r^۴}{۴}]_{\sin\theta}^{\cos\theta}d\theta=\frac{۱}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\overbrace{(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)}^{\cos ۲\theta}\overbrace{(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)}^{۱}d\theta$$

$$I==\frac{۱}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\cos ۲\theta d\theta=\frac{۱}{۸}(\sin ۲\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۸}[۱-۰]=\frac{۱}{۸}$$

۳۱ـ گزینه «۴» هرگاه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک بیضی (یا دایره) با معادله‌ی $(\frac{x-x_۰}{a})^۲+(\frac{y-y_۰}{b})^۲=۱$ باشد از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم که طبق آن داریم: $\frac{x-x_۰}{a}=r\cos\theta$ و $\frac{y-y_۰}{b}=r\sin\theta$ البته در این مثال $a=b=۱$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x-۱=r\cos\theta \\ y-۱=r\sin\theta \\ |J|=r \end{cases} \Rightarrow D: r^۲\cos^۲\theta+r^۲\sin^۲\theta\le ۱ \Rightarrow r^۲\le ۱ \xrightarrow{r>۰} ۰\le r\le ۱$$

محدوده‌ی θ هم برای یک دایره‌ی کامل $۰\le\theta\le ۲\pi$ است.

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_D^۱[(۱+r\cos\theta)^۲+(۱+r\sin\theta)^۲-۲(۱+r\sin\theta)]r\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(r^۲+۲r\cos\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}[\frac{r^۴}{۴}+r^۲\cos\theta]_{r=۰}^{r=۱}.d\theta=\int_۰^{۲\pi}[\frac{۱}{۴}+\cos\theta]d\theta=\{\frac{\theta}{۴}+\sin\theta\}_۰^{۲\pi}=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

۳۲ـ گزینه «۱» این انتگرال را می‌توانیم در دستگاه دکارتی با همین حدودی که در صورت سؤال داده شده است، حل کنیم. با این حال می‌توانیم با انجام تغییر متغیر مناسب، باعث ساده‌تر شدن انتگرال شویم. عبارت زیر انتگرال به‌صورت $\frac{z}{۳}+\frac{۲x-y}{۲}$ است پس انتخاب $u=\frac{۲x-y}{۲}$ و $v=\frac{z}{۳}$ منطقی است. w را هم می‌توانیم به دلخواه به صورت $w=y$ یا $w=x$ انتخاب کنیم. ما فرض می‌کنیم $u=\frac{۲x-y}{۲}=x-\frac{y}{۲}$ و $v=\frac{z}{۳}$ و $w=y$ باشد. ژاکوبین این دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}=-۳$$

پس قدرمطلق ژاکوبین برابر با ۳ است. حالا باید معادله‌ی مرزهای قدیمی را در ضابطه‌ی u، v و w قرار داده و معادله‌ی مرزهای جدید را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x=\frac{y}{۲}+۱ \Rightarrow u=۱ \\ x=\frac{y}{۲} \Rightarrow u=۰ \end{cases},\quad \begin{cases} y=۰ \Rightarrow w=۰ \\ y=۴ \Rightarrow w=۴ \end{cases},\quad \begin{cases} z=۰ \Rightarrow v=۰ \\ z=۳ \Rightarrow v=۱ \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۴(u+v)۳dwdvdu=۳\int_۰^۱\int_۰^۱[uw+vw]_۰^۴dvdu=۳\int_۰^۱\int_۰^۱۴(u+v)dvdu=۱۲\int_۰^۱[uv+\frac{v^۲}{۲}]_۰^۱du=۱۲\int_۰^۱(u+\frac{۱}{۲})du=۱۲[\frac{u^۲}{۲}+\frac{u}{۲}]_۰^۱=۱۲$$

۳۳ـ گزینه «۲»

روش اول: (استفاده از قضیه‌ی دیریکله) این مثال نمونه‌ی خوبی از کاربرد قضیه‌ی دیریکله است. ناحیه‌ی D در $\frac{1}{8}$ اول قرار دارد و توسط نامعادله‌ی $x+y+z\le 1$ مشخص شده است. در واقع داریم $0\le x+y+z\le 1$. بنابراین در فرمول دیریکله داریم $h_1=0$ و $h_2=1$. اکنون به این ترتیب ادامه می‌دهیم:

$$I=\underbrace{\iiint_D x^2 dzdydx}_{I_1}+\underbrace{\iiint_D y^2 dzdydx}_{I_2}+\underbrace{\iiint_D z^2 dzdydx}_{I_3}$$

طبق فرمول دیریکله (برای اعداد صحیح m، n و k) داریم:

$$\iiint_D f(x+y+z)x^m y^n z^k dzdydx=\frac{m!n!k!}{(m+n+k+2)!}\int_{h_1}^{h_2} f(t)t^{m+n+k+2}dt$$

در همه‌ی انتگرال‌های I_1، I_2 و I_3 داریم $f(x+y+z)=1$.

در I_1 داریم $m=2$ و $n=k=0$، در I_2 داریم $n=2$ و $m=k=0$، در I_3 داریم $k=2$ و $n=m=0$

بنابراین جواب این انتگرال‌ها با هم برابر است و همه‌ی آن‌ها به این صورت به‌دست می‌آیند:

$$I_1=I_2=I_3=\frac{2!}{4!}\int_0^1 t^4 dt=\frac{2!}{4!}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{60}$$

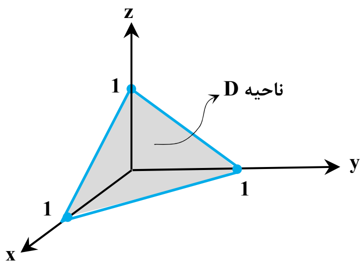
در نتیجه داریم:

$$I=\frac{1}{60}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}$$

اگر به روش دوم دقت کنید متوجه می‌شوید که بدون استفاده از قضیه‌ی دیریکله حل این مثال چقدر سخت‌تر خواهد شد.

روش دوم: با وجود آن که عامل $x^2+y^2+z^2$ در این انتگرال حضور دارد اما چون ناحیه‌ی D کروی نیست از دستگاه کروی استفاده نمی‌کنیم و حدود x، y و z را در همان دستگاه دکارتی می‌نویسیم:

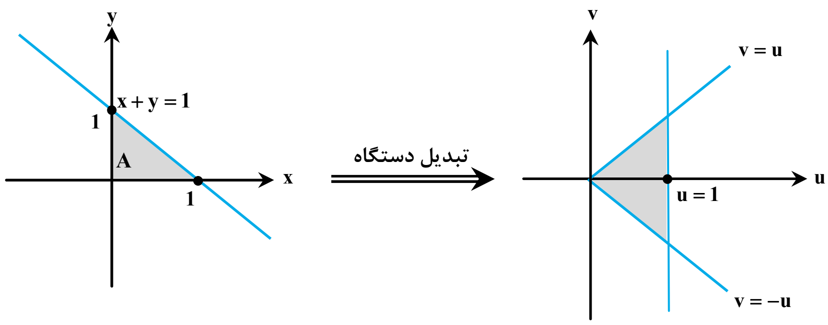
صفحات $x+y+z=1$، $z=0$، $x=0$ و $y=0$ مرزهای ناحیه‌ی D هستند. حدود z به وضوح مشخص شده‌اند: $z=0$ و $z=1-x-y$. کران‌های پایین x و y نیز عبارتند از $x=0$ و $y=0$ اما برای تعیین کران بالای آن‌ها باید صفحات $z=0$ و $z=1-x-y$ را برخورد دهیم. خط $x+y=1$ به‌دست می‌آید. این ناحیه را که تصویر D بر صفحه‌ی $x-y$ است با A نشان داده‌ایم:



$$I=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iint_A\int_{z=0}^{z=1-x-y}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$$

$$\Rightarrow I=\iint_A\left[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dydx=\iint_A\left(\frac{1-x-y}{3}\right)[3x^2+3y^2+(1-x-y)^2]dydx$$

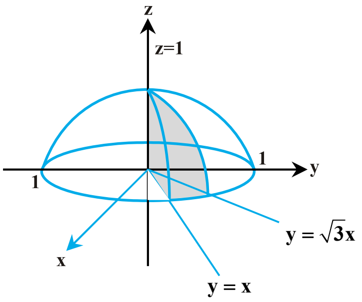
برای ساده‌سازی ادامه حل مسأله می‌توانیم از تبدیل مختصات به صورت $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\\ |J|=\frac{1}{2}\end{cases}$ استفاده کنیم.



$$I=\int_{u=0}^{u=1}\int_{v=-u}^{v=+u}\left(\frac{1-u}{3}\right)\left[(1-u)^2+\frac{3}{2}u^2+\frac{3}{2}v^2\right].\left(\frac{du.dv}{2}\right)=\frac{1}{6}\int_{u=0}^{u=1}(1-u).\left[\left\{\frac{3}{2}u^2+(1-u)^2\right\}v+\frac{v^3}{2}\right]_{v=-u}^{v=+u}.du$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{6}\int_{u=0}^{u=1}(1-u).[3u^3+2u+2u^3-4u^2+u^3]du=\frac{1}{6}\int_0^1[10u^3+2u-6u^2-6u^4]du$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{6}\cdot\left\{\frac{5}{2}u^4+u^2-2u^3-\frac{6}{5}u^5\right\}_{u=0}^{u=1}=\frac{1}{6}\left[\frac{5}{2}+1-2-\frac{6}{5}\right]=\frac{1}{6}\left\{\frac{25-10-12}{10}\right\}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{1}{20}$$

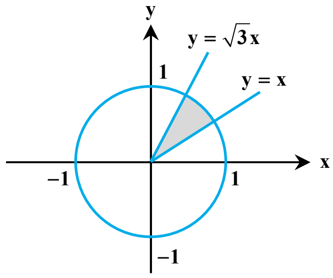


۳۴ـ گزینه «۱» حجم محدود به نواحی $z=1-x^2-y^2$ و $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ و $z=0$ را می‌خواهیم بیابیم:

$$V=\iiint_D dzdydx$$

از معادله‌ی $z=1-(x^2+y^2)$ که شامل x^2+y^2 است حدس می‌زنیم استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب باشد. حدود z عبارتند از $z=1-(x^2+y^2)=1-r^2$ و $z=0$.

برای تشخیص حدود r و θ ابتدا تصویر این جسم را بر صفحه‌ی xoy مشخص می‌کنیم. خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ داده شده‌اند. با برخورد دادن $z=0$ و $z=1-(x^2+y^2)$ به دایره‌ی $x^2+y^2=1$ می‌رسیم. تصویر این جسم را بر صفحه‌ی xoy نشان داده‌ایم:



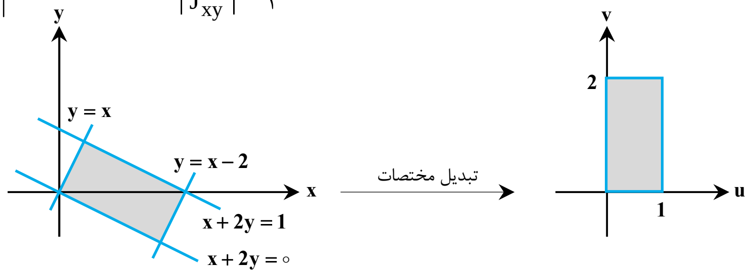
روی خط $y=x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{4}$ و روی خط $y=\sqrt{3}x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{3}$. (می‌توانید از فرمول $\theta=tg^{-1}(\frac{y}{x})$ استفاده کنید.) حدود r نیز به وضوح $0\le r\le 1$ هستند.

$$V=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1\int_0^{1-r^2} rdzdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 r[z]_0^{1-r^2}drd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1(r^2-r^3)drd\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}[\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}]_0^1 d\theta=\frac{1}{12}[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{144}$$

۳۵ـ گزینه «۲» ناحیه‌ی D دارای چهار مرز است. این نواحی را نواحی لوزی‌گون می‌نامیم. معادله‌ی مرزها را طوری بنویسید که سمت راست تساوی عدد ثابت باشد: $x-y=0$، $x-y=2$، $x+2y=0$ و $x+2y=1$. پس تغییر متغیر $v=x-y$ و $u=x+2y$ باعث می‌شود معادله‌ی مرزها به صورت $u=0$، $u=2$، $v=0$ و $v=1$ در آیند که نشان‌دهنده‌ی یک مستطیل است. رسم شکل ضرورتی ندارد اما برای توضیح بهتر شکل ناحیه‌ی D را در هر دو دستگاه نشان داده‌ایم. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3\Rightarrow |J_{uv}|=\frac{1}{|J_{xy}|}=\frac{1}{3}$$



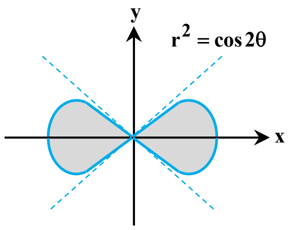
$$I=\iint\frac{x+2y}{\cos(x-y)}.dx\,dy=\int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=2}(\frac{u}{\cos v})(\frac{1}{3}dv\,du)=\int_{u=0}^{u=1}(\frac{u}{3}).[\int_0^2\sec v\,dv].du=\int_0^1\frac{u}{3}[Ln|tg\,v+\sec v|]_0^2\,du$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{u}{3}(Ln|tg2+\sec 2|)du=Ln|tg2+\sec 2|.[\frac{u^2}{6}]_0^1=\frac{1}{6}Ln|tg2+\sec 2|$$

در حل انتگرال فوق از نتیجه‌ی انتگرال مقابل استفاده کردیم.

$$\int\sec x\,dx=Ln|\sec x+tg\,x|+c$$

۳۶ـ گزینه «۱» معادله منحنی $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$، در مختصات قطبی به صورت $r^4=r^2\cos 2\theta$ در می‌آید. بنابراین $r=0$ یا $r^2=\cos 2\theta$ یعنی $r=\sqrt{\cos 2\theta}$. از همین‌جا می‌توانیم حدود θ را هم تشخیص دهیم. در معادله‌ی $r=\sqrt{\cos 2\theta}$ باید $\cos 2\theta \ge 0$ باشد پس $-\frac{\pi}{2}\le 2\theta \le \frac{\pi}{2}$ به عبارتی $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. البته منحنی $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ یک لمنیسکات است که یک نیمه هم در سمت چپ یعنی در فاصله‌ی $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$ دارد. پس ما انتگرال را روی نیمه‌ی سمت راست گرفته و دو برابر می‌کنیم. در این نیمه حدود انتگرال به صورت زیر است:



$$0\le z\le r^2 \qquad 0\le r\le\sqrt{\cos 2\theta} \qquad -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

$$\text{حجم}=\iiint_S d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2.r\,dr\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\theta}{4}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$\xrightarrow{u=2\theta,\,du=2d\theta}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du=\frac{\pi}{8}$$

۳۷ـ گزینه «۳» طبق فرمول حد مجموع برای انتگرال‌های سه‌گانه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\,dv$$

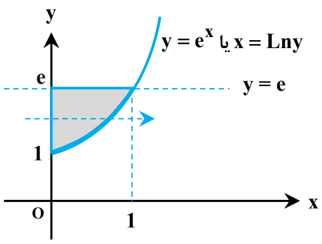
در تست فوق داریم:

$$f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)=e^{\frac{i+j+k}{n}}=e^{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}+\frac{k}{n}}\Rightarrow f(x,y,z)=e^{x+y+z}$$

بنابراین مقدار حد برابر است با $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dzdydx$. تابع زیر انتگرال را می‌توان به صورت ضرب توابع یک متغیره نوشت: $e^{x+y+z}=e^xe^ye^z$ و کران‌ها هم عدد ثابت هستند. بنابراین می‌توانیم انتگرال سه‌گانه را به صورت ضرب سه انتگرال یگانه بنویسیم:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dzdydx=\left(\int_0^1 e^xdx\right)\left(\int_0^1 e^ydy\right)\left(\int_0^1 e^zdz\right)=(e-1)(e-1)(e-1)=(e-1)^3$$

۳۸ـ گزینه «۳» ملاحظه می‌گردد $e^x<y<e$ با رسم دو خط $y=e$ و $y=e^x$ و رسم یک خط موازی محور x ها ملاحظه می‌گردد که منحنی مرز ناحیه را در روی خطوط $x=0$ و $x=\text{Lny}$ قطع می‌کند، و y نیز بین ۱ تا e تغییرات می‌کند، لذا داریم:



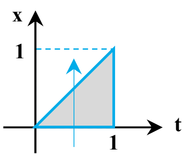
$$I=\int_0^1\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\text{Lny}}dydx=\int_1^e\int_0^{\text{Lny}}\frac{1}{\text{Lny}}dxdy=\int_1^e\left[\frac{x}{\text{Lny}}\right]_0^{\text{Lny}}dy=\int_1^e 1\times dy=[y]_1^e=e-1$$

۳۹ـ گزینه «۲»

$$I=\int_0^1 F(t)dt=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\int_1^x e^{t^2}dtdx=-\int_0^1\int_x^1 e^{t^2}dtdx$$

محاسبه e^{t^2} ممکن نیست و لذا ناحیه انتگرال را رسم و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\le t\le 1\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow$$

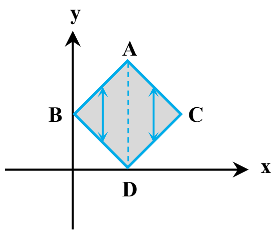


$$I=-\int_0^1\int_0^t e^{t^2}dxdt=-\int_0^1[xe^{t^2}]_0^t dt=\int_0^1 -te^{t^2}dt=\left[-\frac{e^{t^2}}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{1-e}{2}$$

۴۰ـ گزینه «۱» توجه شود ناحیه انتگرال‌گیری منظم نیست چون باید دو سر فلش در انتها و ابتدای مرز شامل یک منحنی باشد، اما ملاحظه می‌گردد در طرفین خطچین نشان داده شده معادلات خط دو سر فلش تغییر می‌کند. AC و CD به معادله خط AB و BD تبدیل می‌شوند.)

$$\left.\begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

با رسم ناحیه در مختصات دکارتی داریم:



$$\begin{cases} AB \Rightarrow y = x + \pi \Rightarrow x - y = -\pi \\ AC \Rightarrow y = -x + 3\pi \Rightarrow x + y = 3\pi \\ BD \Rightarrow y = -x + \pi \Rightarrow x + y = \pi \\ DC \Rightarrow y = x - \pi \Rightarrow x - y = \pi \end{cases}$$

ملاحظه می‌گردد $-\pi \le u \le \pi$ و $\pi \le v \le 3\pi$ می‌باشد:

$$I = \int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v \,|J|\, du dv = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \sin^2 v dv = \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\left(\frac{1-\cos 2v}{2}\right) dv = \frac{\pi^3}{6}\left[v - \frac{1}{2}\sin 2v\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}$$

$$= \frac{abc}{3}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{tg^{-1}(\sqrt{2})}\left[\sin\phi - \frac{\sqrt{3}\sin\phi}{9\cos^3\phi}\right] d\phi d\theta = \frac{abc}{3}\int_{0}^{2\pi}\left[-\cos\phi - \frac{\sqrt{3}}{18\cos^2\phi}\right]_{0}^{tg^{-1}(\sqrt{2})} d\theta$$

$$= \frac{abc}{3}(2\pi)\left[-\cos(tg^{-1}\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{3}}{18\cos^2(tg^{-1}\sqrt{2})} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{18}\right] = -\frac{abc}{3}(2\pi)\left[\cos\phi + \frac{\sqrt{3}}{18}(1 + tg^2\phi)\right]_{0}^{tg^{-1}\sqrt{2}}$$

دقت کنید که $1 + tg^2\phi = \sec^2\phi = \frac{1}{\cos^2\phi}$ است. از همین تساوی خواهیم داشت: $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\phi}}$

حالا می‌توانیم حاصل انتگرال را حساب کنیم:

$$V = -\frac{abc}{3}(2\pi)\left[\frac{1}{\sqrt{1+2}} + \frac{\sqrt{3}}{18}(1+2) - 1 - \frac{\sqrt{3}}{18}\right] = -\frac{abc}{3}(2\pi)\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right] = -\frac{abc}{27}(2\pi)\left[\frac{9}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 9\right] = -\frac{abc}{27}(2\pi)$$

$$= -\frac{abc}{27}(2\pi)[4\sqrt{3} - 9] = \frac{abc}{27}(2\pi)(9 - 4\sqrt{3})$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۱» چون خم C بسته است، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$P = e^x(1-\cos y)\ ,\ Q = -e^x(y-\sin y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x(y-\sin y) - e^x \sin y = -ye^x$$

$$\int_C ((1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy) = \iint_D -ye^x dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x}(-ye^x)dydx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[e^x \times \frac{1-\cos 2x}{2}]dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(e^x - e^x\cos 2x)dx = -\frac{1}{4}(e^x - \frac{1}{5}(e^x\cos 2x + 2e^x \sin 2x))\Big|_0^{\pi} = -\frac{e^{\pi}-1}{5}$$

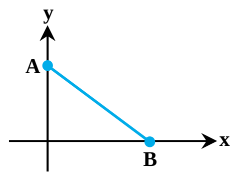
۲ـ گزینه «۳» چون خم C بسته است، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$P = e^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy) - 2xe^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy)$$

$$Q = e^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{-(x^2-y^2)}\sin(2xy) + 2ye^{-(x^2-y^2)}\cos(2xy)$$

چون $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$، پس طبق قضیه گرین حاصل انتگرال روی خم بسته صفر است.

۳ـ گزینه «۱» معادله‌ی پارامتری پاره‌خط AB به‌صورت زیر است:



$$\vec{C}(t) = t\,\vec{i} + (\pi - t)\vec{j}\ \ ,\ \ 0 \le t \le \pi$$

$$dx = dt\ , dy = -dt$$

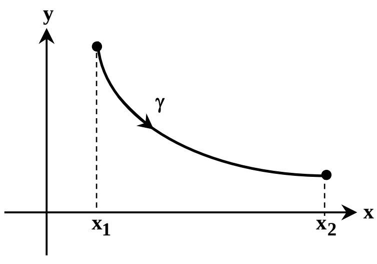
$$\int_{AB}(\sin y)dx + (\sin x)dy = \int_0^{\pi}\sin(\pi - t)dt + (\sin t)(-dt) = \int_0^{\pi}(\sin t - \sin t)dt = 0$$

۴ـ گزینه «۲» برای این که بخواهیم کار انجام شده میدان برداری $\vec{F}$ را حساب کنیم، باید حاصل انتگرال $\int_C \vec{F}.dr$، را محاسبه کنیم و برای این منظور ابتدا منحنی C را پارامتری می‌کنیم، با توجه به ضابطه‌ی منحنی C با فرض $x = t$، آن‌گاه $y = 4 - t^2$، اما در مورد حدود انتگرال، چون $-2 \le x \le 1$، لذا $-2 \le t \le 1$ خواهد بود، پس داریم:

$$\int_C \vec{F}.dr = \int_C (y - 2x^2)dx + 4dy = \int_{-2}^{1}(4 - t^2 - 2t^2)dt + 4(-2tdt) = \int_{-2}^{1}(-3t^2 - 8t + 4)dt = [-\frac{3t^3}{3} - \frac{8t^2}{2} + 4t]_{-2}^{1}$$

$$= -1 - 4 + 4 + (-2)^3 + 4(-2)^2 - 4(-2) = 15$$

۵ـ گزینه «۱» با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی می‌بینیم که میدان برداری $\vec{F} = (P, Q) = (\frac{1}{x}(Lnx + Lny), \frac{1}{y}(Lnx + Lny))$ پایستار است:



$$\left.\begin{array}{l} P_y = \frac{1}{x}(0 + \frac{1}{y}) = \frac{1}{xy} \\ Q_x = \frac{1}{y}(\frac{1}{x} + 0) = \frac{1}{xy} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_x = P_y$$

در نتیجه انتگرال مستقل از مسیر است و کافی است نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر را در تابع پتانسیل $\vec{F}$ قرار بدهیم.

$$\text{تابع پتانسیل} = g(x,y) = \int \frac{1}{x}(Lnx + Lny)dx + \int(0)dy = \frac{1}{2}(Lnx + Lny)^2 + k = \frac{Ln^2 xy}{2} + k$$

در اولین انتگرال با فرض $u = Lnx + Lny$ داریم $du = \frac{1}{x}dx$، پس $\int udu = \frac{u^2}{2}$.

نقاط ابتدا و انتهای مسیر عبارتند از: (x_1, y_1) و (x_2, y_2). البته هر دوی آن‌ها روی منحنی $xy = a$ قرار دارند:

$$\int \vec{F}.d\vec{r} = g(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = \frac{Ln^2(x_2y_2)}{2} - \frac{Ln^2(x_1y_1)}{2} = \frac{Ln^2(a)}{2} - \frac{Ln^2(a)}{2} = 0$$

۶ـ گزینه «۲» چون روی هر خم بسته‌ای انتگرال صفر است، پس میدان پایستار است، و بنابراین $\text{curl}\vec{A} = 0$.

۷ـ گزینه «۴» سؤال ساده‌ای است، کافی است ابتدا حاصل $\vec{F}\times d\vec{r}$ را حساب کنیم، قبل از آن $d\vec{r}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+(2t)\vec{j}+t^3\vec{k}\ \Rightarrow r'(t)=2t\vec{i}+2\vec{j}+3t^2\vec{k}$$

از طرفی $\vec{F}=xy\vec{i}-z\vec{j}+x^2\vec{k}=2t^3\vec{i}-t^3\vec{j}+t^4\vec{k}$ بنابراین داریم:

$$\vec{F}\times d\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t^3 & -t^3 & t^4\\ 2t & 2 & 3t^2\end{vmatrix}=(-3t^5-2t^4)\vec{i}-4t^5\vec{j}+(4t^3+2t^4)\vec{k}$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_C \vec{F}\times d\vec{r}=\int_0^1[(-3t^5-2t^4)\vec{i}-4t^5\vec{j}+(4t^3+2t^4)\vec{k}]dt=-\frac{9}{10}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{7}{5}\vec{k}$$

البته اگر فقط از یکی از مؤلفه‌ها انتگرال حساب شود دیگر نیاز نیست بقیه محاسبه شوند، چون گزینه‌ها متفاوت هستند!

۸ـ گزینه «۲» همان‌طور که از صورت سؤال مشخص است، خم C شامل سه پاره‌خط است که آن‌ها را C_1، C_2 و C_3 می‌نامیم و لذا باید انتگرال‌گیری را به سه قسمت تقسیم کنیم، برای این منظور ابتدا معادلات پارامتری C_1، C_2 و C_3 را به‌دست می‌آوریم، قبل از آن یادآوری می‌کنم؛ معادله‌ی پارامتری پاره‌خطی که نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ را به نقطه‌ی $B(x_2,y_2,z_2)$ وصل می‌کند به‌صورت زیر است:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$$

بنابراین معادلات پارامتری سه منحنی به شکل زیر است:

$$C_1:\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-0}{1-0}=t,\ x=0\ \Rightarrow\begin{cases}x=0\ \Rightarrow dx=0\\ y(t)=t\ \Rightarrow dy=dt\\ z(t)=t\ \Rightarrow dz=dt\end{cases}\quad ,\ 0\le t\le 1$$

$$C_2:\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-1}{3-1}=t\ \Rightarrow\begin{cases}x=t\ \Rightarrow dx=dt\\ y=t+1\ \Rightarrow dy=dt\\ z=2t+1\ \Rightarrow dz=2dt\end{cases}\quad ,\ 0\le t\le 1$$

$$C_3:\frac{z-3}{4-3}=t\ ,\ x=1,\ y=2\ \Rightarrow\begin{cases}x=1\ \Rightarrow dx=0\\ y=2\ \Rightarrow dy=0\\ z=t+3\ \Rightarrow dz=dt\end{cases}\quad ,\ 0\le t\le 1$$

$$I=\int_{C_1}\cdots+\int_{C_2}\cdots+\int_{C_3}\cdots=\int_0^1(-tdt+2tdt)+\int_0^1(2t+1)^2dt-(2t+1)dt+2(t+1)2dt+\int_0^1 2\times 2dt$$

$$=[\frac{-t^2}{2}+\frac{2t^2}{2}]_0^1+[\frac{1}{2}\times\frac{(2t+1)^3}{3}-\frac{2t^2}{2}-t+4\times\frac{t^2}{2}+4t]_0^1+[4t]_0^1=(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}(2\times1+1)^3-1-1+2+4+4)-(\frac{1}{6})=\frac{77}{6}$$

۹ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید، داریم:

$$\int_C \vec{T}.d\vec{R}=\int_C \vec{T}.\vec{T}ds=\int_C|T|^2\,ds=\int_C ds$$

انتگرال اخیر همان محیط دایره به شعاع a می‌باشد، بنابراین داریم:

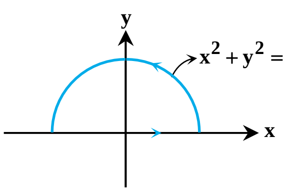
$$\int_C \vec{T}.d\vec{R}=2\pi a$$

۱۰ـ گزینه «۱» می‌دانیم معادله پارامتری بیضی داده شده به‌صورت $r(t)=(a\cos t,b\sin t)$، $0\le t\le\pi$ می‌باشد، که با جایگذاری در انتگرال داده شده نتیجه می‌شود:

$$\int_C y^2dx+x^2dy=\int_0^\pi(b^2\sin^2t(-a\sin t)+a^2\cos^2t(b\cos t)dt=\int_0^\pi(-ab^2\sin^3t+a^2b\cos^3t)dt$$

$$=\int_0^\pi(-ab^2\sin t(1-\cos^2t)+a^2b\cos t(1-\sin^2t))dt=[-ab^2(-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3t)+a^2b(\sin t-\frac{\sin^3t}{3})]_0^\pi=\frac{-4}{3}ab^2$$

۱۱ـ گزینه «۱» چون منحنی C بسته است، می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.



$$F=(x-y,1)\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0-(-1)=1$$

بنابراین طبق قضیه گرین داریم: $\int_C F.dr=\iint 1dA=$ مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}(\pi(2\sqrt{2})^2)=4\pi$

۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به توضیحات متن کتاب حاصل انتگرال داده شده در گزینه (۳) برابر با 2π می‌شود، بنابراین گزینه (۳) غلط است. در گزینه (۱) چون جهت ساعتگرد (منفی مثلثاتی) است بنابراین حاصل انتگرال -2π می‌شود و گزینه (۲) هم درست است، چون مبدأ درون بیضی داده شده قرار ندارد و لذا حاصل انتگرال صفر است و بالاخره گزینه (۴) هم درست است چون طبق مطالب متن کتاب برابر با 2π می‌شود.

۱۳ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه مسیر نیم‌دایره بسته است، بنابراین بهتر است از قضیه‌ی گرین کمک بگیریم.

$$\left.\begin{array}{l} P = x - y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \\ Q = x + y^5 \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

بنابراین داریم:

$$I = \iint_D 2\,dx\,dy = 2 \times (\text{D مساحت ناحیه}) = 2 \times \frac{1}{2}(\pi \times 1^2) = \pi$$

۱۴ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه مسیر بسته است از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم، چون جهت داده نشده آن را مثبت در نظر می‌گیریم:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\, dA$$

واضح است چون مقدار عبارت زیر انتگرال بزرگتر از صفر است، پس حاصل انتگرال هم بزرگتر از صفر است، اما دقت کنید استدلال فوق با در نظر گرفتن جهت مثبت برای مرز C به‌دست آمد، اگر جهت منفی را در نظر بگیریم، آن‌گاه حاصل انتگرال باید در یک منفی ضرب شود، پس حاصل انتگرال یا مثبت است و یا منفی است.

۱۵ـ گزینه «۲»

روش اول: میدان برداری $\vec{F} = (f(x+y+z), f(x+y+z), f(x+y+z))$ پایستار است و تابع پتانسیل آن را می‌توان $\int f(u)du$ در نظر گرفت در این صورت داریم:

$$I = \int_A^B f(x+y+z)(dx+dy+dz) = \int_A^B f(u)du$$

روش دوم: البته این سؤال را می‌توان به‌صورت ساده مقابل نیز پاسخ داد:

$$x+y+z = u \xrightarrow{\text{از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم}} dx+dy+dz = du$$

$$\int_A^B f(x+y+z)(dx+dy+dz) = \int_A^B f(u)du$$

۱۶ـ گزینه «۳» ابتدا با فرمول $\int_C (Pdy - Qdx) = $ شار آغاز می‌کنیم، در ادامه از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. ناحیه‌ی درون منحنی C را با D نشان می‌دهیم. طبق صورت سؤال در ناحیه‌ی D داریم $0 \le \theta \le \pi$ و $1 \le r \le 2$.

$$\text{شار} = \int_C Pdy - Qdx = \int_C -Qdx + Pdy = \int_C -Ln(x^2+y^2)dx + tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-Ln(x^2+y^2)\right)\right]dydx = \iint_D \left[\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{2y}{x^2+y^2}\right]dydx = \iint_D \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2}\right]dydx$$

$$= \iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dydx = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r\sin\theta}{r^2} rdrd\theta = \int_0^\pi \int_1^2 \sin\theta drd\theta = \int_0^\pi [r]_1^2 \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = 2$$

۱۷ـ گزینه «۳» با کمی دقت واضح است غیر از روش پارامتری‌سازی، راه‌حل مناسب‌تری برای حل این سؤال وجود دارد! با نگاهی کوتاه می‌توان فهمید تابع زیر انتگرال، دیفرانسیل کامل است، چون داریم: $d(xyz) = (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz$

و لذا داریم:

$$I = \int_A^B d(xyz) = [xyz]_A^B = 1394 \times 1 \times 2 - 1 \times 2 \times 1393 = 2788 - 2786 = \mathbf{2}$$

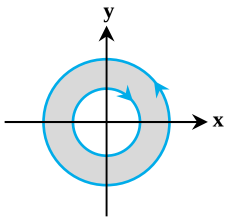
توضیح: به بیان دیگر تابع $f = xyz$، یک تابع پتانسیل برای میدان برداری $\vec{F} = (yz)\vec{i} + (zx)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ است که به دلیل واضح بودن، دیگر از روش‌های گفته شده آن را به‌دست نیاوردیم و به‌صورت شهودی آن را نوشتیم!

۱۸ـ گزینه «۱» واضح است میدان $\vec{F}$ پایستار است و بنابراین به مسیر بستگی ندارد و لذا تابع پتانسیل را حساب می‌کنیم:

$$F = \int (ye^{xy} + y\cos xy)dx + \int 3y^2 dy + \int 6zdz = e^{xy} + \sin xy + y^3 + 3z^2$$

$$I = f(C(1)) - f(C(0)) = f(0,0,1) - f\left(0,\frac{\pi}{2},0\right) = (e^0 + 0 + 0 + 3\times 1^2) - \left(e^0 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right) = 3 - \frac{\pi^3}{8}$$

۱۹ـ گزینه «۲» چون خم C بسته است، می‌توانیم از قضیهٔ گرین استفاده کنیم.



$$\vec{F} = (x^3 - x^2 y, xy^2) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - (-x^2) = x^2 + y^2$$

بنابراین انتگرال موردنظر برابر است با:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_2^4 r^2 .r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r^3 dr = 120\pi$$

۲۰ـ گزینه «۱» ابتدا شرط پایستار بودن را کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} P = \dfrac{y^2}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2} \\ Q = -\dfrac{2y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$ میدان پایستار است

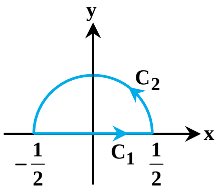
چون میدان پایستار است، پس کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد (البته این موضوع از صورت خود سؤال نیز معلوم است، چون طراح سؤال فقط دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی مسیر را مشخص کرده است و این یعنی طراح به طور غیرمستقیم به ما می‌گوید میدان پایستار است!!) پس تابع پتانسیل را حساب می‌کنیم:

$$f = \int \frac{y^2}{x^2} dx = -\frac{y^2}{x}$$

بنابراین داریم:

$$W = f(4,-2) - f(1,1) = -\frac{(-2)^2}{4} - \left(-\frac{1^2}{1^2}\right) = -1 + 1 = 0$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱ـ گزینه «۴» مطابق شکل مقابل خم C از اجتماع دو خم $C_۱$ و $C_۲$ تشکیل شده است، بنابراین انتگرال را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$I = I_۱ + I_۲ = \int_{C_۱}(-xy)dx + (y^۲ + ۱۶)dy + \int_{C_۲}(-xy)dx + (y^۲ + ۱۶)dy$$

ابتدا $I_۱$ را حساب می‌کنیم: با توجه به این که $y = ۰$، لذا $dy = ۰$، بنابراین حاصل انتگرال $I_۱$ صفر است، (به جای y و dy صفر قرار دهید!)

برای حل انتگرال $I_۲$ باید ابتدا منحنی $C_۲$ را برای $۰ \le t \le \pi$ پارامتری کنیم: $\vec{C}_۲(t) = (\frac{۱}{۲}\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$

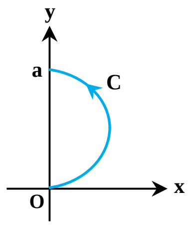
پس داریم: $I_۲ = \int_{C_۲}(-xy)dx + (y^۲ + ۱۶)dy = \int_۰^{\pi}(\frac{۵}{۴}\sin^۲ t\cos t + ۱۶\cos t)dt = (\frac{۱۵}{۱۲}\sin^۳ t + ۱۶\sin t)\Big]_۰^{\pi} = ۰$

بنابراین $I = I_۱ + I_۲ = ۰ + ۰ = ۰$.

تذکر: پاسخ به این سؤال با به کارگیری قضیه‌ی گرین هم ممکن است، اما راه‌حل و حجم محاسبات اگر سخت‌تر از این حالت نباشد، کمتر نیست!

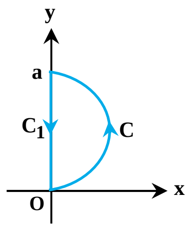
۲ـ گزینه «۴» به راحتی واضح است میدان $\vec{F}$ پایستار است و تابع پتانسیل آن به‌صورت $f = \frac{۱}{۲}Ln(x^۲ + y^۲ + z^۲)$ می‌باشد و بنابراین حاصل انتگرال به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر C وابسته است، لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f[C(۱)] = \frac{۱}{۲}Ln(۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲) = \frac{۱}{۲}Ln۳ \\ f[C(۲)] = \frac{۱}{۲}Ln(۲^۲ + ۴^۲ + ۸^۲) = \frac{۱}{۲}Ln(۸۴) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_C \vec{F}.d\vec{r} = f[C(۲)] - f[C(۱)] = \frac{۱}{۲}Ln۸۴ - \frac{۱}{۲}Ln۳ = \frac{۱}{۲}Ln\frac{۸۴}{۳} = \frac{۱}{۲}Ln۲۸ = Ln\sqrt{۲۸}$$



۳ـ گزینه «۱» برای درک بهتر سؤال مسیر C را رسم می‌کنیم. اگر بخواهیم مسیر C را پارامتری کنیم، با توجه به تابع زیر انتگرال به مشکل برمی‌خوریم، بنابراین بهترین روش اضافه کردن خط Oa به مسیر و ایجاد یک منحنی بسته است تا با این کار بتوانیم از مزایای قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. یعنی مسیر جدید شامل دو مسیر C و $C_۱$ مطابق شکل دوم است، پس قضیه گرین به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{C_۱}\vec{F}.dr + \int_C \vec{F}.dr = \iint(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \ \ R$$



اما یادتان باشد ما دنبال $\int_C \vec{F}.dr$ هستیم و بنابراین انتگرال $\int_{C_۱}\vec{F}.dr$، را به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$\int_C \vec{F}.dr = \iint(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy - \int_{C_۱}\vec{F}.dr \ \Rightarrow I = I_۱ - I_۲$$

برای رسیدن به I باید دو انتگرال $I_۱$ و $I_۲$ را حساب کنیم، ابتدا $I_۱$، یعنی انتگرال دوگانه را حساب می‌کنیم و برای این کار داریم:

$$\left.\begin{array}{l} Q = e^y\sin x - x \ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y\cos x - ۱ \\ P = e^y\cos x + y \ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^y\cos x + ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (e^y\cos x - ۱) - (e^y\cos x + ۱) = -۲$$

بنابراین $I_۱$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_۱ = \iint_D -۲dxdy = -۲\iint_D dxdy$$

اما انتگرال دوگانه فوق برابر با مساحت ناحیه D، یعنی مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{a}{۲}$ است که می‌دانیم برابر با $S = \frac{۱}{۲}(\pi(\frac{a}{۲})^۲) = \frac{\pi a^۲}{۸}$ است. بنابراین حاصل انتگرال دوگانه برابر با $I_۱ = -۲(\frac{\pi a^۲}{۸}) = -\frac{\pi a^۲}{۴}$ می‌باشد، اما برای محاسبه‌ی انتگرال $I_۲$، ابتدا لازم است مسیر $C_۱$ پارامتری شود. معادله‌ی پارامتری $C_۱$ به‌صورت $x = ۰$ و $y = t$ است، بنابراین $I_۲$ به شکل مقابل نوشته می‌شود: $I_۲ = \int_a^۰(e^t + t)(۰)dt + ۰dt = ۰$

پس حاصل انتگرال خواسته شده برابر با $-\frac{\pi a^۲}{۴} = I = I_۱ - I_۲ = -\frac{\pi a^۲}{۴} - ۰$ است.

۴ـ گزینه «۴» با توجه به این که منحنی بسته است، بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} P=\ln(y+۱) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{۱}{y+۱} \\ Q=-\frac{xy}{y+۱} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{y}{y+۱}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-y}{y+۱}-\frac{۱}{y+۱}=-\frac{y+۱}{y+۱}=-۱$$

بنابراین داریم:

$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(-۱)dydx=-\int_{x=۰}^{x=۴}\int_{y=۰}^{y=(۲-\sqrt{x})^۲}dydx=-\int_۰^۴[(۴+x)-۴\sqrt{x}]dx=-[۴x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{۸}{۳}\sqrt{x^۳}]_۰^۴$$

$$\Rightarrow I=-(۴\times۴+\frac{۴^۲}{۲}-\frac{۸}{۳}\sqrt[۲]{۴^۳})=-(۲۴-\frac{۸}{۳}\times۸)=-(\frac{۷۲-۶۴}{۳})=-\frac{۸}{۳}$$

۵ـ گزینه «۲» همان‌طور که در متن کتاب گفتیم، صورت پارامتری شده آسترویئد داده شده به‌صورت مقابل است: $\vec{C}(t)=a\cos^۳t\,\vec{i}+a\sin^۳t\,\vec{j}$

$$ds=\sqrt{x_t'^۲+y_t'^۲}dt=\sqrt{(-۳a\cos^۲t\sin t)^۲+(۳a\sin^۲t\cos t)^۲}dt=\sqrt{۹a^۲\sin^۲t\cos^۲t(\sin^۲t+\cos^۲t)}\,dt=۳a|\sin t\cos t|\quad,\ ۰\le t\le ۲\pi$$

بنابراین انتگرال خط داده شده به‌صورت مقابل است (چون C آسترویئد است t از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند.)

$$I=\int_۰^{۲\pi}(a^{\frac{۴}{۳}}\cos^۴t+a^{\frac{۴}{۳}}\sin^۴t)(۳a|\sin t\cos t|)dt$$

توجه کنید که به دلیل تقارن آسترویئد در چهار ناحیه، مختصات می‌توانیم انتگرال را در ناحیه اول به‌دست آورده و حاصل را چهار برابر کنیم:

$$=۴\times۳a^{\frac{۷}{۳}}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\cos^۵t\sin t+\sin^۵t\cos t)dt=۱۲a^{\frac{۷}{۳}}(\frac{-\cos^۶t}{۶}+\frac{\sin^۶t}{۶})\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۱۲a^{\frac{۷}{۳}}[\frac{۱}{۶}-(-\frac{۱}{۶})]=۴a^{\frac{۷}{۳}}$$

۶ـ گزینه «۴» با توجه به‌صورت سؤال که خم داده نشده، و فقط نقاط انتهایی و ابتدایی خم داده شده نتیجه می‌گیریم مقدار انتگرال مستقل از مسیر است.

معادله پارامتری پاره‌خطی که نقاط $(۱,\pi)$ و $(۲,\pi)$ را به هم وصل می‌کند به‌صورت مقابل است: $\vec{C}(t)=t\vec{i}+\pi\vec{j}\ ,\ ۱\le t\le ۲\ ,\ dx=dt\ ,\ dy=۰$

$$\int_{(۱,\pi)}^{(۲,\pi)}(۱-\frac{y^۲}{x^۲}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=\int_۱^۲(۱-\frac{\pi^۲}{t^۲}\cos\frac{\pi}{t})dt=(t+\pi\sin\frac{\pi}{t})\Big|_۱^۲=\pi+۱$$

۷ـ گزینه «۱» معادله پارامتری خط $C_۱$ به‌صورت $\left|\begin{array}{l}x=t+۱\\y=۵t+۱\end{array}\right.$، بنابراین $I_۱$ برابر است با:

$$I_۱=\int_۰^۱((۶t+۲)^۲-(۴t)^۲\times۵)dt=\int_۰^۱(-۴۴t^۲+۲۴t+۴)dt=(۴t+۱۲t^۲-\frac{۴۴}{۳}t^۳)\Big|_۰^۱=\frac{۴}{۳}$$

معادله سهمی موردنظر به‌صورت $y=۲(x-\frac{۱}{۴})^۲-\frac{۱}{۸}$ است که آن را می‌توان به‌صورت پارامتری $\left|\begin{array}{l}x=t\\y=۲(t-\frac{۱}{۴})^۲-\frac{۱}{۸}\end{array}\right.$ در نظر گرفت در این صورت $I_۲$ برابر است با:

$$I_۲=\int_۱^۰(t+۲(t-\frac{۱}{۴})^۲-\frac{۱}{۸})^۲-(t-۲(t-\frac{۱}{۴})^۲+\frac{۱}{۸})^۲\times(۴t-۱))dt=\frac{-۲}{۳}$$

$$\Rightarrow I_۱-I_۲=\frac{۴}{۳}-(\frac{-۲}{۳})=۲$$

۸ـ گزینه «۴» مسیر انتگرال‌گیری از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول قوس AD است که روی دایره $x^۲+y^۲=۲$ از نقطه‌ی $A(\sqrt{۲},۰)$ تا نقطه‌ی $D(۱,۱)$ می‌باشد که ابتدا این مسیر را پارامتری می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}\cos t\ ,\ y=\sqrt{۲}\sin t$$

اما حدود تغییرات t چیست؟ به راحتی داریم:

$$۱\le x\le\sqrt{۲} \Rightarrow ۱\le\sqrt{۲}\cos t\le\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le\cos t\le ۱\Rightarrow ۰\le t\le\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین برای این قسمت $۰\le t\le\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

اما قسمت دوم قوس DB از نقطه‌ی $D(۱,۱)$ تا نقطه‌ی $B(-۱,۰)$ بر روی سهمی $۲y^۲=x+۱$ است. که با فرض $y=t$، آن‌گاه $x=۲t^۲-۱$ و چون y از ۱ تا ۰ تغییر می‌کند، پس t نیز از ۱ تا ۰ تغییر خواهد کرد. بنابراین دو انتگرال بر روی دو مسیر مختلف داریم:

$$\int_{ADB}(x^۲dy+y^۲dx)=\int_{AD}(x^۲dy+y^۲dx)+\int_{DB}(x^۲dy+y^۲dx)$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}[(\sqrt{۲}\cos t)^۲(\sqrt{۲}\cos t)+(\sqrt{۲}\sin t)^۲(-\sqrt{۲}\sin t)]dt+\int_۱^۰[(۲t^۲-۱)^۲\times۱+(t^۲)(۴t)]dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3 t-\sin^3 t)dt+\int_1^0(4t^4+1-4t^2+4t^3)dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos t(1-\sin^2 t)-\sin t(1-\cos^2 t)]dt+[\frac{4t^5}{5}+t-\frac{4t^3}{3}+\frac{4t^4}{4}]_1^0$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\cos t\sin^2 t-\sin t+\sin t\cos^2 t)dt+(-\frac{4}{5}-1+\frac{4}{3}-1)=2\sqrt{2}[\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t+\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{22}{15}$$

$$=2\sqrt{2}[\sin\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\sin^3(\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{4}-\cos(0)+\frac{1}{3}\cos^3(0)]-\frac{22}{15}=2\sqrt{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{1}{3}]-\frac{22}{15}$$

$$=2\sqrt{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{2}{3}]-\frac{22}{15}=2\sqrt{2}[\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}]-\frac{22}{15}=(4-\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3})-\frac{22}{15}=\frac{12-2-4\sqrt{2}}{3}-\frac{22}{15}=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}-\frac{22}{15}$$

۹ـ گزینه «۱» مسیر انتگرال‌گیری شامل دو بخش C_1 و C_2 است که C_1 خط $y=x$ از $(0,0)$ تا $(2,2)$ و C_2 منحنی با معادله‌ی پارامتری $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$ می‌باشد. ابتدا مقدار انتگرال را برای منحنی C_1 حساب می‌کنیم، با فرض $x=t$ آن‌گاه $y=t$ و $dx=dy=dt$ و لذا داریم:

$$I_1=\int_{C_1}\frac{(2-y)dx+xdy}{x^2+(y-2)^2}=\int_0^2\frac{(2-t)dt+tdt}{t^2+(t-2)^2}=\int_0^2\frac{2dt}{t^2+t^2+4-2t}=\int_0^2\frac{dt}{t^2-2t+4t}=\int_0^2\frac{dt}{(t-1)^2+1}=[\mathrm{Arctg}(t-1)]_0^2$$

$$=\mathrm{Arctg}1-\mathrm{Arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$

حالا باید مقدار انتگرال روی مسیر C_2 هم حساب شود.

$$I_2=\int_{C_2}\frac{(2-y)dx+xdy}{x^2+(y-2)^2}=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{(2-2\sin t)(-2\sin t)dt+(2\cos t)(2\cos t)}{(2\cos t)^2+(2\sin t-2)^2}dt$$

$$I_2=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-4\sin t+4\sin^2 t+4\cos^2 t}{4\cos^2 t+4\sin^2 t+4-8\sin t}dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-4\sin t+4}{8-8\sin t}dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-4(\sin t-1)}{-8(\sin t-1)}dt$$

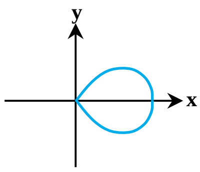
$t=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی ناسره‌گی انتگرال است اما چون عاملِ $(\sin t-1)$ از صورت و مخرج حذف می‌شود مشکلی رخ نمی‌دهد. بنابراین داریم:

$$I_2=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-4}{-8}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}$$

۱۰ـ گزینه «۱» با توجه به این که منحنی بسته است، بنابراین بهتر است از قضیه‌ی گرین کمک بگیریم:

$$\begin{cases}P=x+e^x\sin y\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y\\ Q=x+e^x\cos y\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+e^x\cos y\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

بنابراین باید حاصل انتگرال $\iint_D dxdy$ را حساب کنیم که D ناحیه نشان داده شده در شکل زیر است:



بنابراین داریم:

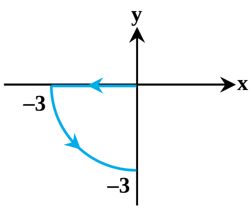
$$\iint_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}|\cos 2\theta|d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=\frac{1}{2}[\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۴» مسیر C از دو مسیر C_1 و C_2 تشکیل شده است که C_1 خط راست از مبدأ تا نقطه $(-3,0)$ است و معادله‌ی پارامتری آن به‌صورت $C_1(t): x=-3t\ ,\ y=0\ ,\ 0\le t\le 1$ است و لذا داریم:

$$I_1=\int_{C_1}(1+2x)dx+(2y)dy=\int_0^1[1+2(-3t)](-3dt)=-3\int_0^1(1-6t)dt=-3[t-\frac{6t^2}{2}]_0^1=-3(1-3)=6$$

اما C_2 دایره‌ی $x^2+y^2=9$ است که معادله‌ی پارامتری آن به شکل مقابل است: $C_2(t): x=3\cos t\ ,\ y=3\sin t$

اما در تعیین حدود t توجه کنید که $-3\le x<0$ و لذا داریم: $-3\le 3\cos t\le 0\Rightarrow -1\le\cos t\le 0\Rightarrow\pi\le t\le\frac{3\pi}{2}$



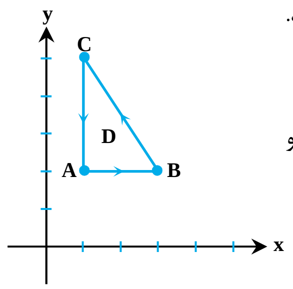
بنابراین داریم:

$$I_2=\int_{C_2}(1+2x)dx+(2y)dy=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}[(1+2\times 3\cos t)(-3\sin t)+(2\times 3\sin t)(3\cos t)]dt$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}[-3\sin t-18\sin t\cos t+18\sin t\cos t]dt=[3\cos t]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=-3\cos\pi=-3(-1)=3$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با **۹** = ۳ + ۶ می‌باشد.

توضیح: البته سؤال را می‌توان به روش‌های دیگر نیز پاسخ داد، مثلاً اگر دقت کنید؛ میدان پایستار است و بنابراین می‌توان تابع پتانسیل را حساب کرد و با قرار دادن مختصات نقاط ابتدا و انتها حاصل را حساب کرد که این روش ساده‌تر است.



۱۲ـ گزینه «۳» خم موردنظر خم بسته و به‌صورت مقابل است. توجه کنید که در انتگرال اول $\vec{F}=(x,-y)$ می‌باشد.
و F پایستار است (زیرا $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$)، بنابراین مقدار انتگرال روی خم بسته C صفر است.
چون خم C بسته است، برای محاسبه انتگرال دوم از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. در انتگرال دوم $\vec{F}=(y,-x)$ است و $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{y}=-2$، بنابراین داریم: $\oint_C (ydx-xdy)=\iint_D -2dxdy=-2\times(\text{مساحت مثلث})=-2\times\frac{3\times 2}{2}=-6$
و در نتیجه $I_1-I_2=0-(-6)=6$ است.

۱۳ـ گزینه «۳» چون منحنی بسته است بهتر است از قضیه‌ی گرین کمک بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} P=x\sin y^2-y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=2xy\cos y^2-2y \\ Q=x^2y\cos y^2+3x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy\cos y^2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3+2y \Rightarrow I=\iint_D (3+2y)dxdy$$

با توجه به ناحیه‌ی داده شده داریم:

$$u=x+y\ ,\ v=x-y\ ,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$$

از طرفی $y=\frac{1}{2}(u-v)$، لذا $2y=u-v$ و بنابراین $3+2y=3+u-v$، پس داریم:

$$I=\iint_{D_1}(3+u-v)\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\int_{-1}^{2}\int_{-1}^{3}(3+u-v)\frac{1}{2}dvdu=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\left[3v+uv-\frac{1}{2}v^2\right]_{-1}^{3}du=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}(8+4u)du=\frac{1}{2}\left[8u+2u^2\right]_{-1}^{2}=15$$

۱۴ـ گزینه «۳» در میدان برداری $\vec{F}$ داریم: $P=\frac{1}{x}(Lnx+Lny)\ ,\ Q=\frac{1}{y}(Lnx+Lny)$. در نتیجه:

$$\left\{\begin{array}{l} P_y=\frac{1}{x}(0+\frac{1}{y})=\frac{1}{xy} \\ Q_x=\frac{1}{y}(\frac{1}{x}+0)=\frac{1}{xy} \end{array}\right. \Rightarrow P_y=Q_x$$

پس میدان $\vec{F}$ پایستار است. می‌توانیم تابع پتانسیل $\vec{F}$ را پیدا کنیم.

$$g(x,y)=\int\frac{1}{x}(Lnx+Lny)dx+\int(0)dy=\frac{1}{2}(Lnx+Lny)^2+k=\frac{Ln^2xy}{2}+k$$

در این انتگرال با فرض $u=Lnx+Lny$ داریم $du=\frac{1}{x}dx$، پس $\int udu=\frac{u^2}{2}+k$.

اکنون با قرار دادن نقاط ابتدا و انتهای مسیر در تابع پتانسیل داریم:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}=g(x,y)\Big|_A^B=\frac{Ln^2xy}{2}\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=\frac{Ln^2(x_2y_2)-Ln^2(x_1y_1)}{2}$$

در نقطه‌ی B داریم $x_2y_2=b$ و در نقطه‌ی A داریم $x_1y_1=a$ در نتیجه:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}=\frac{Ln^2(b)-Ln^2(a)}{2}=\frac{1}{2}(Lnb-Lna)(Lnb+Lna)=\frac{1}{2}Ln(\frac{b}{a})Ln(ab)$$

۱۵ـ گزینه «۳» در گزینه (۲) به راحتی با کنترل شرط $\text{curl}\vec{F}=0$ واضح است میدان پایستار است و با توجه به اینکه تابع همه جا پیوسته و مسیر، منحنی بسته C است، پس حاصل انتگرال صفر می‌شود. در گزینه (۱) نیز با کنترل شرط $\text{curl}\vec{F}=0$ می‌توان گفت میدان پایستار است و چون تابع همه جا پیوسته است، لذا حاصل آن روی منحنی بسته صفر است و در گزینه (۳) در متن کتاب گفتیم حاصل انتگرال 2π می‌باشد (دقت کنید چون مبدأ درون دایره $x^2+y^2=4$ است حاصل انتگرال 2π است، اگر مبدأ درون ناحیه محدود به مرز C نبود، حاصل این انتگرال هم صفر می‌شد، همین‌جا پاسخ به تست تمام است و شما می‌توانید گزینه (۳) را انتخاب کنید چون طراح پرسیده حاصل کدام گزینه با بقیه فرق می‌کند؟ دو گزینه که صفر است، پس حاصل مقدار خواسته شده در گزینه (۴) هم صفر است. اما برای تمرین می‌توانیم مقدار این گزینه را حساب کنیم. با توجه به اینکه چرخش $\vec{V}$ به‌صورت $\oint_C \vec{V}.d\vec{r}$ تعریف می‌شود، پس باید انتگرال خط روی مسیر C حساب شود و چون منحنی بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم.

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)dA=\iint(2x+2y)dA$$

تابع $2x$ نسبت به x فرد و بیضی داده شده نسبت به محور y ها تقارن دارد پس $\iint_D 2x\,dA$ صفر است و چون تابع $2y$ نسبت به y فرد است و بیضی داده شده نسبت به محور x ها تقارن دارد پس $\iint 2y\,dA$ صفر است.

۱۶ـ گزینه «۲» قرار می‌دهیم $F=(y+z,x+z,x+y)$، در این صورت چون $\text{curl}\vec{F}=0$، است پس کار انجام شده روی منحنی بسته C صفر است.

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}+(1-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=0$$

۱۷ـ گزینه «۲» جرم مفتول با توجه به چگالی آن از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$M=\int_C (x^2y^2+z+1)ds=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^2 t+t+1)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}\,dt$$

$$M=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\frac{\sin^2 2t}{4}+t+1)dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos 4t}{8}+t+1)dt=\sqrt{2}[\frac{t}{8}-\frac{1}{32}\sin 4t+\frac{t^2}{2}+t]_0^{2\pi}=\sqrt{2}[\frac{2\pi}{8}-0+\frac{4\pi^2}{2}+2\pi]=\boldsymbol{\sqrt{2}(2\pi^2+\frac{9}{4}\pi)}$$

۱۸ـ گزینه «۳» کافیست با توجه به فرمول‌ها دو مقدار گردش و شار جداگانه محاسبه شوند:

$$\left.\begin{aligned}\text{گردش}=A&=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D 2\cos y\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos y\,dxdy=\pi\\ \text{شار}=B&=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy=\iint_D(-x)\sin y\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\sin y)dxdy=\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{B}{A}=\frac{\frac{\pi^2}{8}}{\pi}=\frac{\pi}{8}$$

۱۹ـ گزینه «۳» با یک سؤال جالب از مبحث انتگرال روی منحنی روبه‌رو هستیم، ابتدا توجه کنید که معادله‌ی مسیر داده شده یک مارپیچ فضایی است که شعاع آن ۲۰ متر است، معادله‌ی پارامتری چنین مسیری به‌صورت مقابل است: $\vec{C}(t)=(20\cos t)\vec{i}+20\sin t\vec{j}+(at)\vec{k}$

از آن‌جا که سه دور کامل از این مارپیچ طی شده است، لذا $0\le t\le 6\pi$ است، از طرفی گفته شده در آخرین لحظه یعنی $t=6\pi$ باید ارتفاع $z=90$ رسیده باشد، پس داریم:

$$z=90\xrightarrow{t=6\pi}a\times 6\pi=90\Rightarrow a=\frac{15}{\pi}$$

پس معادله‌ی پارامتری مسیر به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\vec{C}(t)=(20\cos t)\vec{i}+(20\sin t)\vec{j}+(\frac{15t}{\pi})\vec{k}$$

اما دقت کنید نیروی وارد شده به این فرد در تمام طول مسیر برابر با نیروی وزنِ خودش به علاوه‌ی وزن قوطی رنگ است و راستای این نیرو در تمام طول مسیر عمود بر سطح یعنی در راستای بردار سطح است و لذا $\vec{F}=185\vec{k}$، قابل نمایش است. بنابراین داریم:

$$\text{کار انجام شده}=\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\int_C 185dz=\int_0^{6\pi}185(\frac{15}{\pi})dt=185(\frac{15}{\pi})(6\pi)=185\times 15\times 6=\mathbf{16650}$$

۲۰ـ گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: میدان برداری $\vec{F}=(xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}))$ پایستار است و تابع پتانسیل آن به‌صورت $\int xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dx$ می‌باشد. قرار می‌دهیم $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، در این صورت $du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ یا $udu=xdx$، لذا داریم:

$$\int xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dx=\int uf(u)du$$

و بنابراین مقدار موردنظر برابر $\int_A^B uf(u)du$ است.

روش دوم: البته این سؤال را می‌توان به‌صورت ساده زیر نیز پاسخ داد:

$$x^2+y^2+z^2=u^2\Rightarrow 2xdx+2ydy+2zdz=2udu\Rightarrow xdx+ydy+zdz=udu$$

$$\int_A^B f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)=\int_A^B f(\sqrt{u^2})(udu)=\int_A^B uf(u)du$$

پاسخنامه آزمون (۱)

۱ـ گزینه «۴» با توجه به آن که S یک سطح بسته است، بهتر است میدان برداری $\vec{F}$ را چنان بیابیم که $\vec{F}.\vec{n}=z$ باشد تا بتوانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. فرض کنیم میدان برداری مورد نظر ما $\vec{F}=(P,Q,R)$ باشد. بردار یکه‌ی قائم بر سطح خارجی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ برابر است با: $\vec{n}=\frac{(۲x,۲y,۲z)}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}=(x,y,z)$ بنابراین می‌خواهیم تساوی مقابل برقرار شود: $\vec{F}.\vec{n}=xP+yQ+zR=z$

با انتخاب $Q=۰$ ؛ $P=۰$ ؛ $R=۱$ این تساوی برقرار خواهد بود، بنابراین $\vec{F}=(۰,۰,۱)$ است. حالا از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم؛ اگر D ناحیه‌ی درون کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ باشد، داریم:

$$\iint_S z\,d\sigma=\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D (\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iiint_D (۰)\,dv=۰$$

۲ـ گزینه «۲» دقت کنید که میدان انتگرال‌گیری D دایره‌ی $x^۲+y^۲=a^۲$ در صفحه xoy است. با توجه به این که معادله‌ی رویه به‌صورت $z=\frac{۱}{a}(y^۲-x^۲)$ است، لذا $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{۲x}{a}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y}{a}$ می‌باشد بنابراین $d\sigma$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$d\sigma=\sqrt{۱+(\frac{\partial z}{\partial x})^۲+(\frac{\partial z}{\partial y})^۲}\,dxdy=\sqrt{۱+(\frac{-۲x}{a})^۲+(\frac{۲y}{a})^۲}\,dxdy=\frac{۱}{a}\sqrt{a^۲+۴(x^۲+y^۲)}\,dxdy$$

$$\text{مساحت}=\iint_D \frac{۱}{a}\sqrt{a^۲+۴(x^۲+y^۲)}\,dxdy=\frac{۱}{a}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^a \sqrt{a^۲+۴r^۲}\,(rdrd\theta)=\frac{۲\pi}{a}\int_۰^a (a^۲+۴r^۲)^{\frac{۱}{۲}}rdr=\frac{۲\pi}{a}\left[\frac{(a^۲+۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۸\times\frac{۳}{۲}}\right]_۰^a$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۲\pi}{a}\left[\frac{۵a^۳\sqrt{۵}-a^۳}{۱۲}\right]=\mathbf{a^۲(۵\sqrt{۵}-۱)}\frac{\pi}{۶}$$

۳ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که صفحه‌ی تصویر دایره $x^۲+y^۲=۲$ در صفحه‌ی xoy است. قرار می‌دهیم $g(x,y)=x^۲+y^۲-z$، در این صورت داریم:

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\sqrt{۱+۴x^۲+۴y^۲}\;dA$$

$$\text{مساحت}=\iint_S d\sigma=\iint_D \sqrt{۱+۴x^۲+۴y^۲}\,dA\;\Rightarrow \text{مساحت}=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}} r\sqrt{۱+۴r^۲}\,drd\theta=۲\pi\times\frac{۱}{۱۲}(۱+۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^{\sqrt{۲}}=۲\pi\times\frac{۲۶}{۱۲}=\frac{۱۳}{۳}(\pi)$$

۴ـ گزینه «۲» اگر g را به‌صورت $g(x,y,z):y^۲+z^۲-a^۲=۰$ در نظر بگیریم. بردار واحد قائم برونسو بر S برابر است با:

از طرفی داریم:

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}=\frac{۲y\vec{j}+۲z\vec{k}}{\sqrt{۴y^۲+۴z^۲}}=\frac{y}{a}\vec{j}+\frac{z}{a}\vec{k}\quad,\quad d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{۲a}{|۲z|}dA=\frac{a}{z}dA$$

اگر تصویر S را بر صفحه xy با R نشان دهیم، ناحیه D به‌صورت مقابل خواهد بود: $D:۰\le x\le a\;,\;-a\le y\le a$

بنابراین داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint_D (yz\vec{j}+z^۲\vec{k}).(\frac{y}{a}\vec{j}+\frac{z}{a}\vec{k})\frac{a}{z}dA=\iint_D \frac{z(y^۲+z^۲)}{a}\times\frac{a}{z}dA=\iint_R a^۲dxdy=a^۲\times(\text{مساحت } D)=۲a^۴$$

۵ـ گزینه «۴» میدان برداری $\vec{F}=(M,N,P)=(x,y,z)$ را داریم. سطح S یک سطح بسته است که ناحیه درون آن را V می‌نامیم. به علت بسته بودن S می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. ناحیه V یک کره است به شعاع a. با محاسبه دیورژانس $\vec{F}$ می‌بینیم که عددی ثابت است: $\operatorname{div}\vec{F}=P_x+Q_y+R_z=۱+۱+۱=۳$. بنابراین عدد ۳ از انتگرال خارج می‌شود و انتگرال سه‌گانه‌ای که باقی می‌ماند برابر است با حجم ناحیه V:

$$\text{جواب}=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dzdydx=\iiint_V ۳\,dzdydx=۳\times(\text{حجم کره})=۳\frac{۴}{۳}\pi a^۳=۴\pi a^۳$$

۶ـ گزینه «۳» S یک سطح بسته است پس می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. اگر V ناحیه محدود شده به S باشد و $\vec{F}=(P,Q,R)=(x^۲,y^۲,z^۲)$ آن‌گاه داریم:

$$I=\iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})\,dzdydx=\iiint_V (۲x+۲y+۲z)dzdydx=۲\int_۰^a\int_۰^a\int_۰^a (x+y+z)\,dzdydx=۲\int_۰^a\int_۰^a (xz+yz+\frac{z^۲}{۲})\Big|_۰^a dydx$$

$$=۲\int_۰^a\int_۰^a (ax+ay+\frac{a^۲}{۲})dydx=۲\int_۰^a (axy+\frac{a}{۲}y^۲+\frac{a^۲}{۲}y)\Big|_۰^a dx=۲\int_۰^a (a^۲x+\frac{۱}{۲}a^۳+\frac{۱}{۲}a^۳)dx=(a^۲x^۲+a^۳x+a^۳x)\Big|_۰^a=۳a^۴$$

۷ـ گزینه «۳» با توجه به این که $\vec{r}=(x,y,z)$ داده شده است، بنابراین $\operatorname{div}\vec{r}=۱+۱+۱=۳$ و لذا $I=\iiint_V ۳dv=۳V$.

۸ـ گزینه «۳» با توجه به این که $\frac{\partial f}{\partial n}$ مشتق جهتی f در جهت n است، لذا $\frac{\partial f}{\partial n}=\vec{\nabla} f.\vec{n}$ و بنابراین داریم: $div\vec{F}=\nabla.(\vec{\nabla} f.\vec{n})=\nabla^2 f$

پس طبق قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=\iiint_D (div\vec{F})dv=\iiint_D \nabla^2 f dv=\iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dv$$

۹ـ گزینه «۱» دقت کنید که ادبیات سؤال به ما می‌گوید سطح بسته است و واضح است حل سؤال با استفاده از قضیه دیورژانس بسیار راحت‌تر است:

$$div\vec{F}=\frac{\partial(z^2-x)}{\partial x}+\frac{\partial(-xy)}{\partial y}+\frac{\partial(3z)}{z}=-1-x+3=2-x$$

$$I=\iiint_V (div\vec{F})dv=\int_0^3\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(2-x)dxdydz$$

$$=\int_0^3(2-x)dx\int_{-2}^2 dy\int_0^{4-y^2}dz=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3\times\int_{-2}^2 dy\times[z]_0^{4-y^2}=\frac{3}{2}\times\int_{-2}^2(4-y^2)dy=\frac{3}{2}\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^2=\frac{3}{2}\left[4\times 2-\frac{2^3}{3}-4(-2)+\frac{(-2)^3}{3}\right]$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{2}\left[8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right]=\frac{3}{2}\left[16-\frac{16}{3}\right]=\frac{3}{2}\times\frac{32}{3}=16$$

۱۰ـ گزینه «۱» واضح است بدون استفاده از قضیه دیورژانس حل سؤال بسیار پر زحمت و زمان‌بر است، بنابراین با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=15x^2+12y^2+3y^2+e^y\sin z+15z^2-e^y\sin z=15x^2+15y^2+15z^2=15(x^2+y^2+z^2)$$

و بنابراین داریم:

$$I=15\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv=15\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\rho^4\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=15\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_1^{\sqrt{2}}\rho^4 d\rho\right)$$

$$I=15(2\pi)[(-\cos\varphi)]_0^{\pi}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}}=15(2\pi)(2)\left[\frac{4\sqrt{2}-1}{5}\right]=\mathbf{12\pi[4\sqrt{2}-1]}$$

۱۱ـ گزینه «۲» چون S یک سطح بسته است، پس می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، ابتدا $div\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$div\vec{F}=\frac{\partial(\frac{1}{3}x^3)}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{2}{3}y^3)}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{1}{3}z^3)}{\partial z}=x^2+2y^2+z^2\Rightarrow\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V(x^2+2y^2+z^2)dv$$

دقت کنید؛ چون انتگرال‌گیری سه‌گانه در داخل بیضی‌گون $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})}+\frac{z^2}{1}=1$ صورت می‌گیرد. می‌توانیم از تبدیل بیضی‌گون کمک می‌گیریم:

$$x=\rho\cos\theta\sin\varphi\ ,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta\sin\varphi\quad,\quad z=\rho\cos\varphi\quad,\quad J=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\sin\varphi$$

می‌دانیم در این حالت بیضی‌گون برکره واحد منطبق می‌شود:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2}}[\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+2(\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)]d\rho d\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\rho^2\sin\varphi[\rho^2\sin^2\varphi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})+\rho^2\cos^2\varphi)d\rho d\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1(\rho^2\sin\varphi)(\rho^2)d\rho d\varphi d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}[\theta]_0^{2\pi}\times[-\cos\varphi]_0^{\pi}\times\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)\times(2)\times(\frac{1}{5})=\mathbf{\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}}$$

۱۲ـ گزینه «۲» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V div\vec{F}dv=\iiint_V(2x+2y+2z)dv=\iiint_V[(2(x-2)+2y+2(z-3)]dv+\iiint_V 10dv$$

حاصل انتگرال اول در تساوی آخر برابر صفر است، چون ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به خطوط $x=2$، $y=0$ و $z=3$ تقارن دارد و انتگرال دوم ۱۰ برابر حجم کره به شعاع ۳ است، یعنی برابر $10\times\frac{4}{3}\pi\times 3^3$ یا 360π است.

۱۳ـ گزینه «۴» انتگرال سطح یک تابع اسکالر مورد نظر است و ظاهراً نمی‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. اما چون S یک سطح بسته است، اگر تابع زیر انتگرال را به شکل $\vec{F}.\vec{n}$ بنویسیم می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. قرار می‌دهیم: $\vec{F}=(x,y,z)$ و روی سطح کره $\vec{n}=(x,y,z)$ می‌باشد. در این صورت $\vec{F}.\vec{n}=x^2+y^2+z^2$. بنابراین داریم:

$$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)d\sigma=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V div\vec{F}dv=\iiint_V(1+1+1)dv=3\iiint_V dv=3\ (\text{حجم کره به شعاع } 1)=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$$

۱۴ـ گزینه «۴» در $t=0$ داریم $(x,y,z)=(0,0,a)$ و در $t=\pi$ داریم $(x,y,z)=(0,0,a)$ بنابراین ابتدا و انتهای منحنی بر هم منطبق هستند، و این یعنی C یک مرز بسته است. با دقت به معادلات پارامتری C داریم: $z+x=a\cos^2 t+a\sin^2 t=a$ و $y^2=4a^2\sin^2 t\cos^2 t=4xz$ یعنی $y^2=4x(a-x)$ که به معادله‌ی $y^2+4x^2=4ax$ منجر می‌شود که یک استوانه قائم است. پس C مرز سطح S به معادله‌ی $z+x=a$ است و تصویر آن بر صفحه xoy با معادله‌ی $y^2+4x^2=4ax$ تعیین می‌شود. برای میدان برداری $\vec F=(y+z,x+z,x+y)$ داریم:

$$\mathrm{curl}\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=0$$

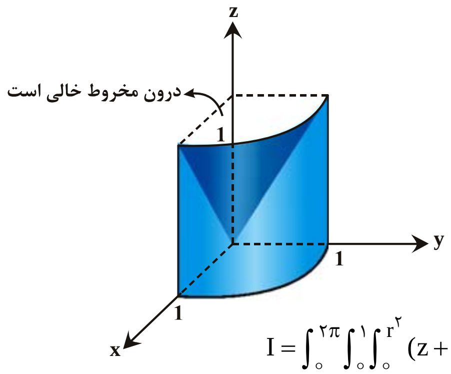
پس از دستور استوکس خواهیم داشت: $I=\int_C \vec F.d\vec r=\iint_S \mathrm{curl}\vec F.\vec n d\sigma=0$

توضیح: البته نیاز به حل سؤال به این روش نبود، همین که در ابتدای سؤال فهمیدیم منحنی بسته است، $\mathrm{curl}\vec F$ را حساب می‌کنیم و متوجه می‌شویم که صفر است و لذا میدان پایستار و حاصل انتگرال صفر است.

۱۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم که برای میدان برداریِ $\vec F=(P,Q,R)$ روی سطح S داریم:
$$I=\iint_S P\,dydz+Q dxdz+R dxdy=\iint_S \vec F.\vec n\,d\sigma$$

مقایسه با ترتیب جملات در صورت سؤال مشخص می‌کند که در انتگرال داده شده، میدان برداری $\vec F=(xz,x^2y,y^2z)$ را داریم.
(نمی‌دانم طراح سؤال حالا چه اصراری داشته که ترتیب نوشتن جوری باشه که دانشجو اشتباه کندا! البته شاید این موضوع باعث بالا رفتن دقت شود و خودش کار خوبی هم تلقی شود، بنابراین شما هم حواستان باشه!) سطح S یک سطح بسته است که ناحیه‌ی D از فضا را محصور کرده است. ناحیه‌ی D به استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و صفحات مختصات در $\frac{1}{8}$ اول محدود شده است. به دلیل بسته بودن S می‌توان از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد:

$$I=\iint_S \vec F.\vec n\,d\sigma=\iiint_D \mathrm{div}\vec F dv=\iiint_D (z+x^2+y^2)dv$$



با توجه به آن که قاعده‌ی این شکل ربع دایره‌ای به شعاع یک است، در مختصات استوانه‌ای داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le 1$. کران‌های z نیز به وضوح از $z=0$ تا $z=x^2+y^2=r^2$ هستند.

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2}(z+r^2)r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\left(\frac{z^2}{2}+r^2z\right)\Big|_0^{r^2}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{3}{2}r^5\,drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{12}r^6\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{8}$$

۱۶ـ گزینه «۱» برای مخروط $z^2=\sqrt{x^2+y^2}$، داریم: $d\sigma=\sqrt{2}dA$. از طرفی استوانه $x^2+y^2=4x$ در مختصات قطبی به صورت $r=4\cos\theta$، $\frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ در می‌آید. البته معادله‌ی z به صورت $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد، در واقع سطح موردنظر از دو بخش یکسان تشکیل شده که در $z\ge 0$ و $z\le 0$ قرار گرفته‌اند، پس مقدار انتگرال را باید دو برابر کنیم. بنابراین داریم:

$$\iint_S d\sigma=2\sqrt{2}\iint dA=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta}rdrd\theta=16\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=32\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=32\sqrt{2}\times\frac{\pi}{4}=8\pi\sqrt{2}$$

۱۷ـ گزینه «۳» برای مخروط $z^2=x^2+y^2$، $d\sigma=\sqrt{2}dA$ خواهد بود. صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر می‌گیریم. پس باید با حذف z از معادله‌ی مخروط و کره، شکل ایجاد شده در صفحه‌ی xoy را پیدا کنیم. بین معادله مخروط و کره، z را حذف می‌کنیم.

$$x^2+y^2+z^2=2ax\xrightarrow{z^2=x^2+y^2}x^2+y^2+x^2+y^2=2ax\Rightarrow x^2+y^2=ax$$

پس تصویر این سطح، درون دایره $x^2+y^2=ax$ می‌باشد که در مختصات قطبی به صورت $r=a\cos\theta$، $\frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ بیان می‌شود. بنابراین داریم:

$$\text{مساحت}=\iint d\sigma=\sqrt{2}\iint dA=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}rdrd\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta d\theta$$

$$\xrightarrow{\text{زوج بودن زیر انتگرال}}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta d\theta=\sqrt{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}(\pi a^2)$$

۱۸ـ گزینه «۱» با استفاده از قضیه استوکس تساوی مقابل را داریم: $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}.\vec{n}ds$

نیمه بالایی کره S به معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ یک رویه‌ی هموار و مرز آن دایره C به معادله‌ی $x^2+y^2=1$ است. اگر $\vec{n}$ را همه جا رو به خارج رویه‌ی S بگیریم. آن‌گاه جهت القا شده به وسیله‌ی $\vec{n}$ روی C مثبت است. توابع $P=z^2$، $Q=-2x$ و $R=y^3$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. همچنین رویـه‌ی S نمودار تابع $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ است. خم C را می‌توان به صورت $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=0$ پارامتری کرد که $0\le t\le 2\pi$.

$$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\ ,\ dy=\cos t dt\ ,\ dx=-\sin t dt$$

با توجه به توضیحات فوق و قضیه استوکس داریم:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_C z^2dx-2xdy+y^3dz$$

چون $z=0$ است، پس $dz=0$، لذا داریم:

$$I=\oint_C -2xdy=-2\int_0^{2\pi}(\cos t)(\cos tdt)=-2\int_0^{2}(\cos^2 t)dt=-2\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2t}{2})dt=-2[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t]_0^{2\pi}=-2[\frac{1}{2}\times 2\pi]=-2\pi$$

۱۹ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv$$

اگر $\vec{F}$ به صورت $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ تعریف شود، آن‌گاه داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y^3+x+z+y^3=2y^3+x+z$$

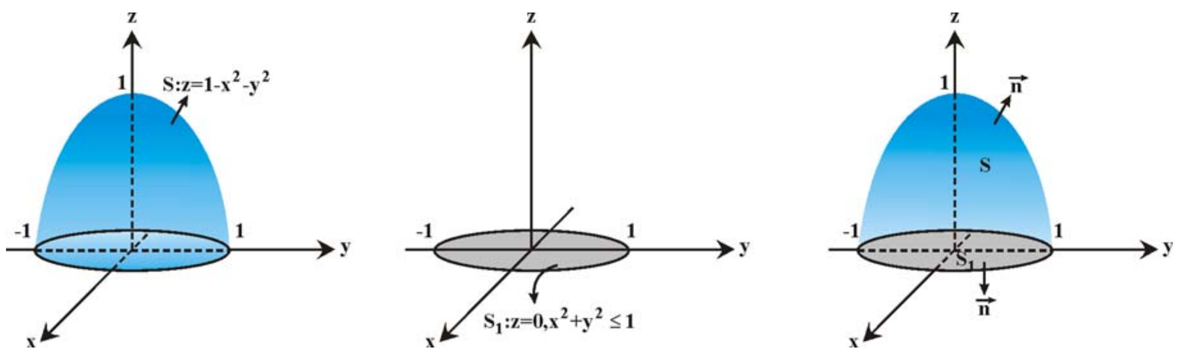
بنابراین $I=\iiint_V(2y^3+x+z)dv$ می‌باشد، حالا باید حدود انتگرال را حساب کنیم، با توجه به صفحات محصور کننده داریم:

$$\begin{cases} z+2y=0\ \Rightarrow z=-2y\ \Rightarrow y=\frac{-z}{2} \\ z+2y=2\ \Rightarrow y=\frac{2-z}{2}=1-\frac{z}{2}\ ,\ 0<x<1\ ,\ 0<z<2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2\int_0^1\int_{-\frac{z}{2}}^{1-\frac{z}{2}}(2y^3+x+z)dydxdz=\int_0^2\int_0^1 \frac{y^4}{2}+xy+zy\Big|_{-\frac{z}{2}}^{1-\frac{z}{2}}dxdz=\int_0^2\int_0^1(\frac{(1-\frac{z}{2})^4-(\frac{-z}{2})^4}{2}+x+z)dxdz$$

$$\Rightarrow I=\int_0^2 \frac{(1-\frac{z}{2})^4-(\frac{-z}{2})^4}{2}x+\frac{x^2}{2}+zx\Big|_0^1 dz=\int_0^2\frac{(1-\frac{z}{2})^4-(\frac{-z}{2})^4}{2}+\frac{1}{2}+zdz=[\frac{-(1-\frac{z}{2})^5}{5}+\frac{(\frac{-z}{2})^5}{5}+\frac{1}{2}z+\frac{z^2}{2}]_0^2=3$$

۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه رویه بسته نیست، بنـابراین نمـی‌تـوانیم از قضـیه دیـورژانس اسـتفاده کنـیم، امـا مـی‌تـوانیم بـا اضـافه کـردن سـطح S_1 (آن قسمت از صفحه‌ی $z=0$ که با سطح $z=1-x^2-y^2$ تلاقی دارد) به سطح S می‌توان آن را به سطحی بسته تبدیل کنیم:



و بنابراین داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint\vec{F}.\vec{n}d\sigma=I_1-I_2$$

برای محاسبه‌ی I_1 می‌توانیم از قضیه دیورژانس کمک بگیریم، بنابراین داریم:

$$I_1=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V[\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}]dv=0$$

حالا باید انتگرال I_2 را حساب کنیم، دقت کنید که چون سطح S_1، $z=0$ است و بردار قائم باید رو به خارج سطح بسته باشد، لذا $\vec{n}=-\vec{k}$ و بنابراین داریم:

$$I_2=\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D\frac{1+y^2}{1+y^2}dydx=\iint_D dydx=D$$ مساحت ناحیه

دقت کنید D تصویر رویه $z=1-x^2-y^2$ بر روی صفحه‌ی $z=0$ است که دایره‌ای به شعاع ۱ است، پس $I_2=\pi(1)^2=\pi$ و لذا داریم:

$$I=I_1-I_2=0-\pi=-\pi$$

۲۱ـ گزینه «۳» همان‌طور که در متن درس گفتیم؛ برای سطح پارامتری داده شده $d\sigma$ از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$\vec{n}d\sigma = \pm(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v})dudv$$

$$\begin{cases}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j} + ۲u\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j}\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & ۲u \\ -u\sin v & u\cos v & ۰\end{vmatrix} = (-۲u^۲\cos v)\vec{i} - (۲u^۲\sin v)\vec{j} + u\vec{k}$$

اما کدام علامت را انتخاب کنیم؟ دقت کنید که ما شار رو به پایین را می‌خواهیم و بنابراین ضریب بردار $\vec{k}$ باید منفی شود، از طرفی از صورت سؤال می‌دانیم $u \ge ۰$ و بنابراین باید علامت منفی را انتخاب کنیم تا همه چی درست شود!

$$\vec{n}d\sigma = -[(-۲u^۲\cos v)\vec{i} - (۲u^۲\sin v)\vec{j} + u\vec{k}]dudv$$

از طرفی چون $x = u\cos v$ و $y = u\sin v$، لذا ضابطه‌ی $\vec{F}$ بر حسب u و v به صورت $\vec{F} = \frac{۲u\cos v\vec{i} + ۲u\sin v\vec{j}}{u^۲} + \vec{k}$ نوشته می‌شود و لذا داریم:

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma = [۴u\cos^۲ v + ۴u\sin^۲ v]dudv = [۴u(\cos^۲ v + \sin^۲ v) - u]dudv = ۳ududv$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۳ududv = \int_۰^{۲\pi} dv \times \int_۰^۱ ۳udu = [v]_۰^{۲\pi} \times [\frac{۳u^۲}{۲}]_۰^۱ = ۲\pi \times \frac{۳}{۲} = ۳\pi$$

۲۲ـ گزینه «۲» فرض کنیم سطح موردنظر ما بخشی از مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ که در بالای صفحه‌ی xoy قرار دارد، (یعنی $(S: z^۲ = x^۲ + y^۲ (z \ge ۰))$ باشد که توسط استوانه‌ی $x^۲ + z^۲ = a^۲$ جدا شده است از برخورد این استوانه و مخروط خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x^۲ + z^۲ = a^۲ \\ z^۲ = x^۲ + y^۲\end{cases} \Rightarrow a^۲ - x^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + y^۲ = a^۲$$

معادله‌ی $۲x^۲ + y^۲ = a^۲$ یک بیضی است و در واقع به ما نشان می‌دهد که سایه‌ی S بر صفحه xoy درون بیضی $۲x^۲ + y^۲ = a^۲$ قرار دارد. این ناحیه را D می‌نامیم. با توجه به معادله‌ی S داریم:

$$d\sigma = \sqrt{۱ + z_x^۲ + z_y^۲}dydx = \sqrt{۱ + \frac{x^۲}{z^۲} + \frac{y^۲}{z^۲}}dydx = \sqrt{\frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{z^۲}}dydx = \sqrt{\frac{۲(x^۲ + y^۲)}{x^۲ + y^۲}}dydx = \sqrt{۲}dydx$$

بنابراین داریم:

$$S\ \text{مساحت} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{۲}dydx = \sqrt{۲} \times (D\ \text{مساحت})$$

ناحیه‌ی D درون بیضی $۲x^۲ + y^۲ = a^۲$ است، یعنی معادله‌ی آن به صورت $\frac{x^۲}{(\frac{a^۲}{۲})} + \frac{y^۲}{a^۲} = ۱$ می‌باشد و لذا شعاع‌های این بیضی عبارتند از: $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ و a.

بنابراین مساحت آن برابر $\frac{\pi a^۲}{\sqrt{۲}} = \pi a \times \frac{a}{\sqrt{۲}}$ است.

$$S\ \text{مساحت} = \sqrt{۲} \times \frac{\pi a^۲}{\sqrt{۲}} = \pi a^۲$$

اکنون باید دقت کنیم که آیا S از یک بخش تشکیل شده است، یا یک نیمه هم در بخش $z < ۰$ دارد؟

معادلاتِ مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ و استوانه‌ی $z^۲ + x^۲ = a^۲$ با تبدیل z به $-z$ تغییری نمی‌کنند، این نشان می‌دهد که این مخروط و استوانه سطح مقطع مشابهی هم در ناحیه‌ی $z < ۰$ دارند، پس باید جواب را دو برابر کنیم:

$$\text{مساحت کل} = ۲ \times \pi a^۲ = ۲\pi a^۲$$

۲۳ـ گزینه «۴» با توجه به آن که هر دو استوانه نسبت به صفحات مختصات تقارن دارند، بخشی از سطح را که در $\frac{۱}{۸}$ اول قرار دارد را محاسبه می‌کنیم و جواب را در ۸ ضرب می‌کنیم. معادله‌ی سطح موردنظر $S: x^۲ + z^۲ = a^۲$ است که سایه‌ی آن توسط معادله‌ی $y^۲ + z^۲ = a^۲$ در صفحه‌ی yoz (البته در $\frac{۱}{۴}$ اول این صفحه) تعیین می‌شود. این ناحیه را D می‌نامیم. بردار $\vec{i}$ که همراستا با محور x ها است بر D عمود است. پس خواهیم داشت:

$$d\sigma = \sqrt{۱ + x_y^۲ + x_z^۲}dydz = \sqrt{۱ + ۰ + \frac{z^۲}{x^۲}}dydz = \sqrt{\frac{x^۲ + z^۲}{x^۲}}dydz = \sqrt{\frac{a^۲}{a^۲ - z^۲}}dydz$$

توجه داشته باشید که در محاسبه‌ی $d\sigma$ باید معادله‌ی $S: x^۲ + z^۲ = a^۲$ را مدنظر قرار دهیم.

$$\text{مساحت} = ۸\iint_S d\sigma = ۸\iint_D \sqrt{\frac{a^۲}{a^۲ - z^۲}}dydz$$

ناحیه‌ی D ربع اول از دایره‌ی $y^۲ + z^۲ = a^۲$ است. در این ناحیه داریم: $۰ \le z \le a$ و $۰ \le y \le \sqrt{a^۲ - z^۲}$.

$$\text{مساحت} = ۸\int_۰^a \int_۰^{\sqrt{a^۲ - z^۲}} \frac{a}{\sqrt{a^۲ - z^۲}}dydz = ۸a\int_۰^a \frac{\sqrt{a^۲ - z^۲}}{\sqrt{a^۲ - z^۲}}dz = ۸a\int_۰^a dz = \mathbf{۸a^۲}$$

۲۴ـ گزینه «۲» S یک سطح بسته است. فرض کنیم V ناحیه‌ی درون این مکعب باشد. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x)=\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(3z)=1+2+3=6$$

بنابراین داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V 6dv=6\times(V\ \text{حجم})=6\times2\times2\times2=48$$

دقت کنید که V مکعبی است که طول هر ضلع آن ۲ واحد است.

۲۵ـ گزینه «۱» برای مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$، داریم $d\sigma=\sqrt{2}dA$. صفحات $x=0$ و $x=1$ را با مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ برخورد می‌دهیم. از برخورد $x=0$ با مخروط داریم $y^2+z^2=0$ یعنی $y=z=0$ که مبدأ مختصات را نشان می‌دهد. از برخورد $x=1$ با مخروط، دایره‌ی $y^2+z^2=1$ به‌دست می‌آید. پس ناحیه انتگرال‌گیری درون دایره $y^2+z^2=1$ است. از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_S x^2d\sigma\xrightarrow{x=\sqrt{y^2+z^2}}I=\sqrt{2}\iint_S(y^2+z^2)dA\overset{\text{قطبی}}{=\!=}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2.rdrd\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\sqrt{2}(2\pi)(\frac{1}{4})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

۲۶ـ گزینه «۳» چون منحنی C، یک منحنی بسته در فضاست از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. در نتیجه داریم: $I=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$

$$\vec{F}=(-y^3,x^3,z^3)\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y^3&x^3&z^3\end{vmatrix}=(0,0,3x^2+3y^2)$$

چون خم C، در صفحه $2x+2y+z=3$ قرار می‌گیرد، داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{(2,2,1)}{1}dA=(2,2,1)dA$$

بنابراین $\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=3(x^2+y^2)dA$ و در نتیجه انتگرال $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$، درون دایره $x^2+y^2=1$ برابر است با:

$$I=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D 3(x^2+y^2)dA\xrightarrow{\text{قطبی}}I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2.rdrd\theta=(2\pi)[\frac{3}{4}r^4]_0^1=\frac{3\pi}{2}$$

۲۷ـ گزینه «۳» چون سطح S بسته است از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\vec{F}=(1+xz^2,1+yx^2,1+zy^2)\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=z^2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow I=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V(z^2+x^2+y^2)dv$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات کروی}}I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2}\rho^2.\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_0^2\rho^2.\rho^2d\rho=(2\pi)(2)(\frac{32}{5})=\frac{128\pi}{5}$$

۲۸ـ گزینه «۱» مرز سطح S دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می‌باشد. در این صورت طبق قضیه استوکس داریم:

(چون قائم S رو به پایین است، بنابراین مرز C باید در جهت خلاف مثلثاتی پیموده شود.)

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}ds=\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

خم C را به صورت پارامتری مقابل می‌نویسیم:

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,0)\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t))=(\sin t,-\cos t,0)\Rightarrow d\vec{r}=(-\sin t,\cos t,0)dt$$

در نتیجه داریم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=-\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t+0)dt=2\pi$$

۲۹ـ گزینه «۳» چون سطح بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم:

اگر $\vec{F}(x,y,z)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$، آن‌گاه داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2)$$

$$I=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dv$$

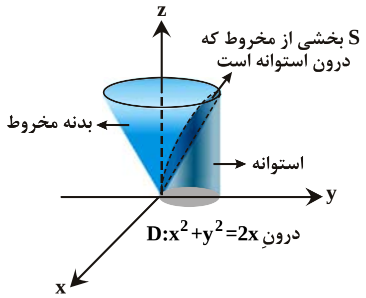
برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات کروی استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$I=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\rho^2.\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_0^{\sqrt{5}}\rho^4d\rho=3(2\pi)(2)(\frac{25\sqrt{5}}{5})=60\pi\sqrt{5}$$

۳۰ـ گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dV=\iiint_V(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z))dV=\iiint_V 3dV=4\pi abc$$

پاسخنامه آزمون (۲)



۱ـ گزینه «۳» فرض کنیم S بخشی از سطح $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ باشد که درون استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲x$ قرار دارد. تصویر S بر صفحه xoy توسط همین استوانه مشخص می‌شود. ما این تصویر را D می‌نامیم.

$$\text{S مساحت}=\iint_S d\sigma=\iint_D\sqrt{۱+\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}}\,dydx=\iint_D\sqrt{۲}\,dydx=\sqrt{۲}\times(\text{D مساحت})=\pi\sqrt{۲}$$

ناحیه‌ی D دایره‌ای به شعاع ۱ است. پس شعاع آن یک و لذا مساحت آن π است.

۲ـ گزینه «۴» با یک انتگرال سطح برای تابع اسکالر روبه‌رو هستیم، می‌توانیم از روش معمول حل این انتگرال‌ها استفاده کنیم، اما یک روش دیگر چون سطح بسته است، همان روش مطرح شده در متن کتاب است. تلاش می‌کنیم میدان برداری $\vec{F}$ را طوری پیدا کنیم که $\vec{F}.\vec{n}=z^۲$ باشد. در این صورت چون $\vec{F}$ برداری می‌شود، می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. بردار قائم یکه‌ی رو به خارج بر سطح کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ برابر است با:

$$\vec{n}=\frac{(۲x,۲y,۲z)}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۴z^۲}}=\frac{(۲x,۲y,۲z)}{۲}=(x,y,z)$$

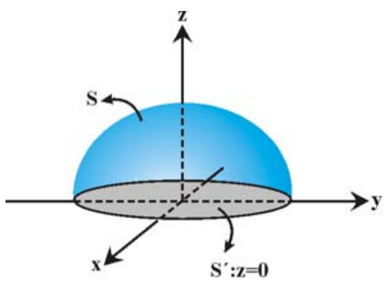
میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ باید چنان باشد که تساوی $\vec{F}.\vec{n}=xP+yQ+zR=z^۲$ برقرار باشد. انتخاب $P=۰$، $Q=۰$ و $R=z$ مناسب است. در این صورت داریم:

$$I=\iint_S z^۲d\sigma=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv$$

که V ناحیه‌ی درون کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است. با محاسبه‌ی دیورژانس $\vec{F}$ داریم: $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=۱$ بنابراین داریم:

$$I=\iiint_V(۱)dv=(\text{V حجم})=\frac{۴}{۳}\pi$$

۳ـ گزینه «۱» بیضی‌گون (بیضی‌وار) با معادله‌ی $\frac{x^۲}{۲۰}+\frac{y^۲}{۲۰}+\frac{(z+۴)^۲}{۴۰}=۱$ بیضی‌گونی به مرکز $(۰,۰,-۴)$ است که فقط بخش کوچکی از آن در ناحیه‌ی $z\geq ۰$ قرار می‌گیرد. اگر فرض کنیم S بخشی از این سطح است که در $z\geq ۰$ قرار دارد. برای آن که تصویر S بر صفحه‌ی xoy معلوم شود کافی است معادله‌ی بیضی‌گون را با صفحه‌ی $z=۰$ برخورد دهیم.



$$\begin{cases}\frac{x^۲}{۲۰}+\frac{y^۲}{۲۰}+\frac{(z+۴)^۲}{۴۰}=۱\\ z=۰\end{cases}\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۲$$

اگر D بخشی از صفحه‌ی $z=۰$ باشد که توسط دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱۲$ محدود شده است، طبق نتیجه‌ی قضیه استوکس خواهیم داشت:

$$I=\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}).\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

در اینجا $\vec{n}=\vec{k}$ است و با محاسبه‌ی $\operatorname{curl}\vec{F}$ می‌توانیم انتگرالده را مشخص کنیم. با توجه به آن که $\vec{n}=\vec{k}$ است فقط محاسبه‌ی سومین مؤلفه‌ی $\operatorname{curl}\vec{F}$ کافی است:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^۲\sin(yz)&xy^۲e^{-xz}&xye^{-xy}\end{vmatrix}=(\text{هر چی})\vec{i}-(\text{هر چی})\vec{j}+(y^۲e^{-xz}-xy^۲ze^{-xz}-x^۲z\cos yz)\vec{k}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I=\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D[y^۲e^{-xz}(۱-xz)-x^۲z\cos yz]dydx$$

اما روی سطح D مقدار z صفر است. بنابراین داریم:

$$I=\iint_D(y^۲-۰)\,dydx$$

و در نهایت با استفاده از دستگاه قطبی مقدار I را روی دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۱۲}}r^۲\sin^۲\theta\, rdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\sin^۲\theta\frac{r^۴}{۴}\Big|_۰^{\sqrt{۱۲}}d\theta=\frac{۱۴۴}{۴}\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۱۴۴}{۸}(\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)\Big|_۰^{۲\pi}=۳۶\pi$$

روش دوم: (استفاده از روش پارامتری کردن) فرض کنیم S بخشی از بیضی‌گون $\frac{x^۲}{۲۰}+\frac{y^۲}{۲۰}+\frac{(z+۴)^۲}{۴۰}=۱$ باشد که بالاتر از صفحه $z=۰$ قرار دارد. منحنی C که لبه‌ی این سطح است، مقطع این بیضی‌گون و صفحه $z=۰$ است:

$$C:\begin{cases}\frac{x^۲}{۲۰}+\frac{y^۲}{۲۰}+\frac{(z+۴)^۲}{۴۰}=۱\\ z=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲+y^۲=۱۲\\ z=۰\end{cases}$$

معادلات پارامتری $(x,y,z)=(\sqrt{۱۲}\cos t,\sqrt{۱۲}\sin t,۰)$ بیان‌کننده C هستند. به ازای $۰\le t\le ۲\pi$ یک دور از منحنی C را طی می‌کنیم. حال از قضیه‌ی استوکس داریم:

$$I=\iint_S \text{curl}\,\vec{F}.\vec{n}ds=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C[x^۲\sin yzdx+xy^۲e^{-xz}dy+xye^{-xy}dz]=\int_۰^{۲\pi}[۰+۱۴۴\cos t\sin^۲ t\cos t+۰]dt$$

$$\Rightarrow I=۱۴۴\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۴}\sin^۲(۲t)dt=۳۶\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۴t)dt=۱۸(t-\frac{۱}{۴}\sin ۴t)\Big|_۰^{۲\pi}=۳۶\pi$$

۴ـ گزینه «۳» سطح S فقط شامل نیمکره‌ی بالایی است. فرض کنیم $S_۱$ بخشی از صفحه‌ی $z=۰$ باشد که در این کره قرار دارد. با اضافه کردن آن به سطح S آن‌گاه $S\cup S_۱$ یک سطح بسته است که ناحیه‌ی D (درون نیمکره) را محدود می‌کند.

$$I_۱=\iint_{S\cup S_۱}\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V \text{div}\vec{F}dv=\iiint_V(z^۲+y^۲+x^۲)dv$$

در دستگاه کروی برای نیمکره به شعاع یک داریم:

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱\rho^۲\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۵}\sin\phi\,d\phi d\theta=\int_۰^{۲\pi}[-\frac{\cos\phi}{۵}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}d\theta=\frac{۱}{۵}\int_۰^{۲\pi}d\theta=\frac{۲\pi}{۵}$$

حالا انتگرال $\vec{F}$ روی $S_۱$ را حساب می‌کنیم. از معادله‌ی $S_۱\ :z=۰$ داریم: $\vec{n}d\sigma=(۰,۰,۱)dydx$ بنابراین خواهیم داشت:

$$I_۲=\iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S_۱}-(x^۲z+y^۲)d\sigma$$

با توجه به آن که روی $S_۱$ داریم $z=۰$ پس در عبارت زیر انتگرال به جای z، صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$I_۲=-\iint_{S_۱}y^۲d\sigma=-\iint_D y^۲dydx=-\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ r^۲\sin^۲\theta\,rdrd\theta=-\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۴}\sin^۲\theta d\theta=-\frac{۱}{۸}\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos ۲\theta)d\theta=-\frac{۱}{۸}(\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)\Big|_۰^{۲\pi}=-\frac{\pi}{۴}$$

پس حاصل انتگرال I برابر است با:

$$I=I_۱-I_۲=\frac{۲\pi}{۵}-(-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱۳\pi}{۲۰}$$

۵ـ گزینه «۲» می‌دانیم $D_nf=\vec{\nabla}f.\vec{n}$، بنابراین طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S\vec{\nabla}f.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \text{div}(\vec{\nabla}f)dv$$

حالا کافیست $\text{div}(\vec{\nabla}f)$ را حساب کنیم، برای این منظور به محاسبات زیر توجه کنید:

$$\text{div}(f\vec{\nabla}f)=\frac{\partial}{\partial x}(f.f_x)+\frac{\partial}{\partial y}(f.f_y)+\frac{\partial}{\partial z}(f.f_z)=f_x^۲+f.f_{xx}+f_y^۲+f.f_{yy}+f_z^۲+f.f_{zz}$$

$$=(f_x^۲+f_y^۲+f_z^۲)+f(f_{xx}+f_{yy}+f_{zz})=|\vec{\nabla}f|^۲+f\text{div}(\vec{\nabla}f)\ \Rightarrow \text{div}(f\vec{\nabla}f)=|\vec{\nabla}f|^۲+f\text{div}(\vec{\nabla}f)$$

بنابراین داریم:

$$۷f=۴f+f\text{div}(\vec{\nabla}f)\ \Rightarrow \text{div}(\vec{\nabla}f)=۳$$

$$I=\iiint_V\text{div}(\vec{\nabla}f)dv=\iiint_V ۳dv=۳\iiint_V dv=۳\times(\text{حجم کره})=۳\times(\frac{۴}{۳}\times\pi\times۱^۳)=۴\pi$$

۶ـ گزینه «۳» چون C خم بسته است، از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. بنابراین $I=\oint_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$.

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z^۲+y^۲+\sin x^۲&۲xy+z&xz+۲yz\end{vmatrix}=(۲z-۱)\vec{i}-(z-۲z)\vec{j}=(۲z-۱)\vec{i}+z\vec{j}$$

اکنون به سطحی نیاز داریم که منحنی C روی آن قرار گرفته باشد. منحنی C هم روی صفحه‌ی $۲x+y+z=۳$ و هم روی استوانه‌ی $(x-۱)^۲+۴y^۲=۱۶$ قرار دارد. معمولاً برای قضیه‌ی استوکس راحت‌تریم که از معادله‌ی صفحه استفاده کنیم. بنابراین فرض کنیم $g:۲x+y+z-۳=۰$، در این‌صورت با فرض این‌که تصویر این صفحه روی xoy باشد داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(۲,۱,۱)}{۱}dA\ \Rightarrow\ \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=۲(۲z-۱)+z=۵z-۲$$

تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه xoy درون بیضی $(x-۱)^۲+۴y^۲=۱۶$ قرار می‌گیرد، ناحیه‌ی درون این بیضی را D می‌نامیم. تا این‌جا خواهیم داشت:

$$I=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D (5z-2)dA$$

اما ناحیه‌ی D در صفحه‌ی xoy قرار دارد، پس تابع زیر انتگرال هم باید برحسب x و y نوشته شود. باید z را برحسب x و y جایگذاری کنیم.

از معادله صفحه $z=3-y-2x$ به‌دست می‌آید، بنابراین داریم: $I=\iint_D (13-5y-10x)dA=\iint_D (3-5y-10(x-1))dA$

چون ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به $y=0$ و $x=1$ متقارن است پس انتگرال $5y$ و $10(x-1)$ روی ناحیه برابر صفر است و در نتیجه داریم:

$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D 3dA=3\times\underbrace{(\pi\times4\times2)}_{\text{مساحت بیضی}}=24\pi$$

۷ـ گزینه «۴» حل سؤال از روش مستقیم پارامتری‌سازی، سخت است، اما استفاده از قضیه‌ی استوکس حل آن را راحت می‌کند! با توجه به آن که $z=\sin 2t=2\sin t\cos t$ است، می‌توان گفت منحنی C روی سطح $z=2xy$ قرار دارد. همچنین $x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$. بنابراین C مرز قسمتی از سطح $z=2xy$ است که داخل استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ قرار می‌گیرد. به این ترتیب با فرض $g:z-2xy=0$ داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\pm\frac{(-2y,-2x,+1)}{1}dydx=+(-2y,-2x,+1)\,dydx$$

چون قائم رو به بالاست، پس باید علامت مثبت در نظر گرفته شود. حالا باید $\text{curl}\vec{F}$ را حساب کنیم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy+\sqrt{1+x^2} & xy+\sqrt{1+y^2}+x & \sqrt{1+z^2}\end{vmatrix}=(y-x+1)\vec{k}$$

پس $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=[(y-x+1)\times1]dydx$ و با استفاده از قضیه استوکس می‌دانیم: $\vec{F}=\iint_S \text{curl}\,\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ است، بنابراین اگر دایره‌ی $x^2+y^2=1$ را که تصویر S برصفحه‌ی xoy است با D نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D (y-x+1)\,dydx=-\iint_D xdydx+\iint_D ydydx+\iint_D dydx=0+0+\iint_D dydx=\pi$$

توضیح: به علت تقارن ناحیه‌ی D و فرد بودن x در انتگرال اول و فرد بودن y در انتگرال دوم، حاصل انتگرال برای آن‌ها صفر است.

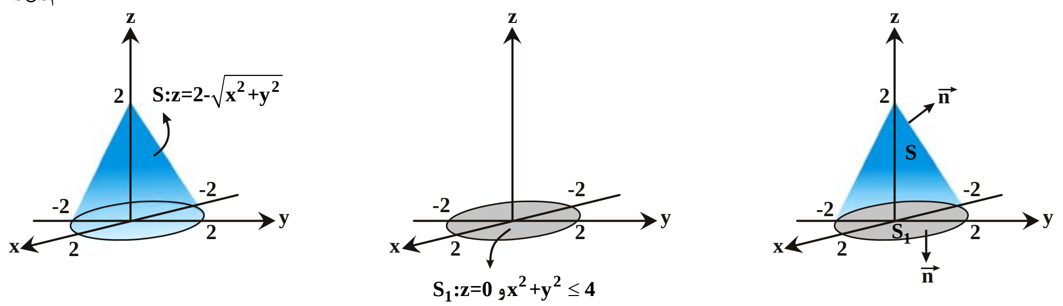
۸ـ گزینه «۱» چون S سطح بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس کمک بگیریم.

$$\text{div}\vec{F}=2x-1+4y+3-2z+4=2(x+2y-z+3)\ \Rightarrow\ \text{شار}=\iiint_V 2(x+2y-z+3)\,dv=2(\bar{x}+2\bar{y}-\bar{z}+3)V$$

یادآوری: در نوشتن تساوی آخر از اطلاعات قبلی خود از فصل انتگرال‌های چندگانه کمک گرفتیم؛ همان‌طور که قبلاً گفتیم، تساوی‌های زیر را داریم:

$$\iiint_V xdv=\bar{x}\iiint_V dv=\bar{x}\,V\ ,\iiint_V ydv=\bar{y}\iiint_V dv=\bar{y}\,V\ \ ,\ \ \iiint_V \bar{z}dv=\bar{z}\iiint_V dv=\bar{z}\,V$$

۹ـ گزینه «۴» سطح S بسته نیست، اما می‌توان با اضافه کردن بخشی از سطح $z=0$ (بخشی که از تقاطع با $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ حاصل می‌شود) آن را به سطحی بسته تبدیل کرد و تساوی مقابل را نوشت: $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint \vec{F}.\vec{n}d\sigma=I_1-I_2$



انتگرال I_1 را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس به دست آورد: $I_1=\iiint_V (\text{div}\vec{F})dv=\iiint_V (6z)\,dv$

برای ناحیه‌ی داده شده در مختصات استوانه‌ای داریم: $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le r\le2$ و همچنین $0\le z\le2-r$، پس خواهیم داشت:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{2-r}6zrdzdrd\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 rz^2\Big|_0^{(2-r)}drd\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(2-r)^2drd\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^2(8r-12r^2+6r^3-r^4)\,drd\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}(4r^2-4r^3+\frac{3}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5)\Big|_0^2 d\theta=2(2\pi)(\frac{8}{5})=\frac{32}{5}\pi=3\int_0^{2\pi}\int_0^2(4r-4r^2+r^3)\,drd\theta=3\int_0^{2\pi}(2r^2-\frac{4}{3}r^3+\frac{r^4}{4})\Big|_0^2 d\theta=3(2\pi)(\frac{4}{3})=8\pi$$

روی سطح $S_۱$ با توجه به معادله $z=۰$ داریم: $\vec{n}=(۰,۰,۱)=-\vec{k}$

بنابراین: $\iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=-\iint_{S_۱}۳z^۲d\sigma=\iint_{S_۱}(۰)d\sigma=۰$

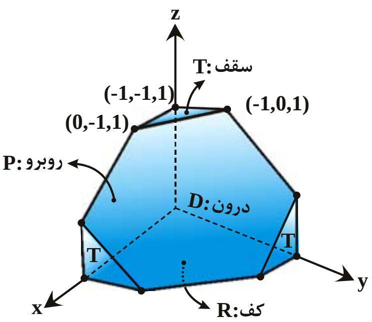
پس: $\iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=۸\pi-۰=۸\pi$

۱۰ـ گزینه «۳» فرض کنیم S ناحیه‌ای از فضا باشد که توسط وجوه باقی مانده از مکعب و به همراه صفحه‌ی $P:x+y+z=۰$ محدود می‌شود. ما مقدار انتگرال را فقط روی وجه‌های باقی مانده از مکعب می‌خواهیم. اما موقتاً سطح P را به آن‌ها اضافه می‌کنیم تا یک سطح بسته به دست آید.

سطح S که موردنظر ما در این سؤال است از ۳ مثلث مانند T و ۳ پنج ضلعی مانند R و شش وجهی P تشکیل شده است که ناحیه‌ی D را محدود کرده‌اند.

دقت کنید که صفحه‌ی $P:x+y+z=۰$ مکعب موردنظر را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم کرده است و ما فقط نیمه‌ی پایینی را داریم. حجم کل این مکعب برابر است با $۲\times۲\times۲=۸$ بنابراین حجم ناحیه‌ی D برابر ۴ است. روی این سطح بسته از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V ۳dv=۳\times(V\ \text{حجم})=۱۲$$

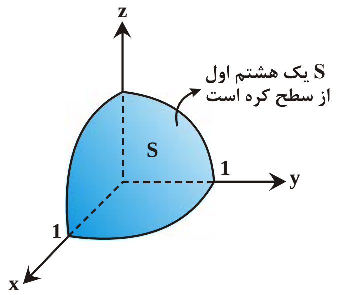


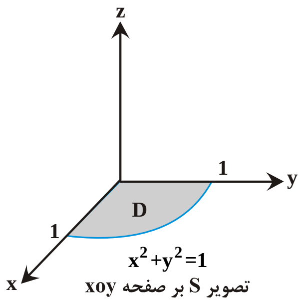
توجه: مکعب $-۱\le x\le۱$ و $-۱\le y\le۱$ و $-۱\le z\le۱$ نسبت به همه‌ی صفحات و محورهای مختصات تقارن دارد. در معادله‌ی صفحه‌ی $x+y+z=۰$ اگر جای متغیرها (نام متغیرها) را با هم عوض کنید معادله تغییری نمی‌کند. بنابراین، این صفحه، مکعب را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.

اگر می‌خواهید از این موضوع مطمئن شوید به شکل داده شده دقت کنید. در این شکل از ۳ وجه مکعب، بخش بزرگتر و از ۳ وجه دیگر بخش کوچکتر آن‌ها باقی مانده است. (بخش بزرگ مانند R و بخش کوچک مانند T) پس در نیمه‌ی دیگر مکعب که رسم نشده است نیز از ۳ وجه آن بخش کوچکتر و از ۳ وجه آن بخش بزرگتر باقی می‌ماند.

۱۱ـ گزینه «۳» منظور از مثلث کروی، قسمتی از سطح کره است که در $\frac{۱}{۸}$ اول قرار دارد و مانند یک مثلث خمیده است. تصویر S بر صفحه‌ی xoy، ناحیه D می‌باشد که یک ربع دایره به شعاع یک است. در ضمن از معادله‌ی کره باید z را برحسب x و y به صورت $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ جایگزین کنیم، بنابراین داریم:

$$I=\iint_S(x+y+z)dxdy=\iint_D(x+y+\sqrt{۱-x^۲-y^۲})dxdy$$





با توجه به ناحیه D، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم، در ناحیه‌ی D داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le۱$.

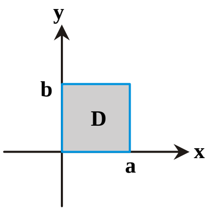
$$I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱(r\cos\theta+r\sin\theta+\sqrt{۱-r^۲})rdrd\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱(r^۲\cos\theta+r^۲\sin\theta+r\sqrt{۱-r^۲})drd\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}[\frac{r^۳}{۳}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{۱}{۳}(۱-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}]_۰^۱d\theta$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}[\frac{۱}{۳}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{۱}{۳}]d\theta=[\frac{۱}{۳}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{۱}{۳}\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۳}\sin\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۳}\cos\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۲})-\frac{۱}{۳}\sin(۰)+\frac{۱}{۳}\cos(۰)+۰$$

$$=\frac{۱}{۳}+\frac{\pi}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{\pi}{۶}+\frac{۲}{۳}=\frac{\pi+۴}{۶}$$

۱۲ـ گزینه «۴» معادله‌ی رویه‌ی $S: z^2 = 2xy$ نشان می‌دهد که S دارای دو نیمه‌ی متقارن در نواحی $z \ge 0$ و $z \le 0$ است. زیرا با تبدیل z به $-z$ معادله‌ی آن عوض نمی‌شود. ما مساحت نیمه‌ی بالایی را به‌دست آورده و جواب را دو برابر می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی S داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA = \sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}}\,dA = \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}\,dA = \sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}}\,dA = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}\,dA = \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}}\,dA$$



سایه‌ی S روی صفحه xoy یک مستطیل است که توسط خطوط $x=0$، $y=0$، $x=a$ و $y=b$ مشخص شده است. این ناحیه را D می‌نامیم.

$$(\text{مساحت } S) = 2\times\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}}\,dydx = \sqrt{2}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dydx = \sqrt{2}\int_0^a \left(2\sqrt{x}\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^b dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a \left(2\sqrt{b}\sqrt{x}+\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \sqrt{2}\left[\frac{4}{3}\sqrt{b}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}b^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\right]\Big|_0^a = \sqrt{2}\left[\frac{4}{3}a\sqrt{a}\sqrt{b}+\frac{4}{3}b\sqrt{b}\sqrt{a}\right] = \frac{4\sqrt{2ab}}{3}(a+b)$$

۱۳ـ گزینه «۳» سطح کره را S می‌نامیم. S یک سطح بسته است. پس از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dv$$

معادله‌ی کره را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$

با تغییر دستگاه به‌صورت $w=z$، $v=y$ ، $u=x-\frac{1}{2}$ داریم: $u^2+v^2+w^2=\frac{1}{4}$ و ژاکوبین دستگاه جدید برابر با ۱ است:

$$J_{xyz} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow J_{uvw} = 1$$

به این ترتیب داریم:

$$\text{شار} = \iiint_D 3\left((u+\frac{1}{2})^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

که D درون کره‌ی $u^2+v^2+w^2=\frac{1}{4}$ است. از مختصات کروی داریم:

$$0\le\theta\le2\pi \quad , \quad 0\le\phi\le\pi \quad , \quad 0\le\rho\le\frac{1}{2}$$

$$\text{شار} = 3\iiint_D \left(u^2+v^2+w^2+u+\frac{1}{4}\right)dwdvdu$$

اکنون می‌دانیم که:

$$I_1 = \iiint_D \frac{1}{4}\,dwdvdu = \frac{1}{4}\,(\text{حجم کره}) = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{8}$$

همچنین چون u فرد است ولی معادله‌ی کره نسبت به u زوج است خواهیم داشت:

$$I_2 = \iiint_D u\,dwdvdu = 0$$

و برای جمله‌ی $u^2+v^2+w^3$ با استفاده از مختصات کروی داریم:

$$I_3 = \iiint_D (u^2+v^2+w^2)\,dwdvdu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \rho^2\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\rho^4\,d\rho\right) = (2\pi)\times[-\cos\phi]_0^{\pi}\times\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = (2\pi)(2)\left(\frac{1}{5\times32}\right) = \frac{\pi}{8\times5}$$

در نتیجه:

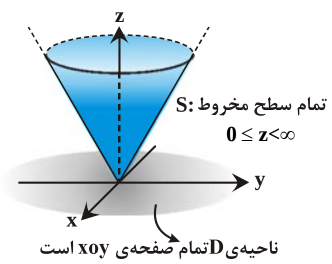
$$\text{شار} = 3(I_1+I_2+I_3) = 3\left(\frac{\pi}{3\times8}+0+\frac{\pi}{5\times8}\right) = \frac{\pi}{5}$$

۱۴ـ گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که برای میدان برداری $\vec{F}=(M,N,P)$ داریم:

$$\iint_S Mdydz+Ndxdz+Pdxdy = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma$$

در این مثال میدان برداری $\vec{F}=(0,e^{-2z},e^{-2z})$ را داریم:

$$I = \iint_S e^{-2z}dxdy+e^{-2z}dzdx = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma$$



سطح $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ تمام سطح مخروط در $z\ge0$ است. بنابراین سایه‌ی S بر صفحه‌ی xoy برابر است با تمام صفحه xoy. این سایه را D می‌نامیم. در ناحیه‌ی D داریم $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le r\le\infty$.

با توجه به آن‌که معادله‌ی سطح S به صورت $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است. داریم: $g: z^2-x^2-y^2=0$ در نتیجه داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(-2x,-2y,2z)}{2z}dA=(-x,-y,z)\frac{1}{z}dA$$

البته z برحسب x و y به صورت $z=\sqrt{x^2+y^2}$ نوشته می‌شود. اکنون با محاسبه‌ی $\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ حل انتگرال را ادامه می‌دهیم:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D(0-ye^{-2z}+ze^{-2z})\frac{1}{z}dA=\iint_D\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{-2\sqrt{x^2+y^2}}dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{-r\sin\theta+r}{r}e^{-2r}rdrd\theta$$

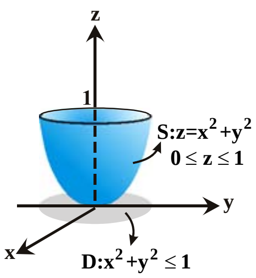
حدود انتگرال اعداد ثابت هستند پس می‌توانیم انتگرال‌های یگانه را از هم جدا کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi}(-\sin\theta+1)d\theta\times\int_0^{\infty}re^{-2r}dr=[(\cos\theta+\theta)]_0^{2\pi}\times\frac{1!}{2^2}=2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

نکته: برای حل انتگرال $\int_0^{\infty}re^{-2r}dr$ علاوه بر جدول جزءبه‌جزء می‌توانید از تساوی زیر که از فرمول تابع گاما به‌دست می‌آید، استفاده کنید:

$$\int_0^{\infty}r^ne^{-ar}dr=\frac{n!}{a^{n+1}}$$

۱۵ـ گزینه «۳» دقت کنید که S بخشی از پوسته‌ی سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ است، که توسط صفحه‌ی $z=1$ جدا شده است. برای پیدا کردن تصویر S بر صفحه xoy آن را با صفحه $z=1$ برخورد می‌دهیم.



$$\begin{cases}z=1\\z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$$

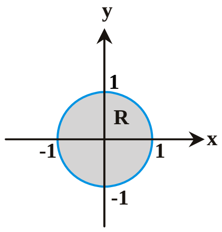
پس تصویر S بر صفحه‌ی xoy، درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ است که این ناحیه را D می‌نامیم. با توجه به معادله‌ی $S:z=x^2+y^2$ داریم:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dydx=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dydx$$

بنابراین با تغییر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری از S به D داریم:

$$I=\iint_S|xyz|d\sigma=\iint_D|xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+4x^2+4y^2}dydx$$

اکنون با توجه به آن که ناحیه‌ی D نسبت به محورهای x و y متقارن است و تابع انتگرالده نسبت به x و y زوج است، می‌توانیم مقدار انتگرال را روی ربع اول ناحیه D به‌دست آورده و جواب را چهار برابر کنیم.



در ربع اول ناحیه D داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le 1$.

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(r\cos\theta)(r\sin\theta)r^2\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1r^4\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+4r^2}(rdrd\theta)$$

با فرض $u=1+4r^2$ داریم $r^2=\frac{1}{4}(u-1)$ و $du=8rdr$، بنابراین انتگرال نسبت به r به شکل زیر حل می‌شود:

$$I_1=\int r^4\sqrt{1+4r^2}(rdr)=\int\frac{1}{6}(u-1)^2(\sqrt{u}\frac{du}{8})=\frac{1}{128}\int(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du=\frac{1}{128}(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})+C$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{128}[\frac{2}{7}(1+4r^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+4r^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}]+C$$

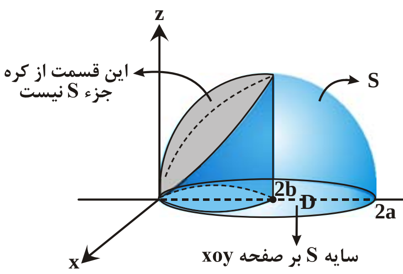
با جایگذاری کران‌های بالا و پایین داریم:

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{128}[\frac{2}{7}(1+4r^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+4r^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{128}[\frac{250\sqrt{5}}{7}-\frac{100\sqrt{5}}{5}+\frac{10\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{7}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}]=\frac{125\sqrt{5}-1}{840}$$

بنابراین با جایگذاری جواب این انتگرال و ادامه‌ی محاسبه‌ی انتگرال I داریم:

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{125\sqrt{5}-1}{840}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=4(\frac{125\sqrt{5}-1}{840})[\frac{\sin^2\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$



۱۶ـ گزینه «۱» برای آنکه رویه‌ی S و استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲bx$ بهتر دیده شوند، محورهای x و y را جابجا کرده‌ایم. با توجه به آن که $a>b>۰$ است، پس قطر استوانه از کره کمتر است و داخل آن قرار می‌گیرد. دقت کنید که S بخشی از کره است که خارج از استوانه قرار دارد و شرط $z\geq ۰$ باعث می‌شود که فقط نیمکره‌ی بالایی را در نظر داشته باشیم. ابتدا $\text{curl}\vec{F}$ و $\vec{n}$ را حساب کرده و ضرب داخلی آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^۲+z^۲ & x^۲+z^۲ & x^۲+y^۲\end{vmatrix}=۲(y-z)\vec{i}-۲(x-z)\vec{j}+۲(x-y)\vec{k}$$

حالا با توجه به این که g به‌صورت $g:x^۲+y^۲+z^۲-۲ax=۰$ است، داریم: $\vec{\nabla}g=(۲x-۲a)\vec{i}+۲y\vec{j}+۲z\vec{k}$

و با فرض این که ناحیه در صفحه xoy تصویر شود، $\vec{p}=\vec{k}$ و لذا $|\vec{\nabla}g.\vec{k}|=|۲z|=۲z$ و بنابراین داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA=\frac{۲[(x-a)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}]}{۲z}dA=[\frac{(x-a)}{z}\vec{i}+\frac{y}{z}\vec{j}+\vec{k}]dA$$

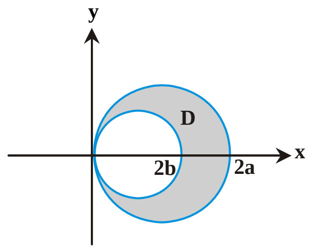
و لذا $\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ به شکل زیر حساب می‌شود:

$$\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=[۲(y-z)\vec{i}-(x-z)\vec{j}+۲(x-y)\vec{k}].(\frac{x-a}{z}\vec{i}+\frac{y}{z}\vec{j}+\vec{k})dA=[\frac{۲(y-z)(x-a)}{z}-\frac{۲y(x-z)}{z}+۲(x-y)]dA$$

$$=[\frac{۲yx-۲ya-۲zx+۲za-۲yx+۲yz}{z}+۲x-۲y]dA=[\frac{۲a(z-y)+۲yz-۲zx+۲xz-۲yz}{z}]dA=۲a(\frac{z-y}{z})dA=۲a(۱-\frac{y}{z})dA$$

بنابراین انتگرال زیر را داریم:

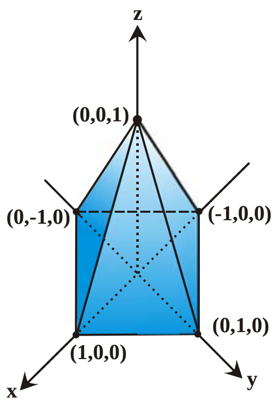
$$I=۲a\iint_D(۱-\frac{y}{z})\,dydx=۲a\iint_D(۱-\frac{y}{\sqrt{۲ax-x^۲-y^۲}})dy\,dx$$



ناحیه‌ی D ناحیه‌ی درون دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲ax$ و خارج از دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲bx$ است. در هر دوی این معادلات تبدیل y به $-y$ معادله را تغییر نمی‌دهد، پس D نسبت به محور xها متقارن است.

از طرفی عبارت $\frac{y}{\sqrt{۲ax-x^۲-y^۲}}$ نسبت به y فرد است. بنابراین انتگرالِ آن روی D صفر است.

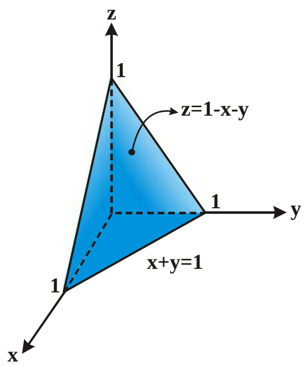
$$I=۲a\iint_D dydx=۲a\times(\text{مساحت } D)=۲a(\pi a^۲-\pi b^۲)=\mathbf{۲a\pi(a^۲-b^۲)}$$



۱۷ـ گزینه «۳» سطح S که در شکل مقابل رسم شده است، یک ۸ وجهی است که نسبت به همه‌ی صفحات مختصات تقارن دارد. در معادله‌ی $S:|x|+|y|+|z|=۱$ تبدیل x، y و z به $-x$، $-y$ و $-z$ تغییری ایجاد نمی‌کند. به همین دلیل از متقارن بودن S اطمینان داریم. از طرفی S یک سطح بسته است. بنابراین می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. فرض کنیم V ناحیه‌ی درون S باشد، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس خواهیم داشت:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \text{div}\vec{F}dv=\iiint_V(۳x^۲+۳y^۲+۳z^۲)dv=۳\iiint_V(x^۲+y^۲+z^۲)dv$$

تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ در نقاط $(\pm x,\pm y,\pm z)$ مقادیر یکسانی دارد. بنابراین می‌توانیم مقدار انتگرال را روی $\frac{۱}{۸}$ اول از ناحیه‌ی V به‌دست آورده و حاصل را هشت برابر کنیم. در $\frac{۱}{۸}$ اول از ناحیه‌ی V داریم $x,y,z\geq ۰$ و $x+y+z=۱$ و اگر این صفحه را با صفحه‌ی $z=۰$ برخورد دهیم، خط $x+y=۱$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب قاعده‌ی این شکل یک مثلث است که به محورهای مختصات x و y و خط $x+y=۱$ محدود می‌شود.



در این ناحیه به وضوح داریم $۰\leq x\leq ۱$ و $۰\leq y\leq ۱-x$؛ کران‌های z نیز از معادلات $z=۰$ و $z=۱-x-y$ معلوم می‌شود.

$$I_۱=۳\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}\int_۰^{۱-x-y}(x^۲+y^۲+z^۲)\,dzdydx$$

انتگرال را می‌توان به طور عادی حل کرد که در این صورت محاسبات کمی طولانی و احتمالاً توأم با خطاست! اما اگر از نکته‌ی تقارن متغیرهای x، y و z نسبت به یکدیگر (ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به این سه متغیر متقارن است، اگر جای x، y و یا z را با یکدیگر عوض کنیم، هیچ تغییری در معادلات ناحیه یعنی؛ ناحیه $x+y+z\le ۱$ و $x,y,z\ge ۰$ ایجاد نمی‌شود، و بنابراین می‌توانیم تساوی مقابل را بنویسیم: $\iiint x^۲=\iiint y^۲=\iiint z^۲$

پس کافی است یکی از انتگرال‌ها را حساب کرده و حاصل را در ۳ ضرب کنیم، بنابراین داریم:

$$I_۱=۳\times ۳\int_۰^۱\int_۰^{۱-x}[\int_۰^{۱-x-y}x^۲dz]dydx=۹\int_۰^۱[\int_۰^{۱-x}x^۲(۱-x-y)dy]dx=۹\int_۰^۱[x^۲(۱-x)y-\frac{x^۲y^۲}{۲}]_۰^{۱-x}dx$$

$$=\frac{۹}{۲}\int_۰^۱x^۲(۱-x)^۲dx=\frac{۹}{۲}\int_۰^۱x^۲(۱+x^۲-۲x)dx=\frac{۹}{۲}[\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۴}{۲}]_۰^۱=\frac{۹}{۲}(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲۰}$$

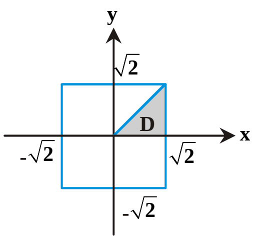
البته این عدد حاصل انتگرال روی $\frac{۱}{۸}$ اول است، بنابراین جواب برابر است با هشت برابر آن که برابر با $\frac{۶}{۵}=\frac{۳}{۲۰}\times ۸$ می‌شود.

۱۸ـ گزینه «۳» فرض کنیم S سطح مربع شکلی باشد که از نیم‌کره‌ی بالایی جدا شده است.

تصویر S بر صفحه‌ی xoy مربع $-\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}\le y\le\sqrt{۲}$ است. با توجه به آن‌که سطح S بـه معادلـه‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ نسـبت بـه همـه‌ی محورهای مختصات و نسبت به خط $y=x$ تقارن دارد (تعویض نام x و y با هم معادله را تغییر نمی‌دهد)، می‌توانیم مساحت بخشی از S که تصویر آن در ربع اول و بین محور x ها و خط $y=x$ قرار دارد را محاسبه کرده و حاصل را هشت برابر کنیم. این بخش را ناحیه D می‌نامیم.

روی سطح S داریم: $d\sigma=\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}dA=\sqrt{۱+\frac{x^۲}{z^۲}+\frac{y^۲}{z^۲}}dA=\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{z^۲}}dA=\frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}dA$

در ناحیه‌ی D داریم: $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$.



روی خطِ $x=\sqrt{۲}$ داریم $r\cos\theta=\sqrt{۲}$ بنابراین $r=\frac{\sqrt{۲}}{\cos\theta}$ است، پس در ناحیه‌ی D خواهیم داشت: $۰\le r\le\frac{\sqrt{۲}}{\cos\theta}$.

$$S\text{ مساحت}=۸\iint_D\frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}dydx=۸\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{\sqrt{۲}\sec\theta}\frac{۲r}{\sqrt{۴-r^۲}}drd\theta=۸\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(-\sqrt{۴-r^۲})\Big|_۰^{\sqrt{۲}\sec\theta}d\theta$$

$$=۸\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(۲-\sqrt{۴-۲\sec^۲\theta})d\theta=۸(۲\frac{\pi}{۴}-\sqrt{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sqrt{۲-\sec^۲\theta}d\theta)$$

اکنون از تغییر متغیر $\sec\theta=\sqrt{۲}\sin t$ استفاده می‌کنیم. به ازای $\theta=۰$ داریم $t=\frac{\pi}{۴}$ و به ازای $\theta=\frac{\pi}{۴}$ داریم $t=\frac{\pi}{۲}$، همچنین:

$$\sec\theta\tan\theta d\theta=\sqrt{۲}\cos tdt\Rightarrow\sqrt{۲}\sin t\sqrt{۲\sin^۲t-۱}\,d\theta=\sqrt{۲}\cos tdt\Rightarrow d\theta=\frac{\cos t}{\sin t\sqrt{۲\sin^۲t-۱}}dt$$

۱۹ـ گزینه «۳» از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم؛ هر چند می‌توان به روش مستقیم هم انتگرال خط را حساب کرد. اولاً بـا نـگاهی گـذرا معلـوم اسـت که C، منحنی بسته‌ای در صفحه $g:x+y+z=۳$ است. به ضابطه‌ی منحنی C دقت کنید که جهت آن با نگاه از بالا، پادساعتگرد و یا همـان مثلثـاتی است، (در واقع هرگاه $x=x_۰+a\cos t$ و $y=y_۰+b\sin t$ باشد و a و b مثبت باشند، جهت حرکت روی منحنی C با نگاه از بالا، همان جهت مثلثـاتی خواهد بود. اما اگر جای $\sin t$ و $\cos t$ با هم عوض شود یا علامت a و b قرینه شود، جهت عکس مثلثاتی را خـواهیم داشـت.) حـالا بـردار $\vec{n}$ را بـرای ایـن سطح وقتی که $\vec{p}=\vec{k}$ باشد، حساب می‌کنیم: $g:x+y+z-۳=۰\Rightarrow\vec{\nabla}g=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=(۱,۱,۱)dA$

حالا $\text{curl}\vec{F}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ye^x&x^۲+e^x&z^۲e^z\end{vmatrix}=(۲x+e^x-e^x)\vec{k}=(۲x)\vec{k}\Rightarrow\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(۲x)dA\Rightarrow I=\iint_S\text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D(۲x)dA$$

خُب حالا باید انتگرال دوگانه پدید آمده را حل کنیم، این کار را به دو روش انجام می‌دهیم:

روش اول: برای محاسبه‌ی $\iint_D ۲xdA$، ابتدا از معادلات پارامتری $x=۱+\cos t$ و $y=۱+\sin t$ خواهیم داشت $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱$. با تغییر دستگاه به صورت $(u,v)=(x-۱,y-۱)$ ژاکوبین دستگاه جدید برابر است با: $\begin{vmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{vmatrix}=۱$ و معادله‌ی D در این دستگاه به صورت $u^۲+v^۲=۱$ است یعنی دایره‌ی واحد به‌دست می‌آید. دقت کنید که $u=x-۱$ پس $x=u+۱$ است. اکنون از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D 2x\,dA = 2\iint_D (u+1)dudv = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta+1)rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\cos\theta+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{2}\right)d\theta = 2\left(\frac{\sin\theta}{3}+\frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

روش دوم: از معادلات پارامتری $x=1+\cos t$ و $y=1+\sin t$ معلوم می‌شود که $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ است. بنابراین تصویر S روی صفحه xoy که آن را D نامیده‌ایم، دایره‌ای به مرکز $(1,1)$ و شعاع یک است. مرکز هندسی این ناحیه همان نقطه‌ی $(\bar{x},\bar{y})=(1,1)$ و مساحت آن π است.

$$\iint_D 2x\,dA = 2\times\bar{x}\times(D\ \text{مساحت}) = 2\times 1\times\pi = 2\pi$$

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به ناحیه داده شده بهتر است از قضیه دیورژانس کمک بگیریم:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2z}{x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \sqrt{x^2+y^2} = 2\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - 2\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right) + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{شار} = \iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})dv = \iiint_V \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) - \frac{2z}{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\,)dv$$

با توجه به اینکه $\frac{2x}{x^2+y^2}$ فرد است و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و y متقارن است، پس حاصل انتگرال مربوط به آن صفر است. اما برای قسمت دوم و سوم با توجه به وجود عبارت x^2+y^2 بهتر است از مختصات استوانه‌ای کمک بگیریم:

$$\text{شار} = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-1}^2 \left(-\frac{2z}{r^2}+r\right)rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-1}^2 \left(-\frac{2z}{r}+r^2\right)dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[\left(-\frac{2z^2}{2r}\right)+r^2z\right]_{-1}^2 drd\theta$$

$$\Rightarrow \text{شار} = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(-\frac{4}{r}+2r^2+\frac{1}{r}+r^2\right)drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(3r^2-\frac{3}{r}\right)drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\times\left[\frac{3r^3}{3}-3\mathrm{Ln}r\right]_1^2 = \mathbf{2\pi[7-3Ln2]}$$

۲۱ـ گزینه «۲» سطح S بسته است، بنابراین تلاش می‌کنیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. ابتدا باید میدان برداری $\vec{F}=(P,Q,R)$ را طوری پیدا کنیم که تابع زیر انتگرال برابر با $\vec{F}.\vec{n}$ باشد. با توجه به معادله‌ی بیضی‌گون داریم:

$g: ax^2+by^2+cz^2=1$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|} = \frac{2ax\vec{i}+2by\vec{j}+2cz\vec{k}}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+4c^2z^2}} = \frac{ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k}}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$$

$$\vec{F}.\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}} \Rightarrow (P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}).\left(\frac{ax\vec{i}+by\vec{j}+cz\vec{k}}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}$$

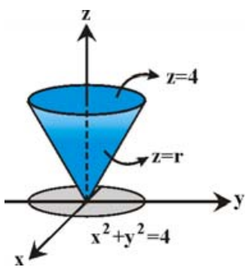
پس باید کاری کنیم که $axP+byQ+czR=1$ باشد. اگر به معادله‌ی بیضی‌گون دقت کنید، انتخاب $P=x$ ،$Q=y$ و $R=z$ مناسب است پس داریم:

$$\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3$$

$$I = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv = \iiint_V 3dv = 3\times(\text{حجم بیضی‌گون}) = 3.\frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

توجه کنید که معادله‌ی این بیضی‌گون را می‌توان به صورت $\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{b}})^2}+\frac{z^2}{(\frac{1}{\sqrt{c}})^2}=1$ نوشت پس شعاع‌های آن به ترتیب $\frac{1}{\sqrt{a}}$، $\frac{1}{\sqrt{b}}$ و $\frac{1}{\sqrt{c}}$ هستند.

۲۲ـ گزینه «۴» S یک سطح بسته است، فرض کنیم V ناحیه‌ی درون S باشد، طبق قضیه‌ی دیورژانس داریم:



$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv$$

$$\vec{F} = 4xz\vec{i}+xyz^2\vec{j}+3z\vec{k} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(xyz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(3z) = 4z+xz^2+3$$

$$I = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv = \iiint (4z+xz^2+3)\,dv$$

تابع زیر انتگرال از مجموع سه جمله تشکیل شده است که از میان آن‌ها جمله‌ی xz^2 نسبت به x فرد است. با توجه به آن‌که معادله‌ی $z^2=x^2+y^2$ به ازای $\pm x$ تغییری نمی‌کند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که انتگرال این جمله برابر با صفر می‌شود. بنابراین داریم: $I=\iiint_V(4z+3)dv$. برای ناحیه‌ی محدود به مخروط و صفحه معمولاً از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. از برخورد صفحه $z=4$ و استوانه‌ی $z^2=x^2+y^2$ به دایره‌ی $x^2+y^2=4$ می‌رسیم. پس $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 2$ است. حدود z هم عبارتند از $r=\sqrt{x^2+y^2}=z$ و $z=4$. پس داریم:

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=r}^{4}(4z+3)rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 [2z^2+3z]_r^4\ rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (32+12-2r^2-3r)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (44r-3r^2-2r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[22r^2-r^3-\frac{2r^4}{4}\right]_0^4 d\theta = \int_0^{2\pi} 160\,d\theta = 160\times 2\pi = 320\pi$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = 320\pi$$

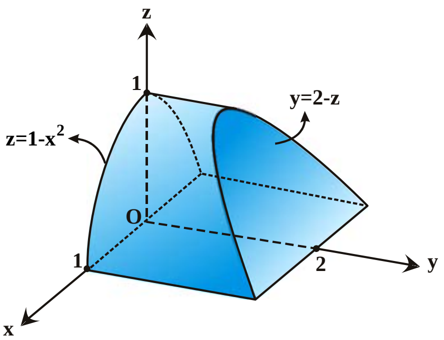
۲۳ـ گزینه «۱» محاسبه‌ی انتگرال روی سطح S به طور مستقیم دشوار و وقت‌گیر است. زیرا باید چهار انتگرال سطح را روی چهار تکه‌ی S به صورت جداگانه حساب کنیم. اما می‌توانیم از بسته بودن سطح S استفاده کرده و قضیه‌ی دیورژانس را به خدمت بگیریم. در ضمن دیورژانس $\vec{F}$ ضابطه‌ی بسیار ساده‌تری نسبت به خود $\vec{F}$ دارد:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2+e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy) = y+2y+0 = 3y$$

بنابراین از قضیه‌ی دیورژانس برای تبدیل انتگرال سطح موردنظر به انتگرالی سه‌گانه استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\,dv = \iiint_V 3y\,dv$$

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی این انتگرال سه‌گانه استفاده از مختصات دکارتی است. کران‌های x از برخورد رویه‌ی $z=1-x^2$ با صفحه‌ی $z=0$ به‌دست می‌آیند که عبارتند از $x=1$ و $x=-1$. کران پایین z به وضوح $z=0$ است. کران بالای z از برخورد صفحات $y+z=2$ و $y=0$ به صورت $z=2$ به‌دست می‌آید. برای متغیر y از صفحات $y=0$ و $y+z=2$ دو کران به صورت $y=0$ و $y=2-z$ به‌دست می‌آید. حدود x اعداد ثابت هستند $-1\le x\le 1$، حدود z به صورت $0\le z\le 1-x^2$ به‌دست آمده‌اند و به x بستگی دارند، حدود y هم به‌صورت $0\le y\le 2-z$ هستند و برحسب z نوشته شده‌اند. در نتیجه باید ترتیب dydzdx را نوشته و حل کنیم:



$$\iiint_V 3y\,dv = 3\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dydzdx = 3\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-z}dzdx$$

$$= 3\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\frac{(2-z)^2}{2}dzdx = \frac{3}{2}\int_{-1}^1\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1((x^2+1)^3-8)dx$$

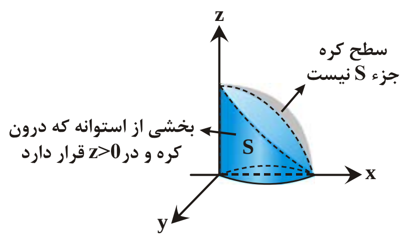
$$\overset{\text{زوج بودن زیر انتگرال}}{=\!=\!=\!=} -\int_0^1(x^6+3x^4+3x^2-7)dx = -(\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+1-7) = \frac{184}{35}$$

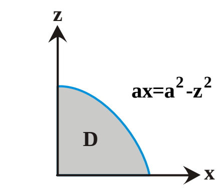
۲۴ـ گزینه «۳» استوانه‌ی $S: x^2+y^2=ax$ نسبت به محور yها تقارن دارد به این معنا که نیمی از آن در $y\ge 0$ و نیمی از آن در $y\le 0$ قرار دارد. همچنین نیمی از این کره و استوانه در $z\ge 0$ و نیمی در $z\le 0$ قرار دارد. بنابراین ما مساحت بخشی از استوانه را که درون کره و در $\frac{1}{8}$ اول قرار داد محاسبه و جواب را ۴ برابر می‌کنیم. دقت کنید که همه‌ی سطح استوانه در $x\ge 0$ قرار دارد و هیچ بخشی از آن در $x<0$ قرار ندارد. (اگر شرط $a>0$ قرار داده نشده بود باید حاصل انتگرال را در یک عدد ۲ دیگر ضرب می‌کردیم و در واقع جواب را ۸ برابر می‌کردیم.)

برای آن که سایه‌ی S روی صفحه‌ی xoz را درست تشخیص دهیم باید مقطع استوانه و کره را حساب کنیم.

$$\begin{cases} x^2+y^2=ax \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow z^2+ax=a^2$$

به عبارتی سهمیِ $ax=a^2-z^2$ سایه‌ی S روی xoz را مشخص می‌کند.





D سایه‌ی S بر صفحه‌ی xoz است

روی سطح $S: x^2+y^2-ax=0$ داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz = \sqrt{1+(\frac{2x-a}{2y})^2}\,dxdz = \sqrt{\frac{4y^2+4x^2-4ax+a^2}{4y^2}}\,dxdz = \sqrt{\frac{a^2}{4(ax-x^2)}}\,dxdz = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\,dxdz$$

$$\text{مساحت} = 4\iint_S d\sigma = \frac{4a}{2}\iint_R \frac{dxdz}{\sqrt{ax-x^2}} = 2a\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}dzdx = 2a\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-x^2}}dx = 2a\int_0^a\frac{\sqrt{a}\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}}dx$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = 2a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{x}} = 4a\sqrt{a}\,\sqrt{x}\Big|_0^a = 4a^2$$

۲۵ـ گزینه «۴» میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)$ در مبدأ مختصات، ناپیوسته است. اگر سطح بسته‌ی S، شامل مبدأ نباشد و مبدأ درون آن قرار نگرفته باشد، می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم:
$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv$$

دیورژانس $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم. می‌دانیم که $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ است.
$$\vec{F}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}}(y-z,z-x,x-y)$$
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=-\frac{\alpha}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}(y-z)-\frac{\alpha}{2}(2y)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}(z-x)-\frac{\alpha}{2}(2z)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}(x-y)$$
$$=-\alpha(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}[x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)]=-\alpha(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}[xy-xz+yz-yx+zx-zy]=0$$

بنابراین اگر S سطحی بسته باشد که مبدأ مختصات روی آن و درون آن قرار نگرفته است، خواهیم داشت:
$$I=\iiint_D (0)dv=0$$

حالا فرض کنیم S سطحی بسته باشد که مبدأ درون آن قرار گرفته است. دیگر نمی‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم زیرا $\vec{F}$ در مبدأ ناپیوسته است. اما از آن‌جا که $\operatorname{div}\vec{F}=0$ است، می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که مقدار انتگرال روی هر سطح بسته که مبدأ درون آن باشد، برابر است. پس می‌توانیم به جای سطح S، یک کره به شعاع دلخواه و مرکز مبدأ انتخاب کنیم. فرض کنیم $S: x^2+y^2+z^2=1$ باشد. در این صورت $\vec{n}=(x,y,z)$ است. حالا ضرب داخلی $\vec{F}.\vec{n}$ را حساب می‌کنیم:
$$\vec{F}.\vec{n}=\frac{1}{r^\alpha}[x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)]=\frac{1}{r^\alpha}[xy-xz+yz-yx+zx-zy]=0$$

بنابراین در این حالت هم داریم:
$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_S (0)d\sigma=0$$

پس چه مبدأ درون S باشد و چه نباشد، حاصل انتگرال صفر می‌شود.

۲۶ـ گزینه «۳» S یک سطح بسته است. فرض کنیم V ناحیه‌ی درون S باشد. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:
$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=1+1+1=3 \Rightarrow I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V 3dv=3\times(V\ \text{حجم})$$

برای محاسبه‌ی حجم V، از حجم مکعب بزرگ، حجم مکعب کوچک را کم می‌کنیم:
$$V\ \text{حجم}=2^3-1^3=7$$

در نتیجه داریم:
$$I=3\times 7=21$$

۲۷ـ گزینه «۲» فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ برداری ثابت باشد و $\vec{F}=\vec{a}\times\vec{r}$ باشد. ابتدا مؤلفه‌های میدان برداری $\vec{F}$ را مشخص می‌کنیم:
$$\vec{F}=\vec{a}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\x&y&z\end{vmatrix}=(a_2z-a_3y)\vec{i}-(a_1z-a_3x)\vec{j}+(a_1y-a_2x)\vec{k}$$

با استفاده از قضیه‌ی استوکس داریم:
$$I=\int_C(\vec{a}\times\vec{r}).d\vec{r}=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

ابتدا $\operatorname{curl}\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:
$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_2z-a_3y&-a_1z+a_3x&a_1y-a_2x\end{vmatrix}=2a_1\vec{i}+2a_2\vec{j}+2a_3\vec{k}\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}=2(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})=2\vec{a}$$

با جایگذاری در انتگرال داریم:
$$I=\iint_S 2\vec{a}.\vec{n}d\sigma=2\iint_S \vec{a}.\vec{n}d\sigma$$

۲۸ـ گزینه «۲» از نتیجه قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. Σ را قسمتی از صفحه $z=1$ می‌گیریم که داخل رویه $z=r^2$ قرار دارد. چون قائم Σ به سمت خارج سطح و دارای مؤلفه سوم منفی است. پس قائم S به سمت پایین است و انتگرال داده شده با $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برابر است. چون S بر صفحه $z=1$ واقع است $\vec{n}=-\vec{k}$، پس کافیست مؤلفه سوم $\operatorname{curl}\vec{F}$ را محاسبه کنیم:
$$\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{k}=\text{مؤلفه سوم کرل}=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=1-(-1)=2\Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}.(-\vec{k})=-2$$

پس $I=\iint_S -2ds$ یعنی منفی دو برابر مساحت S است. ناحیه‌ی S داخل دایره $r=1$ و مساحت آن π است. بنابراین جواب مسأله $I=-2\pi$ می‌باشد.

۲۹ـ گزینه «۲» نشان می‌دهیم که گزینه‌ی (۲) همواره صحیح نیست. برای این کار کافیست مثالی پیدا کنیم که نادرست بودن این گزینه را نشان دهد. فرض کنیم $\vec{r}=(x,y,z)$ و $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ اندازه‌ی بردار $\vec{r}$ باشد. میدان برداری $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}$ را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های $\vec{F}$ به این صورت هستند:

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}=(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3})$$

این میدان برداری در مبدأ تعریف نشده است اما در هر نقطه به جز مبدأ تعریف شده و مشتق‌پذیر است. همچنین با محاسبه‌ی $\operatorname{div}\vec{F}$ می‌بینیم که $\operatorname{div}\vec{F}=0$ است. برای محاسبه‌ی دیورژانس $\vec{F}$ توجه کنید که $r_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$ و به همین ترتیب داریم $r_y=\frac{y}{r}$ و $r_z=\frac{z}{r}$.

حالا دیورژانس $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}=(r^{-3}x,r^{-3}y,r^{-3}z)\quad =-3r^{-4}\frac{x}{r}x+r^{-3}-3r^{-4}\frac{y}{r}y+r^{-3}-3r^{-4}\frac{z}{r}z+r^{-3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=-3r^{-4}(\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}+\frac{z^2}{r})+3r^{-3}=-3r^{-5}r^2+3r^{-3}=-3r^{-3}+3r^{-3}=0$$

تا اینجا دیدیم که $\operatorname{div}\vec{F}=0$ است و $\vec{F}$ در هر نقطه به جز $(0,0,0)$ تعریف شده است. حالا ثابت می‌کنیم که هیچ میدان برداری مانند $\vec{G}$ وجود ندارد که روی $\mathbb{R}^3-(0,0,0)$ تعریف شده باشد و $\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{G}$ باشد. اگر چنین میدان برداری وجود داشته باشد، آن‌گاه برای هر سطح بسته مانند S خواهیم داشت:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iint_S \operatorname{curl}\vec{G}.\vec{n}ds=0$$

اما نشان می‌دهیم که وقتی S کره‌ی واحد باشد؛ $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds\neq 0$ است. روی کره‌ی واحد داریم $g:x^2+y^2+z^2=1$ و کره‌ی واحد از دو نیمه‌ی $z>0$ و $z<0$ تشکیل می‌شود. که آن‌ها را با S_1 و S_2 نشان می‌دهم. روی S_1 داریم، $z>0$ ، $g:x^2+y^2+z^2=1$ پس داریم:

$$\vec{n}\,d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(2x,2y,2z)}{2z}dA=\frac{1}{z}(x,y,z)dA$$

البته $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ است. با محاسبه‌ی $\vec{F}.\vec{n}ds$ داریم:

$$\vec{F}\vec{n}d\sigma=(\frac{x^2}{r^3}+\frac{y^2}{r^3}+\frac{z^2}{r^3})\frac{1}{z}dA=\frac{r^2}{r^3}\frac{1}{z}dA=\frac{dA}{rz}=\frac{dA}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{dA}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

تصویر S_1 بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی واحد است روی این دایره داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ پس داریم:

$$\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D\frac{dA}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}=(2\pi)[-\sqrt{1-r^2}]_0^1=2\pi$$

به همین ترتیب روی S_2 هم داریم $\iint_{S_2}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=2\pi$ پس $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=2\pi+2\pi=4\pi$ پس به تناقض رسیدیم یعنی یک سطح بسته مانند S پیدا کردیم که $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma\neq 0$ است. این نشان می‌دهد که $\vec{F}$ نمی‌تواند $\operatorname{curl}\vec{G}$ باشد. گزینه (۲) نادرست است.

۳۰ـ گزینه «۱» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا $\operatorname{curl}\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \cos^{1394}(x^4) & \sin^4 y & z^{10}-x\end{vmatrix}=\vec{j}$$

منحنی C در صفحه‌ی $g:x+y+z=1$ قرار دارد، پس داریم:

$$\vec{\nabla}g=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

تصویر این سطح بر صفحه‌ی xoy توسط معادله‌ی $x^2+y^2=1$ مشخص شده است، در ضمن بردار نرمال صفحه‌ی xoy همان $\vec{k}$ است، پس داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dydx=(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})dydx\ \Rightarrow \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=dydx$$

البته دقت کنید چون جهت طی شدن منحنی ساعتگرد است، پس یک علامت منفی باید پشت انتگرال دوگانه قرار دهیم:

$$I=\int_C\vec{F}.d\vec{r}=-\iint_S\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=-\iint_D dydx=-(\text{مساحت ناحیه D})=-(\text{مساحت دایره‌ای به شعاع ۱})=-\pi(1)^2=-\pi$$