



## بخش پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۳» مقادیر خاص یا ویژه ماتریس، همان ریشه‌های معادله  $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$  هستند، پس داریم:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) + 2\lambda + 4 - 4 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

چون مجموع ضرایب معادله صفر است، یکی از جواب‌ها  $\lambda = 1$  می‌باشد و جواب‌های دیگر از تقسیم معادله بر  $(\lambda - 1)$  به دست می‌آیند.

برای فاکتورگیری از  $(\lambda - 1)$  به این صورت عمل می‌کنیم:  $f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$   
پس مقادیر ویژه ماتریس ۱، ۲ و -۲ می‌باشند، بنابراین بزرگترین مقدار ویژه‌ی آن برابر با ۲ است. یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۲- گزینه «۲» دترمینان ماتریس  $A^n$  برابر است با دترمینان ماتریس  $A$  به توان  $n$ ، یعنی  $|A^n| = |A|^n$ . پس ابتدا دترمینان  $A$  را حساب می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3(-3+4) + 3(2-0) + 4(-2-0) = 3+6-8=1 \Rightarrow |A^5| = |A|^5 = |1|^5 = 1$$

۳- گزینه «۲» برداری هادی خط  $\vec{V}(1, 2, 4)$  و بردار نرمال صفحه  $\vec{N}(0, 2, -1)$  است، چون  $\vec{N} \cdot \vec{V} = 0$ ، بنابراین خط و صفحه موازی‌اند. نقطه

دلخواه  $P(2, -3, 1)$  را روی خط در نظر می‌گیریم، در این صورت فاصله مورد نظر برابر است با:  
فاصله  $= \frac{|\vec{N} \cdot \vec{OP}|}{|\vec{N}|} = \frac{|2(-3) - 1(1)|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

۴- گزینه «۱» حجم چهار وجهی برابر با حاصل ضرب مختلط بردارهایی است که از رأس مشترکی مانند  $A$  آغاز می‌شوند. چون

$$\overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow \text{حجم} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

بنابراین داریم:  $\overline{AD} = (1, 0, 1)$  و  $\overline{AC} = (2, 2, -3)$ ،  $\overline{AB} = (3, -3, 0)$

۵- گزینه «۲» برداری که موازی با هر دو صفحه باشد را به دست می‌آوریم. این بردار، حاصل ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه است:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر به صورت  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$  است.

۶- گزینه «۳» از برخورد دو صفحه‌ی اول یعنی  $\begin{cases} x+y=2 \\ z-y=2 \end{cases}$  خواهیم داشت  $x+z=4$ . پس این دو صفحه، شامل خط  $x=4-z$  هستند. همین خط در معادله‌ی سومین صفحه هم صدق می‌کند. در نتیجه همه‌ی این صفحات شامل خط  $x=4-z$  هستند.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

۷- گزینه «۳» بردار نرمال صفحه مورد نظر برابر ضرب خارجی بردار هادی خط و بردار  $\vec{V}$  می‌باشد.

با انتخاب نقطه‌ی دلخواه  $A(1, 1, 3)$  از خط داده شده و بردار نرمال  $\vec{n} = (-1, 7, 4)$  داریم:

$$-1(x-1) + 7(y-1) + 4(z-3) = 0 \Rightarrow -x + 7y + 4z = 18$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a-1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-1 = \lambda \\ 3-4 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1, a = 2$$

۸- گزینه «۴»

$$6x + 4y + 3z + 5 + k(2x + y + z - 2) = 0$$

۹- گزینه «۲»

$$(12 - 12 + 6 + 5) + k(4 - 3 + 2 - 2) = 0 \Rightarrow 11 + k = 0 \Rightarrow k = -11$$

چون نقطه  $(2, -3, 2)$  بر صفحه واقع است، لذا داریم:

بنابراین معادله‌ی صفحه خواسته شده به صورت زیر است:

$$6x + 4y + 3z + 5 - 11(2x + y + z - 2) = 0 \Rightarrow -16x - 7y - 8z + 27 = 0 \Rightarrow 16x + 7y + 8z = 27$$

۱۰- گزینه «۲» می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه همان  $\text{tr}(A)$  می‌باشد و چون  $\text{tr}(A) = 3$ ، پس تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۱۱- گزینه «۱» صفحات داده شده را به این صورت نامگذاری می‌کنیم:  $P_1: x+y-z-2=0$ ;  $P_2: x-y+z+3=0$ ;  $P_3: 2x+1=0$

صفحات  $P_1$  و  $P_2$  موازی نیستند زیرا  $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} = -\frac{1}{1}$ ، بنابراین با یکدیگر برخورد می‌کنند و فصل مشترک آن‌ها یک خط خواهد بود. می‌توانیم به راحتی

$$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+0+0+1=0 \Rightarrow 2x+1=0$$

معادله‌ی این خط را به دست آوریم:

پس فصل مشترک  $P_1$  و  $P_2$  در معادله‌ی صفحه‌ی  $P_3$  صدق می‌کند. بنابراین خط  $2x+1=0$  قسمت مشترک هر ۳ صفحه را نشان می‌دهد.

### ۱۲- گزینه «۱»

روش اول: برای یافتن محل برخورد یک خط با سایر رویه‌ها بهترین کار استفاده از معادله‌ی پارامتری خط و جایگذاری آن در معادله رویه است:

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4} = t \Rightarrow x = -6t+4, y = 3t+3, z = 4t-2$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{(-6t+4)^2}{36} + \frac{(3t+3)^2}{9} + \frac{(4t-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t = 0, 1$$

این‌ها را در معادله‌ی رویه قرار می‌دهیم:  $t = 0$  به نقطه‌ی  $(4, 3, -2)$  می‌رسیم و به ازای  $t = 1$  نقطه‌ی  $(-2, 6, 2)$  به دست می‌آید.

روش دوم: در چنین سؤال‌هایی قرار دادن گزینه‌ها در معادله‌ی خط و معادله‌ی رویه، سریع‌ترین راه پیدا کردن گزینه‌ی صحیح است. ما نقاطی را می‌خواهیم که در هر دو معادله، صدق کنند.

۱۳- گزینه «۴» ابتدا بردارهای هادی دو خط و یک نقطه از هر کدام را پیدا می‌کنیم، معادله‌ی اولین خط به صورت  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$  است. ابتدا آن را

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

به صورتی می‌نویسیم که ضریب  $x$ ،  $y$  و  $z$  در صورت کسرها، یک باشد:

این معادله نشان می‌دهد که این خط از نقطه‌ی  $P(1, 1, 0)$  می‌گذرد و بردار هادی آن  $\vec{V} = (2, -1, 1)$  است. معادله‌ی دومین خط را هم به صورت  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$  می‌نویسیم. این معادله نشان می‌دهد که خط دوم از نقطه‌ی  $P'(0, 2, 1)$  می‌گذرد و بردار هادی آن  $\vec{V}' = (1, 2, 2)$  است. حالا از فرمول

$$d = \frac{|\overline{PP'} \cdot (\vec{V} \times \vec{V}')|}{|\vec{V} \times \vec{V}'|}$$

فاصله‌ی دو خط از یکدیگر استفاده می‌کنیم:

$$|\vec{V} \times \vec{V}'| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -3, 5)$$

$$\overline{PP'} = (0-1, 2-1, 1-0) = (-1, 1, 1) \Rightarrow d = \frac{|-4-3+5|}{\sqrt{16+9+25}} = \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

۱۴- گزینه «۴» معادله‌ی مشخصه‌ی این ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{دستور ساروس}} f(\lambda) = (a-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)[\lambda^2 - (3+a)\lambda + 3a - 1]$$

طبق فرض دو تا از ریشه‌ها باید  $\lambda = 2$  باشند، به عبارتی  $\lambda = 2$  باید ریشه‌ی مضاعف باشد. پس علاوه بر عامل  $(2-\lambda)$  که خارج از کروشه است، عبارت داخل کروشه هم باید در  $\lambda = 2$  مقدارش صفر شود:

$$\lambda^2 - (3+a)\lambda + 3a - 1 = 0 \xrightarrow{\lambda=2} 4 - 2(3+a) + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۵- گزینه «۲» مقادیر ویژه‌ی  $A$  عبارتند از ریشه‌های معادله‌ی مشخصه:

$$\lambda = 2, 2, 3, 3$$

دترمینان  $A$  برابر است با حاصل ضرب مقادیر ویژه‌اش:  $\det(A) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$  و می‌دانیم که  $\det(A^t) = \det(A)$  پس  $\det(A^t) = 36$ .



## پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۲» ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

برای راحت‌تر شدن محاسبه‌ی دترمینان؛ سطر سوم را از سطر اول کم می‌کنیم:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1] - 0 + (\lambda)[-2+2-\lambda]$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - \lambda^2 = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 1 + \lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

ریشه‌های این تابع عبارتند از  $\lambda = 0$  و  $\lambda = 1$ . البته در  $\lambda = 1$  ریشه‌ی مضاعف دارد، پس باید گفت مقادیر ویژه عبارتند از:  $0, 1, 1$ .

توضیح: این که در صورت سؤال می‌گویند ماتریس  $A$  روی میدان اعداد مختلط داده شده است، به این معناست که اگر ریشه‌های  $f(\lambda) = 0$  عدد مختلط شدند، آنها را حساب می‌کنیم یعنی اگر  $\Delta < 0$  شد؛ نمی‌گوئیم معادله جواب ندارد، بلکه ریشه‌های آن را به شکل اعداد مختلط حساب می‌کنیم.

۲- گزینه «۳» مطابق متن درس، ابتدا دترمینان ماتریس  $A_{3 \times 3}$  را حساب می‌کنیم. اگر دترمینان صفر نشود، رتبه‌ی  $A$  برابر با ۳ است. اگر دترمینان  $A$  صفر باشد به ماتریس‌های  $2 \times 2$  که در  $A$  وجود دارند، دقت می‌کنیم.

$$\det A = (1)(0+24) - (3)(0+3) + (1)(-16+1) = 24 - 9 - 15 = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 6 \neq 0$$

پس رتبه‌ی  $A$  کمتر از ۳ است. حالا به ماتریس‌های  $2 \times 2$  که در  $A$  هستند، دقت می‌کنیم:

پس رتبه‌ی  $A$  برابر با ۲ است.

۳- گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادلات پارامتری، مختصات نقطه‌ی  $A$  را بر حسب  $t$  می‌نویسیم:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z = t \Rightarrow A \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

مختصات نقطه‌ی  $A$  را در معادله‌ی صفحه قرار می‌دهیم:

$$2(3t+2) - 5(2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 6t + 4 - 10t + t + 1 = 0 \Rightarrow -3t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow z = t = \frac{5}{3}, y = 2t = \frac{10}{3}, x = 3t + 2 = 7 \Rightarrow a + b + c = x + y + z = 7 + \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = 12$$

۴- گزینه «۱» طبق متن درس، برای محاسبه‌ی فاصله‌ی یک نقطه از یک خط، به دو چیز احتیاج داریم. ابتدا باید بردار هادی خط موردنظر را تشخیص دهیم و سپس یک نقطه از آن خط را در نظر بگیریم. برای یافتن بردار هادی، معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم. برای مثال اگر فرض کنیم  $x = t$  آن‌گاه داریم  $y = 1 - t$  و  $z = t - (1 - t) = 2t - 1$  پس  $x = t, y = 1 - t, z = 2t - 1$  و معادلات پارامتری خط را می‌دهند. با توجه به ضریب  $t$  در این معادلات، بردار هادی خط  $\vec{V} = (1, -1, 2)$  است و اگر مثلاً  $t = 0$  را انتخاب کنیم نقطه‌ی  $P_0(0, 1, -1)$  از این خط خواهد بود. طبق فرمول داریم:

$$L \text{ فاصله‌ی } P \text{ از خط } = \frac{|\overline{PP_0} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

$$\overline{PP_0} = (0+4, 1-1, -1-1) = (4, 0, -2) \Rightarrow \overline{PP_0} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{PP_0} \times \vec{V} = -2\vec{i} - 10\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$L \text{ فاصله‌ی } P \text{ از خط } = \frac{\sqrt{4+100+16}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{6}} = \sqrt{20}$$

۵- گزینه «۴» به یک نقطه دلخواه از خط  $L$  و بردار هادی آن نیاز داریم. با جایگذاری  $t = 0$  در معادلات پارامتری، می‌بینیم که نقطه  $P_0(-2, 0, 1)$  روی خط قرار دارد و با توجه به ضرایب  $t$  در معادلات پارامتری داده شده، معلوم است که بردار هادی این خط  $\vec{V} = (3, -2, 4)$  می‌باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  از خط  $L$  برابر

است با  $\frac{|\overline{AP_0} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|}$ . با توجه به مختصات نقاط  $A$  و  $P_0$  داریم:

$$\overline{AP_0} = (-2-3, 0+1, 1-4) = (-5, 1, -3)$$

$$\overline{AP_0} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}$$

اکنون حاصل ضرب خارجی مورد نیاز را حساب می‌کنیم:

$$\text{فاصله} = \frac{|\overline{AB} \times \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$$

۶- گزینه «۳» معادلات پارامتری خطوط  $L$  و  $L'$  را می‌نویسیم تا بردار هادی آن‌ها مشخص شود. در مورد خط  $L$  با فرض  $x = t$  داریم  $y = 2 - 2t$  و  $z = 1$  پس با توجه به ضریب  $t$  در این معادله‌ها، بردار هادی خط  $L$  به صورت  $\vec{V} = (1, -2, 0)$  است. در مورد  $L'$  با فرض  $x = t$  داریم  $y = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$  و  $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t$  پس بردار هادی این خط  $\vec{V}' = (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  است. اکنون با مقایسه‌ی بردارهای هادی به دست آمده معلوم می‌شود که این دو خط موازی نیستند، زیرا بردارهای هادی آنها با هم موازی نیست. حال به بررسی متقاطع یا متناظر بودن دو خط می‌پردازیم. برای بررسی شرط متناظر بودن، به بردارهای هادی و دو نقطه‌ی دلخواه از این خطوط نیاز داریم. با جایگذاری مثلاً  $t = 0$  در معادلات پارامتری، نقطه‌ی  $P(0, 2, 1)$  روی خط  $L$  و نقطه‌ی  $P'(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  روی خط  $L'$  به دست می‌آید. حاصل ضرب مختلط زیر را حساب می‌کنیم:

$$\overline{PP'} \cdot (\vec{V} \times \vec{V}') = (0 - 0, -\frac{1}{2} - 2, \frac{5}{2} - 1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = (0, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) \cdot (-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = 0 + \frac{15}{4} + \frac{9}{4} \neq 0$$

این حاصل ضرب مختلط، صفر نشده است در نتیجه این دو خط متناظر هستند.

**توضیح:** گاهی اوقات که برخورد دادن معادلات  $L$  و  $L'$  ساده باشد، می‌توانیم به صورت زیر وضعیت آن‌ها را نسبت به هم بررسی کنیم: ابتدا شرط موازی بودن را بررسی می‌کنیم. اگر موازی نبودند، یا متقاطع هستند یا متناظرند. دستگاهی را که از برخورد  $L$  و  $L'$  به وجود می‌آید حل می‌کنیم. اگر جوابی به دست نیامد، آن دو خط متناظر هستند. در این مثال ابتدا دیدیم که  $\vec{V}$  و  $\vec{V}'$  موازی نیستند. حالا اگر دو خط متقاطع باشند، لازم است دستگاه زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \\ 3y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{z=1} y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد یعنی غیرممکن است که هم‌زمان  $2x = 2$  و  $x = -1$  باشد پس این دو خط یکدیگر را قطع نمی‌کنند و متناظر هستند.

۷- گزینه «۱» بردار هادی فصل مشترک دو صفحه‌ی  $P_1$  و  $P_2$  حاصل ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه می‌باشد لذا داریم:

$$\vec{n} = (2, -3, 1) \text{ و } \vec{n}_2 = (\frac{1}{3}, 2, -4)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2 & -4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + \frac{25}{3}\vec{j} + 5\vec{k}$$

این بردار با بردار  $6\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$  موازی است زیرا  $\frac{10}{6} = \frac{25}{5} = \frac{5}{3}$  است.

۸- گزینه «۲» سه صفحه نقطه مشترکی ندارند، هرگاه دستگاه مقابل جواب نداشته باشد و برای اینکه دستگاه جواب نداشته باشد، لازم است دترمینان

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 5y + 2z = 7 \\ 2x + 7y + az = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 5$$

ضرایب برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4k^2 - 13k + 9 = 0 \Rightarrow k = 1, k = \frac{9}{4}$$

۹- گزینه «۱»

۱۰- گزینه «۱» کفایت اتحاد لاگرانژ را که در متن درس آمده است به کار بگیریم:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$



۱۱- گزینه «۱» می‌دانیم که مجموع مقادیر ویژه، برابر است با  $\text{tr}(A)$  و حاصل ضرب مقادیر ویژه برابر است با  $\det(A)$ . محاسبه‌ی دترمینان  $A$  لازم نیست زیرا در صورت سؤال گفته شده که  $A$  وارون‌پذیر نیست پس  $\det A = 0$  است.

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = \lambda + \nu + \zeta = 18 \\ \det(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda_1 = 3} \begin{cases} 3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18 \\ 3 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 15 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

پس  $\lambda_2 = 0$  و  $\lambda_3 = 15$  است.

۱۲- گزینه «۲» صفحات را به این صورت نامگذاری می‌کنیم:  $P_1: x + 2y + 3z = 6$ ,  $P_2: x + 5y + 2z = 7$ ,  $P_3: 2x + 7y + az = 8$

صفحات  $P_1$  و  $P_2$  موازی نیستند، زیرا  $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{3}{2}$  پس یکدیگر را قطع می‌کنند. فصل مشترک  $P_1$  و  $P_2$  یک خط است. بردار هادی این خط را تعیین

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-11, 1, 3) \quad \text{می‌کنیم:}$$

اگر این خط، صفحه‌ی  $P_3$  را قطع کند، نقطه‌ای به دست می‌آید که هم روی فصل مشترک  $P_1$  و  $P_2$  است و هم روی  $P_3$  قرار گرفته است. طبق صورت سؤال، این ۳ صفحه نباید نقطه‌ی مشترک داشته باشند، پس فصل مشترک  $P_1$  و  $P_2$  باید با صفحه‌ی  $P_3$  موازی باشد.

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-11, 1, 3) = \vec{V} = \text{بردار هادی فصل مشترک } P_1 \text{ و } P_2$$

$$\vec{n}_3 = (2, 7, a) = \text{بردار نرمال صفحه‌ی } P_3$$

برای موازی بودن یک خط و یک صفحه باید بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمود باشند:  $\vec{V} \cdot \vec{n}_3 = 0 \Rightarrow -22 + 7 + 3a = 0 \Rightarrow a = 5$

۱۳- گزینه «۲» طبق متن درس اگر  $\lambda$  مقدار ویژه‌ی  $A$  باشد،  $\frac{1}{\lambda}$  مقدار ویژه‌ی  $A^{-1}$  است. مقادیر ویژه‌ی  $A$ ، ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی  $A$  هستند:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_3 = 1 \quad \text{پس مقادیر ویژه‌ی } A^{-1} \text{ عبارتند از } \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{9}, \frac{1}{\lambda_2} = 3, \frac{1}{\lambda_3} = 1$$

پس ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی  $A^{-1}$  باید ۱ و ۳ و  $\frac{1}{9}$  باشند. در نتیجه داریم:  $|A^{-1} - \lambda I| = (\lambda - \frac{1}{9})(\lambda - 3)(\lambda - 1) = (\lambda - \frac{1}{9})(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda^3 - (4 + \frac{1}{9})\lambda^2 + (3 + \frac{4}{9})\lambda - \frac{3}{9} = \lambda^3 - \frac{37}{9}\lambda^2 + \frac{31}{9}\lambda - \frac{1}{3}$

۱۴- گزینه «۴» طبق متن درس شرط لازم و کافی برای معین مثبت بودن  $A$  آن است که دترمینان‌های زیر مثبت باشند:

$$H_1 = m, \quad H_2 = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & m-2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} H_1 > 0 \Rightarrow m > 0 \\ H_2 > 0 \Rightarrow 2m - 2 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ H_3 > 0 \Rightarrow -12m - 8(m-2) + 12 > 0 \Rightarrow 20m < 28 \Rightarrow m < 1/4 \end{cases} \Rightarrow 1 < m < 1/4$$

۱۵- گزینه «۱» ابتدا معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از  $A$  می‌گذرد و عمود بر  $P$  است. بردار هادی این خط همان بردار نرمال صفحه است:  $\vec{n} = (1, 1, 1)$

معادله‌ی این خط  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$  است. در گام بعدی معادله‌ی پارامتری خط را نوشته و برخورد آن با صفحه را به دست

می‌آوریم:  $x = t+1, y = t+2, z = t+2$ . با قرار دادن در معادله‌ی صفحه داریم:

$$x + y + z = 8 \Rightarrow (t+1) + (t+2) + (t+2) = 8 \Rightarrow 3t + 5 = 8 \Rightarrow t = 1$$

پس نقطه‌ی  $x_0 = 2, y_0 = 3, z_0 = 3$  به دست می‌آید که محل برخورد خط و صفحه است. این نقطه وسط پاره‌خط  $AA'$  قرار دارد. پس داریم:

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_0 \Rightarrow \frac{1 + x_{A'}}{2} = 2 \Rightarrow x_{A'} = 3$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_0 \Rightarrow \frac{2 + y_{A'}}{2} = 3 \Rightarrow y_{A'} = 4 \quad \text{پس } \frac{z_A + z_{A'}}{2} = z_0 \Rightarrow \frac{2 + z_{A'}}{2} = 3 \Rightarrow z_{A'} = 4$$

به همین ترتیب  $y_{A'} = 4$  است. یعنی  $A'(3, 4, 4)$ . نقطه‌ی  $z_{A'} = 4$  یعنی  $A'(3, 4, 4)$  به دست می‌آید.



## پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۲» برای به دست آوردن بردار سرعت کافی است از معادله‌ی حرکت مشتق بگیریم:

$$\vec{R}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 4 \sin t \vec{j} + t \vec{k} \Rightarrow \vec{R}'(t) = -3 \sin t \vec{i} + 4 \cos t \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\vec{R}'(t)| = \sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t + 1}$$

بنابراین اندازه سرعت در  $t = \pi$  برابر  $\sqrt{17}$  خواهد بود.

۲- گزینه «۱» می‌دانیم انحناء از رابطه  $\kappa = \frac{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$  به دست می‌آید.

$$\vec{R}(t) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t) \Rightarrow \vec{R}'(t) = (\cos 2t, \sin 2t, -\sin t) \Rightarrow \vec{R}''(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t, -\cos t)$$

به ازای  $t = 0$  داریم  $R' = (1, 0, 0)$  و  $R'' = (0, 2, -1)$  پس  $|R'| = \sqrt{1^2 + 0 + 0} = 1$  است. برای تعیین  $|\vec{R}' \times \vec{R}''|$  ابتدا حاصل ضرب خارجی آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{R}' \times \vec{R}''| = \sqrt{5} \Rightarrow \kappa = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

۳- گزینه «۳» بردار نرمال صفحه بوسان، بردار  $\vec{v} \times \vec{a}$  است.  $\vec{R}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t) \Rightarrow \vec{v}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1) \Rightarrow \vec{a}(t) = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0)$  در نقطه  $t = 0$ ، این بردارها به صورت  $\vec{v} = (0, 2, 1)$  و  $\vec{a} = (-2, 0, 0)$  خواهند بود، در نتیجه داریم:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + 4\vec{k}$$

بردار نرمال صفحه بوسان

همچنین با توجه به این که در  $t = 0$ ،  $\vec{R}(0) = (2, 0, 0)$  است، پس صفحه بوسان از نقطه‌ی  $(2, 0, 0)$  می‌گذرد و معادله‌اش به صورت زیر است:

$$0(x-2) - 2(y-0) + 4(z-0) = 0 \Rightarrow -2y + 4z = 0 \Rightarrow y = 2z$$

۴- گزینه «۲» ابتدا بردار  $\vec{R}'(t)$  را می‌نویسیم. سپس اندازه‌ی آن را حساب می‌کنیم. طول خم برابر است با:

$$s = \int_0^\pi |\vec{R}'(t)| dt$$

$$\vec{R}'(t) = 12 \cos 2t \vec{i} - 12 \sin 2t \vec{j} + \delta \vec{k} \Rightarrow |\vec{R}'(t)| = \sqrt{144 \cos^2 2t + 144 \sin^2 2t + 25} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\Rightarrow s = \int_0^\pi |\vec{R}'(t)| dt = \int_0^\pi 13 dt = [13t]_0^\pi = 13\pi$$

۵- گزینه «۲» بردار سرعت  $\vec{V}(t) = \vec{R}'(t)$  است. طول بردار سرعت را تندى ذره می‌نامیم که با اکسترمم‌سازی آن ماکزیمم تندى به دست می‌آید:

$$\vec{V} = (-4 \sin t, 4 \cos t, -4 \sin t) \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{16 \sin^2 t + 16 \cos^2 t + 16 \sin^2 t} = \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16 \sin^2 t} = 4\sqrt{1 + \sin^2 t}$$

حالا باید بیشترین مقدار این تابع را به دست آوریم. ابتدا نقطه‌ی بحرانی را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} |\vec{V}(t)| = 0 \Rightarrow 2 \sin t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}$$

جایگذاری در  $|\vec{V}|$   $\rightarrow |\vec{V}|_{\max} = 4\sqrt{2}$ ,  $|\vec{V}|_{\min} = 4$

۶- گزینه «۱» بردارهای سرعت و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, t^2) \Rightarrow \vec{v} = \vec{R}'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 2t) \Rightarrow \vec{a} = \vec{R}''(t) = (-3 \cos t, -3 \sin t, 2)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 9 \cos t \sin t - 9 \cos t \sin t + 4t = 0 \Rightarrow 4t = 0 \Rightarrow t = 0$$

هنگامی که بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمود باشند، خواهیم داشت:

۷- گزینه «۲» برای تابع  $y = f(x)$ ، انحناء از این رابطه به دست می‌آید:

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{-1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right|}{\left( 1 + \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{3/2}}$$

در  $x = 0$  نتیجه می‌دهد:  $\kappa(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ، و شعاع انحناء برابر  $\rho = \frac{1}{\kappa} = 2$  می‌باشد.

۸- گزینه «۱» شعاع دایره بوسان از رابطه‌ی  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  به دست می‌آید. ابتدا انحنا را در این نقطه حساب می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لذا داریم:  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$$\text{در } x = 0 \text{ داریم: } y' = 0, y'' = 1. \text{ پس } \rho = \frac{1}{\kappa} = 1 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\rho} = 1 = \frac{1}{(1+0)^2}$$

۹- گزینه «۲» انحنای منحنی‌های قطبی، از این رابطه به دست می‌آید:

$$\kappa(\theta) = \frac{|r^2 + 2r^2 r'' - r'^2|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{r=e^\theta} \kappa(\theta) = \frac{|e^{2\theta} + 2e^{2\theta} - e^{2\theta}|}{(e^{2\theta} + e^{2\theta})^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{2\theta}}{2\sqrt{2}e^{3\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^\theta}$$

شعاع انحناء، عکس انحناء است. پس داریم:  $\rho = \sqrt{2}e^\theta \xrightarrow{\theta=\ln 3} \rho = 3\sqrt{2}$

۱۰- گزینه «۴» منحنی  $z = \frac{1}{x}$  در صفحه‌ی  $xOz$  قرار دارد. محور دوران، محور  $x$  ها است پس با متغیر  $x$  کاری نداریم اما به جای  $z$  باید  $\sqrt{z^2 + y^2}$  قرار

$$z = \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{z^2 + y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow z^2 + y^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2(z^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 z^2 + x^2 y^2 = 1$$

۱۱- گزینه «۲» مطابق متن درس، ساده‌ترین راه تشخیص رویه‌ها، بررسی مقطع آن‌ها با صفحات مختصات است. با جایگذاری  $x = 0$  در این معادله داریم

$$z = \frac{25}{400} y^2 \text{ که یک سهمی است. با جایگذاری } y = 0 \text{ در آن به معادله‌ی } z = -\frac{16}{400} x^2 \text{ که باز هم یک سهمی است. حالا، اگر هر دو سهمی رو به بالا یا}$$

هر دو رو به پایین بودند، یک سهمی‌وار (سهمی‌گون) داشتیم. اما چون  $z = \frac{25}{400} y^2$  سهمی رو به بالا و  $z = -\frac{16}{400} x^2$  سهمی رو به پایین است، متوجه می‌شویم که رویه‌ی موردنظر زین اسبی یا همان سهمی‌وار هذلولوی است. صفت هذلولوی به این خاطر در نام این رویه آمده است که اگر به جای  $z$  عدد ثابتی قرار دهیم (مثلاً  $z = 1$ ) به معادله‌ی هذلولوی می‌رسیم.

۱۲- گزینه «۳» ضرایب این معادله به ترتیب عبارتند از:  $a = 5, b = 8, c = 5$  در نتیجه داریم:

$$\Delta = b^2 - ac = (8)^2 - (5)(5) = 64 - 25 = 39 > 0$$

پس این معادله یک بیضی (یا در حالت خاص دایره) است. برای تشخیص شعاع‌های آن بهتر است فرم استاندارد معادله را بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(5-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 9$$

پس در دستگاه جدید، ضرایب  $x'^2$  و  $y'^2$  عبارتند از ۱ و ۹ در ضمن جمله‌ی ثابت معادله، تغییری نمی‌کند:

$$x'^2 + 9y'^2 = 36 \Rightarrow \frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

یک بیضی با شعاع‌های ۶ و ۲ داریم. مساحت آن برابر است با:

$$S = \pi(2)(6) = 12\pi$$

۱۳- گزینه «۳» ضرایب  $x'y, xy, y^2$  به ترتیب  $a = 3, b = 2\sqrt{3}, c = 3$  هستند. نوع منحنی را با توجه به علامت  $\Delta$  به سرعت می‌توان تعیین کرد:

$$\Delta = b^2 - ac = (2\sqrt{3})^2 - 3 \times 3 = 12 - 9 = 3 > 0$$

$\Delta > 0$  نشان‌دهنده‌ی بیضی یا در حالت خاص، دایره است. برای یافتن فرم استاندارد باید ماتریس  $A$  را تشکیل داده و مقادیر ویژه‌ی آن را پیدا کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 24 = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین ضرایب  $x'^2$  و  $y'^2$  عبارتند از  $3 + \sqrt{3}$  و  $3 - \sqrt{3}$ . جمله‌ی ثابت معادله نباید تغییر کند. در معادله‌ی داده شده  $+1$  را سمت راست تساوی داریم پس با تغییر متغیر به معادله‌ی  $(3 + \sqrt{3})x'^2 + (3 - \sqrt{3})y'^2 = 1$  خواهیم رسید. ممکن است جای ضرایب  $x'^2$  و  $y'^2$  عوض شود اما جمله‌ی ثابت سمت راست باید  $+1$  باشد.

۱۴- گزینه «۳» برای آن که یک منحنی در صفحه قرار داشته باشد باید تاب آن صفر باشد. طبق فرمول کتاب، برای آن که  $\tau = 0$  شود باید دترمینان

ماتریس زیر صفر شود:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3bt^2 + 1 & at^3 & 2 \\ 6bt & 2at^2 & 0 \\ 6b & 6at & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12abt^2 - 36abt^2 = 36abt^2 = 0$$

برای آن که این دترمینان همواره صفر باشد باید  $ab = 0$  شود. به عبارتی حداقل یکی از ضرایب  $a$  یا  $b$  باید صفر باشد.



۱۵- گزینه «۱» در نقطه‌ی A داریم  $e^t = 1$  پس  $t = 0$  است. فرمول تاب را می‌نویسیم:

بردارهای موردنظر را در  $t = 0$  به دست می‌آوریم:

$$\tau = \frac{|\vec{R}' \cdot (\vec{R}'' \times \vec{R}''')|}{|\vec{R}' \times \vec{R}''|^2}$$

$$\begin{cases} \vec{R}'(t) = (e^t, 2e^{2t}, 3e^{3t}) \\ \vec{R}''(t) = (e^t, 4e^{2t}, 9e^{3t}) \\ \vec{R}'''(t) = (e^t, 8e^{2t}, 27e^{3t}) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} \vec{R}'(t) = (1, 2, 3) \\ \vec{R}''(t) = (1, 4, 9) \\ \vec{R}'''(t) = (1, 8, 27) \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{R}' \cdot (\vec{R}'' \times \vec{R}''') = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{برای سادگی بیشتر از هر سطر، سطر قبلی را کم می‌کنیم.}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 18 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{دستور ساروس}} 36 - 24 = 12$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (36, -18, 4)$$

حالا  $\vec{R}' \times \vec{R}''$  را حساب می‌کنیم:

$$\tau = \frac{12}{\sqrt{36^2 + 18^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{2^2(18^2 + 9^2 + 2^2)}} = \frac{12}{2\sqrt{409}} = \frac{6}{\sqrt{409}}$$

در نتیجه داریم:



### پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۲» مطابق متن درس، منحنی  $y = f(x)$  را معمولاً به صورت  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$  پارامتری می‌کنیم. در این مثال داریم  $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$  پس معادله‌ی مسیر

حرکت به صورت  $\vec{R}(t) = (t, t^2)$  نوشته می‌شود. با مشتق‌گیری نسبت به  $t$  می‌توانیم بردار سرعت را تعیین کنیم:  $\vec{R}'(t) = (1, 2t)$   
اندازه‌ی بردار سرعت را تندی می‌نامند. طبق صورت سؤال، تندی ثابت و برابر با ۵ است. در حالی که طبق معادله‌ی پارامتری به دست آمده،  $|\vec{R}'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$  یعنی تندی حرکت، ثابت نیست. از این‌جا متوجه می‌شویم که باید مسیر حرکت را به صورتی پارامتری کنیم که تندی حرکت،

ثابت و برابر با ۵ شود. برای پیدا کردن معادلات پارامتری موردنظر طراح سؤال، به جای  $t$  از  $g(t)$  استفاده می‌کنیم. به این صورت که داریم  $\begin{cases} x = g(t) \\ y = g^2(t) \end{cases}$

پس  $\vec{R}(t) = (g(t), g^2(t))$  با مشتق‌گیری نسبت به  $t$  خواهیم داشت:  $g'(t)\sqrt{1+4g^2(t)} = 5$  در  $(1,1) \Rightarrow g'(t)\sqrt{1+4 \times 1} = 5 \Rightarrow g'(t) = \sqrt{5}$

حال از رابطه‌ی بالا یک بار دیگر مشتق می‌گیریم:  $g''(t)\sqrt{1+4g^2(t)} + \frac{g'(t) \times 8g(t)g'(t)}{\sqrt{1+4g^2(t)}} = 0$

$$g''(t)\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5} \times 4 \times 1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow g''(t) = -4$$

$$\vec{R}(t) = (g(t), g^2(t)) \Rightarrow \vec{R}'(t) = (g'(t), 2g'(t)g(t)) \Rightarrow \vec{R}''(t) = (g''(t), 2g''(t)g(t) + 2g'(t)^2) \Rightarrow \vec{R}''(t) = (-4, 2 \times -4 \times 1 + 10) = (-4, 2)$$

۲- گزینه «۱» اگر به معادلات  $y$  و  $z$  دقت کنید متوجه می‌شوید که تساوی  $y+z=4$  برقرار است. می‌دانیم اگر یک منحنی در صفحه واقع باشد، تاب آن صفر است و چون منحنی داده شده در صفحه‌ی  $y+z=4$  قرار دارد پس تاب آن صفر است.

۳- گزینه «۲» ابتدا بردارهای سرعت و شتاب را به دست می‌آوریم.

$$\vec{R}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}) \Rightarrow \vec{R}'(t) = (e^t, \sqrt{2}, -e^{-t}) \Big|_{t=\text{Ln}\sqrt{2}} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}) \quad , \quad \vec{a} = (e^t, 0, e^{-t}) \Big|_{t=\text{Ln}\sqrt{2}} = (\sqrt{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = (1, -2, -2) \Rightarrow |\vec{R}' \times \vec{R}''| = 3$$

$$\kappa = \frac{|\vec{R}' \times \vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3} = \frac{3}{(\sqrt{2+2+\frac{1}{2}})^3} = \frac{3}{(\sqrt{\frac{9}{2}})^3} = \frac{3}{\frac{9}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

بنابراین انحنای منحنی برابر است با:

۴- گزینه «۱» با محاسبه‌ی  $\vec{R}'(t)$  و تقسیم آن بر اندازه‌اش آغاز می‌کنیم:

$$\vec{T} = \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|} \quad , \quad \vec{R}' = (-3 \sin t \cos^2 t, 3 \sin^2 t \cos t) \Rightarrow \vec{T} = \frac{(-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)}{\sqrt{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t}} = \frac{(-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)}{\sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)}}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{(-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)}{3 \sin t \cos t} = (-\cos t, \sin t)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = \frac{(\sin t, \cos t)}{1} = (\sin t, \cos t)$$

با مشتق‌گیری از  $\vec{T}(t)$  و تقسیم آن بر اندازه‌اش به بردار  $\vec{N}$  می‌رسیم:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1)$$

در نهایت داریم:

$$x' = \cos t - t \sin t$$

۵- گزینه «۱» با توجه به فرمول، ابتدا  $x'$ ،  $x''$ ،  $y'$  و  $y''$  را حساب می‌کنیم:

$$x'' = -\sin t - \sin t - t \cos t = -2 \sin t - t \cos t$$

$$y' = \sin t + t \cos t$$

$$y'' = \cos t + \cos t - t \sin t = 2 \cos t - t \sin t$$



$$\kappa(t) = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|\sqrt{2}\cos^2 t - \sqrt{2}t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sqrt{2}\sin^2 t + \sqrt{2}t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t|}{(\cos^2 t - \sqrt{2}t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \sqrt{2}t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{|\sqrt{2} + t^2|}{(1+t^2)^{3/2}} \xrightarrow{t=\sqrt{2}} \kappa = \frac{\sqrt{2} + 2}{(1+2)^{3/2}} = \frac{5}{8}$$

۶- گزینه «۱» ابتدا انحناى منحنى را به دست مى آوريم. برای منحنی‌های پارامتری که در صفحه‌ی (x, y) قرار دارند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|x'_t y''_t - y'_t x''_t|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}}$$

$$\begin{cases} x'_t = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t & x''_t = a(\cos t - t \sin t) \\ y'_t = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t & y''_t = a(\sin t + t \cos t) \end{cases}$$

مشتق‌های اول و دوم x و y را نسبت به t حساب می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{|a^2(t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t) - a^2(t \sin t \cos t - t^2 \sin^2 t)|}{[a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t]^{3/2}} \Rightarrow \kappa = \frac{a^2 t^2}{(a^2 t^2)^{3/2}} = \frac{a^2 t^2}{a^3 t^3} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{at} \xrightarrow{t=2} \kappa = \frac{1}{2a}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \rho = 2a \xrightarrow{\rho=6} 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

شعاع انحنا؛ از رابطه‌ی  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  به دست می‌آید.

۷- گزینه «۲» می‌دانیم خمیدگی منحنی از رابطه‌ی  $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$  حساب می‌شود. با توجه به اینکه مقدار  $y'$  در نقطه‌ی (1,1) داده شده داریم:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|y''|}{2\sqrt{2}}$$

اگر مقدار  $y''$  معلوم شود، خمیدگی تعیین می‌شود. مقدار  $y''$  در نقطه‌ی (1,1) از معادله‌ی داده شده تعیین می‌شوند:

$$y''(1) - [y'(1)]^2 + y(1) = 4 \Rightarrow y''(1) = 4$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸- گزینه «۳» با توجه به فرمول باید  $y'$  و  $y''$  را حساب کنیم:

$$\text{توجه داشته باشید که } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ و } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ می‌باشد.}$$

$$x=1 \rightarrow y''(1) = \cosh(1) = \frac{e+e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{2e} \quad \text{و} \quad x=1 \rightarrow y'(1) = \sinh(1) = \frac{e-e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$$

$$\kappa = \frac{\frac{e^2+1}{2e}}{(1+(\frac{e^2-1}{2e})^2)^{3/2}} = \frac{\frac{e^2+1}{2e}}{(1+\frac{e^4+1-2e^2}{4e^2})^{3/2}} = \frac{\frac{e^2+1}{2e}}{(\frac{e^4+2e^2+1}{4e^2})^{3/2}} = \frac{\frac{e^2+1}{2e}}{(\frac{(e^2+1)^2}{4e^2})^{3/2}} = \frac{\frac{e^2+1}{2e}}{\frac{(e^2+1)^3}{4e^3}} = \frac{4e^2}{(e^2+1)^2}$$

۹- گزینه «۱» با توجه به آن که x و y به صورت پارامتری داده شده‌اند، باید  $x'$ ،  $x''$  و  $y'$  و  $y''$  را حساب کنیم:

$$x'_t = a\sqrt{\pi}(\cos \frac{\pi t}{2}) \rightarrow x''_t = -\pi t a \sqrt{\pi}(\sin \frac{\pi t}{2}) \quad \text{و} \quad y'_t = a\sqrt{\pi}(\sin \frac{\pi t}{2}) \rightarrow y''_t = \pi t a \sqrt{\pi}(\cos \frac{\pi t}{2})$$

$$\kappa = \frac{t a^2 \pi^2 \cos^2(\frac{\pi t}{2}) + t a^2 \pi^2 \sin^2(\frac{\pi t}{2})}{[(\pi a^2 \cos^2(\frac{\pi t}{2}) + \pi a^2 \sin^2(\frac{\pi t}{2}))^2]^{3/2}} \Rightarrow \kappa = \frac{t a^2 \pi^2 (\cos^2 \frac{\pi t}{2} + \sin^2 \frac{\pi t}{2})}{[\pi a^2 (\cos^2 \frac{\pi t}{2} + \sin^2 \frac{\pi t}{2})]^2} = \frac{t a^2 \pi^2 \times 1}{(\pi a^2 \times 1)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

۱۰- گزینه «۴» اگر  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  باشد آن‌گاه طول قوس این منحنی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \Rightarrow s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

$$x(t) = t \cos t \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} x'(t) = \cos t - t \sin t$$

$$y(t) = t \sin t \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} y'(t) = \sin t + t \cos t$$

$$z(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} t^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} z'(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \times \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{9} t^{-\frac{1}{3}}$$

با توجه به صورت سؤال و مقایسه آن با بردار  $\vec{R}(t)$  مذکور داریم:

$$s = \int_0^t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + (\sqrt{2}t)^2} dt = \int_0^t \sqrt{1+t^2 + 2t} dt \Rightarrow s = \int_0^t \sqrt{(t+1)^2} dt \Rightarrow s = \int_0^t (t+1) dt = \frac{t^2}{2} + t$$

$$s = \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow 2s = t^2 + 2t \Rightarrow 2s+1 = t^2 + 2t+1$$

$$2s+1 = (t+1)^2 \Rightarrow t+1 = \sqrt{2s+1} \Rightarrow t = \sqrt{2s+1} - 1$$

$$\kappa = \frac{|\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}$$

۱۱- گزینه «۲» ابتدا باید انحنای منحنی را در  $t=0$  محاسبه کنیم:

به بردارهای  $\vec{R}'(t)$  و  $\vec{R}''(t)$  نیاز داریم:

$$\vec{R}'(t) = (e^t, e^t \cos(1+e^t), -e^t \sin(1+e^t)) \Rightarrow \vec{R}''(t) = (e^t, e^t \cos(1+e^t) - e^{2t} \sin(1+e^t), -e^t \sin(1+e^t) - e^{2t} \cos(1+e^t))$$

$$\vec{R}'' = (1, \cos 2 - \sin 2, -\sin 2 - \cos 2), \vec{R}' = (1, \cos 2, -\sin 2)$$

به ازای  $t=0$  خواهیم داشت:

ضرب خارجی این بردارها را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}' \times \vec{R}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \cos 2 & -\sin 2 \\ 1 & \cos 2 - \sin 2 & -\sin 2 - \cos 2 \end{vmatrix} = (-\cos 2 \sin 2 - \cos^2 2 + \sin 2 \cos 2 - \sin^2 2, \sin 2 + \cos 2 - \sin 2, \cos 2 - \sin 2 - \cos 2)$$

$$= (-1, \cos 2, -\sin 2)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 2 + \sin^2 2}}{(\sqrt{1 + \cos^2 2 + \sin^2 2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب با محاسبه‌ی اندازه‌ی این بردار و اندازه‌ی بردار  $\vec{R}'$  داریم:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = 2$$

انحنای این منحنی در  $t=0$  برابر با  $\frac{1}{2}$  است، پس شعاع انحنای آن برابر است با:

۱۲- گزینه «۲» می‌خواهیم دوران حول محور  $y$  انجام شود. پس به متغیر  $y$  کاری نداریم اما به جای  $x$  باید  $\sqrt{x^2 + z^2}$  قرار دهیم.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y = (\sqrt{x^2 + z^2})^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + z^2 + 1$$

مقاطع مختلف را بررسی می‌کنیم:

اگر  $x=0$  قرار دهیم  $1 + z^2 = y$  یک سهمی است.

اگر  $z=0$  قرار دهیم  $1 + x^2 = y$  یک سهمی است.

هر دو سهمی رو به بالا هستند پس تا این جا مطمئن شدیم که یک سهمی گون (سهمی وار) به دست می‌آید.

اگر  $y=c$  قرار دهیم،  $1 + x^2 + z^2 = c$  یک دایره است ( $c > 1$ ) پس سهمی گون مورد نظر، دایروی است.

۱۳- گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادله‌ی رویه  $z = x^2 + y^2$  و صفحه‌ی  $z = 2x$  معادله‌ی پارامتری منحنی  $C$  را به دست آوریم:

$$x = t \Rightarrow z = 2t \Rightarrow (2t)^2 = t^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 3t^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}t$$

$$\vec{R}(t) = (t, \sqrt{3}t, 2t)$$

به این ترتیب برای منحنی  $C$  داریم:

در نقطه‌ی  $A(0, 1, 0)$  داریم  $t=0$  و در نقطه‌ی  $B(1, \sqrt{3}, 2)$  داریم  $t=1$ .

$$s = \int_0^1 |\vec{R}'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1+3+4} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 dt = 2\sqrt{2}$$

۱۴- گزینه «۱» فاصله‌ی این ذره از مبدأ مختصات یعنی اندازه‌ی بردار  $\vec{R}(t)$ . همان طور که می‌دانید  $|\vec{R}(t)| = \vec{R}(t) \cdot \vec{R}(t)$  بنابراین با مشتق‌گیری از

$$\vec{R}'(t) \cdot \vec{R}(t) + \vec{R}(t) \cdot \vec{R}'(t) = \frac{d}{dt} |\vec{R}(t)|^2$$

طرفین داریم:

طبق فرض  $\vec{R}(t) \cdot \vec{R}'(t) > 0$  است پس  $\frac{d}{dt} |\vec{R}(t)|^2 > 0$  یعنی  $|\vec{R}(t)|^2$  تابعی صعودی است پس  $|\vec{R}(t)|$  هم به مرور زمان در حال افزایش است.

یعنی این ذره در حال دور شدن از مبدأ است. اکنون به تندی حرکت یعنی  $|\vec{R}'(t)|$  دقت کنیم. می‌دانیم که:  $|\vec{R}'(t)|^2 = \vec{R}'(t) \cdot \vec{R}'(t)$  پس:

$$\frac{d}{dt} |\vec{R}'(t)|^2 = \vec{R}''(t) \cdot \vec{R}'(t) + \vec{R}'(t) \cdot \vec{R}''(t) = 2\vec{R}''(t) \cdot \vec{R}'(t)$$

طبق فرض  $\vec{R}'' \cdot \vec{R}' < 0$  است پس:  $\frac{d}{dt} |\vec{R}'(t)|^2 < 0$

یعنی  $|\vec{R}'(t)|$  تابعی نزولی است پس تندی حرکت به مرور زمان در حال کاهش است.

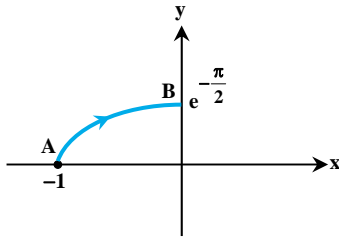


۱۵- گزینه «۱» فاصله از مبدأ برابر است با  $|\vec{R}(t)|$  پس با محاسبه‌ی اندازه‌ی این بردار داریم:

$$|\vec{R}(t)| = \sqrt{e^{-2t} \cos^2 t + e^{-2t} \sin^2 t} = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}$$

تابع  $e^{-t}$  نزولی است و وقتی  $t \rightarrow \infty$  میل کند،  $e^{-t} \rightarrow 0$  به صفر میل می‌کند. پس این ذره در حال نزدیک شدن به مبدأ است. برای تشخیص جهت

حرکت آن کافیست محل آن را در  $t = 0$  و  $t = \frac{\pi}{2}$  حساب کنیم.



$$t = 0 \Rightarrow A(-1, 0)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B(0, e^{-\frac{\pi}{2}})$$

به محل این دو نقطه دقت کنید.

این ذره در خلاف جهت مثلثاتی یعنی در جهت عقربه‌ها حرکت می‌کند.

## پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۱» چون می‌خواهیم  $\frac{\partial f}{\partial x}$  را در  $(0,0)$  به دست آوریم، برای محاسبه  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، از طرفین رابطه داده شده  $\ln$  می‌گیریم، و سپس بر حسب متغیر  $x$  مشتق می‌گیریم.

$$\ln f = -x \ln(x+2y) \Rightarrow \frac{f'_x}{f} = -\ln(x+2y) + \frac{1}{x+2y} \times (-x) \Rightarrow f'_x = \left(-\ln(x+2y) - \frac{x}{x+2y}\right)(x+2y)^{-x} \Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

۲- گزینه «۴» قرار می‌دهیم  $g = 4x + 2y - 2z - c = 0$  و با توجه به این که  $x$  متغیر مستقل است پس  $y$  و  $z$  تابع بوده و لذا داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_z \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{-2f_x - 4f_z}{2f_y + 2f_z} = \frac{2f_x + 4f_z}{2f_y + 2f_z}$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x+2z & 2y & 2z+2x \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

۳- گزینه «۱» ژاکوبین موردنظر برابر است با:

چون ستون اول و سوم ماتریس با هم برابر هستند، دترمینان بالا صفر می‌شود.

روش دوم: ابتدا توجه کنید که  $v^2 + w^2 = 2u$  و می‌دانیم اگر رابطه‌ی مستقل از متغیرها بین توابع وجود داشته باشد ژاکوبین صفر است.

۴- گزینه «۲» حجم جعبه به طول  $x$ ، عرض  $y$  و ارتفاع  $z$  برابر  $V = xyz$  است. و آهنگ تغییرات حجم  $\frac{dV}{dt}$  است.

$$\frac{dV}{dt} = yz \frac{dx}{dt} + xz \frac{dy}{dt} + xy \frac{dz}{dt} = 8 \cdot (2) + 12 \cdot (-\frac{1}{5}) + 15 \cdot (2) = 48$$

۵- گزینه «۱»  $\vec{r}$  یک میدان برداری و  $r$  تابع حقیقی است. می‌دانیم  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot (r^{-1}\vec{r})$  بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = r^{-1}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + (\nabla r^{-1}) \cdot \vec{r} = r^{-1} \left[ (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right] + (\vec{i} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}) \cdot \vec{r}$$

$$= r^{-1} + (-r^{-2}) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} - r^{-2} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} - r^{-2} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = r^{-1} - r^{-2} \left( \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) \cdot \vec{r} = r^{-1} - r^{-2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \vec{r} = r^{-1} - r^{-2} \left( \frac{r^2}{r} \right) = r^{-1} - r^{-2} (r) = r^{-1} - r^{-1} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} (r^{-1}) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} (r^{-1}) = -2r^{-3} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} - r^{-2} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} - r^{-2} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} \right) = -2r^{-3} \left( \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) = -2r^{-3} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{2}{r^4} \vec{r}$$

$$dz = z_x dx + z_y dy = (e^{x-2y} + \frac{-1}{2y-x}) dx + (-2e^{x-2y} + \frac{2}{2y-x}) dy = dy$$

۶- گزینه «۴»

۷- گزینه «۳» چون صورت و مخرج کسر هر دو نامنفی هستند پس  $z \geq 0$  و از طرفی صورت کسر کوچکتر از مخرج است بنابراین  $z < 1$ . در نتیجه برد تابع  $[0, 1)$  می‌باشد.

۸- گزینه «۴» ابتدا گرادینان تابع  $f$  را در نقطه  $(1, 1)$  به دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right) \Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = (1, -1)$$

حال جهت موردنظر را  $\vec{u}(x, y)$  در نظر می‌گیریم، در این صورت لازم است  $D_{\vec{u}}f(1, 1)$  یا همان  $\vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$  برابر صفر شود.

$$D_{\vec{u}}f(1, 1) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = (1, -1) \cdot (x, y) = x - y = 0 \Rightarrow x = y$$



۹- گزینه «۳» از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2(u-v)}{(u+v)^2 + (u-v)^2} = \frac{u-v}{u^2 + v^2}$$

۱۰- گزینه «۳» صورت کسر دارای درجه ۲ و مخرج دارای درجه ۲n است. اگر n=۱ درجه صورت و مخرج مساوی بوده و لذا f در (۰,۰) فاقد حد و ناپیوسته می‌باشد اما اگر n=1/۲ مخرج از درجه یک و لذا کسر برابر f(۰,۰)=۰ در f(۰,۰) پیوسته خواهد بود.

۱۱- گزینه «۳» شرط داده شده را به صورت  $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$  برای  $0 \leq x \leq 1$  می‌نویسیم پس:

$$f(x, y) = x^2 + \lambda y^2 = x^2 + \lambda(1 - \sqrt{x})^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 2x - \frac{16}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})^2 = 0 \Rightarrow 2x = \frac{16(1 - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 8(1 - \sqrt{x})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2(1 - \sqrt{x}) \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

چون  $g\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9}$  و  $g(0) = 8$  و  $g(1) = 1$  پس ماکزیمم ۸ و مینیمم  $\frac{8}{9}$  خواهد بود.

۱۲- گزینه «۳» چون  $g = e^{2x-y} + \frac{y}{x^2} - z = 0$  پس بردار  $\vec{\nabla}g$  بردار هادی خط قائم است. به ازای  $x=1$  و  $y=2$  داریم  $z=3$  و لذا در نقطه (۱, ۲, ۳)

$$\vec{\nabla}g = (2e^{2x-y} - \frac{2y}{x^3}, -e^{2x-y} + \frac{1}{x^2}, -1) = (-2, 0, -1) \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$

معادله خط قائم نوشته می‌شود.

$$: z=0 \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow x = -5, y = 2$$

۱۳- گزینه «۴» ابتدا گرادیان f را به دست می‌آوریم:

جهت موردنظر را  $\vec{u}$  در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos 135^\circ, \sin 135^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow D_{\vec{u}}f = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u} = (14, 13) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۱۴- گزینه «۳» نقطه بحرانی از حل  $\vec{\nabla}f = (0, 0)$  به دست می‌آید.

$$\vec{\nabla}f = (4x^3 + 2xy^2, -4y^3 + 2x^2y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 + y^2) = 0 & (1) \\ 2y(x^2 - 2y^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

اگر  $x, y$  همزمان برابر صفر نباشند، پس  $0 \neq 2x^2 + y^2$  از معادله (۱) نتیجه می‌شود  $x = 0$  که با جایگذاری در معادله (۲) به رابطه  $-4y^3 = 0$  می‌رسیم که  $y = 0$  را نتیجه می‌دهد. پس تنها جواب (۰, ۰) است. چون  $\Delta(0, 0) = 0$ ، آزمون مشتق دوم نتیجه‌ای نمی‌دهد. پس روی مسیرهای خاصی به (۰, ۰) نزدیک می‌شویم.

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow f(x, 0) = x^4 \Rightarrow \text{نقطه min است } (0, 0) \\ x = 0 \Rightarrow f(0, y) = -y^4 \Rightarrow \text{نقطه max است } (0, 0) \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۱» چون کمان مقابل سینوس به سمت صفر میل می‌کند، از هم‌ارزی  $\sin u \sim u$  استفاده می‌کنیم، در این صورت:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x| + |y|}$$

چون درجه صورت بیشتر از درجه مخرج است و تنها ریشه مخرج (۰, ۰) است و مخرج کسر همگن است پس حد موردنظر موجود و برابر صفر است.

۱۶- گزینه «۴»

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos(x^2 + 2y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x \sin(x^2 + 2y) = -4\sqrt{\pi} \sin(\pi + 0) = 0$$

۱۷- گزینه «۲» ابتدا ضابطه u را ساده می‌کنیم:

$$u = \frac{x(x^2 - \lambda y^2)}{x - 2y} = \frac{x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)}{x - 2y} = x^3 + 2x^2y + 4xy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + 8xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x + 8y \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 4$$

۱۸- گزینه «۲» حداکثر مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان است.

$$\vec{\nabla}f = (3x^2y - z^2 + 1, x^3 + 4z - 1, -2xz + 4y - 1) = (4, 0, 3)$$

$$\Rightarrow \text{جهت گرادیان} = \frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|} = \frac{1}{5}(4, 0, 3)$$

۱۹- گزینه «۱» اگر  $g_1 = x + y - 3z = 0$  و  $g_2 = x^2 - y^2 - 2z^2 - 1 = 0$  بردار نرمال صفحه قائم بر  $c$  برابر  $\vec{g}_1 \times \vec{g}_2$  است  $u = \vec{\nabla}g_1$ .

$$\vec{\nabla}g_1 = (1, 1, -3), \vec{\nabla}g_2 = (2x, -2y, -4z) = (4, -2, -4) \Rightarrow u(-10, -8, -6) \parallel u(5, 4, 3) \xrightarrow{A(2,1,1)} 5x + 4y + 3z = 17$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} = -y \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{-y}{x}$$

۲۰- گزینه «۴» تابع داده شده همگن درجه صفر است، بنابراین قضیه اولر:

۲۱- گزینه «۲» ابتدا مقدار  $A$  را حساب می‌کنیم؛ به کمک تغییر متغیر  $u = x - 1$ ,  $v = y - 2$ ,  $w = z - 1$  حد به صورت  $\lim_{(u,v,w) \rightarrow (0,0,0)} \frac{uvw}{u^2 + v^2 + w^2}$

در می‌آید، که چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است، حد موجود و برابر صفر است. اما برای تعیین  $B$  به راحتی معلوم است چون درجه صورت و مخرج برابر است، حد وجود ندارد.

$$y = 0 \Rightarrow \text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

۲۲- گزینه «۴» حد را روی دو مسیر مختلف به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 + x \Rightarrow \text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - (x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

چون روی مسیرهای مختلف، مقادیر با هم متفاوتند، پس حد وجود ندارد.

$$u = \frac{\cos \frac{x}{y}}{x + y - \sqrt{xy}}$$

۲۳- گزینه «۳» قرار می‌دهیم  $u = \frac{\cos \frac{x}{y}}{x + y - \sqrt{xy}}$  در این صورت  $u$  همگن درجه  $-1$  است، و  $u = e^z$  در این صورت داریم:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (-1) \times \frac{e^z}{e^z} = -1$$

۲۴- گزینه «۴» می‌توانیم به روش عادی بسط تیلور  $f$  را به دست آوریم، ولی کمی طولانی خواهد بود و در ضمن نیازی به این کار نیست. می‌دانیم در

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y) \sim 1 - \frac{(x^2 + y)^2}{2} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{y^2}{2} - x^2y$$

همسایگی مبدأ داریم  $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$ ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(0/0, 0/0) \sim 1 - \frac{(0/0)^2}{2} = 1 - 0/0008 = 0/9992$$

و چون فقط بسط را تا درجه دوم نیاز داریم، پس  $f \sim 1 - \frac{y^2}{2}$  خواهد بود و در این صورت داریم:

۲۵- گزینه «۱» ابتدا صورت کسر داده شده را به صورت مقابل تجزیه می‌کنیم:

$$y(x^2 - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(y(x + 1) + 2)$$

$$\text{حد} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y+xy+y)}{x-1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (y+xy+y) = 4$$



## پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها  $\frac{\partial z}{\partial y}$  و  $\frac{\partial z}{\partial x}$  را محاسبه می‌کنیم، بدین منظور از رابطه داده شده نسبت به  $x$  و  $y$  مشتق می‌گیریم در حالی که  $z$  را

$$\left. \begin{aligned} yz + xyz_x &= (1 + z_x)\phi' \\ xz + xyz_y &= (1 + z_y)\phi' \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطه اول به دوم}} \frac{yz + xyz_x}{xz + xyz_y} = \frac{1 + z_x}{1 + z_y}$$

تابع  $x, y$  فرض می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} yz + yzz_y + xyz_x + xyz_x z_y &= xz + xzz_x + xyz_y + xyz_x z_y \Rightarrow (xy - xz)z_x + (yz - xy)z_y = xz - yz \\ \Rightarrow x(y - z)z_x + y(z - x)z_y &= (x - y)z \end{aligned}$$

۲- گزینه «۲» برای محاسبه مقدار موردنظر قرار می‌دهیم:

$$\Delta y = 0/03 \text{ و } \Delta x = 0/01 \text{ و } y_0 = 3 \text{ و } x_0 = 2 \text{ و } f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow f_x(2, 3) = 12 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow f_y(2, 3) = 8 \ln 2$$

در این صورت به کمک فرمول تقریب داریم:

$$f(2/01, 3/03) = f(2, 3) + f_x(2, 3) \times (0/01) + f_y(2, 3) \times (0/03) \Rightarrow f(2/01, 3/03) = 8 + 0/12 + 0/24 \ln 2 = 8/248$$

۳- گزینه «۲» می‌دانیم که  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  بنابراین  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$  و  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$  و  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^n} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) r^{-n} = (-nr^{-n-1}) \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + (-nr^{-n-1}) \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + (-nr^{-n-1}) \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = (-nr^{-n-1}) \left( \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k} \right) = \frac{-n}{r^{n+1}} \vec{r} = -\frac{n}{r^{n+2}} \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( r \vec{\nabla} \frac{1}{r^n} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left[ r \left( -\frac{n}{r^{n+2}} \vec{r} \right) \right] = -n \vec{\nabla} \cdot (r^{-n-1} \vec{r})$$

از طرفی طبق اتحاد  $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{F}$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -n \vec{\nabla} \cdot (r^{-n-1} \vec{r}) &= -n \left[ \frac{1}{r^{n+1}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + (\vec{\nabla} r^{-n-1}) \cdot \vec{r} \right] = -n \left[ \frac{3}{r^{n+1}} + \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (r^{-n-1}) \cdot \vec{r} \right] \quad [ \because \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 ] \\ &= -n \left[ \frac{3}{r^{n+1}} - (n+1) r^{-n-2} \left( \vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \cdot \vec{r} \right] = -n \left[ \frac{3}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)}{r^{n+2}} \left( \vec{i} \frac{x}{r} + \vec{j} \frac{y}{r} + \vec{k} \frac{z}{r} \right) \cdot \vec{r} \right] \\ &= -n \left[ \frac{3}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)}{r^{n+2}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \right] = -n \left[ \frac{3}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)r^2}{r^{n+2}r} \right] = -\frac{n(3-n)}{r^{n+1}} = \frac{n(n-2)}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

۴- گزینه «۲» تابع  $f$  یک تابع همگن از درجه ۱ است، و می‌دانیم توابع همگن از درجه ۱ فقط وقتی مشتق پذیرند که خطی باشند (یعنی به صورت  $ax + by + c$ ).

۵- گزینه «۱» نقاط بحرانی  $f(x, y) = xy + 2x - 2 \ln x - \ln y$  را به دست می‌آوریم.

$$\vec{\nabla} f = \left( y + 2 - \frac{2}{x}, x - \frac{1}{y} \right) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y + 2 = \frac{2}{x} \\ x = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow y + 2 = 2y \Rightarrow y = 2, x = \frac{1}{2}$$

برای تشخیص این نقطه از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.  $f_{xx} > 0$ ،  $\Delta \left( \frac{1}{2}, 2 \right) = 1 > 0$ ،  $f_{xy} = -\frac{2}{x^2 y^2} = -1$ ،  $f_{yy} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$  پس این نقطه مینیمم است.

۶- گزینه «۲» با توجه به این که  $1 + x^2 + y^2 \geq 1$  بنابراین  $0 < \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \leq 1$

۷- گزینه «۲» معادله مشخصه معادله داده شده به صورت  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  است که دارای ریشه مضاعف  $\lambda = 1$  است بنابراین با تغییر متغیر  $t = -x + y$  و  $s = y$  به معادله  $u_{ss} = 0$  تبدیل می‌شود.

۸- گزینه «۱» چون نقطه  $P(0, 0, 1)$  روی سطح قرار ندارد، پس نمی‌توان بردار نرمال را از معادله سطح محاسبه نمود. اگر نقطه‌ای که صفحه بر سطح مماس است را  $P_0(x, y, z)$  بگیریم، نرمال سطح  $g = x^2 - y^2 + 3z = 0$  به صورت  $\vec{\nabla} g = (2x, -2y, 3)$  است. چون صفحه با خطی که بردار هادی آن  $\vec{u} = (2, 1, -2)$  می‌باشد، موازی است پس نرمال صفحه یعنی  $\vec{\nabla} g$  بر  $\vec{u}$  عمود است و لذا  $\vec{\nabla} g \cdot \vec{u} = 4x - 2y - 6 = 0$  و معادلاً  $2x - y - 3 = 0$  از طرفی بردار  $\overline{PP_0} = (x, y, z - 1)$  روی صفحه موردنظر قرار دارد و لذا بر  $\vec{\nabla} g$  عمود است.

$$\vec{\nabla} g \cdot \overline{PP_0} = 2x^2 - 2y^2 + 3z - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}$$



با جایگذاری در معادله سطح به رابطه  $\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} = 0$  می‌رسیم و لذا  $z = -1$  پس روی سطح  $z = -1$  و از طرفی  $2x - y - 3 = 0$  و با جایگذاری  $y = 2x - 3$  در رابطه اخیر و ساده کردن  $x = 2$  و  $y = 1$  به دست می‌آید و بنابراین نقطه  $P_0(2, 1, -1)$  نقطه تماس و  $\vec{\nabla}g = (4, -2, 3)$  هادی صفحه بوده و بنابراین معادله آن  $4x - 2y + 3z - 3 = 0$  خواهد بود.

۹- گزینه «۴» چون  $\sin y \sim y$  پس  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = g(0,0)$  و لذا  $g$  در  $(0,0)$  پیوسته است. برای محاسبه

$$f(x, y) = f(x, x^{\frac{3}{4}}) = \frac{x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}}$$

منحنی  $y = x^{\frac{3}{4}}$  برای  $x > 0$  را در نظر می‌گیریم و روی آن داریم:

که برابر  $f(0,0)$  نبوده و ناپیوسته است.

۱۰- گزینه «۳» به طور کلی می‌دانیم دیورژانس  $(f(|\vec{r}|)\vec{r})$  از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\text{div}(f(|\vec{r}|)\vec{r}) = f'(|\vec{r}|)|\vec{r}| + 3f(|\vec{r}|)$$

بنابراین داریم:

$$\text{div}(|\vec{r}|^n \vec{r}) = n|\vec{r}|^{n-1}|\vec{r}| + 3|\vec{r}|^n = |\vec{r}|^n (n+3)$$

در نتیجه به ازای  $n = -3$ ، دیورژانس برابر صفر است.

۱۱- گزینه «۴» قرار می‌دهیم  $z_1 = \frac{y}{x}$ ، در این صورت طبق قضیه اویلر  $x \frac{\partial z_1}{\partial x} + y \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0$  است زیرا  $z_1$  همگن درجه صفر است. و اگر

$$x \frac{\partial z_2}{\partial x} + y \frac{\partial z_2}{\partial y} = 2 \times \frac{e^{z_2}}{e^{z_2}} = 2$$

آن‌گاه طبق تعمیم اویلر داریم:  $z_2 = \ln(x^2 + y^2)$

۱۲- گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u_x = xy^2 - 4y - 5x = 0 & (1) \\ u_y = x^2 y - 4x - 5y = 0 & (2) \end{cases}$$

اگر این دو معادله را از هم کم کنیم داریم:  $xy^2 - x^2 y + y - x = 0 \Rightarrow xy(y-x) + (y-x) = 0 \Rightarrow (y-x)(xy+1) = 0 \Rightarrow y = x$  یا  $y = -\frac{1}{x}$

اگر  $y = -\frac{1}{x}$  را در معادله (۲) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$-x - 4x + \frac{5}{x} = 0 \Rightarrow -5x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس دو نقطه بحرانی  $(1, -1)$  و  $(-1, 1)$  حاصل می‌شود.

اگر  $y = x$  را در معادله (۲) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

پس سه نقطه بحرانی  $(0, 0)$  و  $(3, 3)$  و  $(-3, -3)$  حاصل می‌شود.

برای تشخیص نوع این نقاط مبین را تشکیل می‌دهیم. چون در نقاط  $(1, -1)$  و  $(-1, 1)$  و  $(3, 3)$  و  $(-3, -3)$  علامت  $\Delta$  منفی است پس این نقاط زینی هستند.

$$\Delta = U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = (2y^2 - 10)(2x^2 - 10) - (4xy - 8)^2$$

$$(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 100 - 64 > 0 \\ f_{xx} = 2y^2 - 10 = -10 < 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ ماکسیمم نسبی است}$$

۱۳- گزینه «۳»  $\omega = f(xg(y)) \Rightarrow \omega_x = g(y)f'(xg(y)) \Rightarrow \omega_{xx} = g^2(y)f''(xg(y)) \Rightarrow \omega_{xx} = g^2(y)f''(u)$

۱۴- گزینه «۳» به خاطر وجود قدر مطلق از تعریف مشتق جزئی استفاده می‌کنیم.

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-|h|| - |h|}{h} = 0$$

۱۵- گزینه «۴» دما در زمان  $t$  برای متحرک عبارت است از:

$$T = 50 + (2t)^2 + (6t^2 - 2 - (t+1)^2)^2 = 50 + 4t^2 + (\Delta t^2 - 2t - 3)^2$$

پس آهنگ تغییر دما در  $t = 1$  برابر است با:

$$\frac{dT}{dt} = 8t + 4(10t - 2)(\Delta t^2 - 2t - 3)^2 = 8$$

۱۶- گزینه «۴» با توجه به این که  $f$  در مبدأ دو ضابطه‌ای است، از تعریف مشتق سوئی استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$D_{\vec{u}}f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\alpha, h\beta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\alpha h^2 \beta^2}{h^2 \alpha^2 + h^2 \beta^2} = \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha \beta^2$$

توضیح: چون  $\vec{u}$  بردار یکه است، بنابراین  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  است.



۱۷- گزینه «۴» با توجه به گزینه به روش ضمنی  $Z_x$  و  $Z_y$  را به دست می آوریم.

$$z_x = \frac{-2x^2 F_1}{-2F_1 - 2F_2} = \frac{2x^2 F_1}{2F_1 + 2F_2}, \quad z_y = -\frac{2y^2 F_1}{-2F_1 - 2F_2} = \frac{2y^2 F_1}{2F_1 + 2F_2} \Rightarrow y^2 z_x + xz_y = \frac{2xy^2 F_1 + 2xy^2 F_1}{2F_1 + 2F_2} = xy^2 \frac{2F_1 + 2F_2}{2F_1 + 2F_2} = xy^2$$

۱۸- گزینه «۲» قرار می دهیم  $\vec{F} = \phi \vec{A}$ ، در این صورت داریم:  $\vec{F} = \phi \vec{A} = (2x^2 y^2 z, x^2 y^2 z^2, -x^2 yz^2) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = (2x^2 y^2, 2x^2 y^2 z^2, -2x^2 yz)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = (2x^2 y, 2x^2 yz^2, -2x^2 z) = (-12, -12, -2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \left( \frac{2x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) t^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= t^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{2x}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \left( \frac{-2x}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \times \frac{-x}{2t} \right) \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

۱۹- گزینه «۴»

۲۰- گزینه «۱» ابتدا تابع  $f(x, 0)$  را تشکیل می دهیم.

$$f(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \geq x^2 \\ -x & 0 < x^2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -x & x \neq 0 \end{cases}$$

چون تابع  $f$  در  $x = 0$  پیوسته است، با مشتق گرفتن نسبت به  $x$  داریم  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$

۲۱- گزینه «۱» ابتدا  $L_1$  را به شکل مقابل حساب می کنیم:

$$L_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است، حاصل حد فوق صفر شد. حالا سراغ تعیین مقدار  $L_2$  می رویم:

$$L_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 y^2 (x^2 + y^2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{2 x^2 y^2 (x^2 + y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{2 x^2 y^2}$$

چون درجه صورت کوچکتر از درجه مخرج است، حد وجود ندارد.

$$D_{\bar{u}} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h^2 u_1^2 + h^2 u_2^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 u_1^2 u_2^2}{h^2 (u_1^2 + u_2^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} \left( \frac{u_1^2 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \right) = 0$$

۲۲- گزینه «۲»

۲۳- گزینه «۱» رابطه داده شده در سؤال را می توان به صورت  $xz_x + yz_y + mz = 0$  نوشت که همان رابطه اولر می باشد. برای این که تابع  $Z$  در این رابطه

صدق کند بایستی تابع همگن باشد. ضابطه تابع را به صورت  $Z = \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$  می نویسیم، در این صورت  $Z$ ، تابعی همگن از درجه  $(-1)$  خواهد بود، زیرا:

$$z(\lambda x, \lambda y) = \frac{\ln\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)}{\sqrt[3]{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}} = \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\lambda \sqrt[3]{x^2 + y^2}} = \lambda^{-1} z(x, y)$$

و بنابراین مقدار  $m$  برابر ۱ است.

۲۴- گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که در نقطه  $(0, 0)$ ، مقدار  $f_x$  و  $f_y$  برابر صفر است، پس این نقطه بحرانی است. از طرفی

$$\begin{cases} f_x = 4x^2 - 2xy^2 \\ f_y = 4y^2 - 2yx^2 \end{cases}$$

در نقطه  $(0, 0)$ ، مقدار  $\Delta$  برابر صفر است، پس نمی توان نتیجه ای در مورد نوع نقطه گرفت. ولی تابع  $f$  را می توان به صورت  $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2$  نوشت و بنابراین همواره  $f \geq 0$  است و در نقطه  $(0, 0)$ ، مقدار  $f$  برابر صفر است، پس مبدأ مینیمم  $f$  است.

۲۵- گزینه «۲» قرار می دهیم  $g = xy - v - 2 = 0$ ،  $f = x^2 - y^2 - u = 0$ ، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(v, y)}}{\frac{\partial(f, y)}{\partial(x, y)}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2y \\ -1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{2y}{2x^2 + 2y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

## پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: به علت وجود عامل  $x^2 + y^2$  متوجه می‌شویم استفاده از مختصات قطبی مناسب است. روی  $\mathbb{R}^2$  داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r < \infty$ .

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \frac{x+y}{x^2+y^2} dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (\cos\theta + \sin\theta) dr d\theta$$

حدود انتگرال‌ها عدد ثابت هستند و تابع زیر انتگرال قابل تفکیک به دو تابع یک متغیره است پس می‌توانیم انتگرال‌ها را از هم جدا کنیم:

$$I = \left( \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \right) \left( \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \right)$$

محاسبه‌ی انتگرال  $\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr$  شاید کمی وقت‌گیر باشد اما انتگرال دوم نسبت به  $\theta$  خیلی راحت حل می‌شود و جواب آن برابر با صفر است:

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta = [\sin\theta - \cos\theta]_0^{2\pi} = 0 \Rightarrow I = 0$$

توجه: اگر بخواهیم مقدار  $\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr$  را نیز به دست آوریم، با استفاده از تغییر متغیر  $t = r^2$  تابع گاما را به وجود می‌آوریم:  $\sqrt{t} = r$  پس  $dr = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

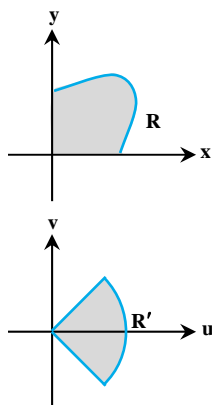
$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

روش دوم: توابع  $f(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} x$  و  $g(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} y$  را در نظر بگیرید، تابع  $f$  نسبت به متغیر  $x$  فرد است، پس در هر ناحیه‌ای که نسبت به محور  $y$  متقارن باشد، انتگرال  $f$  برابر صفر است و لذا  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dydx = 0$ .

تابع  $g$  هم نسبت به متغیر  $y$  فرد است. پس در هر ناحیه‌ای که نسبت به محور  $x$  متقارن باشد انتگرال  $g$  صفر است. پس  $\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = 0$ .

به همین دلیل جواب انتگرال که مجموعی از انتگرال‌های  $f$  و  $g$  روی  $\mathbb{R}^2$  است برابر صفر است.

۲- گزینه «۱» برای راحتی بیشتر در نوشتن محاسبات، فرض می‌کنیم  $a = \sqrt{2}$  و  $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$  باشد. داریم  $x = au - bv$  و  $y = au + bv$  پس:



$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & -b \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

ناحیه  $R$  دارای ۳ مرز است. معادله این مرزها را در دستگاه  $(u, v)$  بازنویسی کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow au = bv \Rightarrow v = \frac{a}{b}u = \sqrt{3}u$$

$$y = 0 \Rightarrow au = -bv \Rightarrow v = -\frac{a}{b}u = -\sqrt{3}u$$

$$x^2 - xy + y^2 = 2 \Rightarrow 3b^2v^2 + a^2u^2 = 2 \Rightarrow 2v^2 + 2u^2 = 2 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1$$

خطوط  $v = \pm\sqrt{3}u$  در دستگاه  $uv$  که  $V$  محور قائم آن باشد زوایای  $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$  را می‌دهند.

$$I = \iint_R (x^2 - xy + y^2) dA = \iint_{R'} (2v^2 + 2u^2) \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) dvdu = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 (2r^2)(r) \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) dr d\theta = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}\right) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

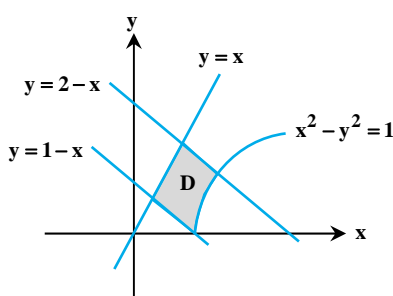
۳- گزینه «۴» ناحیه‌ی  $D$  دارای ۴ مرز مختلف است. معمولاً این نواحی لوزی‌گون هستند و برای

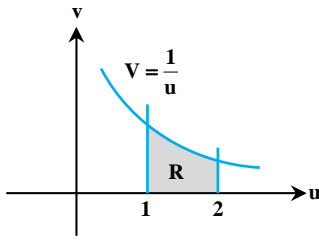
حل انتگرال روی آن‌ها باید از تغییر متغیر  $u$  و  $v$  استفاده کنیم. معادله‌ی مرزهای  $D$  را طوری می‌نویسیم که سمت راست، عدد ثابت باشد:

$$(x-y)(y+x) = 1, \quad x-y = 0, \quad y+x = 2, \quad y+x = 1$$

پس با تغییر متغیر  $u = y+x$  و  $v = x-y$  این معادله‌ها را به شکل ساده‌تری خواهیم داشت. اکنون معادله مرزها در صفحه‌ی  $uov$  به این صورت است:

$$uv = 1 \text{ و } v = 0 \text{ و } u = 2 \text{ و } u = 1$$





ناحیه جدید را  $R$  می‌نامیم. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{J_{xy}} = -\frac{1}{2}$$

که قدرمطلق آن در انتگرالده ضرب خواهد شد.

$$\frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} = e^{x^2-y^2} = e^{uv} \text{ که } y \text{ و } x \text{ با } v \text{ و } u \text{ معلوم است}$$

$$I = \iint_D \frac{e^{x^2}}{e^{y^2}} dy dx = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{u}} e^{uv} \frac{1}{u} dv du = \frac{1}{u} \int_1^2 \left[ \frac{1}{u} e^{uv} \right]_0^{\frac{1}{u}} du = \frac{1}{u} \int_1^2 \frac{1}{u} (e-1) du = \left( \frac{1}{u} \right) (e-1) \text{Ln}(u) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e-1) \text{Ln} 2$$

به این ترتیب:

پس جواب برابر است با  $\frac{1}{2} (e-1)$ .

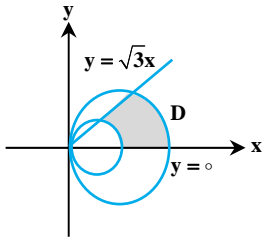
۴- گزینه «۴» این که  $y = \sqrt{3}x$  و  $y = 0$  مرزهای این ناحیه هستند، معلوم می‌کند  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ . از معادله دایره

$$x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 = r^2 \text{ داریم } r = 2 \cos \theta \text{ و } r = \cos \theta$$

پس خواهیم داشت:

$$D \text{ مساحت ناحیه} = \iint_D dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{r^2 \cos^2 \theta}{2} - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$



۵- گزینه «۳» انتگرال  $\int x^3 \sin y^3 dy$  لاینحل یا حداقل حل آن مشکل است. اما  $\int x^3 \sin y^3 dx$  به سادگی حل می‌شود چون  $\sin y^3$  به عدد ثابت

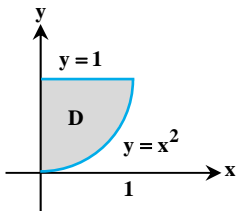
تبدیل شده است. پس ترتیب مناسب برای این انتگرال به صورت  $I = \iint_D x^3 \sin y^3 dx dy$  است. مطابق اطلاعات داده شده  $0 \leq x \leq 1$  و  $x^2 \leq y \leq 1$ . اما

این کران‌ها برای ترتیبی که مورد نظر ما است مناسب نیستند. در ترتیب  $I = \iint_D x^3 \sin y^3 dx dy$  حدود  $y$  که در انتگرال بیرونی نوشته می‌شوند باید دو

عدد ثابت باشند و حدود  $x$  که در انتگرال وسطی نوشته می‌شوند باید برحسب  $y$  باشند. بنابراین ابتدا ناحیه  $D$  را رسم می‌کنیم و با توجه به آن حدود  $x$

و  $y$  را طبق ترتیب انتخاب شده می‌نویسیم. کمترین و بیشترین مقدار  $y$  در این ناحیه  $0 \leq y \leq 1$  هستند و اگر در جهت محور  $x$  حرکت کنیم از  $x = 0$

وارد شده و از  $x = \sqrt{y}$  (یعنی همان  $y = x^2$ ) خارج می‌شویم یعنی  $0 \leq x \leq \sqrt{y}$  است.



$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3) dx dy = \int_0^1 \sin(y^3) \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} y^2 \sin(y^3) dy = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \int_0^1 3 y^2 \sin(y^3) dy = -\frac{1}{12} \cos(y^3) \Big|_0^1 = -\frac{1}{12} [\cos(1) - 1] = \frac{1}{12} [1 - \cos(1)]$$

۶- گزینه «۱» حضور عامل  $x^2 + y^2$  نشان می‌دهد که بهتر است از دستگاه قطبی استفاده

کنیم. ناحیه انتگرال‌گیری را با توجه به حدود داده شده مشخص می‌کنیم.

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$$

منحنی  $y = \sqrt{2x - x^2}$  بخشی از دایره  $y^2 + x^2 = 2x$  است که در ناحیه  $y \geq 0$  قرار دارد.

این ناحیه در ربع اول قرار دارد و داریم  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . برای تعیین حدود  $r$  اگر پرتوی از مبدأ رسم کنید که از این ناحیه عبور کند، از  $r = 0$  یعنی از همان

مبدأ مختصات وارد ناحیه می‌شویم و از منحنی  $x^2 + y^2 = 2x$  خارج می‌شویم. روی این منحنی داریم:

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 2 \cos \theta$$

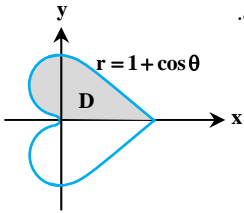
پس  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$  است. در نتیجه داریم:

$$I = \iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \theta} \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \theta} (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta) d\theta =$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) + \cos \theta \sin \theta \right] d\theta = 2 \left[ \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{2} + 1$$



۷- گزینه «۱» با توجه به آن که معادله مرز  $D$  را در دستگاه قطبی به ما داده‌اند بهتر است انتگرال را در این دستگاه حل کنیم. کران‌های  $r$  در این ناحیه واضح هستند زیرا درون قرص  $r \leq 1 + \cos \theta$  قرار داریم بنابراین، حدود  $r$  به صورت  $0 \leq r \leq 1 + \cos \theta$  هستند. برای تعیین حدود  $\theta$  توجه کنید که در منحنی  $r = 1 + \cos \theta$  با توجه به آن که  $r \geq 0$  است باید  $1 + \cos \theta \geq 0$  باشد یعنی  $\cos \theta \geq -1$ ، اما این نامساوی برای تمامی زوایاها برقرار است به عبارتی، در منحنی  $r = 1 + \cos \theta$  حدود  $\theta$  به صورت  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  هستند. البته طبق صورت سؤال ما نیمه‌ی بالایی این شکل را می‌خواهیم که در آن  $0 \leq \theta \leq \pi$  است. البته اگر نمودار  $r = 1 + \cos \theta$  را که یک دلووار افقی است رسم کرده باشیم تشخیص حدود  $r$  و  $\theta$  بسیار ساده‌تر می‌شود.



$$\iint_D y \, dA = \int_0^\pi \int_0^{1+\cos\theta} r \sin \theta \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \theta (1 + \cos \theta)^3 \, d\theta = \frac{-1}{12} (1 + \cos \theta)^4 \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}$$

۸- گزینه «۳» صفحه‌ی  $x - y$  یعنی صفحه‌ی  $Z = 0$  بنابراین کران‌های  $Z$  در این ناحیه عبارتند از  $Z = 0$  و  $Z = x + y + 4$ . از معادله‌ی استوانه‌ای  $x^2 + y^2 = 4$  متوجه می‌شویم که تصویر این ناحیه روی صفحه‌ی  $xOy$  درون دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ قرار دارد. پس بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم.  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 2$  است. حدود  $Z$  نیز در این دستگاه عبارتند از  $Z = 0$  و  $Z = r \cos \theta + r \sin \theta + 4$ .

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r \cos \theta + r \sin \theta + 4} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta + 4r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta + 2r^2 \right) \Big|_0^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{8}{3} \cos \theta + \frac{8}{3} \sin \theta + 8 \right) \, d\theta = 16\pi \end{aligned}$$

۹- گزینه «۴»

روش اول: صفحه‌ی  $xOy$  یعنی صفحه‌ی  $Z = 0$  بنابراین، این ناحیه بین دو صفحه‌ی  $Z = 2 + x$  و  $Z = 0$  قرار گرفته است. استوانه‌ی  $x^2 + 4y^2 = 4$  نشان می‌دهد که تصویر این شکل در صفحه‌ی  $xOy$  یک بیضی خواهد بود. اگر به نقاط برخورد این بیضی با محورها توجه کنیم متوجه می‌شویم که شعاع افقی آن ۲ و شعاع عمودی آن ۱ است. در این بیضی  $-2 \leq x \leq 2$  است و حدود  $y$  عبارتند از  $y = \pm \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}$ . بنابراین داریم:

$$V = \iiint_D dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} \int_0^{2+x} dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} (2+x) \, dy \, dx$$

در این مرحله می‌خواهیم از فرد بودن تابع  $x$  و متقارن بودن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری استفاده کنیم. در معادله‌ی  $x^2 + 4y^2 = 4$  تبدیل  $x$  به  $-x$  تغییری ایجاد نمی‌کند. پس انتگرال تابع  $x$  برابر با صفر می‌شود و خواهیم داشت:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} 2 \, dy \, dx = 2 \times (\text{مساحت بیضی}) = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

روش دوم: اگر از انتگرال دوگانه برای محاسبه‌ی حجم استفاده کنیم حجم مورد نظر برابر است با:  $\iint_D (2+x) \, dA$  معادله‌ی بیضی  $x^2 + 4y^2 = 4$  را تبدیل  $x$  به  $-x$  عوض نمی‌شود اما تابع  $x$  فرد است بنابراین، حاصل انتگرال  $x$  روی ناحیه برابر صفر است، بنابراین حجم برابر  $2 \iint_D dA$  یا دو برابر مساحت درون بیضی یعنی برابر  $4\pi = 2(2\pi)$  است.

۱۰- گزینه «۲» حضور  $x^2 + y^2$  و دایره بودن ناحیه‌ی  $S$  نشانه‌های استفاده از دستگاه قطبی هستند. دایره  $x^2 + y^2 = x$  در دستگاه قطبی به صورت

$$r^2 = r \cos \theta \text{ می‌شود یعنی روی آن } r = \cos \theta \text{ است، در ناحیه مورد نظر داریم } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ و } 0 \leq r \leq \cos \theta. \text{ پس داریم:}$$

$$I = \iint_S \frac{dy \, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \left( \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{r^2}} \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

۱۱- گزینه «۲» با توجه به دایره بودن ناحیه انتگرال‌گیری انتگرال را در مختصات قطبی می‌نویسیم، درون دایره‌ی واحد داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 1$  در

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{[-\ln(x^2 + y^2)]^p} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r \, dr \, d\theta}{[-\ln(r^2)]^p} = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^1 \frac{r \, dr}{(-2 \ln r)^p} \right) = \frac{2\pi}{(2)^p} \int_0^1 \frac{r \, dr}{(-\ln r)^p}$$

این انتگرال ناسره است برای بررسی همگرایی آن از تغییر متغیر  $t = -\ln r$  استفاده می‌کنیم. در این صورت  $r = e^{-t}$  و  $dr = -e^{-t} dt$  است. به ازای  $r = 0$  داریم  $t = \infty$  و به ازای  $r = 1$  داریم  $t = 0$ .

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}(-e^{-t})dt}{t^p} = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \int_0^\infty \frac{-e^{-2t}}{t^p} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \int_0^\infty \frac{e^{-2t}}{t^p} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \int_0^\infty t^{-p} e^{-2t} dt$$

با جابه‌جا کردن کران‌ها، انتگرال قرینه می‌شود. پس داریم:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{\sqrt{p}} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{p}} = \pi \int_0^\infty x^{-p} e^{-x} dx = \pi \Gamma(-p+1)$$

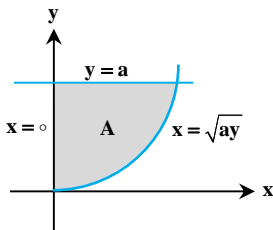
حالا با تغییر متغیر  $x = 2t$  داریم  $dx = 2dt$  و در نتیجه:

بنابراین به ازای  $p < 1$  انتگرال همگراست.

**۱۲- گزینه «۱»** توجه کنید که ناحیه  $D$ ، درون کره‌ای به شعاع ۳ است و انتگرال سه‌گانه داده شده با حجم ناحیه  $D$  برابر است، بنابراین حاصل آن برابر

$$\iiint_D dv = \frac{4}{3} \times \pi \times (3)^3 = 36\pi$$

است با:



**۱۳- گزینه «۴»** معادله‌ی  $x = \sqrt{ay}$  همان سهمی  $y = \frac{x^2}{a}$  است اما تساوی  $x = \sqrt{ay}$  این شرط را ایجاب

می‌کند که  $x \geq 0$  باشد پس نیمه‌ی راست سهمی  $y = \frac{x^2}{a}$  به دست می‌آید. با این توضیحات و با رسم این نیمه سهمی و خط  $y = a$  و محور  $y$ ‌ها (یعنی خط  $x = 0$ ) ناحیه  $A$  را نشان می‌دهیم.

می‌توانیم انتگرال دوگانه را با هر دو ترتیب  $dydx$  و  $dx dy$  به راحتی حل کنیم. فرض کنید همان ترتیب نوشته شده در صورت سؤال را انتخاب کرده باشیم. حدود  $y$  عبارتند از  $0 \leq y \leq a$  و اگر در جهت محور  $x$ ‌ها از چپ به راست از این ناحیه عبور کنید  $x = 0$  مرز ورودی و  $x = \sqrt{ay}$  مرز خروجی است پس  $0 \leq x \leq \sqrt{ay}$ .

$$I = \iint_A xy dx dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{ay}} xy dx dy = \int_0^a y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{ay}} dy = \int_0^a \frac{a}{2} y^{\frac{3}{2}} dy = \left[ \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{5}$$

**۱۴- گزینه «۲»** حدود  $Z$  از معادله‌ی کره به دست می‌آیند  $z = \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  و معادله‌ی استوانه به ما نشان می‌دهد که تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی  $xOy$  دایره  $x^2 + y^2 = 3x$  است. چون تصویر شکل بر صفحه  $xOy$  یک دایره است، بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. معادله‌ی این دایره بر حسب  $r$  و  $\theta$  به این صورت نوشته می‌شود:

$x^2 + y^2 = 3x \Rightarrow r^2 = 3r \cos \theta \Rightarrow r = 3 \cos \theta$   
اگر نتوانیم این دایره را رسم کنیم با کمک معادله‌ی  $r = 3 \cos \theta$  حدود  $\theta$  را مشخص می‌کنیم. از این که  $r$  هیچ‌گاه منفی نمی‌شود استفاده می‌کنیم.

$$r \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(البته دایره‌ی  $x^2 + y^2 = ax$  جزء دایره‌های مهم است که باید نحوه‌ی رسم آن را به خاطر داشته باشید) حدود  $Z$  نیز در دستگاه استوانه‌ای نوشته می‌شوند:

$$z = \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2} = \pm \sqrt{9 - r^2}$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} \int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}} r dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} 2r \sqrt{9-r^2} dr d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{2}{3} (9-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{3 \cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-18 \sin^3 \theta + 18) d\theta = -36(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 18\pi - 24$$

**۱۵- گزینه «۴»** برای ناحیه‌ی درون کره از دستگاه وقتی ناحیه‌ی انتگرال‌گیری درون یک کره است، از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. درون کره‌ای به شعاع یک داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ،  $0 \leq \phi \leq \pi$  و  $0 \leq \rho \leq 1$ . در تابع زیر انتگرال هم جایگزینی  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$  را انجام می‌دهیم. ژاکوبین دستگاه کروی

$$I = \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \stackrel{\text{مختصات کروی}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

است.  $\rho^2 \sin \phi$

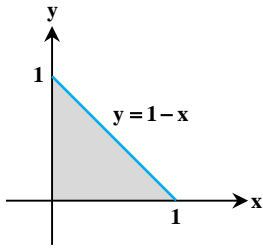
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\rho^5}{5} \right) \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{5} \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} (-\cos \phi) \Big|_0^\pi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{5} d\theta = \frac{2}{5} (2\pi - 0) = \frac{4\pi}{5}$$

**۱۶- گزینه «۴»** حدود  $Z$  به وضوح  $Z = XY$  و  $Z = 0$  هستند. برای تعیین حدود  $X$  و  $Y$  ابتدا معادلاتی را که فقط بر حسب  $X$  و  $Y$  هستند در نظر می‌گیریم:  $x = 1$  و  $x = 0$  هر کدام یک خط در صفحه  $xOy$  هستند (در واقع هر کدام از این‌ها صفحاتی در فضای سه بعدی هستند که تصویر آن‌ها بر صفحه‌ی  $xOy$  به صورت خط است).

با رسم این سه خط ناحیه محدودی به دست نمی‌آید. پس رویه‌های  $Z = XY$  و  $Z = 0$  را نیز برخورد می‌دهیم. از برخورد آن‌ها به معادله‌ی  $xy = 0$  می‌رسیم یعنی خطوط  $x = 0$  و  $y = 0$  به دست می‌آیند. ناحیه‌ی موردنظر بین سه خط  $x = 1$ ،  $y = x$  و  $y = 0$  قرار دارد. بنابراین  $0 \leq x \leq 1$  است و از پایین به بالا خط  $y = 0$  مرز ورودی و خط  $y = x$  مرز خروجی است.

$$I = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2 z^2 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^x xy^2 \left( \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{xy} dy dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{3} x^3 y^6 dy dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 \left( \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{21} x^{10} dx = \frac{1}{21} \left( \frac{x^{11}}{11} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{231}$$

**۱۷- گزینه ۱** صفحات مختصات یعنی صفحات  $x=0$ ,  $y=0$  و  $z=0$  بنابراین حدود  $Z$  در این ناحیه عبارتند از  $z=x^2+y^2$  و  $z=0$ . برای تعیین حدود  $x$  و  $y$  از معادله  $x+y=1$  استفاده می‌کنیم تصویر این ناحیه در صفحه  $xOy$  یک مثلث است که در آن  $0 \leq x \leq 1$  است و بین خطوط  $y=0$  تا  $y=1-x$  قرار دارد. بنابراین داریم:

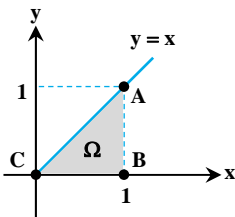


$$I = \iiint_R dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy dx = \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left( x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{(1-x)^4}{-12} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{6}$$

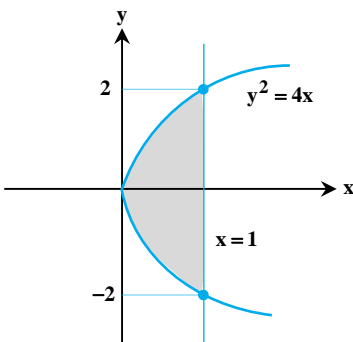
تذکر: در این مثال عامل  $x^2+y^2$  در معادله رویه‌ها حضور داشت اما از مختصات استوانه‌ای استفاده نکردیم. چرا؟ چون تصویر این ناحیه بر صفحه  $xOy$  یک مثلث است، نه یک دایره، پس استفاده از مختصات استوانه‌ای نوشتن حدود انتگرال را سخت‌تر می‌کند.

**۱۸- گزینه ۲** ناحیه  $\Omega$  به صورت مقابل است. معادله‌ی خطی که از نقاط  $A(1,1)$  و  $C(0,0)$  می‌گذرد، به صورت  $y=x$  است. اگر بخواهیم ابتدا حدود  $y$  را بنویسیم خواهیم داشت  $0 \leq x \leq 1$  و از پایین به بالا که حرکت کنیم  $y=0$  مرز ورودی و  $y=x$  مرز خروجی است. اما اگر بخواهیم ابتدا حدود  $x$  و سپس حدود  $y$  را بنویسیم داریم  $0 \leq y \leq 1$  و با حرکت از چپ به راست، خط  $x=y$  مرز ورودی و خط  $x=1$  مرز خروجی است. پس این ناحیه را به دو صورت می‌توان توصیف کرد:



الف)  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$       ب)  $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases}$

**۱۹- گزینه ۲** این انتگرال را می‌توانیم با ترتیب  $dx dy$  یا  $dy dx$  حل کنیم. فرض کنید بخواهیم با ترتیب  $dy dx$  آن را حل کنیم. پس از رسم منحنی‌های  $y^2=4x$  و  $x=1$  ناحیه انتگرال‌گیری به صورت مقابل است:



$$0 \leq x \leq 1, \quad -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$$

از معادله  $y^2=4x$  به کران‌های  $y = \pm 2\sqrt{x}$  رسیده‌ایم. حالا انتگرال را حل می‌کنیم:

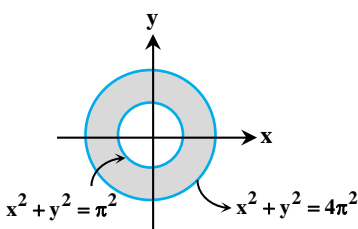
$$\iint_D xy^2 dy dx = \int_0^1 \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy^2 dy dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{3} xy^3 \right) \Big|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 16x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{16}{3} \left( \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{32}{21}$$

**۲۰- گزینه ۱** ناحیه‌ی انتگرال‌گیری دایره‌ی واحد است. پس بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم. در این ناحیه  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 1$  است. از این

$$\iint_{x^2+y^2=1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r f(r) dr d\theta = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^1 r f(r) dr \right) = 2\pi \int_0^1 r f(r) dr$$

رو داریم:

**۲۱- گزینه ۳** ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بین دو دایره با شعاع‌های  $\pi$  و  $2\pi$  قرار دارد. در این ناحیه  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $\pi \leq r \leq 2\pi$  است. در نتیجه داریم:



$$I = \iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr d\theta$$

برای حل این انتگرال از جدول جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$r$	$\sin r$
$1$	$-\cos r$
$0$	$-\sin r$

$$\int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = [-r \cos r + \sin r]_{\pi}^{2\pi} = -3\pi$$

$$\Rightarrow I = -3\pi \int_0^{2\pi} d\theta = -6\pi^2$$

**۲۲- گزینه ۴** ناحیه‌ی انتگرال‌گیری  $\frac{1}{8}$  اول از کره‌ی واحد است، بنابراین انتگرال را در مختصات کروی می‌نویسیم. درون کره‌ی واحد داریم  $0 \leq \rho \leq 1$  و

چون  $\frac{1}{8}$  اول از کره را می‌خواهیم، پس  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  و  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$  است.

$$I = \iiint_V (xyz) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sin \phi \cos \theta \cdot \rho \sin \phi \sin \theta \cdot \rho \cos \phi \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho^5 \sin^3 \phi \cos \phi \sin \theta \cos \theta d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho}\right) \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} \sin^4 \varphi\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\rho} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \varphi) \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \times 1 \times \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4\pi} \times \left(-\frac{1}{3}\right)(-2) = \frac{1}{6\pi}$$

۲۳- گزینه «۱» با توجه به صفحات  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ ، حدود  $x, y, z$  به صورت  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$  است. بنابراین:

$$M = \iiint_R \delta dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) dx dy dz = \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \cdot \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) dy \cdot \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) dz$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Big|_{-1}^1\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \Big|_{-1}^1\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Big|_{-1}^1\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$$

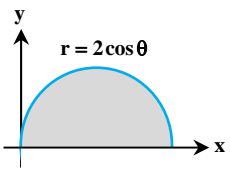
۲۴- گزینه «۴» با توجه به وجود عامل  $x^2 + y^2$  در تابع زیر انتگرال، به نظر می‌آید استفاده از دستگاه استوانه‌ای مناسب‌تر باشد. با توجه به کران‌های داده

شده در صورت سؤال معلوم می‌شود که  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . یعنی ناحیه‌ی موردنظر در  $\frac{1}{\lambda}$  اول قرار دارد. همچنین  $z = 3$  و  $y = \sqrt{2x - x^2}$  از مرزهای

آن هستند. رویه‌ی  $y = \sqrt{2x - x^2}$  همان استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 2x$  است. (البته  $\frac{1}{\lambda}$  اول از آن را داریم.) در دستگاه استوانه‌ای این معادله به شکل

$$r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 0, r = 2 \cos \theta$$

در ضمن معادله‌ی  $r = 2 \cos \theta$  نشان می‌دهد که باید  $\cos \theta \geq 0$  باشد یعنی  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . اما چون فقط  $\frac{1}{\lambda}$  اول از استوانه را داریم باید  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  را در نظر بگیریم.



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 [z]_0^{2 \cos \theta} dr d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\right) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \cos^3 \theta}{3} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = (\lambda \sin \theta - \frac{\lambda}{3} \sin^3 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \lambda - \frac{\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3}$$

۲۵- گزینه «۴» ناحیه  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$  خارج از کره به شعاع واحد و به مرکز مبدأ است. در مختصات کروی حدود  $\rho, \phi, \theta$  چنین است:  $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, 1 \leq \rho < \infty$ .

$$I(\alpha) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^\infty \frac{\rho^2 \sin(\phi)}{(\rho^2)^\alpha} \rho d\rho d\phi d\theta$$

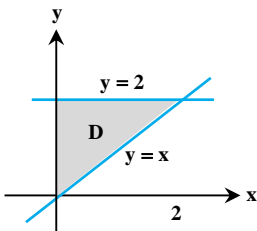
از آنجا که حدود انتگرال‌ها ثابت هستند و تابع انتگرالده قابل تفکیک به صورت ضربی است می‌توان نوشت:

$$I(\alpha) = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^\pi \sin(\phi) d\phi\right) \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}} d\rho\right)$$

بدیهی است که انتگرال‌های  $\theta$  و  $\phi$  کران‌دار هستند و مقادیر حقیقی دارند. برای آن که انتگرال سوم نیز همگرا باشد باید  $2\alpha - 2 > 1$  باشد یعنی  $\alpha > \frac{3}{2}$ .

۲۶- گزینه «۲» این انتگرال با ترتیب داده شده نیاز به استفاده از روش جزء به جزء دارد اما اگر ترتیب متغیرها را عوض کنیم محاسبه‌ی

$\iint y^2 \sin(xy) dx dy$  خیلی راحت‌تر است زیرا در انتگرال میانی  $y^2$  و  $y$  به عدد ثابت تبدیل می‌شوند. بنابراین روش حل این مسأله، تعویض ترتیب متغیرهاست. ابتدا به حدود انتگرال داده شده دقت می‌کنیم تا ناحیه‌ی  $D$  را تشخیص دهیم. به ویژه حدود انتگرال وسطی یعنی خطوط  $y = 2$  و  $y = x$  را رسم می‌کنیم. با توجه به حدود انتگرال بیرونی داریم  $0 \leq x \leq 2$  به این ترتیب ناحیه‌ی  $D$  مشخص می‌شود. حال می‌خواهیم ابتدا حدود  $y$  و سپس حدود  $x$  را بنویسیم. به وضوح  $0 \leq y \leq 2$  است و با حرکت در جهت محور  $x$  یعنی از چپ به راست می‌بینیم که خط  $x = 0$  مرز ورودی و خط  $x = y$  مرز خروجی است پس  $0 \leq x \leq y$ .



$$I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y} y^2 \sin(xy) dx dy = \int_{y=0}^{y=2} [-y \cos(xy)] \Big|_{x=0}^{x=y} dy$$

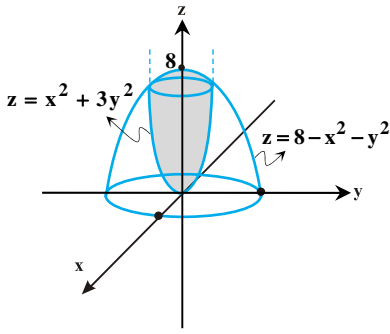
$$= \int_{y=0}^{y=2} -y (\cos y^2 - 1) dy = \int_{y=0}^{y=2} [y - y \cos(y^2)] dy$$

$$I = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 - \frac{1}{2} [\sin(y^2)]_0^2 = \left[\left(\frac{2^2}{2}\right) - \frac{1}{2} (\sin 4 - 0)\right] = 2 - \frac{1}{2} \sin(4)$$





۲۷- گزینه «۳» ناحیه محدود بین دو معادله  $z = x^2 + 3y^2$  ,  $z = 8 - x^2 - y^2$  را ترسیم می‌کنیم.  
کران‌های  $Z$  به وضوح داده شده‌اند و خواهیم داشت:



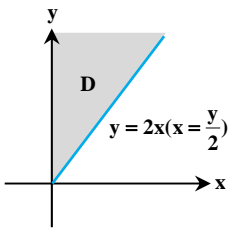
$$V = \iint_A \int_{z=x^2+3y^2}^{z=8-x^2-y^2} dz dy dx = \iint_A (\lambda - 2x^2 - 4y^2) dy dx$$

منظور از  $A$ ، تصویر این جسم بر صفحه‌ی  $xoy$  است. برای یافتن آن رویه‌های داده شده را برخورد می‌دهیم.  
برای اینکار باید معادله‌ی  $\lambda - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$  را حل کنیم:

$$2x^2 + 4y^2 = \lambda \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda/2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\lambda/4}}\right)^2 = 1 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر بیضوی}} \begin{cases} x = \sqrt{\lambda/2} r \cos \theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = \sqrt{\lambda/4} r \sin \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ |J| = \sqrt{\lambda} r \end{cases}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\lambda - \lambda r^2 \cos^2 \theta - \lambda r^2 \sin^2 \theta) (\sqrt{\lambda} r) dr d\theta = (\lambda \times \sqrt{\lambda}) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left( \int_0^1 (r - r^3) dr \right) = (16\sqrt{\lambda})(2\pi) \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 8\pi\sqrt{\lambda}$$

۲۸- گزینه «۲» می‌دانیم که انتگرال دوگانه‌ی نوشته شده در صورت سؤال در واقع همان انتگرال دوگانه‌ی  $I = \int_0^\infty \int_{2x}^\infty x e^{-y} \left(\frac{\sin y}{y}\right) dy dx$  است.



انتگرال این تابع بر حسب متغیر  $x$  خیلی راحت‌تر گرفته می‌شود. بنابراین ایده‌ی حل این سؤال، تعویض ترتیب متغیرهاست. ابتدا به کران‌های داده شده توجه می‌کنیم تا ناحیه‌ی  $D$  را تشخیص دهیم. در این ناحیه  $2x \leq y < \infty$  است پس بالای خط  $y = 2x$  قرار دارد و در ضمن  $0 \leq x < \infty$  است. حالا ترتیب متغیرها را عوض می‌کنیم. در این صورت داریم  $0 \leq y < \infty$  و با حرکت در جهت محور  $x$ ‌ها متوجه می‌شویم که خط  $x = 0$  کران پایین است و خط

$$I = \int_0^\infty \int_{y/2}^\infty x e^{-y} \left(\frac{\sin y}{y}\right) dx dy = \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{\sin y}{y}\right) \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^\infty dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-y} \sin y dy$$

برای حل این انتگرال، علاوه بر روش جزء به جزء می‌توانید از فرمول زیر هم استفاده کنید:

$$\begin{cases} \int_0^\infty e^{-sy} \sin(ay) dy = \frac{a}{s^2 + a^2} \\ \int_0^\infty e^{-sy} \cos(ay) dy = \frac{s}{s^2 + a^2} \end{cases}$$

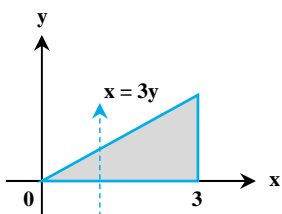
$$I = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{4}$$

در این مثال به ازای  $s = 1$  و  $a = 1$  داریم:

۲۹- گزینه «۳» در صورت سؤال حدود  $y$  به صورت دو عدد ثابت  $(y = 3a$  و  $y = a)$  داده شده‌اند و حدود  $x$  را می‌توان بر حسب  $y$  نوشت بنابراین داریم:

$$I = \int_a^{3a} \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx dy = \int_a^{3a} \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y-a}^y dy = \int_a^{3a} \left[ \frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-a)^3}{3} - y^2(y-a) \right] dy = \int_a^{3a} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{(y-a)^3}{3} + ay^2 \right] dy$$

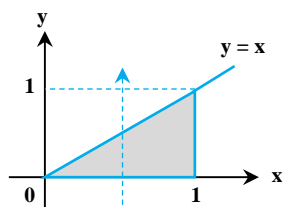
$$= \left[ \frac{y^4}{12} - \frac{(y-a)^4}{12} + \frac{ay^3}{3} \right]_a^{3a} = \frac{81a^4}{12} - \frac{16a^4}{12} + \frac{27a^4}{3} - \frac{a^4}{12} + 0 - \frac{a^4}{3} = \left( \frac{81}{12} - \frac{16}{12} + \frac{108}{12} - \frac{1}{12} - \frac{4}{12} \right) a^4 = \frac{168}{12} a^4 = 14a^4$$



۳۰- گزینه «۳» محاسبه انتگرال  $\int e^{x^2} dx$  ممکن نیست لذا باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم برای این منظور باید ناحیه  $0 < y < 1$  ,  $3y \leq x < 3$  را رسم کنیم ملاحظه می‌شود که پس از رسم این ناحیه خط موازی محور  $y$ ‌ها مرز منحنی را در  $x = 3y$  و  $x = 0$  قطع می‌کند لذا داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^3 e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [ye^{x^2}]_0^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{3} xe^{x^2} dx = \left[ \frac{1}{6} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e^1 - 1}{6}$$

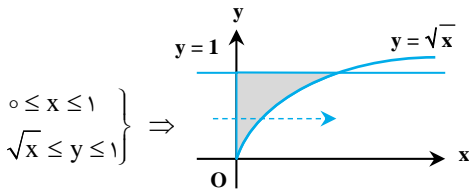
۳۱- گزینه «۲» با توجه به اینکه محاسبه انتگرال  $\int e^{x^2} dx$  ممکن نیست لذا با رسم ناحیه  $0 < y < 1$  و  $y < x < 1$  داریم:



$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [ye^{x^2}]_0^x dx = \int_0^1 x(e^{x^2} - 1) dx = (e-1) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

۳۲- گزینه «۴»

محاسبه انتگرال نسبت به  $y$  ممکن نیست و باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

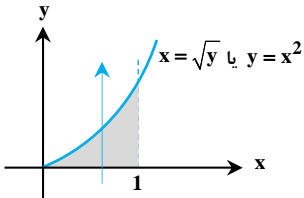


ملاحظه می‌گردد هر خط موازی محور  $x$  ها مرز ناحیه را در خطوط  $x = 0$  و  $x = y^2$  قطع می‌کند، و  $y$  بین  $0$  تا  $1$  تغییرات دارد، پس داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^y dx dy = \int_0^1 [ye^y]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y(e^y - 1) dy = \int_0^1 ye^y - \int_0^1 y dy = [ye^y - e^y]_0^1 - [\frac{y^2}{2}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۳- گزینه «۱»

با توجه به شکل مقابل، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، خواهیم داشت:



$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{3} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3}$$

$$V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} m y dy dx = m \int_0^a [y^2]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{ma^2}{3}$$

۳۴- گزینه «۲»

$$y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, \theta = \pi \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

۳۵- گزینه «۲»

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \int_0^2 (r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^\pi [\frac{r^2}{2} \sin \theta]_0^2 d\theta = \int_0^\pi [2 \sin \theta] d\theta = [-\frac{2}{1} \cos \theta]_0^\pi = \frac{4}{1} = 4$$

$$I = \iint_D \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^a r(\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) [\frac{r^2}{2}]_0^a d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi = \frac{a^2}{2} \times 2 = a^2$$

۳۶- گزینه «۳»

$$\begin{cases} x = a \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

۳۷- گزینه «۳»

ناحیه موردنظر ربع اول دایره‌ای به شعاع  $a$  می‌باشد:

$$I = \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin^2 \theta \times r \times r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta [\frac{r^5}{5}]_0^a d\theta = \frac{a^5}{5} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{a^5}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^5}{20}$$

$$u = xy, v = xy^{1/4}$$

۳۸- گزینه «۲» نواحی کاملاً نامنظم هستند، لذا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ y^{1/4} & 1/4xy^{3/4} \end{vmatrix}} = \frac{1}{1/4xy^{1/4} - xy^{1/4}} = \frac{1}{0/4xy^{1/4}} = \frac{1}{4xy^{1/4}} = \frac{2/5}{xy^{1/4}} = \frac{2/5}{v}$$

$$S = \iint_D dx dy = \int_1^2 \int_1^{2/\Delta} \frac{1}{v} dv du = \int_1^2 \frac{2}{\Delta} [\ln v]_1^{2/\Delta} du = \int_1^2 \frac{2}{\Delta} \ln \frac{2}{\Delta} du = \frac{2}{\Delta} \ln \frac{2}{\Delta} [u]_1^2 = \Delta \ln \frac{2}{\Delta}$$

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

۳۹- گزینه «۲»

$$\begin{cases} y + x = 2 \Rightarrow u = 2, y = -x \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x - y = 2 \Rightarrow v = 2, y = x \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (x + y)^2] dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \frac{1}{2} du dv = \frac{\Delta}{3}$$

$$I = 2 \int_0^1 \int_0^x (\int_0^{xy} dz) x^2 y dy dx = 2 \int_0^1 [\int_0^x x^2 y^2 dy] dx = 2 \int_0^1 [x^2 (\frac{y^3}{3})]_0^x dx = 2 \int_0^1 (\frac{x^5}{3}) dx = 2 \int_0^1 \frac{x^5}{3} dx = 2 \times [\frac{x^6}{24}]_0^1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۴۰- گزینه «۱»



## پاسخنامه آزمون (۲)

۱- گزینه «۴» ناحیه  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$  خارج از کره به شعاع واحد و به مرکز مبدأ است. در مختصات کروی حدود  $\rho, \phi, \theta$  را می‌نویسیم. برای یک کره کامل همیشه  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq \phi \leq \pi$  است. حالا اگر ناحیهی درون کره به شعاع یک را می‌خواستیم  $0 \leq \rho \leq 1$  بود اما، برای ناحیهی خارج از این کره  $1 \leq \rho < \infty$  است. ژاکوبین این دستگاه  $\rho^2 \sin \phi$  است.

$$I(\alpha) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^\infty \frac{\rho^2 \sin(\phi)}{(\rho^2)^\alpha} d\rho d\phi d\theta$$

از آنجا که حدود انتگرال‌ها ثابت هستند و تابع انتگرالده قابل تفکیک است می‌توان نوشت:

$$I(\alpha) = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \right) \left( \int_1^\infty \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}} d\rho \right)$$

بدیهی است که انتگرال‌های شامل متغیرهای  $\theta$  و  $\phi$  کران‌دار هستند و مقادیر حقیقی دارند. برای آن که انتگرال سوم نیز همگرا باشد، باید  $2\alpha - 2 > 1$  باشد یعنی  $\alpha > \frac{3}{2}$  است.

۲- گزینه «۲» می‌دانیم که حجم از فرمول  $V = \iiint_D dz dy dx$  به دست می‌آید. کران‌های  $Z$  از معادله‌ی دو سهمی‌گون مشخص هستند اما برای تعیین

حدود  $X$  و  $Y$ ، فصل مشترک این سهمی‌گون‌ها را به دست می‌آوریم:  $x^2 + 3y^2 = x^2 - x^2 - y^2 = \lambda - x^2 - y^2$  پس  $x^2 + 2y^2 = \lambda$ . چون این ناحیه یک بیضی است و کار کردن با آن ممکن است مشکل باشد، تغییر متغیر  $Y = \sqrt{2}y$  را در مسأله ایجاد می‌کنیم. در واقع از دستگاه جدید  $X = x$  و  $Z = z$  و  $Y = \sqrt{2}y$  استفاده می‌کنیم. ژاکوبین دستگاه جدید  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است. به بیان ساده‌تر  $dx = dX$  و  $dz = dZ$  و  $dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dY$ ، به این ترتیب  $V = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{2}} dZ dY dX$  است که  $D$

به سهمی‌گون‌های  $Z = \lambda - X^2 - \frac{1}{4}Y^2$  و  $Z = X^2 + \frac{3}{4}Y^2$  محدود شده است. برخورد این دو رویه دایره  $X^2 + Y^2 = 4$  است. پس در مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 2$  و کران‌های  $Z$  نیز همان معادلات سهمی‌گون‌ها هستند. ابتدا باید آن‌ها را در دستگاه استوانه‌ای بنویسیم. پس کران‌های  $Z$  عبارتند از:

$$(I) \quad Z = \lambda - X^2 - \frac{1}{4}Y^2 = \lambda - r^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right)$$

$$(II) \quad Z = X^2 + \frac{3}{4}Y^2 = r^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right)$$

اگر تردید داریم که کدام یک از آن‌ها کران بالا است باید به محدوده‌ی  $r$  و  $\theta$  توجه کنیم و یک مقدار از آن‌ها را در کران‌های  $Z$  قرار دهیم. برای مثال اگر  $r = 0$  و  $\theta = 0$  را قرار دهیم متوجه می‌شویم که اولی  $Z = \lambda$  و دومی  $Z = 0$  می‌شود پس  $Z = r^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right)$  کران پایین است.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right)}^{\lambda - r^2 \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right)} r dz dr d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\lambda - r^2) (2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\lambda r - 2r^3) dr d\theta$$

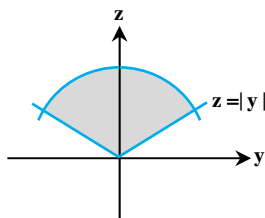
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \lambda r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right) \Big|_0^2 d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \lambda d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \lambda \times 2\pi = \lambda \sqrt{2} \pi$$

توضیح: با توجه به اینکه ناحیه انتگرال‌گیری درون بیضی  $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} = 1$  است، بنابراین می‌توانیم از تغییر متغیر  $X = 2r \cos \theta$ ،  $Y = \sqrt{2}r \sin \theta$  نیز استفاده کنیم.

۳- گزینه «۱» برای ناحیهی محدود به کره و مخروط از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$V = \iiint_D dz dy dx = \iiint_D \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

حدود  $\theta$  در دستگاه کروی همیشه  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  هستند مگر آن‌که شرط خاصی روی  $X$  و  $Y$  داشته باشیم. در این مثال هیچ محدودیتی روی  $X$  و  $Y$  (از قبیل  $0 \leq y$  یا  $x \geq 0$  یا  $y \geq x$ ) نداریم پس  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  است. حدود  $\rho$  به وضوح  $0 \leq \rho \leq a$  هستند زیرا این ناحیه درون کره‌ای به شعاع  $a$  قرار دارد. برای تشخیص حدود  $\phi$  در معادله‌ی رویه‌ها  $x = 0$  قرار می‌دهیم و تصویر آن‌ها را در صفحه‌ی  $YOZ$  بررسی می‌کنیم. از معادله‌ی کره به دایره‌ی  $z^2 + y^2 = a^2$  و از معادله‌ی مخروط به  $z = \sqrt{y^2} = |y|$  می‌رسیم. بنابراین حدود  $\phi$  از  $\phi = 0$  (روی محور  $Z$ ) تا  $\phi = \frac{\pi}{4}$  (روی خط  $z = |y|$ ) هستند.



$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi \right) \left( \int_0^a \rho^2 d\rho \right) = (2\pi) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \left( \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi a^3}{3} (2 - \sqrt{2})$$

۴- گزینه «۱» عامل  $x^2 + y^2$  نشان می‌دهد استفاده از دستگاه قطبی بهتر است. ناحیه‌ی انتگرال‌گیری تمام صفحه‌ی  $xOy$  است. در مختصات قطبی

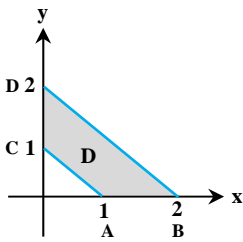
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr d\theta}{(1+r^2)^p} = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^p} dr \right)$$

روی  $\mathbb{R}^2$  داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r < \infty$ :

انتگرال  $\theta$  شامل متغیر کران‌دار است. برای انتگرال روی  $r$  باید اختلاف درجه مخرج از صورت بیشتر از یک باشد:

یادآوری می‌کنیم در انتگرال ناسره‌ی  $I = \int_a^{\infty} \frac{p(r)}{q(r)} dr$  که  $p(r)$  و  $q(r)$  دو چند جمله‌ای هستند و  $a \in \mathbb{R}$  شرط لازم برای همگرایی آن است که

( $> 1$  درجه صورت - درجه مخرج) باشد.



۵- گزینه «۲» با توجه به آن که در انتگرالده عبارت  $e^{y+x}$  را داریم بهتر است با معرفی  $u = y-x$  و  $v = y+x$

تغییر دستگاه بدسیم. ناحیه  $D$  دارای ۴ مرز است که عبارتند از: خطوط  $y+x=1$  و  $y+x=2$  و  $x=0$  و  $y=0$ . با قرار دادن هر کدام از این معادله‌ها در ضابطه‌ی  $u$  و  $v$  سعی می‌کنیم مرزهای جدید را برحسب  $u$  و  $v$  پیدا کنیم. مثلاً وقتی معادله‌ی  $x=0$  را در  $u$  و  $v$  قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود  $u = y$  و  $v = y$  یعنی آن که  $u = v$  است. به همین ترتیب از این ۴ معادله در صفحه‌ی  $xOy$  باید به ۴ معادله در صفحه‌ی  $uOv$  برسیم:

$$(y+x=1 \rightarrow v=1) \text{ و } (x=0 \rightarrow u=v)$$

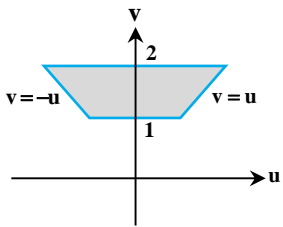
$$(y+x=2 \rightarrow v=2) \text{ و } (y=0 \rightarrow u=-v)$$

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{J_{xy}} = -\frac{1}{2}$$

ژاکوبین دستگاه جدید را نیز حساب می‌کنیم:

که قدر مطلق آن یعنی  $\frac{1}{2}$  در انتگرالده ضرب خواهد شد.

توجه به یک نکته ضروری است. در سیستم جدید داریم:



$$\iint_D e^{y+x} dy dx = \iint_D e^{\frac{u}{2}} \frac{1}{2} du dv$$

همان‌طور که می‌دانید در توابعی مانند  $e^v$  یا  $\sin \frac{u}{v}$  یا  $\cos \frac{u}{v}$  متغیری که در صورت کسر آمده است باید در انتگرال وسطی باشد یعنی ترتیب حل این

انتگرال باید به شکل  $\iint_D e^{\frac{u}{2}} \frac{1}{2} du dv$  باشد. پس حدود  $v$  یعنی  $v=1$  و  $v=2$  کران‌های انتگرال بیرونی و حدود  $u$  یعنی  $u=v$  و  $u=-v$  کران‌های

$$I = \int_1^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 (ve^{\frac{v}{2}}) \Big|_{-v}^v dv = \frac{1}{2} \int_1^2 v(e - e^{-1}) dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} (e - e^{-1}) (4 - 1) = \frac{3}{4} \sinh(1)$$

انتگرال وسطی‌اند.

۶- گزینه «۴» می‌دانیم که گشتاور ماند از رابطه‌ی  $I = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dy dx$  به دست می‌آید که در این مثال چگالی ثابت  $\rho(x, y) = k$  را داریم

و منظور از  $R$  همان ناحیه‌ی داده شده است. معمولاً برای ناحیه‌هایی که به چهار مرز محدود شده‌اند ابتدا معادله‌ی مرزها را طوری می‌نویسیم که سمت

$$\text{راست آن‌ها عدد ثابت باشد. معادله مرزهای این ناحیه عبارتند از } \frac{y}{x} = 2 \text{ و } \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \text{ و } yx = 2a^2 \text{ و } yx = a^2.$$

پس با معرفی  $u = yx$  و  $v = \frac{y}{x}$  خواهیم داشت  $\frac{1}{2} \leq u \leq 2a^2$  و  $a^2 \leq v \leq 2a^2$ . هم‌چنین ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم.

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{y}{x} & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{J_{xy}} = -\frac{x}{2y}$$

البته چون  $u = \frac{y}{x}$  است داریم  $J_{uv} = -\frac{x}{2y} = -\frac{1}{2u}$  و در این ناحیه  $u > 0$  است پس قدرمطلق ژاکوبین برابر با  $\frac{1}{2u}$  است.

اکنون آماده هستیم که گشتاور ماند نسبت به مبدأ را حساب کنیم.

$$I = \iint_R (x^2 + y^2) k dy dx = k \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{a^2}^{2a^2} \left(\frac{v}{u} + vu\right) \frac{1}{2u} dv du = \frac{k}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{a^2}^{2a^2} v \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) dv du = \frac{k}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2a^4}{2} \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) du$$

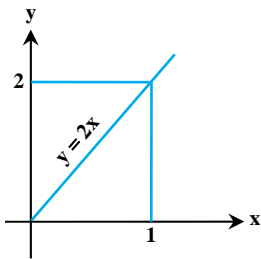
$$= \frac{ka^4}{2} \left(-\frac{1}{u} + u\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{ka^4}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{9ka^4}{2}$$

۷- گزینه «۲» ناحیه‌ی موردنظر را با  $D$  نشان می‌دهیم. حجم این ناحیه برابر است با  $V = \iiint_D dz dy dx$  با توجه به آن که  $\frac{1}{8}$  اول از این ناحیه را می‌خواهیم شرط  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  را داریم. ابتدا کران‌های  $z$  را پیدا می‌کنیم. از صورت سؤال دو معادله برای  $z$  به دست می‌آید:  $z = 1-x$  و  $z = \frac{1}{4}(2-y)$  همچنین به علت قرار داشتن در  $\frac{1}{8}$  اول باید  $z \geq 0$  باشد. در شرایط عادی  $z = 1-x$  و  $z = \frac{1}{4}(2-y)$  حدود  $z$  را مشخص می‌کنند مگر آن‌که متوجه شویم یکی از آن‌ها منفی است که در این صورت به جای آن باید از  $z = 0$  استفاده کنیم. برای بحث دقیق‌تر در این مورد لازم است حدود تغییرات  $x$  و  $y$  را مشخص کنیم. در صفحه‌ی  $xOy$  فعلاً دو شرط  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  را داریم که ناحیه‌ای را محدود نمی‌کنند. لازم است با برخورد دادن رویه‌ها و حذف  $z$  از آن‌ها روابطی بر حسب  $x$  و  $y$  به دست آوریم. معادلات  $z = 1-x, z = \frac{1}{4}(2-y), z = 0$  را به دو دو برخورد می‌دهیم:

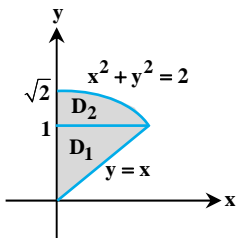
به این ترتیب در صفحه  $xOy$  داریم  $0 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq y \leq 2$  از طرف دیگر از برخورد دو صفحه با هم داریم:

$$\begin{cases} z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow x=1, \quad \begin{cases} z=0 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

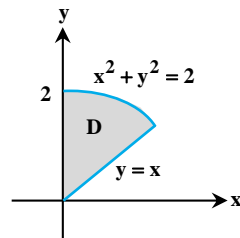
پس باید ناحیه  $R$  (تصویر  $D$  روی  $xOy$ ) را به دو بخش تقسیم کنیم. در یک نیمه داریم  $0 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq y \leq 2x$  و در نیمه بالایی داریم  $0 \leq x \leq 1$  و  $2x \leq y \leq 2$ . نیمه پائینی به خط  $x=1$  محدود است که از صفحه‌ی  $x+z=1$  به دست آمده است. پس در این ناحیه داریم  $0 \leq z \leq 1-x$ . نیمه بالایی به خط  $y=2$  محدود است که از صفحه‌ی  $y+2z=2$  به دست آمده است، پس در این ناحیه داریم  $0 \leq z \leq \frac{2-y}{2}$ .



$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{1-x} dz dy dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} dz dy dx \\ &= \int_0^1 2x(1-x) dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 \frac{2-y}{2} dy dx = 2 \int_0^1 (x-x^2) dx + \int_0^1 \frac{1}{2} (2y - \frac{y^2}{2}) \Big|_{2x}^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 (x-x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (2-4x + 2x^2) dx = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(2 - \frac{4}{2} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



$\Rightarrow$



۸- گزینه «۳» به علت حضور عامل  $x^2 + y^2$  در تابع زیر انتگرال حدس می‌زنیم این انتگرال بهتر است در دستگاه قطبی حل شود. برای این کار ابتدا باید ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را تشخیص دهیم تا حدود  $\theta$  و  $r$  معلوم شود. در انتگرال سمت چپ داریم  $0 \leq x \leq 1$  و  $x \leq y \leq 1$ . این ناحیه را  $D_1$  بنامیم. در انتگرال سمت راست  $0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}$  و  $1 \leq y \leq \sqrt{2}$  است این ناحیه را  $D_2$  بنامیم. ناحیه  $D = D_1 \cup D_2$  درون دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 2$  قرار دارد و به خط  $y = x$  و محور  $y$  ها در ربع اول محدود شده است.

در دستگاه قطبی این ناحیه را می‌توان به صورت  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  و  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$  بیان کرد. پس داریم:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_x^1 e^{x^2+y^2} dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (e^2 - 1) d\theta = \frac{1}{2} (e^2 - 1) (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

۹- گزینه «۱» با معرفی  $u = x+y+z$  و  $v = x-y+z$  و  $w = x+y-z$  داریم:

$$J_{xyz} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \text{ساروس} = (1+1+1+1-1) = 4 \Rightarrow J_{uvw} = \frac{1}{J_{xyz}} = \frac{1}{4}$$

با توجه به صورت سؤال در دستگاه جدید  $u = \pm 2$  و  $v = \pm 3$  و  $w = \pm 1$  معادلات مرزهای انتگرال هستند. تابع زیر انتگرال باید بر حسب متغیرهای جدید نوشته شود. با دقت به معادلات  $u, v, w$  متوجه می‌شویم که  $y = \frac{u-v}{2}$  و  $z = \frac{u-w}{2}$  پس داریم:

$$I = \iiint_T yz dz dy dx = \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (\frac{u-v}{2})(\frac{u-w}{2})(\frac{1}{4}) dw du dv = \frac{1}{16} \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (u^2 - uw - vu + vw) dw du dv$$

ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک مکعب است که در آن  $-2 \leq u \leq 2$ ،  $-3 \leq v \leq 3$  و  $-1 \leq w \leq 1$  است. پس این ناحیه نسبت به همه‌ی محورها متقارن است. بنابراین حاصل انتگرال برای هر کدام از جملات که نسبت به  $u$  یا  $v$  یا  $w$  فرد باشند، صفر می‌شود. یعنی  $\int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (-uw - vu + vw) dw du dv = 0$  است!

پس خواهیم داشت:

$$I = \frac{1}{16} \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 u^2 dw du dv = \frac{1}{16} \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 2u^2 du dv = \frac{2}{16} \int_{-3}^3 \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{-2}^2 dv = \frac{2}{16} \times \frac{16}{3} \times 6 = 4$$

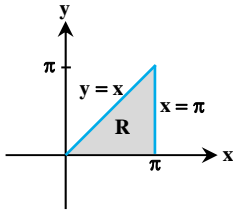
۱۰- گزینه «۱» با توجه به سطوح  $Z = \sin \frac{\pi y}{2x}$  و  $Z = 0$  محدوده متغیر  $Z$  معلوم است:  $0 \leq Z \leq \sin \left( \frac{\pi y}{2x} \right)$

در مورد  $x, y$  نیز با توجه به معادله مرزهای داده شده تصویر این جسم در صفحه  $xOy$  در فاصله‌ی  $0 \leq x \leq \pi$  قرار دارد و خط  $y = x$  یکی از کران‌های  $y$  است. اما یک مرز دیگر برای  $y$  نیاز داریم. به همین خاطر سطوح  $Z = 0$

و  $Z = \sin \frac{\pi y}{2x}$  را با هم برخورد می‌دهیم:

$$\sin \left( \frac{\pi y}{2x} \right) = 0 \Rightarrow y = 0$$

پس  $y = 0$  و  $y = x$  مرزهای  $y$  هستند. در شکل مقابل تصویر این جسم بر صفحه‌ی  $xOy$  را نشان داده‌ایم. به این ترتیب:



$$V = \int_0^\pi \int_0^x \int_0^{\sin(\frac{\pi y}{2x})} dz dy dx = \int_0^\pi \int_0^x \sin \left( \frac{\pi y}{2x} \right) dy dx = \int_0^\pi \left[ -\frac{2x}{\pi} \cos \left( \frac{\pi y}{2x} \right) \right]_0^x dx = \int_0^\pi \left( -\frac{2x}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) \right) dx = \int_0^\pi \frac{2x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi$$

۱۱- گزینه «۴» در معادله‌ی هر دو رویه عامل  $x^2 + y^2$  حضور دارد بنابراین از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت معادله رویه‌ها به

صورت  $az = r^2 - r$  و  $z = 2a - r$  درمی‌آید، از تلاقی رویه‌ها داریم:

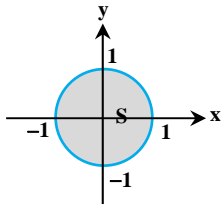
$$\frac{r^2}{a} = 2a - r \Rightarrow r^2 + ar - 2a^2 = 0 \Rightarrow r = a$$

یعنی تصویر این جسم بر صفحه‌ی  $xOy$  دایره‌ای به شعاع  $a$  است. در این دایره  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq a$  است. حدود  $Z$  نیز از معادله‌ی رویه‌ها به دست آمده‌اند. بنابراین حجم موردنظر برابر است با:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\frac{r^2}{a}}^{2a-r} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \left( 2a - r - \frac{r^2}{a} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left( 2ar - r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \theta \left[ ar^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left( a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a} \right) = \frac{5\pi}{6} a^3$$

۱۲- گزینه «۲» ناحیه‌ی  $S$  درون دایره واحد است و به آسانی در دستگاه قطبی به شکل  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 1$  بیان می‌شود.



$$I = \iint_S \text{Ln} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \text{Ln} \left( \frac{1}{r} \right) r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \text{Ln}(r) dr d\theta$$

ابتدا انتگرال  $\int_0^1 r \text{Ln}(r) dr$  را با استفاده از روش «جزء به جزء» حل کنیم.

$$(u = \text{Ln}(r) \Rightarrow du = \frac{1}{r} dr), \quad (dv = r dr \Rightarrow v = \frac{1}{2} r^2)$$

$$\int_0^1 \text{Ln}(r) dr = \left[ \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}(r) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1}{r} dr = (0 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^1 r dr = -\frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

$$I = - \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{1}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین با جایگذاری در انتگرال  $I$  داریم:

۱۳- گزینه «۲» محاسبه حجم ناحیه محدود مابین صفحه و کره به طور مستقیم سخت است، می‌خواهیم صفحه داده شده را حول مبدأ که مرکز کره نیز

هست، دوران دهیم تا معادله ساده‌تری برای صفحه به دست آید. فاصله مبدأ مختصات تا صفحه داده شده برابر  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  می‌باشد، بنابراین معادله صفحه داده

شده را با یک دوران می‌توان به صورت  $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$  تبدیل کرد و در این صورت می‌خواهیم حجم محدود مابین  $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$  از پایین و  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  از

بالا را محاسبه کنیم. از تلاقی معادله صفحه و کره نتیجه می‌شود  $x^2 + y^2 = \frac{2}{3} a^2$ . پس تصویر این ناحیه بر صفحه‌ی  $xOy$  یک دایره به شعاع  $\sqrt{\frac{2}{3}} a$  است،

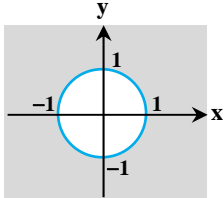
در نتیجه برای محاسبه حجم از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این دایره داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{3}} a$ . حدود  $Z$  نیز از  $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$  تا نیم کره

بالایی یعنی  $Z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$  به دست می‌آیند.



$$\begin{aligned} \text{حجم} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}} \int_{\frac{a}{\sqrt{r}}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r (\sqrt{a^2-r^2} - \frac{a}{\sqrt{r}}) dr = 2\pi \left( \frac{-1}{3} (a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{\sqrt{3}} r^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} \\ \Rightarrow \text{حجم} &= 2\pi \left( \frac{-1}{9\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} \right) = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{9\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

**۱۴- گزینه ۴** می‌خواهیم حجم را با استفاده از انتگرال سه‌گانه به دست آوریم. وجود  $x^2 + y^2$  در معادله‌ی رویه‌ها نشان می‌دهد استفاده از مختصات استوانه‌ای بهتر است. معادله‌ی رویه را بر حسب مختصات استوانه‌ای می‌نویسیم:



$$z = -\ln(x^2 + y^2) = -\ln r^2 = -2\ln r$$

صفحه‌ی  $xOy$  هم‌صفحه‌ی  $Z=0$ . با برخورد دادن رویه‌ها داریم:

$$-2\ln r = 0 \Rightarrow \ln r = 0 \Rightarrow r = 1$$

که معادله‌ی دایره‌ای به مرکز  $(0,0)$  و شعاع ۱ در صفحه‌ی  $xOy$  است.

$$V = \iiint_R dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{-2\ln r} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2\ln r) r dr d\theta$$

برای محاسبه‌ی انتگرال وسط از روش جزء‌به‌جزء داریم:

$$\ln r = u \Rightarrow \frac{1}{r} dr = du, \quad r dr = dv \Rightarrow \frac{1}{r} r^2 = v$$

$$-2 \int_0^1 r \ln r dr = -2 \left[ \frac{1}{r} r^2 \ln r - \frac{1}{r} \int_0^1 r dr \right] = \left[ -r^2 \ln r + \frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$$

بنابراین داریم:

**۱۵- گزینه ۳** با توجه به وجود عبارت  $x^2 + y^2 + z^2$  تابع تحت انتگرال به نظر می‌رسد که استفاده از مختصات کروی محاسبه انتگرال را ساده‌تر می‌کند.

ناحیه انتگرال‌گیری یک هشتم اول از دستگاه مختصات است، بنابراین  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  خواهد بود.

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + \pi^2)^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\rho^2 \sin \phi}{(\rho^2 + \pi^2)^2} d\rho d\phi d\theta = \left( \int_0^\infty d\theta \right) \left( \int_0^\infty \sin \phi d\phi \right) \left( \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(\rho^2 + \pi^2)^2} d\rho \right) = \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\pi}{\pi} \right) = \frac{\pi}{4}$$

تذکر: برای حل انتگرال  $\int \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + \pi^2)^2}$  از تغییر متغیر  $\rho = \pi \tan x$  استفاده کنید.

**۱۶- گزینه ۳** صفحه‌ی  $xOy$  یعنی همان صفحه‌ی  $Z=0$  بنابراین کران‌های  $Z$  عبارتند از  $Z=0$  و  $Z=\frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$ . البته حضور  $x^2 + y^2$  در معادله‌ی

رویه‌ها نشان می‌دهد که استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب‌تر است. پس حدود  $Z$  عبارتند از  $Z=0$  و  $Z=\frac{1}{\lambda}r^2$ . برای تشخیص حدود  $r$  و  $\theta$  از معادله‌ی استوانه

استفاده می‌کنیم. در دستگاه استوانه‌ای داریم:

حدود  $r$  مشخص شدند و اگر به معادله‌ی  $r = \lambda \sin \theta$  دقت کنید با توجه به آن که  $r$  نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$r \geq 0 \Rightarrow \sin \theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$  (البته دایره‌ی  $x^2 + y^2 = ay$  جزء دایره‌های معروفی است که بهتر است رسم آن را به یاد داشته باشید اما ما سعی کردیم روش تشخیص حدود انتگرال را

بدون ترسیم شکل بیان کنیم.)

با استفاده از روابط مثلثاتی و فرمول‌های توان‌شکن داریم:

$$\sin^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 = \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} [1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta] = \frac{1}{4} [1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4} \int_0^\pi [1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)] d\theta = 2\left(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\theta - \sin 2\theta\right) \Big|_0^\pi = 3\pi$$

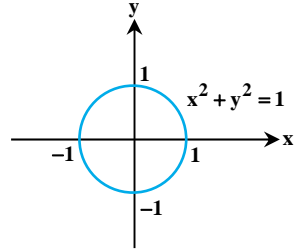
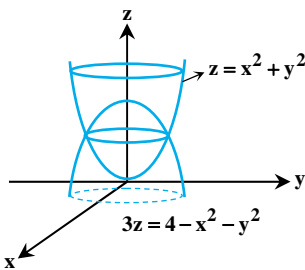
**۱۷- گزینه ۲** حدود  $Z$  عبارتند از  $Z=2$  و  $Z=\frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$  برخورد آن‌ها با هم دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  را در صفحه‌ی  $xOy$  به ما می‌دهد پس بهتر است از

مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. در این صورت کران‌های  $Z$  به شکل  $Z=2$  و  $Z=\frac{1}{\lambda}r^2$  نوشته می‌شوند و درون دایره‌ای به شعاع ۲ داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 2$ .

$$I = \iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{\lambda}r^2}^2 r^2 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 (2 - \frac{1}{\lambda}r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2r^2 - \frac{1}{\lambda}r^4) dr$$

$$= 2\pi \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5\lambda} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( \frac{8}{3} - \frac{32}{5\lambda} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

**توضیح:** بدون رسم شکل چگونه متوجه می‌شویم که  $z = \frac{1}{3}r^2$  و  $z = 2$  کران پایین هستند یا کران بالا؟ برای این کار به محدوده‌ی تغییرات  $r$  دقت می‌کنیم چون  $0 \leq r \leq 2$  است، معلوم می‌شود که  $z = \frac{1}{3}r^2$  از  $z = 2$  کمتر است. در مواردی که مقایسه‌ی کران‌ها مشکل باشد می‌توانید با قرار دادن یک مقدار  $r$  مثلاً  $r = 0$  در آن‌ها متوجه شوید کدام یک از آن‌ها از دیگری کوچک‌تر است.



**۱۸- گزینه «۲»** رویه‌های  $z = x^2 + y^2$  و  $z = \frac{1}{3}(4 - x^2 - y^2)$  حدود  $z$  را به ما می‌دهند. برای تشخیص حدود  $x$  و  $y$  رویه‌ها را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 3z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = 4 - x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

پس تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر صفحه‌ی  $xOy$  یک دایره به شعاع یک است و در مختصات قطبی  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 1$  است. کران‌های  $z$  نیز باید بر حسب  $r$  و  $\theta$  نوشته شوند:

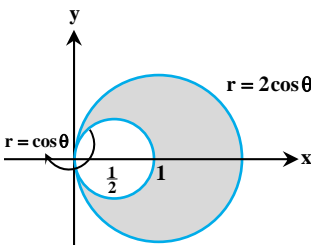
$$z = \frac{1}{3}(4 - x^2 - y^2) = \frac{1}{3}(4 - r^2), \quad z = x^2 + y^2 = r^2$$

اگر رویه‌ها را رسم نکرده باشید برای تشخیص آن که کدام یک از این‌ها کران پایین و کدام کران بالا است باید یکی از مقادیر  $r$  را در آن‌ها قرار دهید. مثلاً  $r = 0$  را امتحان کنیم.

پس  $z = r^2$  کران پایین و  $z = \frac{1}{3}(4 - r^2)$  کران بالا است. در نتیجه داریم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\frac{1}{3}(4-r^2)} r dz dr d\theta \Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{3}(4-r^2) - r^2 \right) r dr d\theta \Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{4}{3}r - \frac{1}{3}r^3 - r^3 \right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{4}{3}r - \frac{4}{3}r^3 \right) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{3}r^4 \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{1}{3}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$$



**۱۹- گزینه «۴»** حجم محدود به زیر رویه  $z = x^2 + y^2$  و محدود به دو استوانه  $x^2 + y^2 = 2x$  و  $x^2 + y^2 = x$  بالای صفحه  $xOy$  مدنظر می‌باشد. با توجه به معادله رویه‌ها، از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow r^2 = r \cos \theta \Rightarrow r = \cos \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 2 \cos \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

دقت کنید که بدون داشتن شکل هم حدود  $\theta$  معلوم می‌شوند، زیرا از معادله‌ی  $r = 2 \cos \theta$  و  $r = \cos \theta$  معلوم است که باید  $\cos \theta \geq 0$  باشد؛ یعنی  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{حجم} = \iint (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \Big|_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{15}{4} \cos^4 \theta d\theta = \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{15}{4} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{45\pi}{32}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16} \quad \text{یادآوری:}$$

**۲۰- گزینه «۲»** جمله‌ی  $x^2 + y^2$  در معادله‌ی مرزها نشان می‌دهد استفاده از دستگاه استوانه‌ای راحت‌تر است. معادله‌ی مرزهای  $z$  را در مختصات استوانه‌ای به صورت  $z = 0$  و  $z = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$  به دست می‌آوریم. حدود تغییرات  $r$  و  $\theta$  با توجه به دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  به صورت  $0 \leq r \leq 2$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  است. بنابراین داریم:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{e^{-r^2}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} e^0 \right) d\theta = 2\pi \left( -\frac{1}{2} (e^{-4} - 1) \right) = \pi(1 - e^{-4})$$

بنابراین  $A = \pi$  و  $B = 4$  است و لذا  $\frac{A}{B} = \frac{\pi}{4}$  است.

**۲۱- گزینه «۳»** وجود عامل  $x^2 + y^2$  در این معادله نشان می‌دهد بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم. پس ابتدا معادله منحنی را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$(r^2)^3 = 16(r^2 \cos^2 \theta)(r^2 \sin^2 \theta) \Rightarrow r^6 = 16r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \Rightarrow r = 4 \sin \theta \cos \theta, \quad r = 0 \Rightarrow r = 2 \sin 2\theta, \quad r = 0$$





بنابراین منحنی موردنظر رُز چهار برگ است، کافی است مساحت یک برگ را محاسبه و حاصل را چهار برابر کنیم.

$$S = 4 \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 (\sin 2\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 2\theta d\theta = 2\pi$$

توجه کنید که حدود  $\theta$  را می‌توانیم از تساوی  $r = 2 \sin 2\theta$  تشخیص دهیم، چون  $r$  همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. پس باید  $\sin 2\theta \geq 0$  باشد، یعنی  $0 \leq 2\theta \leq \pi$  پس  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

**۲۲- گزینه «۱»** با استفاده از انتگرال سه‌گانه و با توجه به این که گشتاور خواسته شده نسبت به صفحه  $xOy$  است، مقدار  $Z$  هم در تابع چگالی داده شده یعنی  $xOy$  ضرب می‌شود. برای تعیین حدود انتگرال به معادله‌ی رویه‌های داده شده توجه کنید. صفحات مختصات جزء مرزهای این ناحیه هستند یعنی صفحات  $x=0$ ،  $y=0$  و  $z=0$ . علاوه بر آن‌ها صفحات  $x=1$ ،  $y=2$  و  $y+z=2$  را نیز داریم. پس برای  $Z$  دو کران به صورت  $Z=0$  و  $Z=2-y$  وجود دارد. حدود  $x$  و  $y$  نیز واضح هستند:  $0 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq y \leq 2$ .

$$M_{xy} = \iiint_D z \rho(x, y, z) dz dy dx = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{2-y} xyz \, dz dy dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 xy \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-y} dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 xy \frac{(2-y)^2}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y(2-y)^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \frac{1}{4} \int_0^2 y(2-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 (4y + y^3 - 4y^2) dy = \frac{1}{4} \left[ 2y^2 + \frac{y^4}{4} - \frac{4y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left( 8 + \frac{16}{4} - \frac{64}{3} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{104 - 64}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{40}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

**۲۳- گزینه «۳»** فرض کنیم ناحیه‌ی  $D$  به رویه‌ی  $z = x^2 + y^2$  و صفحه‌ی  $z = 2x + 2y$  محدود باشد. کران‌های  $z$  روی  $D$  همین دو معادله هستند. برای مشخص شدن کران‌های  $x$  و  $y$  رویه‌ها را برخورد می‌دهیم. از برخورد رویه‌ها داریم  $x^2 + y^2 = 2x + 2y$  به عبارتی  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ . با تغییر دستگاه  $(u, v, w) = (x-1, y-1, z)$  در دستگاه جدید خواهیم داشت  $u^2 + v^2 = 2$  که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع  $\sqrt{2}$  است. همچنین کران‌های  $z$  عبارتند از:  $z = x^2 + y^2 = (u+1)^2 + (v+1)^2$  و  $z = 2x + 2y = 2(u+1) + 2(v+1)$ . با این کار توانستیم دایره‌ای را که مرکزش در  $(1, 1)$  قرار داشت به دایره‌ای به مرکز مبدأ تبدیل کنیم.

اکنون می‌توانیم به جای کران‌های  $u$  و  $v$  از کران‌های  $r$  و  $\theta$  استفاده کنیم. (مختصات استوانه‌ای) در دایره‌ی  $u^2 + v^2 = 2$  داریم  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$  و  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . همچنین دستگاه  $(u, v, w)$  و همچنین ژاکوبی دستگاه استوانه‌ای  $(r)$  را باید در انتگرالده ضرب کنیم.

$$J_{uvw} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad J_{zr\theta} = r$$

$$V = \iiint_D dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2 + 2r(\cos\theta + \sin\theta) + 2}^{2r(\cos\theta + \sin\theta) + 4} r dz dr d\theta$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

در مورد کران‌های  $z$  دقت کنید که در دستگاه استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$z = (u+1)^2 + (v+1)^2 = u^2 + v^2 + 2(u+v) + 2 = r^2 + 2r(\cos\theta + \sin\theta) + 2 \quad \text{و} \quad z = 2(u+1) + 2(v+1) = 2r(\cos\theta + \sin\theta) + 4$$

با محاسبه‌ی انتگرال میانی داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r z \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{r^2 + 2r(\cos\theta + \sin\theta) + 2}^{2r(\cos\theta + \sin\theta) + 4} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

بنابراین حجم  $D$ ، دو برابر  $\pi$  است.

**۲۴- گزینه «۴»** ناحیه‌ی  $D$  نسبت به متغیرهای  $x$  و  $y$  تقارن دارد، یعنی معادله‌ی بیضی‌گون با تبدیل  $x$  و  $y$  به یکدیگر تغییری نمی‌کند. بنابراین در تابع زیر انتگرال تبدیل متغیرهای  $x$  و  $y$  به یکدیگر تغییری در مقدار انتگرال نمی‌دهد، یعنی داریم:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \frac{1393x^4 + z^2}{1393x^4 + 1393y^4 + 2z^2} dv \Rightarrow I = \iiint_D \frac{1393y^4 + z^2}{1393x^4 + 1393y^4 + 2z^2} dv \\ 2I &= I + I = \iiint_D \frac{1393x^4 + 1393y^4 + 2z^2}{1393x^4 + 1393y^4 + 2z^2} dv = \iiint_D dv = (\text{حجم ناحیه } D) = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2})(\sqrt{2})(1) = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

$$2I = \frac{8\pi}{3} \quad \text{پس} \quad I = \frac{4\pi}{3} \quad \text{است.}$$

**یادآوری:** حجم بیضی با معادله‌ی  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  برابر با  $\frac{4}{3} \pi abc$  است.

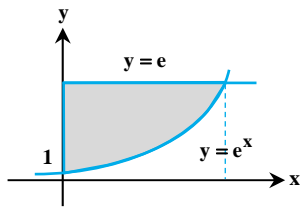
**۲۵- گزینه «۳»** از تقارن ناحیه‌ی  $V$  نسبت به متغیرهای  $x, y$  و  $z$  استفاده می‌کنیم. دقت کنید که با تغییر نقش  $x, y$  و  $z$  نسبت به یکدیگر معادله‌ی ناحیه تغییر نمی‌کند، بنابراین در تابع زیر انتگرال هم با عوض کردن نقش  $y$  و  $z$  یا با عوض کردن نقش  $x$  و  $z$  مقدار  $I$  تغییر نمی‌کند:

$$I = \iiint_V \frac{z^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dv = \iiint_V \frac{y^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dv = \iiint_V \frac{x^2 + 1}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dv$$

$$\Rightarrow 3I = \iiint_V \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} dv = (V \text{ حجم ناحیه}) = \frac{4}{3} \pi \times 4^3 = \frac{256}{3} \pi$$

بنابراین با جمع کردن این ۳ انتگرال داریم:

$$دیدیم که  $3I = \frac{256}{3} \pi$  است، پس  $I = \frac{256}{9} \pi$  خواهد بود.$$



**۲۶- گزینه «۲»** محاسبه‌ی انتگرال  $\int \frac{dy}{\text{Lny}}$  مشکل است اما با تعویض ترتیب متغیرها، انتگرال  $\int \frac{dx}{\text{Lny}}$  بسیار ساده

حل می‌شود؛ پس این انتگرال به تعویض ترتیب متغیرها نیاز دارد. در گام اول با دقت به کران‌های داده شده، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم. داریم  $e^x \leq y \leq e$  و  $0 \leq x \leq 1$ ، همیشه اول نمودار کران‌های انتگرال وسطی را رسم کنید. با رسم منحنی  $y = e^x$  و خط  $y = e$  ناحیه مشخص می‌شود. محل برخورد این دو نمودار، نقطه‌ای به طول  $x = 1$  است. البته نیم‌نگاهی هم به شرط  $0 \leq x \leq 1$  می‌اندازیم و مطمئن می‌شویم که ناحیه را درست تشخیص داده‌ایم.

اگر بخواهیم ابتدا کران‌های  $y$  و سپس کران‌های  $x$  را بنویسیم، برای  $y$  به کمترین و بیشترین مقدار  $y$  نیاز داریم. کمترین مقدار  $y$  در محل برخورد  $y = e^x$  با خط  $x = 0$  روی می‌دهد یعنی  $y = e^0 = 1$ . بیشترین مقدار  $y$ ،  $y = e$  است. پس  $1 \leq y \leq e$ . حال اگر در جهت محور  $x$  ها از این ناحیه عبور کنیم، خط  $x = 0$  ورودی است و منحنی  $x = \text{Lny}$  خروجی خواهد بود.  $(y = e^x \leftrightarrow x = \text{Lny})$ . پس  $0 \leq x \leq \text{Lny}$ . با نوشتن کران‌های جدید

$$I = \int_1^e \int_0^{\text{Lny}} \frac{1}{\text{Lny}} dx dy = \int_1^e \left( \frac{x}{\text{Lny}} \right) \Big|_0^{\text{Lny}} dy = \int_1^e \frac{\text{Lny}}{\text{Lny}} dy = \int_1^e dy = y \Big|_1^e = e - 1$$

انتگرال را حل می‌کنیم:

**۲۷- گزینه «۳»** حدود  $x$  و  $y$  به روشنی مشخص شده‌اند:  $0 \leq x \leq 1$  و  $-1 \leq y \leq 1 - x$  است. البته باید مراقب باشیم که حدود  $x$  اعداد ثابت هستند پس مربوط به انتگرال بیرونی‌اند و حدود  $y$  که به صورت  $-1 \leq y \leq 1 - x$  به دست آمده‌اند مربوط به انتگرال وسطی‌اند، پس ترتیب موردنظر ما به صورت

$$\int_0^1 \int_{-1}^{1-x} \arcsin(x+y) dy dx$$

است. برای حل اولین انتگرال نسبت به متغیر  $y$  از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$(u = \arcsin(x+y) \Rightarrow du = \frac{dy}{\sqrt{1-(x+y)^2}}), (dv = dy \Rightarrow v = y)$$

$$\iint_S \arcsin(x+y) dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^{1-x} \arcsin(x+y) dy dx = \int_0^1 [(x+y) \arcsin(x+y) + \sqrt{1-(x+y)^2}] \Big|_{-1}^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 [(x+1-x) \arcsin(x+1-x) + \sqrt{1-(x+1-x)^2}] - [(x-1) \arcsin(x-1) + \sqrt{1-(x-1)^2}] dx$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{\pi}{2} - [(x-1) \arcsin(x-1) + \sqrt{1-(x-1)^2}] \right] dx \quad (I)$$

$$\begin{cases} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c \\ \int x \sin^{-1} x dx = \frac{1}{4} (2x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + c \end{cases}$$

حال برای انتگرال فوق، از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

لذا، حاصل (I) به صورت زیر خواهد بود:

$$I = \left[ \frac{\pi}{2} x - \left[ \frac{1}{4} (2(x-1)^2 - 1) \sin^{-1}(x-1) + \frac{x-1}{4} \sqrt{1-(x-1)^2} \right] - \frac{(x-1)}{2} \sqrt{1-(x-1)^2} - \frac{1}{2} \sin^{-1}(x-1) \right] \Big|_0^1$$

$$= \left[ \frac{\pi}{2} - [0 - 0 - 0 - 0] - [0 - \frac{1}{4} \sin^{-1}(-1) + 0 - 0 - \frac{1}{4} \sin^{-1}(-1)] \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

**۲۸- گزینه «۴»** با توجه به تساوی داده شده می‌توانیم به جای  $\frac{\arctg x}{x}$  در انتگرال  $I$ ، عبارت معادل آن یعنی  $\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}$  را قرار دهیم. با این کار به یک

$$I = \int_0^1 \left( \frac{\arctg x}{x} \right) \left( \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dy dx}{(1+x^2 y^2) \sqrt{1-x^2}}$$

انتگرال دوگانه خواهیم رسید:

اگر این انتگرال را دوگانه را با همین ترتیب حل کنیم، به جای اول بر می‌گردیم، بنابراین ابتدا ترتیب متغیرها را عوض می‌کنیم. حدود انتگرال اعداد ثابت

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(1+x^2 y^2) \sqrt{1-x^2}}$$

هستند در نتیجه تعویض ترتیب انتگرال به سادگی انجام می‌شود:

برای حل انتگرال میانی نسبت به  $x$ ، از تغییر متغیر  $x = \sin \theta$  استفاده می‌کنیم. بنابراین  $dx = \cos \theta d\theta$  است، به ازای  $0 \leq x \leq 1$  داریم  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . پس در ربع اول قرار داریم،  $\cos \theta$  مثبت است و داریم:  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$ .

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta dy}{(1+y^2 \sin^2 \theta) \cos \theta} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta dy}{1+y^2 \sin^2 \theta}$$

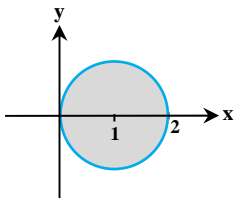
برای حل این انتگرال از تغییر متغیر  $y \sin \theta = \text{tg} t$  استفاده می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$d\theta = \frac{1}{y} \frac{1+\text{tg}^2 t}{\cos \theta} dt = \frac{1}{y} \frac{1+\text{tg}^2 t}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2} \text{tg}^2 t}} dt = \frac{1}{y} \frac{1+\text{tg}^2 t}{\sqrt{y^2 - \text{tg}^2 t}} dt = \frac{1+\text{tg}^2 t}{\sqrt{y^2 - \text{tg}^2 t}} dt$$

پس  $\cos \theta d\theta = \frac{1}{y} (1+\text{tg}^2 t) dt$  به عبارتی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{dy d\theta}{1+y^2 \sin^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sin^2 \theta} [\text{tg}^{-1}(y \sin \theta)]' dy d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \theta} [\text{tg}^{-1}(\sin \theta)] dy d\theta$$

**۲۹- گزینه ۱** ناحیه  $D$  دایره‌ای به قطر ۲ است که مرکز آن در  $(1, 0)$  قرار دارد. اگر طبق معمول از دستگاه قطبی استفاده کنیم به دلیل آن که عبارت زیر انتگرال  $xy^2$  است شاهد ایجاد توان‌های بزرگ سینوس و کسینوس خواهیم بود. (در واقع اگر از این روش استفاده کنید  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$  و  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  است و با حل انتگرال نسبت به  $r$  به  $\int \cos^6 \theta \sin^2 \theta d\theta$  می‌رسیم که وقت‌گیر است.) بنابراین ترجیح می‌دهیم از همان دستگاه دکارتی استفاده کنیم. در این دایره داریم  $-1 \leq y \leq 1$  و حدود  $x$  نیز برحسب  $y$  از معادله‌ی دایره به دست می‌آیند:



$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy$$

دقت کنید چون تابع زیر انتگرال یعنی  $xy^2$  نسبت به متغیر  $x$  توان کوچکتری دارد، ترجیح داده‌ایم انتگرال وسطی نسبت به  $x$  گرفته شود. به همین خاطر ابتدا حدود  $y$  را به صورت دو عدد ثابت نوشتیم و سپس حدود  $x$  را برحسب  $y$  بیان کردیم. ابتدا انتگرال میانی را حل می‌کنیم.

$$\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx = \left[ \frac{y^2}{2} x^2 \right]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2}{2} ((1+\sqrt{1-y^2})^2 - (1-\sqrt{1-y^2})^2) = \frac{y^2}{2} \times 4\sqrt{1-y^2} = 2y^2 \sqrt{1-y^2}$$

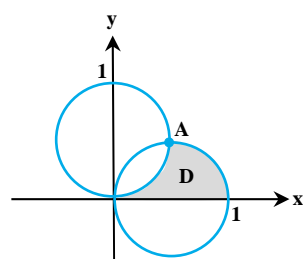
حالا نسبت به  $y$  انتگرال می‌گیریم:

با تغییر متغیر  $y = \sin \theta$  داریم:  $dy = \cos \theta d\theta$ . چون  $-1 \leq y \leq 1$  پس  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  و  $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$  است. (دقت کنید که در بازه‌ی

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  داریم  $\cos \theta \geq 0$  پس لازم نیست از  $|\cos \theta|$  استفاده کنیم.)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin \theta \cos \theta)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$



**۳۰- گزینه ۱** منحنی‌های  $x^2 + y^2 = x$  و  $x^2 + y^2 = y$  دایره‌های شناخته شده‌ای هستند. ناحیه  $D$  درون دایره  $x^2 + y^2 = x$  و خارج از دایره  $x^2 + y^2 = y$  قرار دارد. البته شرط  $y \geq 0$  را هم در نظر می‌گیریم. واضح است که استفاده از مختصات قطبی مناسب‌تر است.

کران پایین  $\theta = 0$  به صورت  $\theta = 0$  است اما برای یافتن کران بالای آن باید مختصات نقطه‌ی  $A$  معلوم شود. این نقطه از

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ x^2 + y^2 = y \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

برخورد دو دایره به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \Rightarrow r = \cos \theta \\ x^2 + y^2 = y \Rightarrow r = \sin \theta \end{cases}$$

یعنی در نقطه  $A$  داریم  $y = x$  در نتیجه  $\theta = \frac{\pi}{4}$  است. حدود  $r$  هم از معادله‌ی دو دایره معلوم خواهد شد:

اگر نمی‌دانید که کدام یک از آن‌ها کران پایین و کدام کران بالا است کافیست از محدوده‌ی  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  زاویه‌ای را انتخاب کرده و در آن‌ها قرار دهید. مثلاً در  $\theta = 0$  داریم  $r = \cos(0) = 1$  و  $r = \sin(0) = 0$  پس  $r = \cos \theta$  کران بالا است.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} (r^2)(r dr d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{\sin \theta}^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{3} (\sin^2 \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} [1 - 0] = \frac{1}{3}$$

**۳۱- گزینه «۴»** هرگاه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک بیضی (یا دایره) با معادله‌ی  $1 = \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2$  باشد از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم که طبق آن داریم:  $\frac{x-x_0}{a} = r \cos \theta$  و  $\frac{y-y_0}{b} = r \sin \theta$  البته در این مثال  $a = b = 1$  است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x-1 = r \cos \theta \\ y-1 = r \sin \theta \\ |J| = r \end{cases} \Rightarrow D: r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq 1 \xrightarrow{r>0} 0 \leq r \leq 1$$

محدوده‌ی  $\theta$  هم برای یک دایره‌ی کامل  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  است.

$$I = \int_0^{2\pi} \int_D [(1+r \cos \theta)^2 + (1+r \sin \theta)^2 - 2(1+r \sin \theta)] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 2r \cos \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} + r^2 \cos \theta \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} + \cos \theta \right] d\theta = \left\{ \frac{\theta}{3} + \sin \theta \right\}_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

**۳۲- گزینه «۱»** این انتگرال را می‌توانیم در دستگاه دکارتی با همین حدودی که در صورت سؤال داده شده است، حل کنیم. با این حال می‌توانیم با انجام تغییر متغیر مناسب، باعث ساده‌تر شده انتگرال شویم. عبارت زیر انتگرال به صورت  $\frac{2x-y}{3} + \frac{z}{3}$  است پس انتخاب  $u = \frac{2x-y}{3}$  و  $v = \frac{z}{3}$  منطقی است.  $w$  را هم می‌توانیم به دلخواه به صورت  $w = x$  یا  $w = y$  انتخاب کنیم. ما فرض می‌کنیم  $u = \frac{2x-y}{3} = x - \frac{y}{3}$  و  $v = \frac{z}{3}$  و  $w = y$  باشد. ژاکوبین این دستگاه را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow J_{uvw} = \frac{1}{J_{xyz}} = -3$$

پس قدرمطلق ژاکوبین برابر با ۳ است. حالا باید معادله‌ی مرزهای قدیمی را در ضابطه‌ی  $u, v, w$  قرار داده و معادله‌ی مرزهای جدید را بدست آوریم:

$$\begin{cases} x = \frac{y}{3} + 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{y}{3} \Rightarrow u = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \Rightarrow w = 0 \\ y = 4 \Rightarrow w = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = 0 \Rightarrow v = 0 \\ z = 3 \Rightarrow v = 1 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^4 (u+v) 3 du dv dw = 3 \int_0^1 \int_0^1 [uw + vw] dv du = 3 \int_0^1 \int_0^1 (u+v) dv du = 12 \int_0^1 \left[ uv + \frac{v^2}{2} \right]_0^1 du = 12 \int_0^1 \left( u + \frac{1}{2} \right) du = 12 \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} \right]_0^1 = 12$$

**۳۳- گزینه «۲»**

**روش اول:** (استفاده از قضیه‌ی دیریکله) این مثال نمونه‌ی خوبی از کاربرد قضیه‌ی دیریکله است. ناحیه‌ی  $D$  در  $\frac{1}{8}$  اول قرار دارد و توسط نامعادله‌ی  $x+y+z \leq 1$  مشخص شده است. در واقع داریم  $0 \leq x+y+z \leq 1$ . بنابراین در فرمول دیریکله داریم  $h_1 = 0$  و  $h_2 = 1$ . اکنون به این ترتیب ادامه می‌دهیم:

$$I = \underbrace{\iiint_D x^2 dz dy dx}_{I_1} + \underbrace{\iiint_D y^2 dz dy dx}_{I_2} + \underbrace{\iiint_D z^2 dz dy dx}_{I_3}$$

$$\iiint_D f(x+y+z) x^m y^n z^k dz dy dx = \frac{m!n!k!}{(m+n+k+2)!} \int_{h_1}^{h_2} f(t) t^{m+n+k+2} dt$$

طبق فرمول دیریکله (برای اعداد صحیح  $m, n, k$ ) داریم:

در همه‌ی انتگرال‌های  $I_1, I_2, I_3$  داریم  $f(x+y+z) = 1$ .

در  $I_1$  داریم  $m=2, n=0, k=0$  و در  $I_2$  داریم  $n=2, m=0, k=0$  و در  $I_3$  داریم  $m=0, n=0, k=2$ .



$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2!}{4!} \int_0^1 t^2 dt = \frac{2!}{4!} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

$$I = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{20}$$

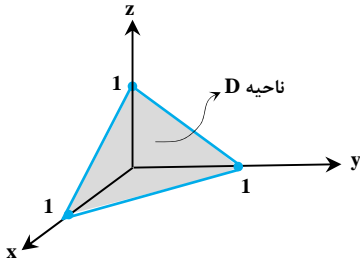
بنابراین جواب این انتگرال‌ها با هم برابر است و همه‌ی آن‌ها به این صورت به دست می‌آیند:

در نتیجه داریم:

اگر به روش دوم دقت کنید متوجه می‌شوید که بدون استفاده از قضیه‌ی دیریکله حل این مثال چقدر سخت‌تر خواهد شد.

**روش دوم:** با وجود آن که عامل  $x^2 + y^2 + z^2$  در این انتگرال حضور دارد اما چون ناحیه‌ی  $D$  کروی نیست از دستگاه کروی استفاده نمی‌کنیم و حدود  $x$ ،  $y$  و  $z$  را در همان دستگاه دکارتی می‌نویسیم:

صفحات  $z=0$ ،  $x=0$ ،  $y=0$  و مرزهای ناحیه‌ی  $D$  هستند. حدود  $z$  به وضوح مشخص شده‌اند:  $z=0$  و  $z=1-x-y$ . کران‌های پایین  $x$  و  $y$  نیز عبارتند از  $x=0$  و  $y=0$  اما برای تعیین کران بالای آن‌ها باید صفحات  $z=0$  و  $z=1-x-y$  را برخورد دهیم. خط  $x+y=1$  به دست می‌آید. این ناحیه را که تصویر  $D$  بر صفحه‌ی  $x-y$  است با  $A$  نشان داده‌ایم:

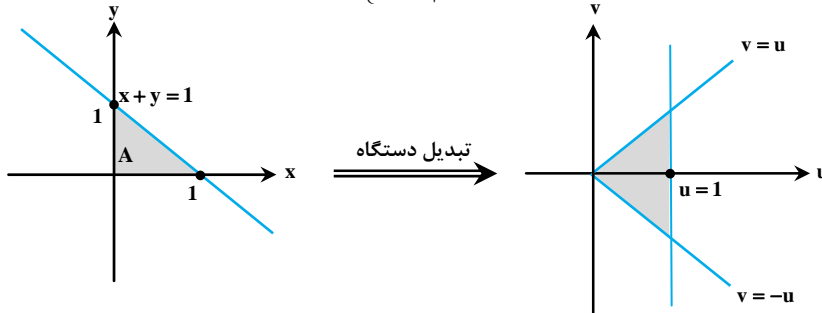


$$I = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iint_A \int_{z=0}^{z=1-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

$$\Rightarrow I = \iint_A [(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3}]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx = \iint_A \left( \frac{1-x-y}{3} \right) [3x^2 + 3y^2 + (1-x-y)^2] dy dx$$

برای ساده‌سازی ادامه حل مسأله می‌توانیم از تبدیل مختصات به صورت  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  استفاده کنیم.

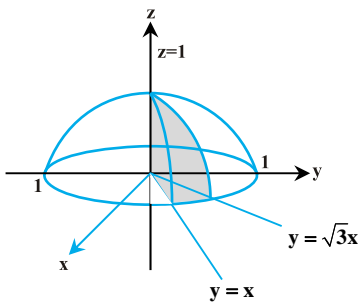
$$|J| = \frac{1}{2}$$



$$I = \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-u}^{v=+u} \left( \frac{1-u}{3} \right) [(1-u)^2 + 3u^2 + 3v^2] \cdot \left( \frac{du dv}{2} \right) = \frac{1}{6} \int_{u=0}^{u=1} (1-u) \cdot \left[ \frac{3}{2} u^2 + (1-u)^2 \right] v + \frac{v^3}{2} \Big|_{v=-u}^{v=+u} du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6} \int_{u=0}^{u=1} (1-u) \cdot [3u^3 + 2u + 2u^3 - 4u^2 + u^3] du = \frac{1}{6} \int_0^1 [10u^3 + 2u - 6u^2 - 6u^4] du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{5}{2} u^4 + u^2 - 2u^3 - \frac{6}{5} u^5 \right\}_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{6} \left[ \frac{5}{2} + 1 - 2 - \frac{6}{5} \right] = \frac{1}{6} \left\{ \frac{25 - 10 - 12}{10} \right\} = \frac{1}{6} \times \left( \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{20}$$



**۳۴- گزینه «۱»** حجم محدود به نواحی  $z=0$  و  $y=\sqrt{3}x$  و  $y=x$  و  $z=1-x^2-y^2$  را می‌خواهیم بیابیم:

$$V = \iiint_D dz dy dx$$

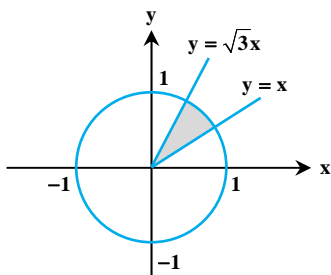
از معادله‌ی  $z=1-(x^2+y^2)$  که شامل  $x^2+y^2$  است حدس می‌زنیم استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب باشد. حدود  $z$  عبارتند از  $z=1-(x^2+y^2)=1-r^2$  و  $z=0$ .

برای تشخیص حدود  $r$  و  $\theta$  ابتدا تصویر این جسم را بر صفحه‌ی  $xoy$  مشخص می‌کنیم. خطوط  $y=x$  و  $y=\sqrt{3}x$  داده شده‌اند. با برخورد دادن  $z=1-(x^2+y^2)$  و  $z=0$  به دایره‌ی  $x^2+y^2=1$  می‌رسیم. تصویر این جسم را بر صفحه‌ی  $xoy$  نشان داده‌ایم:

روی خط  $y=x$  داریم  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و روی خط  $y=\sqrt{3}x$  داریم  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . (می‌توانید از فرمول  $\theta = \text{tg}^{-1}(\frac{y}{x})$  استفاده کنید.) حدود  $r$  نیز به وضوح  $0 \leq r \leq 1$  هستند.

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r dz dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r [z]_0^{1-r^2} dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 (r^2 - r^4) dr d\theta$$

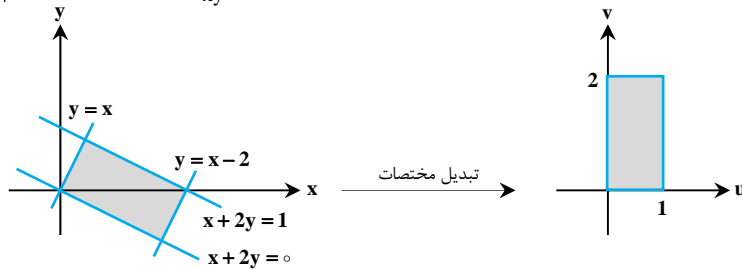
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{12} [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{144}$$



**۳۵- گزینه ۲»** ناحیه‌ی D دارای چهار مرز است. این نواحی را نواحی لوزی گون می‌نامیم. معادله‌ی مرزها را طوری بنویسید که سمت راست تساوی عدد ثابت باشد:  $x + 2y = 1$  و  $x + 2y = 0$ ،  $x - y = 2$ ،  $x - y = 0$ . پس تغییر متغیر  $u = x + 2y$  و  $v = x - y$  باعث می‌شود معادله‌ی مرزها به صورت  $u = 2$ ،  $u = 0$ ،  $v = 1$  و  $v = 0$  در آیند که نشان‌دهنده‌ی یک مستطیل است. رسم شکل ضرورتی ندارد اما برای توضیح بهتر شکل ناحیه‌ی D را در

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow |J_{uv}| = \frac{1}{|J_{xy}|} = \frac{1}{3}$$

هر دو دستگاه نشان داده‌ایم. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:



$$I = \iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)} dx dy = \int_{u=0}^2 \int_{v=0}^1 \left( \frac{u}{\cos v} \right) \left( \frac{1}{3} dv du \right) = \int_{u=0}^2 \left( \frac{u}{3} \right) \left[ \int_0^1 \sec v dv \right] du = \int_0^2 \frac{1}{3} u [\ln|\operatorname{tg} v + \sec v|]_0^1 du$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{1}{3} u (\ln|\operatorname{tg} 1 + \sec 1|) du = \ln|\operatorname{tg} 1 + \sec 1| \cdot \left[ \frac{u^2}{6} \right]_0^2 = \frac{1}{6} \ln|\operatorname{tg} 1 + \sec 1|$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

در حل انتگرال فوق از نتیجه‌ی انتگرال مقابل استفاده کردیم.

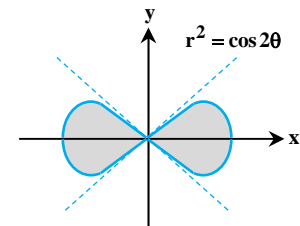
**۳۶- گزینه ۱»** معادله منحنی  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ، در مختصات قطبی به صورت  $r^4 = r^2 \cos 2\theta$  در می‌آید.

بنابراین  $r = 0$  یا  $r^2 = \cos 2\theta$  یعنی  $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ . از همین جا می‌توانیم حدود  $\theta$  را هم تشخیص دهیم. در معادله‌ی

$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  البته منحنی  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  به عبارتی  $-\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$  باید  $\cos 2\theta \geq 0$  باشد پس  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

یک لمنیسکات است که یک نیمه هم در سمت چپ یعنی در فاصله‌ی  $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$  دارد. پس ما انتگرال را روی

نیمه‌ی سمت راست گرفته و دو برابر می‌کنیم. در این نیمه حدود انتگرال به صورت زیر است:



$$0 \leq z \leq r^2 \quad 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{حجم} = \iiint_S d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \int_0^{r^2} r dz dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2 2\theta}{4} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$\xrightarrow{u=2\theta, du=2d\theta} \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{\pi}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dv$$

**۳۷- گزینه ۳»** طبق فرمول حد مجموع برای انتگرال‌های سه‌گانه داریم:

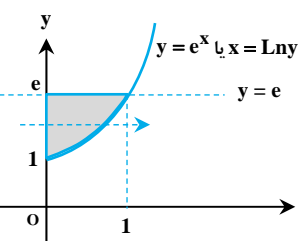
$$f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) = e^{\frac{i+j+k}{n}} = e^{\frac{i}{n} + \frac{j}{n} + \frac{k}{n}} \Rightarrow f(x, y, z) = e^{x+y+z}$$

در تست فوق داریم:

بنابراین مقدار حد برابر است با  $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dz dy dx$ . تابع زیر انتگرال را می‌توان به صورت ضرب توابع یک متغیره نوشت:  $e^{x+y+z} = e^x e^y e^z$  و

کران‌ها هم عدد ثابت هستند. بنابراین می‌توانیم انتگرال سه‌گانه را به صورت ضرب سه انتگرال یگانه بنویسیم:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dz dy dx = \left( \int_0^1 e^x dx \right) \left( \int_0^1 e^y dy \right) \left( \int_0^1 e^z dz \right) = (e-1)(e-1)(e-1) = (e-1)^3$$



**۳۸- گزینه ۳»** ملاحظه می‌گردد  $e < y < e^x$  با رسم دو خط  $y = e^x$  و  $y = e$  و رسم یک خط موازی

محور x ها ملاحظه می‌گردد که منحنی مرز ناحیه را در روی خطوط  $x = 0$  و  $x = Lny$  قطع می‌کند، و y نیز بین

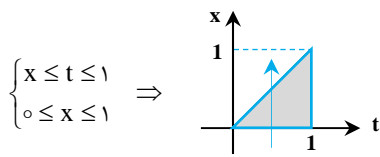
1 تا e تغییرات می‌کند، لذا داریم:

$$I = \int_0^1 \int_0^e \frac{1}{Lny} dy dx = \int_0^1 \int_0^{Lny} \frac{1}{Lny} dx dy = \int_0^e \left[ \frac{x}{Lny} \right]_0^{Lny} dy = \int_0^e 1 \times dy = [y]_0^e = e - 1$$

$$I = \int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 \int_1^x e^{t^2} dt dx = - \int_0^1 \int_x^1 e^{t^2} dt dx$$

۳۹- گزینه «۲»

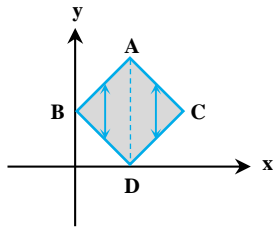
محاسبه  $e^{t^2}$  ممکن نیست و لذا ناحیه انتگرال را رسم و ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم:



$$I = - \int_0^1 \int_0^t e^{t^2} dx dt = - \int_0^1 [xe^{t^2}]_0^t dt = \int_0^1 -te^{t^2} dt = \left[-\frac{e^{t^2}}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1-e}{2}$$

۴۰- گزینه «۱» توجه شود ناحیه انتگرال گیری منظم نیست چون باید دو سر فلش در انتها و ابتدای مرز شامل یک منحنی باشد، اما ملاحظه می گردد در طرفین خط چین نشان داده شده معادلات خط دو سر فلش تغییر می کند. AC و CD به معادله خط AB و BD تبدیل می شوند.

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} AB \Rightarrow y = x + \pi \Rightarrow x - y = -\pi \\ AC \Rightarrow y = -x + \pi \Rightarrow x + y = \pi \\ BD \Rightarrow y = -x - \pi \Rightarrow x + y = -\pi \\ DC \Rightarrow y = x - \pi \Rightarrow x - y = \pi \end{cases}$$

با رسم ناحیه در مختصات دکارتی داریم:

ملاحظه می گردد  $-\pi \leq u \leq \pi$  و  $\pi \leq v \leq 3\pi$  می باشد:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \sin^2 v |J| dudv = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \sin^2 v dv = \frac{\pi^3}{3} \int_{\pi}^{3\pi} \left(\frac{1 - \cos 2v}{2}\right) dv = \frac{\pi^3}{6} \left[v - \frac{1}{2} \sin 2v\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3} \\ &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\text{tg}^{-1}(\sqrt{2})} \left[\sin \phi - \frac{\sqrt{2} \sin \phi}{2 \cos^2 \phi}\right] d\phi d\theta = \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2 \cos^2 \phi}\right] \text{tg}^{-1}(\sqrt{2}) d\theta \\ &= \frac{abc}{3} (2\pi) \left[-\cos(\text{tg}^{-1} \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cos^2(\text{tg}^{-1} \sqrt{2})} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{abc}{3} (2\pi) \left[\cos \phi + \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \text{tg}^2 \phi)\right] \text{tg}^{-1} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \phi}}$$

دقت کنید که  $\frac{1}{\cos^2 \phi} = \sec^2 \phi = 1 + \text{tg}^2 \phi$  است. از همین تساوی خواهیم داشت:

حالا می توانیم حاصل انتگرال را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{abc}{3} (2\pi) \left[\frac{1}{\sqrt{1+2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} (1+2) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{abc}{3} (2\pi) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right] = -\frac{abc}{27} (2\pi) \left[\frac{9}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} - 9\right] = -\frac{abc}{27} (2\pi) \\ &= -\frac{abc}{27} (2\pi) [4\sqrt{3} - 9] = \frac{abc}{27} (2\pi) (9 - 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

### پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۱» چون خم C بسته است، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$P = e^x(1 - \cos y), \quad Q = -e^x(y - \sin y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x(y - \sin y) - e^x \sin y = -ye^x$$

$$\int_C ((1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy) = \iint_D -ye^x dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} (-ye^x) dy dx = -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\pi [e^x \times \frac{1 - \cos 2x}{2}] dx = -\frac{1}{4} \int_0^\pi (e^x - e^x \cos 2x) dx = -\frac{1}{4} (e^x - \frac{1}{2}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)) \Big|_0^\pi = -\frac{e^\pi - 1}{4}$$

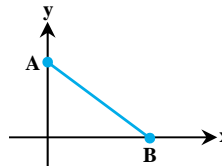
۲- گزینه «۳» چون خم C بسته است، از قضیه گرین استفاده می‌کنیم:

$$P = e^{-(x^2 - y^2)} \cos(2xy) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{-(x^2 - y^2)} \cos(2xy) - 2xe^{-(x^2 - y^2)} \sin(2xy)$$

$$Q = e^{-(x^2 - y^2)} \sin(2xy) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{-(x^2 - y^2)} \sin(2xy) + 2ye^{-(x^2 - y^2)} \cos(2xy)$$

چون  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ، پس طبق قضیه گرین حاصل انتگرال روی خم بسته صفر است.

۳- گزینه «۱» معادله‌ی پارامتری پاره‌خط AB به صورت زیر است:



$$\vec{C}(t) = t\vec{i} + (\pi - t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$dx = dt, \quad dy = -dt$$

$$\int_{AB} (\sin y)dx + (\sin x)dy = \int_0^\pi \sin(\pi - t)dt + (\sin t)(-dt) = \int_0^\pi (\sin t - \sin t)dt = 0$$

۴- گزینه «۲» برای این که بخواهیم کار انجام شده میدان برداری  $\vec{F}$  را حساب کنیم، باید حاصل انتگرال  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  را محاسبه کنیم و برای این منظور ابتدا

منحنی C را پارامتری می‌کنیم، با توجه به ضابطه‌ی منحنی C با فرض  $x = t$ ، آن گاه  $y = 4 - t^2$ ، اما در مورد حدود انتگرال، چون  $-2 \leq x \leq 1$ ، لذا  $-2 \leq t \leq 1$  خواهد بود، پس داریم:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (y - 2x^2)dx + 4dy = \int_{-2}^1 (4 - t^2 - 2t^2)dt + 4(-2tdt) = \int_{-2}^1 (-3t^2 - 8t + 4)dt = [-\frac{3t^3}{3} - \frac{8t^2}{2} + 4t]_{-2}^1$$

$$= -1 - 4 + 4 + (-2)^3 + 4(-2)^2 - 4(-2) = 15$$

۵- گزینه «۱» با توجه به مطالب متن درس واضح است فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۶- گزینه «۲» چون روی هر خم بسته‌ای انتگرال صفر است، پس میدان پایستار است، و بنابراین  $\text{curl} \vec{A} = 0$ .

۷- گزینه «۴» سؤال ساده‌ای است، کافی است ابتدا حاصل  $\vec{F} \times d\vec{r}$  را حساب کنیم، قبل از آن  $d\vec{r}$  را حساب می‌کنیم:

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (2t)\vec{j} + t^3\vec{k} \Rightarrow \vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

از طرفی  $\vec{F} = xy\vec{i} - z\vec{j} + x^2\vec{k} = 2t^3\vec{i} - t^3\vec{j} + t^4\vec{k}$  بنابراین داریم:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} = (-3t^5 - 2t^6)\vec{i} - 4t^5\vec{j} + (4t^3 + 2t^6)\vec{k}$$

$$I = \int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_0^1 [(-3t^5 - 2t^6)\vec{i} - 4t^5\vec{j} + (4t^3 + 2t^6)\vec{k}] dt = -\frac{3}{10}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{7}{5}\vec{k}$$

بنابراین داریم:

البته اگر فقط از یکی از مؤلفه‌ها انتگرال حساب شود دیگر نیاز نیست بقیه محاسبه شوند، چون گزینه‌ها متفاوت هستند!

۸- گزینه «۲» همان طور که از صورت سؤال مشخص است، خم C شامل سه پاره‌خط است که آن‌ها را  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  می‌نامیم و لذا باید انتگرال‌گیری را به

سه قسمت تقسیم کنیم، برای این منظور ابتدا معادلات پارامتری  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  را به دست می‌آوریم، قبل از آن یادآوری می‌کنیم؛ معادله‌ی پارامتری پاره‌خطی که نقطه‌ی  $A(x_1, y_1, z_1)$  را به نقطه‌ی  $B(x_2, y_2, z_2)$  وصل می‌کند به صورت زیر است:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$$





بنابراین معادلات پارامتری سه منحنی به شکل زیر است:

$$C_1: \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0} = t, x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow dx=0 \\ y(t)=t \Rightarrow dy=dt \\ z(t)=t \Rightarrow dz=dt \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-1}{3-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x=t \Rightarrow dx=dt \\ y=t+1 \Rightarrow dy=dt \\ z=2t+1 \Rightarrow dz=2dt \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \frac{z-3}{4-3} = t, x=1, y=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow dx=0 \\ y=2 \Rightarrow dy=0 \\ z=t+3 \Rightarrow dz=dt \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$I = \int_{C_1} \dots + \int_{C_2} \dots + \int_{C_3} \dots = \int_0^1 (-tdt + 2tdt) + \int_0^1 (2t+1)^2 dt - (2t+1)dt + 2(t+1)2dt + \int_0^1 1 \times 2dt$$

$$= \left[ -\frac{t^2}{2} + \frac{2t^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3} \times \frac{(2t+1)^3}{3} - \frac{2t^2}{2} - t + 4 \times \frac{t^2}{2} + 4t \right]_0^1 + [4t]_0^1 = \left( -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6}(2 \times 1 + 1)^3 - 1 - 1 + 2 + 4 + 4 \right) - \left( -\frac{1}{6} \right) = \frac{77}{6}$$

$$\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R} = \int_C \vec{T} \cdot \vec{T} ds = \int_C |\vec{T}|^2 ds = \int_C ds$$

۹- گزینه «۴» ابتدا توجه کنید، داریم:

$$\int_C \vec{T} \cdot d\vec{R} = 2\pi a$$

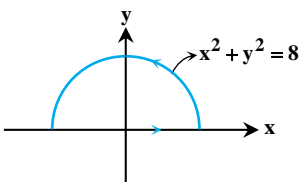
انتگرال اخیر همان محیط دایره به شعاع a می باشد، بنابراین داریم:

۱۰- گزینه «۱» می دانیم معادله پارامتری بیضی داده شده به صورت  $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ،  $0 \leq t \leq \pi$  می باشد، که با جایگذاری در انتگرال داده شده نتیجه می شود:

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^\pi (b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t (b \cos t)) dt = \int_0^\pi (-ab^2 \sin^3 t + a^2 b \cos^3 t) dt$$

$$= \int_0^\pi (-ab^2 \sin t (1 - \cos^2 t) + a^2 b \cos t (1 - \sin^2 t)) dt = \left[ -ab^2 \left( -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) + a^2 b \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \right]_0^\pi = \frac{-4}{3} ab^2$$

۱۱- گزینه «۱» چون منحنی C بسته است، می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.



$$F = (x - y, 1) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D 1 dA = 2\sqrt{2} \times \text{مساحت نیم دایره ای به شعاع } \sqrt{2} = \frac{1}{2} (\pi (2\sqrt{2})^2) = 4\pi$$

بنابراین طبق قضیه گرین داریم:

۱۲- گزینه «۳» با توجه به توضیحات متن کتاب حاصل انتگرال داده شده در گزینه (۳) برابر با  $2\pi$  می شود، بنابراین گزینه (۳) غلط است. در گزینه (۱) چون جهت ساعتگرد (منفی مثلثاتی) است بنابراین حاصل انتگرال  $-2\pi$  می شود و گزینه (۲) هم درست است، چون مبدأ درون بیضی داده شده قرار ندارد و لذا حاصل انتگرال صفر است و بالاخره گزینه (۴) هم درست است چون طبق مطالب متن کتاب برابر با  $2\pi$  می شود.

۱۳- گزینه «۱» با توجه به اینکه مسیر نیم دایره بسته است، بنابراین بهتر است از قضیه گرین کمک بگیریم.

$$P = x - y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$Q = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

$$I = \iint_D 2 dx dy = 2 \times (\text{مساحت ناحیه D}) = 2 \times \frac{1}{2} (\pi \times 1^2) = \pi$$

بنابراین داریم:

۱۴- گزینه «۲» با توجه به اینکه مسیر بسته است از قضیه گرین کمک می گیریم، چون جهت داده نشده آن را مثبت در نظر می گیریم:

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dA$$

واضح است چون مقدار عبارت زیر انتگرال بزرگتر از صفر است، پس حاصل انتگرال هم بزرگتر از صفر است، اما دقت کنید استدلال فوق با در نظر گرفتن جهت مثبت برای مرز C به دست آمد، اگر جهت منفی را در نظر بگیریم، آن گاه حاصل انتگرال باید در یک منفی ضرب شود، پس حاصل انتگرال یا مثبت است و یا منفی است.

۱۵- گزینه «۲»

روش اول: میدان برداری  $\vec{F} = (f(x+y+z), f(x+y+z), f(x+y+z))$  پایستار است و تابع پتانسیل آن را می توان  $\int f(u)du$  در نظر گرفت در این صورت داریم:

$$I = \int_A^B f(x+y+z)(dx+dy+dz) = \int_A^B f(u)du$$

روش دوم: البته این سؤال را می توان به صورت ساده مقابل نیز پاسخ داد:  $x+y+z = u \xrightarrow{\text{از طرفین دیفرانسیل می گیریم}} dx+dy+dz = du$

$$\int_A^B f(x+y+z)(dx+dy+dz) = \int_A^B f(u)du$$

۱۶- گزینه «۳» ابتدا با فرمول  $\int_C (Pdy - Qdx) = \int_C (-Qdx + Pdy) = \int_C -\ln(x^2+y^2)dx + \text{tg}^{-1}(\frac{y}{x})dy$  شار آغاز می کنیم، در ادامه از قضیه گرین استفاده می کنیم. ناحیه ی درون منحنی C را با D نشان می دهیم. طبق صورت سؤال در ناحیه ی D داریم  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $1 \leq r \leq 2$ .

$$\begin{aligned} \text{شار} &= \int_C Pdy - Qdx = \int_C -Qdx + Pdy = \int_C -\ln(x^2+y^2)dx + \text{tg}^{-1}(\frac{y}{x})dy \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\text{tg}^{-1}(\frac{y}{x})) - \frac{\partial}{\partial y} (-\ln(x^2+y^2)) \right] dydx = \iint_D \left[ -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} \right] dydx = \iint_D \left( \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} \right) dydx \\ &= \iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dydx = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r \sin \theta}{r^2} r dr d\theta = \int_0^\pi \int_1^2 \sin \theta dr d\theta = \int_0^\pi [r]_1^2 \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه «۳» با کمی دقت واضح است غیر از روش پارامتری سازی، راه حل مناسب تری برای حل این سؤال وجود دارد! با نگاهی کوتاه می توان فهمید تابع زیر انتگرال، دیفرانسیل کامل است، چون داریم:

$$d(xyz) = (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz$$

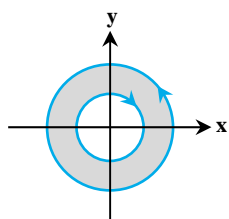
و لذا داریم:  $I = \int_A^B d(xyz) = [xyz]_A^B = 1394 \times 1 \times 2 - 1 \times 2 \times 1393 = 2788 - 2786 = 2$

توضیح: به بیان دیگر تابع  $f = xyz$ ، یک تابع پتانسیل برای میدان برداری  $\vec{F} = (yz)\vec{i} + (zx)\vec{j} + (xy)\vec{k}$  است که به دلیل واضح بودن، دیگر از روش های گفته شده آن را به دست نیاوردیم و به صورت شهودی آن را نوشتیم!

۱۸- گزینه «۱» واضح است میدان  $\vec{F}$  پایستار است و بنابراین به مسیر بستگی ندارد و لذا تابع پتانسیل را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} F &= \int (ye^{xy} + y \cos xy)dx + \int 3y^2 dy + \int 6z dz = e^{xy} + \sin xy + y^3 + 3z^2 \\ I &= f(C(1)) - f(C(0)) = f(0, 0, 1) - f(0, \frac{\pi}{2}, 0) = (e^0 + 0 + 0 + 3 \times 1^2) - (e^0 + (\frac{\pi}{2})^3) = 3 - \frac{\pi^3}{8} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه «۲» چون خم C بسته است، می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم.



$$\vec{F} = (x^3 - x^2y, xy^2) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - (-x^2) = x^2 + y^2$$

بنابراین انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 dr = 120\pi$$

۲۰- گزینه «۱» ابتدا شرط پایستار بودن را کنترل می کنیم:

$$\begin{cases} P = \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} \\ Q = -\frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{میدان پایستار است}$$

چون میدان پایستار است، پس کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی دارد (البته این موضوع از صورت خود سؤال نیز معلوم است، چون طراح سؤال فقط دو نقطه ی ابتدایی و انتهایی مسیر را مشخص کرده است و این یعنی طراح به طور غیرمستقیم به ما می گوید

میدان پایستار است!! پس تابع پتانسیل را حساب می کنیم:

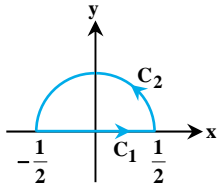
$$f = \int \frac{y^2}{x^2} dx = -\frac{y^2}{x}$$

بنابراین داریم:

$$W = f(4, -2) - f(1, 1) = -\frac{(-2)^2}{4} - \left(-\frac{1^2}{1}\right) = -1 + 1 = 0$$



## پاسخنامه آزمون (۲)



۱- گزینه «۴» مطابق شکل مقابل خم  $C$  از اجتماع دو خم  $C_1$  و  $C_2$  تشکیل شده است، بنابراین انتگرال را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$I = I_1 + I_2 = \int_{C_1} (-xy)dx + (y^2 + 16)dy + \int_{C_2} (-xy)dx + (y^2 + 16)dy$$

ابتدا  $I_1$  را حساب می‌کنیم: با توجه به این که  $y = 0$ ، لذا  $dy = 0$ ، بنابراین حاصل انتگرال  $I_1$  صفر است، (به جای  $y$  و  $dy$  صفر قرار دهیدا)

$$\vec{C}_2(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t\right)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$$

برای حل انتگرال  $I_2$  باید ابتدا منحنی  $C_2$  را برای  $0 \leq t \leq \pi$  پارامتری کنیم:

$$I_2 = \int_{C_2} (-xy)dx + (y^2 + 16)dy = \int_0^\pi \left(\frac{5}{4}\sin^2 t \cos t + 16 \cos t\right)dt = \left(\frac{15}{12}\sin^3 t + 16 \sin t\right)\Big|_0^\pi = 0$$

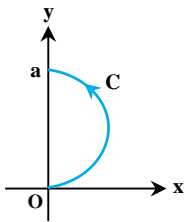
پس داریم:

$$I = I_1 + I_2 = 0 + 0 = 0$$

تذکر: پاسخ به این سؤال با به کارگیری قضیه‌ی گرین هم ممکن است، اما راه‌حل و حجم محاسبات اگر سخت‌تر از این حالت نباشد، کمتر نیست!

۲- گزینه «۴» به راحتی واضح است میدان  $\vec{F}$  پایستار است و تابع پتانسیل آن به صورت  $f = \frac{1}{4}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$  می‌باشد و بنابراین حاصل انتگرال به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر  $C$  وابسته است، لذا داریم:

$$\left. \begin{aligned} f[C(0)] &= \frac{1}{4}\ln(1^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{1}{4}\ln 3 \\ f[C(\pi)] &= \frac{1}{4}\ln(3^2 + 4^2 + 8^2) = \frac{1}{4}\ln(84) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f[C(\pi)] - f[C(0)] = \frac{1}{4}\ln 84 - \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{1}{4}\ln \frac{84}{3} = \frac{1}{4}\ln 28 = \ln \sqrt{28}$$



۳- گزینه «۱» برای درک بهتر سؤال مسیر  $C$  را رسم می‌کنیم. اگر بخواهیم مسیر  $C$  را پارامتری کنیم، با توجه به تابع زیر انتگرال به مشکل برمی‌خوریم، بنابراین بهترین روش اضافه کردن خط  $Oa$  به مسیر و ایجاد یک منحنی بسته است تا با این کار بتوانیم از مزایای قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. یعنی مسیر جدید شامل دو مسیر  $C$  و  $C_1$  مطابق شکل دوم است، پس قضیه گرین به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

اما یادتان باشد ما دنبال  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  هستیم و بنابراین انتگرال  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  را به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow I = I_1 - I_2$$

برای رسیدن به  $I$  باید دو انتگرال  $I_1$  و  $I_2$  را حساب کنیم، ابتدا  $I_1$ ، یعنی انتگرال دوگانه را حساب می‌کنیم و برای این کار داریم:

$$\left. \begin{aligned} Q = e^y \sin x - x &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y \cos x - 1 \\ P = e^y \cos x + y &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^y \cos x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (e^y \cos x - 1) - (e^y \cos x + 1) = -2$$

بنابراین  $I_1$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_1 = \iint_D -2 dx dy = -2 \iint_D dx dy$$

اما انتگرال دوگانه فوق برابر با مساحت ناحیه  $D$ ، یعنی مساحت نیم‌دایره‌ای به شعاع  $\frac{a}{2}$  است که می‌دانیم برابر با  $S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$  است. بنابراین

حاصل انتگرال دوگانه برابر با  $I_1 = -2\left(\frac{\pi a^2}{8}\right) = -\frac{\pi a^2}{4}$  می‌باشد، اما برای محاسبه‌ی انتگرال  $I_2$ ، ابتدا لازم است مسیر  $C_1$  پارامتری شود. معادله‌ی

$$I_2 = \int_a^0 (e^t + t)(0) dt + 0 dt = 0$$

پارامتری  $C_1$  به صورت  $x = 0$  و  $y = t$  است، بنابراین  $I_2$  به شکل مقابل نوشته می‌شود:

$$I = I_1 - I_2 = -\frac{\pi a^2}{4} - 0 = -\frac{\pi a^2}{4}$$

۴- گزینه «۴» با توجه به این که منحنی بسته است، بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P = \ln(y+1) &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y+1} \\ Q = -\frac{xy}{y+1} &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{y+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-y}{y+1} - \frac{1}{y+1} = -\frac{y+1}{y+1} = -1$$

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-1) dy dx = -\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=(2-\sqrt{x})^2} dy dx = -\int_0^4 [(\frac{1}{2}(4+x) - \frac{1}{2}\sqrt{x})] dx = -[\frac{1}{2}4x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{x^3}]_0^4$$

$$\Rightarrow I = -(\frac{1}{2}4 \times 4 + \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{3}\sqrt{4^3}) = -(8 + 8 - \frac{8}{3}) = -(\frac{16 \times 3}{3} - \frac{8}{3}) = -\frac{40}{3}$$

۵- گزینه «۲» همان طور که در متن کتاب گفتیم، صورت پارامتری شده آسترئوئید داده شده به صورت مقابل است:

$$\vec{C}(t) = a \cos^3 t \vec{i} + a \sin^3 t \vec{j} \quad ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 3a |\sin t \cos t| \quad , 0 \leq t \leq 2\pi$$

بنابراین انتگرال خط داده شده به صورت مقابل است (چون C آسترئوئید است t از 0 تا 2π تغییر می کند).

$$I = \int_0^{2\pi} (a^{\frac{1}{3}} \cos^{\frac{1}{3}} t + a^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{1}{3}} t) (3a |\sin t \cos t|) dt$$

توجه کنید که به دلیل تقارن آسترئوئید در چهار ناحیه، مختصات می توانیم انتگرال را در ناحیه اول به دست آورده و حاصل را چهار برابر کنیم:

$$= 4 \times 3a^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\frac{1}{3}} t \sin t + \sin^{\frac{1}{3}} t \cos t) dt = 12a^{\frac{1}{3}} \left( \frac{-\cos^{\frac{4}{3}} t}{\frac{4}{3}} + \frac{\sin^{\frac{4}{3}} t}{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{1}{\frac{4}{3}} - \left( -\frac{1}{\frac{4}{3}} \right) \right] = 6a^{\frac{1}{3}}$$

۶- گزینه «۴» با توجه به صورت سؤال که خم داده نشده، و فقط نقاط انتهایی و ابتدایی خم داده شده نتیجه می گیریم مقدار انتگرال مستقل از مسیر است.

معادله پارامتری پاره خطی که نقاط (1, π) و (2, π) را به هم وصل می کند به صورت مقابل است:  $\vec{C}(t) = t\vec{i} + \pi\vec{j}$  ,  $1 \leq t \leq 2$  ,  $dx = dt$  ,  $dy = 0$

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy = \int_1^2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{t^2} \cos \frac{\pi}{t} \right) dt = \left( t + \pi \sin \frac{\pi}{t} \right) \Big|_1^2 = \pi + 1$$

۷- گزینه «۱» معادله پارامتری خط  $C_1$  به صورت  $\begin{cases} x = t+1 \\ y = \delta t+1 \end{cases}$  ، بنابراین  $I_1$  برابر است با:

$$I_1 = \int_0^1 ((\delta t+1)^2 - (\delta t)^2 \times \delta) dt = \int_0^1 (-\delta^2 t^2 + 2\delta t + \delta) dt = \left( -\frac{\delta^2}{3} t^3 + \delta t^2 + \delta t \right) \Big|_0^1 = \frac{\delta}{3}$$

معادله سهمی مورد نظر به صورت  $y = 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}$  است که آن را می توان به صورت پارامتری  $\begin{cases} x = t \\ y = 2(t - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} \end{cases}$  در نظر گرفت در این صورت  $I_2$  برابر است با:

$$I_2 = \int_1^0 \left( (t + 2(t - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8})^2 - (t - 2(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8})^2 \times (\delta t - 1) \right) dt = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \frac{\delta}{3} - \left( \frac{-2}{3} \right) = \frac{\delta + 2}{3}$$

۸- گزینه «۴» مسیر انتگرال گیری از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول قوس AD است که روی دایره  $x^2 + y^2 = 2$  از نقطه‌ی  $A(\sqrt{2}, 0)$  تا

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t$$

نقطه‌ی  $D(1, 1)$  می باشد که ابتدا این مسیر را پارامتری می کنیم:

$$1 \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \cos t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

اما حدود تغییرات t چیست؟ به راحتی داریم:

بنابراین برای این قسمت  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  می باشد.

اما قسمت دوم قوس DB از نقطه‌ی  $D(1, 1)$  تا نقطه‌ی  $B(-1, 0)$  بر روی سهمی  $2y^2 = x + 1$  است. که با فرض  $y = t$  ، آن گاه  $x = 2t^2 - 1$  و چون y از 1 تا 0 تغییر می کند، پس t نیز از 1 تا 0 تغییر خواهد کرد. بنابراین دو انتگرال بر روی دو مسیر مختلف داریم:

$$\int_{ADB} (x^2 dy + y^2 dx) = \int_{AD} (x^2 dy + y^2 dx) + \int_{DB} (x^2 dy + y^2 dx)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\sqrt{2} \cos t)^2 (\sqrt{2} \cos t) + (\sqrt{2} \sin t)^2 (-\sqrt{2} \sin t)] dt + \int_1^0 [(2t^2 - 1)^2 \times 1 + (t^2)(\delta t)] dt$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt + \int_1^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}t^4 + 1 - \sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}t) dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos t(1 - \sin^2 t) - \sin t(1 - \cos^2 t)] dt + \left[ \frac{\sqrt{2}t^5}{5} + t - \frac{\sqrt{2}t^3}{3} + \frac{\sqrt{2}t^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \cos t \sin^2 t - \sin t + \sin t \cos^2 t) dt + \left( -\frac{\sqrt{2}}{5} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} - 1 \right) = 2\sqrt{2} \left[ \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{22}{15} \\
 &= 2\sqrt{2} \left[ \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \sin^3 \left( \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\pi}{4} - \cos(0) + \frac{1}{3} \cos^3(0) \right] - \frac{22}{15} = 2\sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right] - \frac{22}{15} \\
 &= 2\sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{2}{3} \right] - \frac{22}{15} = 2\sqrt{2} \left[ \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right] - \frac{22}{15} = \left( 4 - \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) - \frac{22}{15} = \frac{12 - 2 - 4\sqrt{2}}{3} - \frac{22}{15} = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} - \frac{22}{15}
 \end{aligned}$$

۹- گزینه «۱» مسیر انتگرال گیری شامل دو بخش  $C_1$  و  $C_2$  است که  $C_1$  خط  $y = x$  از  $(0,0)$  تا  $(2,2)$  و  $C_2$  منحنی با معادله‌ی پارامتری  $x = 2 \cos t$  و  $y = 2 \sin t$  می‌باشد. ابتدا مقدار انتگرال را برای منحنی  $C_1$  حساب می‌کنیم، با فرض  $x = t$  آن‌گاه  $y = t$  و  $dx = dy = dt$  و لذا داریم:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{C_1} \frac{(x-y)dx + xdy}{x^2 + (y-x)^2} = \int_0^2 \frac{(t-t)dt + tdt}{t^2 + (t-t)^2} = \int_0^2 \frac{tdt}{t^2 + t^2 + 4 - 2t} = \int_0^2 \frac{tdt}{t^2 - 2t + 4t} = \int_0^2 \frac{tdt}{(t-1)^2 + 1} \\
 &= \text{Arctg}(1) - \text{Arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

حالا باید مقدار انتگرال روی مسیر  $C_2$  هم حساب شود.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{C_2} \frac{(x-y)dx + xdy}{x^2 + (y-x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2-2\sin t)(-2\sin t)dt + (2\cos t)(2\cos t)dt}{(2\cos t)^2 + (2\sin t - 2)^2} \\
 I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4 - 8\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin t + 4}{8 - 8\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4(\sin t - 1)}{-8(\sin t - 1)} dt
 \end{aligned}$$

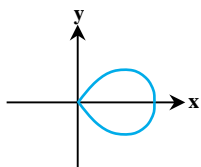
$t = \frac{\pi}{2}$  نقطه‌ی ناسره‌گی انتگرال است اما چون عامل  $(\sin t - 1)$  از صورت و مخرج حذف می‌شود مشکلی رخ نمی‌دهد. بنابراین داریم:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4}{-8} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

۱۰- گزینه «۱» با توجه به این که منحنی بسته است، بنابراین بهتر است از قضیه‌ی گرین کمک بگیریم:

$$\begin{cases} P = x + e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y \\ Q = x + e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

بنابراین باید حاصل انتگرال  $\iint_D dx dy$  را حساب کنیم که  $D$  ناحیه نشان داده شده در شکل زیر است:



بنابراین داریم:

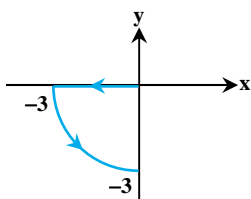
$$\iint_D dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos^2 \theta}} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} |\cos^2 \theta| d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه «۴» مسیر  $C$  از دو مسیر  $C_1$  و  $C_2$  تشکیل شده است که  $C_1$  خط راست از مبدأ تا نقطه  $(-3,0)$  است و معادله‌ی پارامتری آن به صورت:  $C_1(t): x = -3t, y = 0, 0 \leq t \leq 1$  و لذا داریم:

$$I_1 = \int_{C_1} (1+2x)dx + (2y)dy = \int_0^1 [1+2(-3t)](-3dt) = -3 \int_0^1 (1-6t)dt = -3 \left[ t - \frac{6t^2}{2} \right]_0^1 = -3(1-3) = 6$$

اما  $C_2$  دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 9$  است که معادله‌ی پارامتری آن به شکل مقابل است:

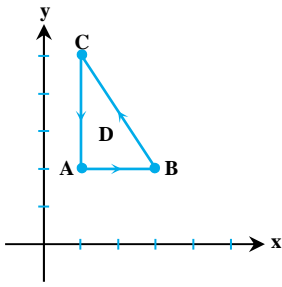
اما در تعیین حدود  $t$  توجه کنید که  $-3 \leq x < 0$  و لذا داریم:



$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{C_2} (1+2x)dx + (2y)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{3} [(1+2 \times 3 \cos t)(-3 \sin t) + (2 \times 3 \sin t)(3 \cos t)] dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [-3 \sin t - 18 \sin t \cos t + 18 \sin t \cos t] dt = [-3 \cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -3 \cos \frac{3\pi}{2} - (-3 \cos \frac{\pi}{2}) = 3
 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با  $6+3=9$  می‌باشد.

توضیح: البته سؤال را می‌توان به روش‌های دیگر نیز پاسخ داد، مثلاً اگر دقت کنید؛ میدان پایستار است و بنابراین می‌توان تابع پتانسیل را حساب کرد و با قرار دادن مختصات نقاط ابتدا و انتها حاصل را حساب کرد که این روش ساده‌تر است.



۱۲- گزینه «۳» خم مورد نظر خم بسته و به صورت مقابل است. توجه کنید که در انتگرال اول  $\vec{F} = (x, -y)$  می باشد. و  $F$  پایستار است (زیرا  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ )، بنابراین مقدار انتگرال روی خم بسته  $C$  صفر است.

چون خم  $C$  بسته است، برای محاسبه انتگرال دوم از قضیه گرین استفاده می کنیم. در انتگرال دوم  $\vec{F} = (y, -x)$  است و  

$$\oint_C (ydx - xdy) = \iint_D -2dxdy = -2 \times (\text{مساحت مثلث}) = -2 \times \frac{2 \times 2}{2} = -6$$
 بنابراین داریم:  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$   
 و در نتیجه  $I_1 - I_2 = 0 - (-6) = 6$  است.

۱۳- گزینه «۳» چون منحنی بسته است بهتر است از قضیه گرین کمک بگیریم:

$$\left. \begin{aligned} P = x \sin y^2 - y^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \cos y^2 - 2y \\ Q = x^2 y \cos y^2 + 3x &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \cos y^2 + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 + 2y \Rightarrow I = \iint_D (3 + 2y) dx dy$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$$

با توجه به ناحیه داده شده داریم:

از طرفی  $y = \frac{1}{2}(u - v)$ ،  $2y = u - v$  و بنابراین  $3 + 2y = 3 + u - v$  پس داریم:

$$I = \iint_{D_1} (3 + u - v) \left| -\frac{1}{2} \right| dudv = \int_{-1}^2 \int_{-1}^3 (3 + u - v) \frac{1}{2} dv du = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} [3v + uv - \frac{1}{2}v^2]_{-1}^3 du = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} (8 + 4u) du = \frac{1}{2} [8u + 2u^2]_{-1}^2 = 15$$

۱۴- گزینه «۳» با توجه به این که مرز مربع است، لذا منحنی بسته است و لذا می توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\left. \begin{aligned} P = x^2 + xy &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x \\ Q = x^2 + y^2 &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - x = x$$

پس حاصل انتگرال به صورت زیر است:

$$I = \iint_D x dx dy$$

دقت کنید  $x$  تابعی فرد است و ناحیه نسبت به محور  $y$  ها متقارن است. لذا حاصل انتگرال صفر می شود.

۱۵- گزینه «۳» در گزینه (۲) به راحتی با کنترل شرط  $\text{curl} \vec{F} = 0$  واضح است میدان پایستار است و با توجه به اینکه تابع همه جا پیوسته و مسیری، منحنی بسته  $C$  است، پس حاصل انتگرال صفر می شود. در گزینه (۱) نیز با کنترل شرط  $\text{curl} \vec{F} = 0$  می توان گفت میدان پایستار است و چون تابع همه جا پیوسته است، لذا حاصل آن روی منحنی بسته صفر است و در گزینه (۳) در متن کتاب گفتیم حاصل انتگرال  $2\pi$  می باشد (دقت کنید چون مبدأ درون دایره  $x^2 + y^2 = 4$  است، حاصل انتگرال  $2\pi$  است، اگر مبدأ درون ناحیه محدود به مرز  $C$  نبود، حاصل این انتگرال هم صفر می شد، همین جا پاسخ به تست تمام است و شما می توانید گزینه (۳) را انتخاب کنید چون طراح پرسیده حاصل کدام گزینه با بقیه فرق می کند؟ دو گزینه که صفر است، پس حاصل مقدار خواسته شده در گزینه (۴) هم صفر است. اما برای تمرین می توانیم مقدار این گزینه را حساب کنیم. با توجه به اینکه چرخش  $\vec{V}$  به صورت  $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$  تعریف می شود، پس باید انتگرال خط روی مسیر  $C$  حساب شود و چون منحنی بسته است، لذا از قضیه گرین کمک می گیریم.

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dA = \iint_D (2x + 2y) dA$$

تابع  $2x$  نسبت به  $x$  فرد و بیضی داده شده نسبت به محور  $y$  ها تقارن دارد پس  $\iint_D 2x dA$  صفر است و چون تابع  $2y$  نسبت به  $y$  فرد است و بیضی داده شده نسبت به محور  $x$  ها تقارن دارد پس  $\iint_D 2y dA$  صفر است.

۱۶- گزینه «۲» قرار می دهیم  $F = (y + z, x + z, x + y)$ ، در این صورت چون  $\text{curl} \vec{F} = 0$ ، است پس کار انجام شده روی منحنی بسته  $C$  صفر است.

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0$$



۱۷- گزینه «۲» جرم مفتول با توجه به چگالی آن از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$M = \int_C (x^2 y^2 + z + 1) ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t + t + 1) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt$$

$$M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin^2 2t}{4} + t + 1 \right) dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 4t}{8} + t + 1 \right) dt = \sqrt{2} \left[ \frac{t}{1} - \frac{1}{32} \sin 4t + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2} \left[ \frac{2\pi}{1} - 0 + \frac{4\pi^2}{2} + 2\pi \right] = \sqrt{2} \left( 2\pi^2 + \frac{9}{2}\pi \right)$$

۱۸- گزینه «۳» کافیسیت با توجه به فرمول‌ها دو مقدار گردش و شار جداگانه محاسبه شوند:

$$\left. \begin{aligned} \text{گردش} = A &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D r \cos y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos y dx dy = \pi \\ \text{شار} = B &= \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-x) \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x \sin y) dx dy = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\frac{\pi^2}{8}}{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

۱۹- گزینه «۳» با یک سؤال جالب از مبحث انتگرال روی منحنی روبه‌رو هستیم، ابتدا توجه کنید که معادله‌ی مسیر داده شده یک ماریچ فضایی است که

شعاع آن ۲۰ متر است، معادله‌ی پارامتری چنین مسیری به صورت مقابل است:

از آن جا که سه دور کامل از این ماریچ طی شده است، لذا  $0 \leq t \leq 6\pi$  است، از طرفی گفته شده در آخرین لحظه یعنی  $t = 6\pi$  باید ارتفاع  $z = 90$  رسیده

باشد، پس داریم:

پس معادله‌ی پارامتری مسیر به شکل مقابل بازنویسی می‌شود:

اما دقت کنید نیروی وارد شده به این فرد در تمام طول مسیر برابر با نیروی وزن خودش به علاوه‌ی وزن قوطی رنگ است و راستای این نیرو در تمام طول

مسیر عمود بر سطح یعنی در راستای بردار سطح است و لذا  $\vec{F} = 185\vec{k}$ ، قابل نمایش است. بنابراین داریم:

$$\text{کار انجام شده} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C 185 dz = \int_0^{6\pi} 185 \left( \frac{15}{\pi} \right) dt = 185 \left( \frac{15}{\pi} \right) (6\pi) = 185 \times 15 \times 6 = 16650$$

۲۰- گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: میدان برداری  $\vec{F} = (xf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), yf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), zf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))$  پایستار است و تابع پتانسیل آن به صورت

$$\int xf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx \text{ قرار می‌دهیم } u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ در این صورت } du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ لذا داریم:}$$

$$\int xf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx = \int uf(u) du$$

و بنابراین مقدار موردنظر برابر  $\int_A^B uf(u) du$  است.

روش دوم: البته این سؤال را می‌توان به صورت ساده زیر نیز پاسخ داد:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 2udu \Rightarrow xdx + ydy + zdz = udu$$

$$\int_A^B f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(xdx + ydy + zdz) = \int_A^B f(\sqrt{u^2})(udu) = \int_A^B uf(u) du$$



### پاسخنامه آزمون (۱)

۱- گزینه «۴» با توجه به آن که  $S$  یک سطح بسته است، بهتر است میدان برداری  $\vec{F}$  را چنان بیابیم که  $\vec{F} \cdot \vec{n} = z$  باشد تا بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. فرض کنیم میدان برداری مورد نظر ما  $\vec{F} = (P, Q, R)$  باشد. بردار یک‌ه‌ی قائم بر سطح خارجی کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  برابر است با:  $\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = (x, y, z)$  بنابراین می‌خواهیم تساوی مقابل برقرار شود:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = xP + yQ + zR = z$$

با انتخاب  $R = 1; P = 0; Q = 0$  این تساوی برقرار خواهد بود، بنابراین  $\vec{F} = (0, 0, 1)$  است. حالا از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم؛ اگر  $D$  ناحیه‌ی درون کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  باشد، داریم:

$$\iint_S z d\sigma = \iiint_D \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_D (0) dv = 0$$

۲- گزینه «۲» دقت کنید که میدان انتگرال‌گیری  $D$  دایره‌ی  $x^2 + y^2 = a^2$  در صفحه  $xOy$  است. با توجه به این که معادله‌ی رویه به صورت  $z = \frac{1}{a}(y^2 - x^2)$  است، لذا  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{a}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a}$  می‌باشد بنابراین  $d\sigma$  به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2y}{a}\right)^2} dx dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

$$\text{مساحت} = \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 + 4r^2} (r dr d\theta) = \frac{2\pi}{a} \int_0^a (a^2 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} r dr = \frac{2\pi}{a} \left[ \frac{(a^2 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 8} \right]_0^a$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{2\pi}{a} \left[ \frac{\Delta a^3 \sqrt{\Delta} - a^3}{12} \right] = a^2 \frac{\pi}{6} (\Delta \sqrt{\Delta} - 1)$$

۳- گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که صفحه‌ی تصویر دایره  $x^2 + y^2 = 2$  در صفحه‌ی  $xOy$  است. قرار می‌دهیم  $g(x, y) = x^2 + y^2 - z$ ، در این صورت  $d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} dA = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA$  داریم:

$$\text{مساحت} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA \Rightarrow \text{مساحت} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = 2\pi \times \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \times \frac{26}{12} = \frac{13}{3} (\pi)$$

۴- گزینه «۲» اگر  $g$  را به صورت  $y^2 + z^2 - a^2 = 0$  در نظر بگیریم. بردار واحد قائم برونسو بر  $S$  برابر است با:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} = \frac{2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k}, \quad d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{2a}{|2z|} dA = \frac{a}{z} dA$$

از طرفی داریم:

اگر تصویر  $S$  را بر صفحه  $xy$  با  $R$  نشان دهیم، ناحیه  $D$  به صورت مقابل خواهد بود:

$$D: 0 \leq x \leq a, \quad -a \leq y \leq a$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (yz\vec{j} + z^2\vec{k}) \cdot \left( \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k} \right) \frac{a}{z} dA = \iint_D \frac{z(y^2 + z^2)}{a} \times \frac{a}{z} dA = \iint_R a^2 dx dy = a^2 \times (\text{مساحت } D) = 2a^4$$

بنابراین داریم:

۵- گزینه «۴» میدان برداری  $\vec{F} = (M, N, P) = (x, y, z)$  را داریم. سطح  $S$  یک سطح بسته است که ناحیه درون آن را  $V$  می‌نامیم. به علت بسته بودن  $S$  می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. ناحیه  $V$  یک کره است به شعاع  $a$ . با محاسبه دیورژانس  $\vec{F}$  می‌بینیم که عددی ثابت است:  $\text{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 1 + 1 + 1 = 3$ . بنابراین عدد ۳ از انتگرال خارج می‌شود و انتگرال سه‌گانه‌ای که باقی می‌ماند برابر است با حجم ناحیه  $V$ :

$$\text{جواب} = \iiint_V \text{div} \vec{F} dz dy dx = \iiint_V 3 dz dy dx = 3 \times (\text{حجم کره}) = 3 \times \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$$

۶- گزینه «۳» یک سطح بسته است پس می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد. اگر  $V$  ناحیه محدود شده به  $S$  باشد و  $\vec{F} = (P, Q, R) = (x^2, y^2, z^2)$  آن‌گاه داریم:

$$I = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dz dy dx = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dz dy dx = 2 \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x + y + z) dz dy dx = 2 \int_0^a \int_0^a \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a dy dx$$

$$= 2 \int_0^a \int_0^a \left( ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy dx = 2 \int_0^a \left( axy + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a dx = 2 \int_0^a \left( a^2 x + \frac{1}{2} a^3 + \frac{1}{2} a^3 \right) dx = \left( a^2 x^2 + a^3 x + \frac{1}{2} a^3 x \right) \Big|_0^a = 3a^4$$

۷- گزینه «۳» با توجه به این که  $\vec{F} = (x, y, z)$  داده شده است، بنابراین  $\text{div} \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$  و لذا  $I = \iiint_V 3 dv = 3V$



۸- گزینه «۳» با توجه به این که  $\frac{\partial f}{\partial n}$  مشتق جهتی  $f$  در جهت  $n$  است، لذا  $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \vec{n}$  و بنابراین داریم:  $\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla f \cdot \vec{n}) = \nabla^2 f$

پس طبق قضیه دیورژانس خواهیم داشت:  $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \iiint_D (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_D \nabla^2 f dv = \iiint_D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dv$

۹- گزینه «۱» دقت کنید که ادبیات سؤال به ما می گوید سطح بسته است و واضح است حل سؤال با استفاده از قضیه دیورژانس بسیار راحت تر است:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial(z^2 - x)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy)}{\partial y} + \frac{\partial(2z)}{\partial z} = -1 - x + 2 = 1 - x$$

$$I = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dv = \int_0^2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (1-x) dx dy dz$$

$$= \int_0^2 (1-x) dx \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dz = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \times \int_{-2}^2 dy \times [z]_0^{\sqrt{4-y^2}} = \frac{2}{2} \times \int_{-2}^2 (\sqrt{4-y^2}) dy = \int_{-2}^2 (\sqrt{4-y^2}) dy = \frac{2}{2} \left[ 4 \times 2 - \frac{2^2}{2} - 4(-2) + \frac{(-2)^2}{2} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{2} \left[ 8 - \frac{4}{2} + 8 - \frac{4}{2} \right] = \frac{2}{2} [16 - 4] = \frac{2}{2} \times 12 = 12$$

۱۰- گزینه «۱» واضح است بدون استفاده از قضیه دیورژانس حل سؤال بسیار پر زحمت و زمان بر است، بنابراین با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 15x^2 + 12y^2 + 3y^2 + e^y \sin z + 15z^2 - e^y \sin z = 15x^2 + 15y^2 + 15z^2 = 15(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$I = 15 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv = 15 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \rho d\rho d\phi d\theta = 15 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \left( \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \right)$$

و بنابراین داریم:

$$I = 15(2\pi) \left[ -\cos \phi \right]_0^\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = 15(2\pi)(2) \left[ \frac{4\sqrt{2}-1}{4} \right] = 15\pi[4\sqrt{2}-1]$$

۱۱- گزینه «۲» چون  $S$  یک سطح بسته است، پس می توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، ابتدا  $\text{div} \vec{F}$  را حساب می کنیم:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}}y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}}z^2)}{\partial z} = x^2 + 2y^2 + z^2 \Rightarrow \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V (x^2 + 2y^2 + z^2) dv$$

دقت کنید؛ چون انتگرال گیری سه گانه در داخل بیضی گون  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 1$  صورت می گیرد. می توانیم از تبدیل بیضی گون کمک می گیریم:

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \sin \theta \sin \phi, z = \rho \cos \phi, J = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi$$

می دانیم در این حالت بیضی گون بر کره واحد منطبق می شود:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin \phi}{\sqrt{2}} \left[ \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right) + \rho^2 \cos^2 \phi \right] d\rho d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^4 \sin \phi \left( \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) + \rho^2 \cos^2 \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (\rho^2 \sin \phi)(\rho^2) d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\theta]_0^{2\pi} \times [-\cos \phi]_0^\pi \times \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi) \times (2) \times \left( \frac{1}{5} \right) = \frac{4\pi}{5\sqrt{2}}$$

۱۲- گزینه «۲» از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم، در این صورت داریم:

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dv = \iiint_V [(2(x-2) + 2y + 2(z-3))] dv + \iiint_V 10 dv$$

حاصل انتگرال اول در تساوی آخر برابر صفر است، چون ناحیه انتگرال گیری نسبت به خطوط  $x=2, y=0, z=3$  تقارن دارد و انتگرال دوم ۱۰ برابر حجم کره به شعاع ۳ است، یعنی برابر  $10 \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3$  یا  $360\pi$  است.

۱۳- گزینه «۴» انتگرال سطح یک تابع اسکالر مورد نظر است و ظاهراً نمی توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. اما چون  $S$  یک سطح بسته است، اگر

تابع زیر انتگرال را به شکل  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  بنویسیم می توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. قرار می دهیم:  $\vec{F} = (x, y, z)$  و روی سطح کره  $\vec{n} = (x, y, z)$  می باشد. در این صورت  $\vec{F} \cdot \vec{n} = x^2 + y^2 + z^2$  بنابراین داریم:

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V (1+1+1) dv = 3 \iiint_V dv = 3 \times \left( \text{حجم کره به شعاع } 1 \right) = 3 \times \frac{4}{3} \pi = 4\pi$$



۱۴- گزینه «۴» در  $t=0$  داریم  $(x, y, z) = (0, 0, a)$  و در  $t=\pi$  داریم  $(x, y, z) = (0, 0, a)$  بنابراین ابتدا و انتهای منحنی بر هم منطبق هستند، و این یعنی  $C$  یک مرز بسته است. با دقت به معادلات پارامتری  $C$  داریم:  $z+x = a \cos^2 t + a \sin^2 t = a$  و  $y^2 = 4ax \cos^2 t = 4xz$  یعنی  $y^2 = 4x(a-x)$  که به معادله  $y^2 + 4x^2 = 4ax$  منجر می‌شود که یک استوانه قائم است. پس  $C$  مرز سطح  $S$  به معادله  $z+x=a$  است و تصویر آن بر صفحه  $xoy$  با معادله  $y^2 + 4x^2 = 4ax$  تعیین می‌شود. برای میدان برداری  $\vec{F} = (y+z, x+z, x+y)$  داریم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \vec{0}$$

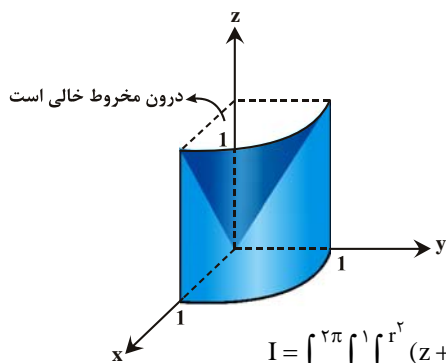
پس از دستور استوکس خواهیم داشت:  $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$

توضیح: البته نیاز به حل سؤال به این روش نبود، همین که در ابتدای سؤال فهمیدیم منحنی بسته است،  $\text{curl} \vec{F}$  را حساب می‌کنیم و متوجه می‌شویم که صفر است و لذا میدان پایستار و حاصل انتگرال صفر است.

۱۵- گزینه «۳» می‌دانیم که برای میدان برداری  $\vec{F} = (P, Q, R)$  روی سطح  $S$  داریم:

$$I = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

مقایسه با ترتیب جملات در صورت سؤال مشخص می‌کند که در انتگرال داده شده، میدان برداری  $\vec{F} = (xz, x^2y, y^2z)$  را داریم. (نمی‌دانم طرح سؤال حالا چه اصراری داشته که ترتیب نوشتن جوری باشه که دانشجو اشتباه کند! البته شاید این موضوع باعث بالا رفتن دقت شود و خودش کار خوبی هم تلقی شود، بنابراین شما هم حواستان باشه!) سطح  $S$  یک سطح بسته است که ناحیه  $D$  از فضا را محصور کرده است. ناحیه  $D$  به استوانه‌ای  $x^2 + y^2 = 1$  و سهمی گون  $z = x^2 + y^2$  و صفحات مختصات در  $\frac{1}{8}$  اول محدود شده است. به دلیل بسته بودن  $S$  می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد:



$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \text{div} \vec{F} dv = \iiint_D (z + x^2 + y^2) dv$$

با توجه به آن که قاعده‌ی این شکل ربع دایره‌ای به شعاع یک است، در مختصات استوانه‌ای داریم  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  و  $0 \leq r \leq 1$  و کران‌های  $z$  نیز به وضوح از  $z=0$  تا  $z=r^2 = x^2 + y^2$  هستند.

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{r^2} (z + r^2) r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r \left( \frac{z^2}{2} + r^2 z \right) \Big|_0^{r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \frac{r^3}{2} dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{r^4}{8} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{32}$$

۱۶- گزینه «۱» برای مخروط  $z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، داریم:  $d\sigma = \sqrt{2} dA$ . از طرفی استوانه  $x^2 + y^2 = 4x$  در مختصات قطبی به صورت  $r = 4 \cos \theta$ ، در  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  می‌آید. البته معادله  $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$  می‌باشد، در واقع سطح موردنظر از دو بخش یکسان تشکیل شده که در  $z \geq 0$  و  $z \leq 0$  قرار گرفته‌اند، پس مقدار انتگرال را باید دو برابر کنیم. بنابراین داریم:

$$\iint_S d\sigma = 2\sqrt{2} \iint dA = 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \theta} r dr d\theta = 16\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 32\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 32\sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} = 8\pi\sqrt{2}$$

۱۷- گزینه «۳» برای مخروط  $z^2 = x^2 + y^2$ ،  $d\sigma = \sqrt{2} dA$  خواهد بود. صفحه تصویر را صفحه  $xoy$  در نظر می‌گیریم. پس باید با حذف  $z$  از معادله‌ی مخروط و کره، شکل ایجاد شده در صفحه‌ی  $xoy$  را پیدا کنیم. بین معادله مخروط و کره،  $z$  را حذف می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \xrightarrow{z^2 = x^2 + y^2} x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + y^2 = ax$$

پس تصویر این سطح، درون دایره  $x^2 + y^2 = ax$  می‌باشد که در مختصات قطبی به صورت  $r = a \cos \theta$ ،  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  بیان می‌شود. بنابراین داریم:

$$\text{مساحت} = \iint d\sigma = \sqrt{2} \iint dA = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r dr d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$\xrightarrow{\text{زوج بودن زیر انتگرال}} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{2} a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi a^2)$$

۱۸- گزینه «۱» با استفاده از قضیه استوکس تساوی مقابل را داریم:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

نیمه بالایی کره  $S$  به معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  یک رویه هموار و مرز آن دایره  $C$  به معادله  $x^2 + y^2 = 1$  است. اگر  $\vec{n}$  را همه جا رو به خارج رویه  $S$  بگیریم. آن گاه جهت القا شده به وسیله  $\vec{n}$  روی  $C$  مثبت است. توابع  $P = z^2$ ,  $Q = -2x$ ,  $R = y^3$  مشتقات جزئی پیوسته دارند. همچنین رویه  $S$  نمودار تابع  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  است. خم  $C$  را می توان به صورت  $x = \cos t$  و  $y = \sin t$  و  $z = 0$  پارامتری کرد که  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad dy = \cos t \, dt, \quad dx = -\sin t \, dt$$

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \int_C z^2 \, dx - 2x \, dy + y^3 \, dz$$

با توجه به توضیحات فوق و قضیه استوکس داریم:

چون  $z = 0$  است، پس  $dz = 0$ ، لذا داریم:

$$I = \oint_C -2x \, dy = -2 \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t \, dt) = -2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t) \, dt = -2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) \, dt = -2 \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = -2 \left[\frac{1}{2} \times 2\pi\right] = -2\pi$$

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv$$

۱۹- گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس داریم:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^3 + x + z + y^3 = 2y^3 + x + z$$

اگر  $\vec{F}$  به صورت  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  تعریف شود، آن گاه داریم:

بنابراین  $I = \iiint_V (2y^3 + x + z) \, dv$  می باشد، حالا باید حدود انتگرال را حساب کنیم، با توجه به صفحات محصور کننده داریم:

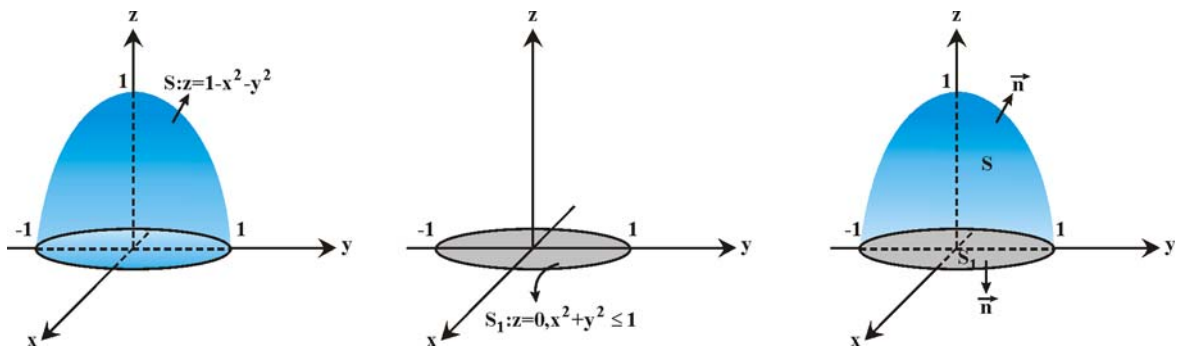
$$\begin{cases} z + 2y = 0 \Rightarrow z = -2y \Rightarrow y = \frac{-z}{2} \\ z + 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2-z}{2} = 1 - \frac{z}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < z < 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \int_0^1 \int_{\frac{-z}{2}}^{1 - \frac{z}{2}} (2y^3 + x + z) \, dy \, dx \, dz = \int_0^2 \int_0^1 \left[ \frac{2y^4}{2} + xy + zy \right]_{\frac{-z}{2}}^{1 - \frac{z}{2}} \, dx \, dz = \int_0^2 \int_0^1 \left( \frac{(1 - \frac{z}{2})^4 - (\frac{-z}{2})^4}{2} + x + z \right) \, dx \, dz$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \left[ \frac{(1 - \frac{z}{2})^5 - (\frac{-z}{2})^5}{5} - x + \frac{x^2}{2} + zx \right]_0^1 \, dz = \int_0^2 \left[ \frac{(1 - \frac{z}{2})^5 - (\frac{-z}{2})^5}{5} + \frac{1}{2} + z \right] \, dz = \left[ \frac{(1 - \frac{z}{2})^6}{6} + \frac{(1 - \frac{z}{2})^6}{6} + \frac{1}{2}z + \frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 3$$

۲۰- گزینه «۱» با توجه به اینکه رویه بسته نیست، بنابراین نمی توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، اما می توانیم با اضافه کردن سطح  $S_1$

(آن قسمت از صفحه  $z = 0$  که با سطح  $z = 1 - x^2 - y^2$  تلاقی دارد) به سطح  $S$  می توان آن را به سطحی بسته تبدیل کنیم:



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = I_1 - I_2$$

و بنابراین داریم:

$$I_1 = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{F}) \, dv = \iiint_V \left[ \frac{2xy}{1+y^2} + \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x(1+y)}{1+y^2} \right] \, dv = 0$$

برای محاسبه  $I_1$  می توانیم از قضیه دیورژانس کمک بگیریم، بنابراین داریم:

حالا باید انتگرال  $I_2$  را حساب کنیم، دقت کنید که چون سطح  $S_1$ ،  $z = 0$  است و بردار قائم باید رو به خارج سطح بسته باشد، لذا  $\vec{n} = -\vec{k}$  و بنابراین داریم:

$$I_2 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_D \frac{1+y^2}{1+y^2} \, dy \, dx = \iint_D \, dy \, dx = D$$

دقت کنید  $D$  تصویر رویه  $z = 1 - x^2 - y^2$  بر روی صفحه  $z = 0$  است که دایره ای به شعاع ۱ است، پس  $I_2 = \pi(1)^2 = \pi$  و لذا داریم:

$$I = I_1 - I_2 = 0 - \pi = -\pi$$



۲۱- گزینه «۳» همان طور که در متن درس گفتیم؛ برای سطح پارامتری داده شده  $d\sigma$  از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$\vec{n}d\sigma = \pm \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + r u \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & ru \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-ru^2 \cos v) \vec{i} - (ru^2 \sin v) \vec{j} + u \vec{k}$$

اما کدام علامت را انتخاب کنیم؟ دقت کنید که ما شار رو به پایین را می‌خواهیم و بنابراین ضریب بردار  $\vec{k}$  باید منفی شود، از طرفی از صورت سؤال می‌دانیم  $u \geq 0$  و بنابراین باید علامت منفی را انتخاب کنیم تا همه چی درست شود!

از طرفی چون  $x = u \cos v$  و  $y = u \sin v$ ، لذا ضابطه‌ی  $\vec{F}$  بر حسب  $u$  و  $v$  به صورت  $\vec{F} = \frac{ru \cos v \vec{i} + ru \sin v \vec{j}}{u^2} + \vec{k}$  نوشته می‌شود و لذا داریم:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = [ru \cos^2 v + ru \sin^2 v + u] du dv = [ru(\cos^2 v + \sin^2 v) + u] du dv = ru du dv$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ru du dv = \int_0^{2\pi} dv \times \int_0^1 ru du = [v]_0^{2\pi} \times \left[ \frac{ru^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi \times \frac{r}{2} = r\pi$$

۲۲- گزینه «۲» فرض کنیم سطح مورد نظر ما بخشی از مخروط  $z^2 = x^2 + y^2$  که در بالای صفحه‌ی  $xoy$  قرار دارد، (یعنی  $S: z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ ) باشد که توسط استوانه‌ی  $x^2 + z^2 = a^2$  جدا شده است از برخورد این استوانه و مخروط خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = a^2$$

معادله‌ی  $2x^2 + y^2 = a^2$  یک بیضی است و در واقع به ما نشان می‌دهد که سایه‌ی  $S$  بر صفحه‌ی  $xoy$  درون بیضی  $2x^2 + y^2 = a^2$  قرار دارد. این ناحیه را  $D$  می‌نامیم. با توجه به معادله‌ی  $S$  داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dy dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} dy dx = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} dy dx = \sqrt{2} dy dx$$

بنابراین داریم: مساحت  $S = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{2} dy dx = \sqrt{2} \times (\text{مساحت } D)$

ناحیه‌ی  $D$  درون بیضی  $2x^2 + y^2 = a^2$  است، یعنی معادله‌ی آن به صورت  $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  می‌باشد و لذا شعاع‌های این بیضی عبارتند از:  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  و  $a$ .

بنابراین مساحت آن برابر  $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} = \pi a \times \frac{a}{\sqrt{2}}$  است.

اکنون باید دقت کنیم که آیا  $S$  از یک بخش تشکیل شده است، یا یک نیمه هم در بخش  $z < 0$  دارد؟ معادلات مخروط  $z^2 = x^2 + y^2$  و استوانه‌ی  $z^2 + x^2 = a^2$  با تبدیل  $z$  به  $-z$  تغییری نمی‌کنند، این نشان می‌دهد که این مخروط و استوانه سطح مقطع مشابهی هم در ناحیه‌ی  $z < 0$  دارند، پس باید جواب را دو برابر کنیم: مساحت کل  $= 2 \times \pi a^2 = 2\pi a^2$

۲۳- گزینه «۴» با توجه به آن که هر دو استوانه نسبت به صفحات مختصات تقارن دارند، بخشی از سطح را که در  $\frac{1}{8}$  اول قرار دارد را محاسبه می‌کنیم و

جواب را در ۸ ضرب می‌کنیم. معادله‌ی سطح مورد نظر  $S: x^2 + z^2 = a^2$  است که سایه‌ی آن توسط معادله‌ی  $y^2 + z^2 = a^2$  در صفحه‌ی  $yoZ$  (البته در  $\frac{1}{4}$

اول این صفحه) تعیین می‌شود. این ناحیه را  $D$  می‌نامیم. بردار  $\vec{i}$  که همراستا با محور  $x$  ها است بر  $D$  عمود است. پس خواهیم داشت:

$$d\sigma = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz = \sqrt{1 + 0 + \frac{z^2}{x^2}} dy dz = \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{x^2}} dy dz = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}} dy dz$$

توجه داشته باشید که در محاسبه‌ی  $d\sigma$  باید معادله‌ی  $S: x^2 + z^2 = a^2$  را مدنظر قرار دهیم.

ناحیه‌ی  $D$  ربع اول از دایره‌ی  $y^2 + z^2 = a^2$  است. در این ناحیه داریم:  $0 \leq z \leq a$  و  $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - z^2}$

$$\text{مساحت} = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} dy dz = 8a \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz = 8a \int_0^a dz = 8a^2$$

۲۴- گزینه «۲» S یک سطح بسته است. فرض کنیم V ناحیه‌ی درون این مکعب باشد. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iiint_V 6 dv = 6 \times (\text{حجم } V) = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

بنابراین داریم:

دقت کنید که V مکعبی است که طول هر ضلع آن ۲ واحد است.

۲۵- گزینه «۱» برای مخروط  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  داریم  $d\sigma = \sqrt{2} dA$ . صفحات  $x = 1$  و  $x = 0$  را با مخروط  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  برخورد می‌دهیم. از برخورد  $x = 0$  با مخروط داریم  $y^2 + z^2 = 0$  یعنی  $y = z = 0$  که مبدأ مختصات را نشان می‌دهد. از برخورد  $x = 1$  با مخروط، دایره‌ی  $y^2 + z^2 = 1$  به دست می‌آید. پس ناحیه انتگرال‌گیری درون دایره  $y^2 + z^2 = 1$  است. از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I = \iint_S x^2 d\sigma \xrightarrow{x = \sqrt{y^2 + z^2}} I = \sqrt{2} \iint_S (y^2 + z^2) dA \xrightarrow{\text{قطبی}} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2} (2\pi) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

۲۶- گزینه «۳» چون منحنی C، یک منحنی بسته در فضا است از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\vec{F} = (-y^2, x^2, z^2) \Rightarrow \operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 2xz + 2xy)$$

$$\vec{n} d\sigma = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{5}} dA = (2, 2, 1) dA$$

چون خم C، در صفحه  $2x + 2y + z = 3$  قرار می‌گیرد، داریم:

بنابراین  $\operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 2(x^2 + y^2) dA$  و در نتیجه انتگرال  $\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$  درون دایره  $x^2 + y^2 = 1$  برابر است با:

$$I = \iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 2(x^2 + y^2) dA \xrightarrow{\text{قطبی}} I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cdot r dr d\theta = (2\pi) \left[\frac{2}{4} r^4\right]_0^1 = \frac{2\pi}{2}$$

۲۷- گزینه «۳» چون سطح S بسته است از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\vec{F} = (1 + xz^2, 1 + yx^2, 1 + zy^2) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = z^2 + x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow I = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iiint_V (z^2 + x^2 + y^2) dv$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات کروی}} I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^2 \rho^4 d\rho = (2\pi)(2) \left(\frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{5}$$

۲۸- گزینه «۱» مرز سطح S دایره  $x^2 + y^2 = 1$  در صفحه  $z = 0$  می‌باشد. در این صورت طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(چون قائم S رو به پایین است، بنابراین مرز C باید در جهت خلاف مثلثاتی پیموده شود.)

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) = (\sin t, -\cos t, 0) \Rightarrow d\vec{r} = (-\sin t, \cos t, 0) dt$$

خم C را به صورت پارامتری مقابل می‌نویسیم:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t + 0) dt = 2\pi$$

در نتیجه داریم:

۲۹- گزینه «۳» چون سطح بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

اگر  $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ، آن‌گاه داریم:

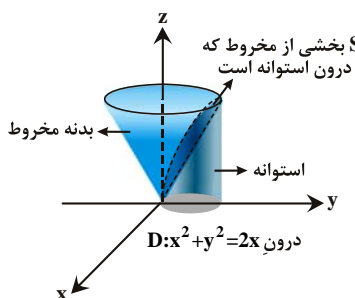
$$I = \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 2 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات کروی استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$I = \iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{\sqrt{5}} \rho^4 d\rho = 2(2\pi)(2) \left(\frac{25\sqrt{5}}{5}\right) = 60\pi\sqrt{5}$$

۳۰- گزینه «۴» از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)\right) dV = \iiint_V 3 dV = 4\pi abc$

## پاسخنامه آزمون (۲)



۱- گزینه «۳» فرض کنیم  $S$  بخشی از سطح  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  باشد که درون استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 2x$  قرار دارد. تصویر  $S$  بر صفحه  $xOy$  توسط همین استوانه مشخص می‌شود. ما این تصویر را  $D$  می‌نامیم.

$$S \text{ مساحت} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dydx = \iint_D \sqrt{2} dydx = \sqrt{2} \times (D \text{ مساحت}) = \pi\sqrt{2}$$

ناحیه‌ی  $D$  دایره‌ای به شعاع ۱ است. پس شعاع آن یک و لذا مساحت آن  $\pi$  است.

۲- گزینه «۴» با یک انتگرال سطح برای تابع اسکالر روبه‌رو هستیم، می‌توانیم از روش معمول حل این انتگرال‌ها استفاده کنیم، اما یک روش دیگر چون سطح بسته است، همان روش مطرح شده در متن کتاب است. تلاش می‌کنیم میدان برداری  $\vec{F}$  را طوری پیدا کنیم که  $\vec{F} \cdot \vec{n} = z^2$  باشد. در این صورت چون  $\vec{F}$  برداری می‌شود، می‌توانیم از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم. بردار قائم یک‌ه‌ی رو به خارج بر سطح کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  برابر است با:

$$\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2} = (x, y, z)$$

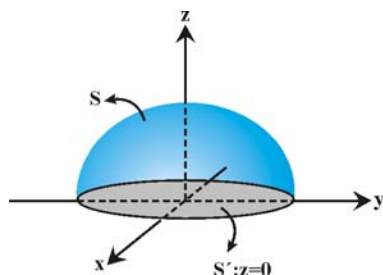
میدان برداری  $\vec{F} = (P, Q, R)$  باید چنان باشد که تساوی  $\vec{F} \cdot \vec{n} = xP + yQ + zR = z^2$  برقرار باشد. انتخاب  $P = 0, Q = 0, R = z$  مناسب است. در این صورت داریم:

$$I = \iint_S z^2 d\sigma = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv$$

که  $V$  ناحیه‌ی درون کره‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  است. با محاسبه‌ی دیورژانس  $\vec{F}$  داریم:  $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$  بنابراین داریم:

$$I = \iiint_V (1) dv = (V \text{ حجم}) = \frac{4}{3}\pi$$

۳- گزینه «۱» بیضی‌گون (بیضی‌وار) با معادله‌ی  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{20} + \frac{(z+4)^2}{40} = 1$  بیضی‌گونی به مرکز  $(0, 0, -4)$  است که فقط بخش کوچکی از آن در ناحیه‌ی  $z \geq 0$  قرار می‌گیرد. اگر فرض کنیم  $S$  بخشی از این سطح است که در  $z \geq 0$  قرار دارد. برای آن که تصویر  $S$  بر صفحه‌ی  $xOy$  معلوم شود کافی است معادله‌ی بیضی‌گون را با صفحه‌ی  $z = 0$  برخورد دهیم.



$$\begin{cases} \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{20} + \frac{(z+4)^2}{40} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 12$$

اگر  $D$  بخشی از صفحه‌ی  $z = 0$  باشد که توسط دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 12$  محدود شده است، طبق نتیجه‌ی قضیه استوکس خواهیم داشت:

$$I = \iint_S (\text{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S'} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

در اینجا  $\vec{n} = \vec{k}$  است و با محاسبه‌ی  $\text{curl} \vec{F}$  می‌توانیم انتگرالده را مشخص کنیم. با توجه به آن که  $\vec{n} = \vec{k}$  است فقط محاسبه‌ی سومین مؤلفه‌ی  $\text{curl} \vec{F}$  کافی است:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^y \sin(yz) & xy^y e^{-xz} & xye^{-xy} \end{vmatrix} = (هرچی) \vec{i} - (هرچی) \vec{j} + (y^y e^{-xz} - xy^y z e^{-xz} - x^y z \cos yz) \vec{k}$$

$$I = \iint_{S'} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D [y^y e^{-xz} (1 - xz) - x^y z \cos yz] dydx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I = \iint_D (y^y - 0) dydx$$

اما روی سطح  $D$  مقدار  $z$  صفر است. بنابراین داریم:

و در نهایت با استفاده از دستگاه قطبی مقدار  $I$  را روی دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 12$  به دست می‌آوریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{12}} r^y \sin^y \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^y \theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{12}} d\theta = \frac{144}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{144}{8} \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 36\pi$$

روش دوم: (استفاده از روش پارامتری کردن) فرض کنیم  $S$  بخشی از بیضی‌گون  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{20} + \frac{(z+4)^2}{40} = 1$  باشد که بالاتر از صفحه  $z = 0$  قرار دارد. منحنی  $C$  که لبه‌ی این سطح است، مقطع این بیضی‌گون و صفحه  $z = 0$  است:

$$C: \begin{cases} \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{20} + \frac{(z+4)^2}{40} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادلات پارامتری  $(x, y, z) = (\sqrt{12} \cos t, \sqrt{12} \sin t, 0)$  بیان کننده  $C$  هستند. به ازای  $0 \leq t \leq 2\pi$  یک دور از منحنی  $C$  را طی می کنیم. حال از قضیه استوکس داریم:

$$I = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [x^2 \sin yz dx + xy^2 e^{-xz} dy + xye^{-xy} dz] = \int_0^{2\pi} [0 + 144 \cos t \sin^2 t \cos t + 0] dt$$

$$\Rightarrow I = 144 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2(2t) dt = 36 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (1 - \cos 4t) dt = 18 \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = 36\pi$$

۴- گزینه «۳» سطح  $S$  فقط شامل نیمکره‌ی بالایی است. فرض کنیم  $S_1$  بخشی از صفحه‌ی  $z=0$  باشد که در این کره قرار دارد. با اضافه کردن آن به سطح  $S$  آن گاه  $S \cup S_1$  یک سطح بسته است که ناحیه‌ی  $D$  (درون نیمکره) را محدود می کند.

$$I_1 = \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv = \iiint_V (z^2 + y^2 + x^2) dv$$

در دستگاه کروی برای نیمکره به شعاع یک داریم:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{5} \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\cos \phi}{5} \right]_0^\pi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{5}$$

حالا انتگرال  $\vec{F}$  روی  $S_1$  را حساب می کنیم. از معادله‌ی  $S_1: z=0$  داریم:  $\vec{n} d\sigma = (0, 0, 1) dy dx$  بنابراین خواهیم داشت:

$$I_2 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} -(x^2 z + y^2) d\sigma$$

با توجه به آن که روی  $S_1$  داریم  $z=0$  پس در عبارت زیر انتگرال به جای  $z$ ، صفر قرار می دهیم و داریم:

$$I_2 = -\iint_{S_1} y^2 d\sigma = -\iint_D y^2 dy dx = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = -\frac{1}{8} \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}$$

پس حاصل انتگرال  $I$  برابر است با:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2\pi}{5} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{13\pi}{20}$$

۵- گزینه «۲» می دانیم  $D_n f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}$ ، بنابراین طبق قضیه دیورژانس داریم:

حالا کافیست  $\text{div}(\vec{\nabla} f)$  را حساب کنیم، برای این منظور به محاسبات زیر توجه کنید:

$$\text{div}(f\vec{\nabla} f) = \frac{\partial}{\partial x}(f.f_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f.f_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f.f_z) = f_x^2 + f.f_{xx} + f_y^2 + f.f_{yy} + f_z^2 + f.f_{zz}$$

$$= (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) + f(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) = |\vec{\nabla} f|^2 + f \text{div}(\vec{\nabla} f) \Rightarrow \text{div}(f\vec{\nabla} f) = |\vec{\nabla} f|^2 + f \text{div}(\vec{\nabla} f)$$

$$\nabla f = f\vec{\nabla} f + f \text{div}(\vec{\nabla} f) \Rightarrow \text{div}(\vec{\nabla} f) = 3$$

بنابراین داریم:

$$I = \iiint_V \text{div}(\vec{\nabla} f) dv = \iiint_V 3 dv = 3 \iiint_V dv = 3 \times (\text{حجم کره}) = 3 \times \left( \frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 \right) = 4\pi$$

۶- گزینه «۳» چون  $C$  خم بسته است، از قضیه استوکس استفاده می کنیم. بنابراین  $I = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + y^2 + \sin x^2 & 2xy + z & xz + 2yz \end{vmatrix} = (2z-1)\vec{i} - (z-2z)\vec{j} = (2z-1)\vec{i} + z\vec{j}$$

اکنون به سطحی نیاز داریم که منحنی  $C$  روی آن قرار گرفته باشد. منحنی  $C$  هم روی صفحه‌ی  $2x+y+z=3$  و هم روی استوانه‌ی  $16 = 4y^2 + (x-1)^2$  قرار دارد. معمولاً برای قضیه استوکس راحت تریم که از معادله‌ی صفحه استفاده کنیم. بنابراین فرض کنیم  $g: 2x+y+z-3=0$ ، در این صورت با فرض

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} dA = \frac{(2, 1, 1)}{1} dA \Rightarrow \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 2(2z-1) + z = 5z-2$$

این که تصویر این صفحه روی  $xoy$  باشد داریم:

تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه  $xoy$  درون بیضی  $16 = 4y^2 + (x-1)^2$  قرار می گیرد، ناحیه‌ی درون این بیضی را  $D$  می نامیم. تا این جا خواهیم داشت:

$$I = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (\Delta z - 2) dA$$

اما ناحیه‌ی  $D$  در صفحه‌ی  $xoy$  قرار دارد، پس تابع زیر انتگرال هم باید برحسب  $x$  و  $y$  نوشته شود. باید  $z$  را برحسب  $x$  و  $y$  جایگذاری کنیم.

$$I = \iint_D (13 - 5y - 10x) dA = \iint_D (3 - 5y - 10(x-1)) dA$$

از معادله صفحه  $z = 3 - y - 2x$  به دست می آید، بنابراین داریم:

چون ناحیه انتگرال گیری نسبت به  $y=0$  و  $x=1$  متقارن است پس انتگرال  $\Delta y$  و  $10(x-1)$  روی ناحیه برابر صفر است و در نتیجه داریم:

$$I = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 3 dA = 3 \times (\pi \times 4 \times 2) = 24\pi$$



۷- گزینه «۴» حل سؤال از روش مستقیم پارامتری‌سازی، سخت است، اما استفاده از قضیه استوکس حل آن را راحت می‌کند! با توجه به آن که  $z = \sin 2t = 2 \sin t \cos t$  است، می‌توان گفت منحنی  $C$  روی سطح  $z = 2xy$  قرار دارد. همچنین  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$  بنابراین  $C$  مرز قسمتی از سطح  $z = 2xy$  است که داخل استوانه‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  قرار می‌گیرد. به این ترتیب با فرض  $g: z - 2xy = 0$  داریم:

$$\vec{n} d\sigma = \pm \frac{(-2y, -2x, +1)}{1} dydx = +(-2y, -2x, +1) dydx$$

چون قائم رو به بالاست، پس باید علامت مثبت در نظر گرفته شود. حالا باید  $\text{curl} \vec{F}$  را حساب کنیم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy + \sqrt{1+x^2} & xy + \sqrt{1+y^2} + x & \sqrt{1+z^2} \end{vmatrix} = (y-x+1)\vec{k}$$

پس  $\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = [(y-x+1) \times 1] dydx$  و با استفاده از قضیه استوکس می‌دانیم:  $\vec{F} = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$  است، بنابراین اگر دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  را که تصویر  $S$  بر صفحه‌ی  $xoy$  است با  $D$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (y-x+1) dydx = -\iint_D x dydx + \iint_D y dydx + \iint_D dydx = 0 + 0 + \iint_D dydx = \pi$$

توضیح: به علت تقارن ناحیه‌ی  $D$  و فرد بودن  $x$  در انتگرال اول و فرد بودن  $y$  در انتگرال دوم، حاصل انتگرال برای آن‌ها صفر است.

۸- گزینه «۱» چون  $S$  سطح بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه دیورژانس کمک بگیریم.

$$\text{div} \vec{F} = 2x - 1 + 4y + 3 - 2z + 4 = 2(x + 2y - z + 3) \Rightarrow \text{شار} = \iiint_V 2(x + 2y - z + 3) dv = 2(\bar{x} + 2\bar{y} - \bar{z} + 3)V$$

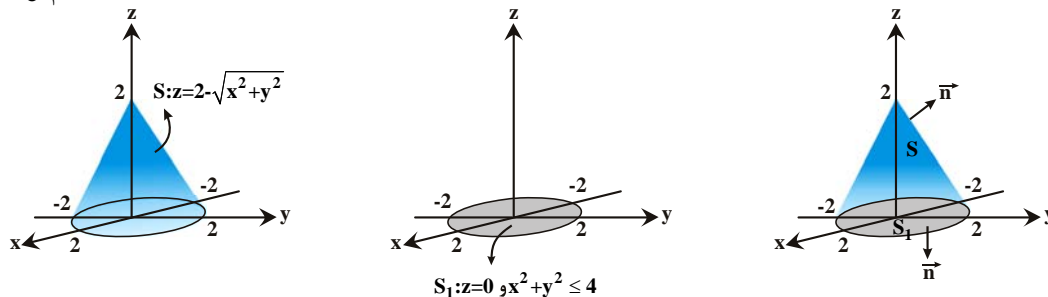
یادآوری: در نوشتن تساوی آخر از اطلاعات قبلی خود از فصل انتگرال‌های چندگانه کمک گرفتیم؛ همان‌طور که قبلاً گفتیم، تساوی‌های زیر را داریم:

$$\iiint_V x dv = \bar{x} \iiint_V dv = \bar{x} V, \quad \iiint_V y dv = \bar{y} \iiint_V dv = \bar{y} V, \quad \iiint_V z dv = \bar{z} \iiint_V dv = \bar{z} V$$

۹- گزینه «۴» سطح  $S$  بسته نیست، اما می‌توان با اضافه کردن بخشی از سطح  $z=0$  (بخشی که از تقاطع با  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  حاصل می‌شود) آن را به

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = I_1 - I_2$$

سطحی بسته تبدیل کرد و تساوی مقابل را نوشت:



$$I_1 = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_V (6z) dv$$

انتگرال  $I_1$  را می‌توان با استفاده از قضیه دیورژانس به دست آورد:

برای ناحیه‌ی داده شده در مختصات استوانه‌ای داریم:  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 2$  و همچنین  $0 \leq z \leq 2-r$ ، پس خواهیم داشت:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2-r} 6z r dz dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z^2 \Big|_0^{2-r} dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(2-r)^2 dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\lambda r - 12r^2 + 6r^3 - r^4) dr d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \left( 4r^2 - 4r^3 + \frac{3}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right) \Big|_0^2 d\theta = 2(2\pi) \left( \frac{\lambda}{5} \right) = \frac{32}{5} \pi = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - 4r^2 + r^3) dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left( 2r^2 - \frac{4}{3}r^3 + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\theta = 3(2\pi) \left( \frac{4}{3} \right) = 8\pi$$

$$\vec{n} = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

روی سطح  $S_1$  با توجه به معادله  $z=0$  داریم:

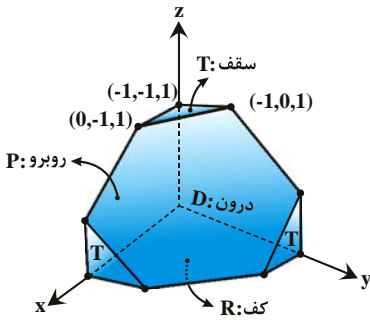
$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\iint_{S_1} r z^2 d\sigma = \iint_{S_1} (0) d\sigma = 0$$

بنابراین:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 8\pi - 0 = 8\pi$$

پس:





۱۰- گزینه «۳» فرض کنیم  $S$  ناحیه‌ای از فضا باشد که توسط وجوه باقی مانده از مکعب و به همراه صفحه‌ی  $P: x + y + z = 0$  محدود می‌شود. ما مقدار انتگرال را فقط روی وجوه‌های باقی مانده از مکعب می‌خواهیم. اما موقتاً سطح  $P$  را به آن‌ها اضافه می‌کنیم تا یک سطح بسته به دست آید.

سطح  $S$  که مورد نظر ما در این سؤال است از ۳ مثلث مانند  $T$  و ۳ پنج ضلعی مانند  $R$  و شش وجهی  $P$  تشکیل شده است که ناحیه‌ی  $D$  را محدود کرده‌اند.

دقت کنید که صفحه‌ی  $P: x + y + z = 0$  مکعب مورد نظر را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم کرده است و ما فقط نیمه‌ی پایینی را داریم. حجم کل این مکعب برابر است با  $2 \times 2 \times 2 = 8$  بنابراین حجم ناحیه‌ی  $D$  برابر ۴ است. روی این سطح بسته از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} \, dv = 3 \times (\text{حجم}) = 12$$

توجه: مکعب  $-1 \leq x \leq 1$ ،  $-1 \leq y \leq 1$  و  $-1 \leq z \leq 1$  نسبت به همه‌ی صفحات و محورهای مختصات تقارن دارد. در معادله‌ی صفحه‌ی  $x + y + z = 0$  اگر جای متغیرها (نام متغیرها) را با هم عوض کنید معادله تغییری نمی‌کند. بنابراین، این صفحه، مکعب را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.

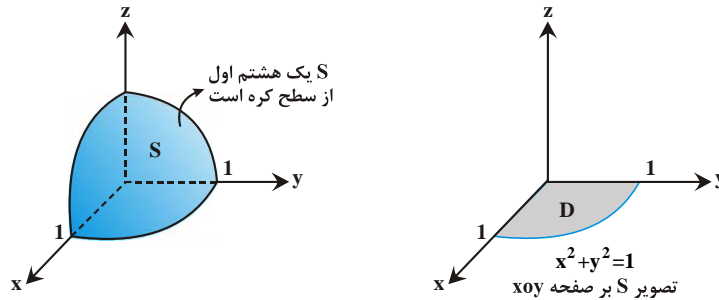
اگر می‌خواهید از این موضوع مطمئن شوید به شکل داده شده دقت کنید. در این شکل از ۳ وجه مکعب، بخش بزرگتر و از ۳ وجه دیگر بخش کوچکتر آن‌ها باقی مانده است. (بخش بزرگ مانند  $R$  و بخش کوچک مانند  $T$ ) پس در نیمه‌ی دیگر مکعب که رسم نشده است نیز از ۳ وجه آن بخش کوچکتر و از ۳ وجه آن بخش بزرگتر باقی می‌ماند.

۱۱- گزینه «۳» منظور از مثلث کروی، قسمتی از سطح کره است که در  $\frac{1}{8}$  اول قرار دارد و مانند یک مثلث خمیده است. تصویر  $S$  بر صفحه‌ی  $xOy$ ،

ناحیه  $D$  می‌باشد که یک ربع دایره به شعاع یک است. در ضمن از معادله‌ی کره باید  $z$  را بر حسب  $x$  و  $y$  به صورت  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  جایگزین کنیم،

$$I = \iint_S (x + y + z) \, dx \, dy = \iint_D (x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \, dx \, dy$$

بنابراین داریم:



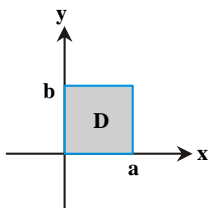
با توجه به ناحیه  $D$ ، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم، در ناحیه‌ی  $D$  داریم  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  و  $0 \leq r \leq 1$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r \cos \theta + r \sin \theta + \sqrt{1 - r^2}) r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 \cos \theta + r^2 \sin \theta + r\sqrt{1 - r^2}) \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^3}{3} (\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{3} (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{3} \right] d\theta = \left[ \frac{1}{3} (\sin \theta - \cos \theta) + \frac{1}{3} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{3} \sin(0) + \frac{1}{3} \cos(0) + 0 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\pi + 4}{6} \end{aligned}$$

۱۲- گزینه «۴» معادله‌ی رویه‌ی  $S: z^2 = 2xy$  نشان می‌دهد که  $S$  دارای دو نیمه‌ی متقارن در نواحی  $z \geq 0$  و  $z \leq 0$  است. زیرا با تبدیل  $z$  به  $-z$  معادله‌ی آن عوض نمی‌شود. ما مساحت نیمه‌ی بالایی را به دست آورده و جواب را دو برابر می‌کنیم. با توجه به معادله‌ی  $S$  داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA = \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}} \, dA = \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}} \, dA = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2xy}} \, dA = \sqrt{\frac{(x + y)^2}{2xy}} \, dA = \frac{x + y}{\sqrt{2} \sqrt{xy}} \, dA$$

سایه‌ی  $S$  روی صفحه  $xOy$  یک مستطیل است که توسط خطوط  $x = a$ ،  $y = 0$ ،  $x = 0$ ،  $y = b$  مشخص شده است. این ناحیه را  $D$  می‌نامیم.



$$\begin{aligned} (\text{مساحت } S) &= 2 \times \iint_D \frac{x + y}{\sqrt{2} \sqrt{xy}} \, dy \, dx = \sqrt{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) \, dy \, dx = \sqrt{2} \int_0^a \left( 2\sqrt{x} \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^b \, dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^a \left( 2\sqrt{b} \sqrt{x} + \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx = \sqrt{2} \left[ \frac{4}{3} \sqrt{b} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} b^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} \right] \Big|_0^a = \sqrt{2} \left[ \frac{4}{3} a \sqrt{a} \sqrt{b} + \frac{4}{3} b \sqrt{b} \sqrt{a} \right] = \frac{4\sqrt{2}ab}{3} (a + b) \end{aligned}$$



۱۳- گزینه «۳» وقتی S یک سطح بسته باشد، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم اما دقت کنید که زیر انتگرال به صورت  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  نیست تا بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، اما می‌توانیم عبارت زیر انتگرال را به این فرم دریاوریم. برای این کار لازم است اول  $\vec{n}$  (بردار قائم یکه و رو به خارج

$$\vec{n} = \frac{(2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + (2z)\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\sqrt{4} \times 1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

سطح S را به دست بیاوریم:

حالا با فرض  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  و تشکیل  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  داریم:

$$Px + Qy + Rz = x + y^2 + z^2$$

خب این عبارت باید مساوی تابع زیر انتگرال باشد و لذا داریم:

راحت‌ترین انتخاب  $P = 1$ ،  $Q = y$  و  $R = z^2$  است، پس داریم:

$$\vec{F} = \vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$$

حالا می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم:

برای محاسبه انتگرال فوق از مختصات کروی بهره می‌گیریم، همان‌طور که می‌دانید در مختصات کروی،  $z = \rho \cos \phi$  است. همچنین زاویه دستگاه کروی  $\rho^2 \sin \phi$  است. درون کره‌ی واحد داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ،  $0 \leq \phi \leq \pi$  و  $0 \leq \rho \leq 1$  بنابراین داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (1 + 2\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} + \frac{2\rho^3}{4} \cos \phi \right]_0^1 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos \phi \right) \sin \phi \, d\phi \right)$$

$$= (2\pi) \left[ -\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos \phi \right) \right]_0^\pi \Rightarrow I = (2\pi) \left[ -\left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] = 2\pi$$

۱۴- گزینه «۳» یادآوری می‌کنیم که برای میدان برداری  $\vec{F} = (M, N, P)$  داریم:

$$\iint_S M \, dy \, dz + N \, dx \, dz + P \, dx \, dy = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

در این مثال میدان برداری  $\vec{F} = (0, e^{-2z}, e^{-2z})$  را داریم:

سطح  $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$  تمام سطح مخروط در  $z \geq 0$  است. بنابراین سایه‌ی S بر صفحه‌ی xoy برابر است با تمام صفحه‌ی xoy. این سایه را D می‌نامیم. در ناحیه‌ی D داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq \infty$ .

با توجه به آن که معادله‌ی سطح S به صورت  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  است. داریم:  $g: z^2 - x^2 - y^2 = 0$ . در نتیجه داریم:

$$\vec{n} \, d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} \, dA = \frac{(-2x, -2y, 2z)}{2z} \, dA = (-x, -y, z) \frac{1}{z} \, dA$$

البته Z برحسب X و Y و به صورت  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  نوشته می‌شود. اکنون با محاسبه‌ی  $\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$  حل انتگرال را ادامه می‌دهیم:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_D (0 - ye^{-2z} + ze^{-2z}) \frac{1}{z} \, dA = \iint_D \frac{-y + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-2\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-r \sin \theta + r}{r} e^{-2r} r \, dr \, d\theta$$

حدود انتگرال اعداد ثابت هستند پس می‌توانیم انتگرال‌های یگانه را از هم جدا کنیم:

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta + 1) \, d\theta \times \int_0^\infty re^{-2r} \, dr = [(\cos \theta + \theta)]_0^{2\pi} \times \frac{1!}{2^2} = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

نکته: برای حل انتگرال  $\int_0^\infty re^{-2r} \, dr$  علاوه بر جدول جزء‌به‌جزء می‌توانید از تساوی زیر که از فرمول تابع گاما به دست می‌آید، استفاده کنید:

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar} \, dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

۱۵- گزینه «۳» دقت کنید که S بخشی از پوسته‌ی سهمی‌گون  $z = x^2 + y^2$  است، که توسط

صفحه‌ی  $z = 1$  جدا شده است. برای پیدا کردن تصویر S بر صفحه xoy آن را با صفحه  $z = 1$  برخورد می‌دهیم.

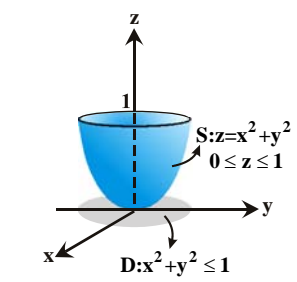
$$\begin{cases} z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

پس تصویر S بر صفحه xoy، درون دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  است که این ناحیه را D می‌نامیم. با توجه به معادله‌ی  $S: z = x^2 + y^2$  داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dy \, dx = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dy \, dx$$

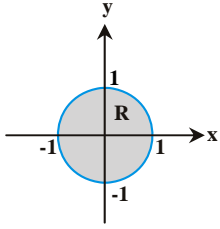
$$I = \iint_S |xyz| \, d\sigma = \iint_D |xy(x^2 + y^2)| \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dy \, dx$$

بنابراین با تغییر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری از S به D داریم:



اکنون با توجه به آن که ناحیهی  $D$  نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  متقارن است و تابع انتگرالده نسبت به  $x$  و  $y$  زوج است، می توانیم مقدار انتگرال را روی ربع اول ناحیه  $D$  به دست آورده و جواب را چهار برابر کنیم.

در ربع اول ناحیه  $D$  داریم  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  و  $0 \leq r \leq 1$ .



$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r \cos \theta)(r \sin \theta) r^2 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^4 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1+4r^2} (r dr d\theta)$$

با فرض  $u = 1 + 4r^2$  داریم  $r^2 = \frac{1}{4}(u-1)$  و  $du = 8r dr$ ، بنابراین انتگرال نسبت به  $r$  به شکل زیر حل می شود:

$$I_1 = \int r^4 \sqrt{1+4r^2} (r dr) = \int \frac{1}{6}(u-1)^2 (\sqrt{u} \frac{du}{8}) = \frac{1}{48} \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{1}{48} \left( \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{48} \left[ \frac{2}{7} (1+4r^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} (1+4r^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

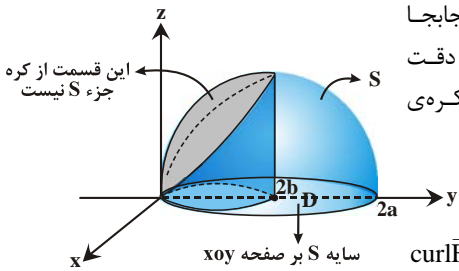
$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{48} \left[ \frac{2}{7} (1+4r^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} (1+4r^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1$$

با جایگذاری کران های بالا و پایین داریم:

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{48} \left[ \frac{2}{7} (25\sqrt{5}) - \frac{4}{5} (5\sqrt{5}) + \frac{2}{3} (\sqrt{5}) - \left( \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{125\sqrt{5}-1}{840}$$

بنابراین با جایگذاری جواب این انتگرال و ادامه ی محاسبه ی انتگرال  $I$  داریم:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{125\sqrt{5}-1}{840} \cos \theta \sin \theta d\theta = 4 \left( \frac{125\sqrt{5}-1}{840} \right) \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$



**۱۶- گزینه «۱»** برای آنکه رویه ی  $S$  و استوانه ی  $x^2 + y^2 = 2bx$  بهتر دیده شوند، محورهای  $x$  و  $y$  را جابجا کرده ایم. با توجه به آن که  $a > b > 0$  است، پس قطر استوانه از کره کمتر است و داخل آن قرار می گیرد. دقت کنید که  $S$  بخشی از کره است که خارج از استوانه قرار دارد و شرط  $z \geq 0$  باعث می شود که فقط نیمکره ی بالایی را در نظر داشته باشیم. ابتدا  $\text{curl} \vec{F}$  و  $\vec{n}$  را حساب کرده و ضرب داخلی آن ها را به دست می آوریم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 2(y-z)\vec{i} - 2(x-z)\vec{j} + 2(x-y)\vec{k}$$

حالا با توجه به این که  $g: x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$  به صورت  $\vec{g}$  داریم، و با فرض این که ناحیه در صفحه  $xoy$  تصویر شود،  $\vec{p} = \vec{k}$  و لذا  $|\vec{g} \cdot \vec{k}| = 2z$  و بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla} g = (2x-2a)\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{p}|} dA = \frac{2[(x-a)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}]}{2z} dA = \left[ \frac{(x-a)}{z} \vec{i} + \frac{y}{z} \vec{j} + \vec{k} \right] dA$$

و لذا  $\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$  به شکل زیر حساب می شود:

$$\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = [2(y-z)\vec{i} - 2(x-z)\vec{j} + 2(x-y)\vec{k}] \cdot \left( \frac{x-a}{z} \vec{i} + \frac{y}{z} \vec{j} + \vec{k} \right) dA = \left[ \frac{2(y-z)(x-a)}{z} - \frac{2y(x-z)}{z} + 2(x-y) \right] dA$$

$$= \left[ \frac{2yx - 2ya - 2zx + 2za - 2yx + 2yz}{z} + 2x - 2y \right] dA = \left[ \frac{2a(z-y) + 2yz - 2zx + 2xz - 2yz}{z} \right] dA = 2a \left( \frac{z-y}{z} \right) dA = 2a \left( 1 - \frac{y}{z} \right) dA$$

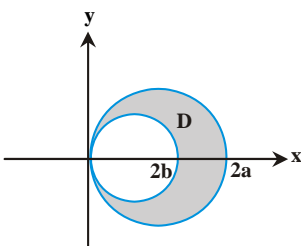
بنابراین انتگرال زیر را داریم:

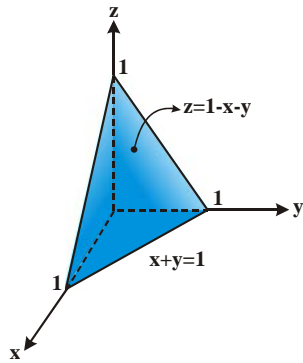
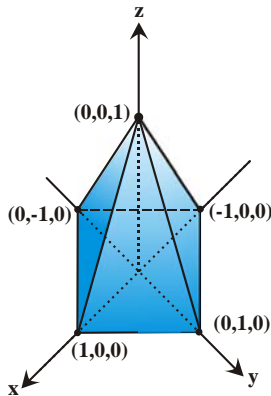
$$I = 2a \iint_D \left( 1 - \frac{y}{z} \right) dy dx = 2a \iint_D \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{2ax - x^2 - y^2}} \right) dy dx$$

ناحیه ی  $D$  ناحیه ی درون دایره ی  $x^2 + y^2 = 2ax$  و خارج از دایره ی  $x^2 + y^2 = 2bx$  است. در هر دوی این معادلات تبدیل  $y$  به  $-y$  معادله را تغییر نمی دهد، پس  $D$  نسبت به محور  $x$  متقارن است.

از طرفی عبارت  $\frac{y}{\sqrt{2ax - x^2 - y^2}}$  نسبت به  $y$  فرد است. بنابراین انتگرال آن روی  $D$  صفر است.

$$I = 2a \iint_D dy dx = 2a \times (\text{مساحت } D) = 2a(\pi a^2 - \pi b^2) = 2a\pi(a^2 - b^2)$$





۱۷- گزینه «۳» سطح  $S$  که در شکل مقابل رسم شده است، یک  $\lambda$  وجهی است که نسبت به همه‌ی صفحات مختصات تقارن دارد. در معادله‌ی  $S: |x| + |y| + |z| = 1$  تبدیل  $x, y, z$  به  $-y, -x$  و  $-z$  تغییری ایجاد نمی‌کند. به همین دلیل از متقارن بودن  $S$  اطمینان داریم. از طرفی  $S$  یک سطح بسته است. بنابراین می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. فرض کنیم  $V$  ناحیه‌ی درون  $S$  باشد، با استفاده از قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

تابع  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  در نقاط  $(\pm x, \pm y, \pm z)$  مقادیر یکسانی دارد. بنابراین می‌توانیم مقدار انتگرال را روی  $\frac{1}{8}$  اول از ناحیه  $V$  به دست آورده و حاصل را هشت برابر کنیم. در  $\frac{1}{8}$  اول از ناحیه  $V$  داریم  $x, y, z \geq 0$  و  $x + y + z = 1$  و اگر این صفحه را با صفحه‌ی  $z = 0$  برخورد دهیم، خط  $x + y = 1$  به دست می‌آید. به این ترتیب قاعده‌ی این شکل یک مثلث است که به محورهای مختصات  $x$  و  $y$  و خط  $x + y = 1$  محدود می‌شود. در این ناحیه به وضوح داریم  $0 \leq x \leq 1 - y$  و  $0 \leq y \leq 1 - x$ ؛ کران‌های  $z$  نیز از معادلات  $z = 0$  و  $z = 1 - x - y$  معلوم می‌شود.

$$I_1 = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

انتگرال را می‌توان به طور عادی حل کرد که در این صورت محاسبات کمی طولانی و احتمالاً توأم با خطاست! اما اگر از نکته‌ی تقارن متغیرهای  $x, y, z$  و نسبت به یکدیگر (ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به این سه متغیر متقارن است، اگر جای  $x, y, z$  را با یکدیگر عوض کنیم، هیچ تغییری در معادلات ناحیه یعنی: ناحیه  $x + y + z \leq 1$  و  $x, y, z \geq 0$  ایجاد نمی‌شود، و بنابراین می‌توانیم تساوی مقابل را بنویسیم: پس کافی است یکی از انتگرال‌ها را حساب کرده و حاصل را در ۳ ضرب کنیم، بنابراین داریم:

$$I_1 = 3 \times 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2 dz dy dx = 9 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 (1-x-y) dy dx = 9 \int_0^1 \left[ x^2 (1-x)y - \frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = \frac{9}{2} \int_0^1 x^2 (1+x^2-2x) dx = \frac{9}{2} \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \frac{9}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

البته این عدد حاصل انتگرال روی  $\frac{1}{8}$  اول است، بنابراین جواب برابر است با هشت برابر آن که برابر با  $\frac{6}{5} = 1.2$  می‌شود.

۱۸- گزینه «۳» فرض کنیم  $S$  سطح مربع شکلی باشد که از نیم‌کره‌ی بالایی جدا شده است.

تصویر  $S$  بر صفحه‌ی  $xOy$  مربع  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$  است. با توجه به آن که سطح  $S$  به معادله‌ی  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  نسبت به همه‌ی محورهای مختصات و نسبت به خط  $y = x$  تقارن دارد (تعویض نام  $x$  و  $y$  با هم معادله را تغییر نمی‌دهد)، می‌توانیم مساحت بخشی از  $S$  که تصویر آن در ربع اول و بین محور  $x$  ها و خط  $y = x$  قرار دارد را محاسبه کرده و حاصل را هشت برابر کنیم. این بخش را ناحیه  $D$  می‌نامیم.

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dA = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dA = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dA$$

روی سطح  $S$  داریم:

در ناحیه  $D$  داریم:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

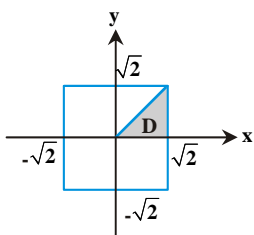
روی خط  $x = \sqrt{2}$  داریم  $r \cos \theta = \sqrt{2}$  بنابراین  $r = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$  است، پس در ناحیه  $D$  خواهیم داشت:  $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$ .

$$S = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ -\sqrt{4 - r^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}} \sqrt{2} \sec \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 2 - \sqrt{4 - 2 \sec^2 \theta} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( 2 - \sqrt{2} \sec \theta \right) d\theta$$

اکنون از تغییر متغیر  $\sec \theta = \sqrt{2} \sin t$  استفاده می‌کنیم. به ازای  $\theta = 0$  داریم  $t = \frac{\pi}{4}$  و به ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  داریم  $t = \frac{\pi}{2}$ ، همچنین:

$$\sec \theta \tan \theta d\theta = \sqrt{2} \cos t dt \Rightarrow \sqrt{2} \sin t \sqrt{2 \sin^2 t - 1} d\theta = \sqrt{2} \cos t dt \Rightarrow d\theta = \frac{\cos t}{\sin t \sqrt{2 \sin^2 t - 1}} dt$$



۱۹- گزینه «۳» از قضیهی استوکس استفاده می‌کنیم؛ هر چند می‌توان به روش مستقیم هم انتگرال خط را حساب کرد. اولاً با نگاهی گذرا معلوم است که  $C$ ، منحنی بسته‌ای در صفحه‌ی  $g: x+y+z=3$  است. به ضابطه‌ی منحنی  $C$  دقت کنید که جهت آن با نگاه از بالا، پادساعتگرد و یا همان مثلثاتی است، (در واقع هرگاه  $x = x_0 + a \cos t$  و  $y = y_0 + b \sin t$  باشد و  $a$  و  $b$  مثبت باشند، جهت حرکت روی منحنی  $C$  با نگاه از بالا، همان جهت مثلثاتی خواهد بود. اما اگر جای  $\sin t$  و  $\cos t$  با هم عوض شود یا علامت  $a$  و  $b$  قرینه شود، جهت عکس مثلثاتی را خواهیم داشت.) حالا بردار  $\vec{n}$  را برای این

$$g: x+y+z-3=0 \Rightarrow \vec{\nabla}g = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{n}d\sigma = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g \cdot \vec{k}|} dA = (1,1,1)dA$$

سطح وقتی که  $\vec{p} = \vec{k}$  باشد، حساب می‌کنیم:

حالا  $\text{curl} \vec{F}$  را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x & x^2 + e^x & z^2 e^z \end{vmatrix} = (2x + e^x - e^x)\vec{k} = (2x)\vec{k} \Rightarrow \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = (2x)dA \Rightarrow I = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D (2x)dA$$

خُب حالا باید انتگرال دوگانه پدید آمده را حل کنیم، این کار را به دو روش انجام می‌دهیم:

روش اول: برای محاسبه‌ی  $\iint_D 2x dA$ ، ابتدا از معادلات پارامتری  $x = 1 + \cos t$  و  $y = 1 + \sin t$  خواهیم داشت  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ . با تغییر دستگاه

به صورت  $(u, v) = (x-1, y-1)$  ژاکوبین دستگاه جدید برابر است با:  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$  و معادله‌ی  $D$  در این دستگاه به صورت  $u^2 + v^2 = 1$  است یعنی دایره‌ی واحد به دست می‌آید. دقت کنید که  $u = x-1$  پس  $x = u+1$  است. اکنون از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_D 2x dA = 2 \iint_D (u+1) du dv = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta + 1) r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{2} \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos \theta}{2} + \frac{1}{2} \right) d\theta = 2 \left( \frac{\sin \theta}{2} + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

روش دوم: از معادلات پارامتری  $x = 1 + \cos t$  و  $y = 1 + \sin t$  معلوم می‌شود که  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  است. بنابراین تصویر  $S$  روی صفحه  $xoy$  که آن را  $D$  نامیده‌ایم، دایره‌ای به مرکز  $(1,1)$  و شعاع یک است. مرکز هندسی این ناحیه همان نقطه‌ی  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$  و مساحت آن  $\pi$  است.

$$\iint_D 2x dA = 2 \times \bar{x} \times (\text{مساحت } D) = 2 \times 1 \times \pi = 2\pi$$

۲۰- گزینه «۴» با توجه به ناحیه داده شده بهتر است از قضیه دیورژانس کمک بگیریم:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) + \sqrt{x^2+y^2} = 2 \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) - 2 \left( \frac{z}{x^2+y^2} \right) + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{شار} = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dv = \iiint_V \left( \frac{2x}{x^2+y^2} \right) - \frac{2z}{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} dv$$

با توجه به اینکه  $\frac{2x}{x^2+y^2}$  فرد است و ناحیه انتگرال گیری نسبت به  $x$  و  $y$  متقارن است، پس حاصل انتگرال مربوط به آن صفر است. اما برای قسمت دوم

و سوم با توجه به وجود عبارت  $x^2+y^2$  بهتر است از مختصات استوانه‌ای کمک بگیریم:

$$\text{شار} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-1}^1 \left( -\frac{2z}{r^2} + r \right) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-1}^1 \left( -\frac{2z}{r} + r^2 \right) dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left[ -\frac{2z^2}{2r} + r^2 z \right]_{-1}^1 dr d\theta$$

$$\Rightarrow \text{شار} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left( -\frac{4}{r} + 2r^2 + \frac{1}{r} + r^2 \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \left( 2r^2 - \frac{3}{r} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \left[ \frac{2r^3}{3} - 3 \ln r \right]_1^2 = 2\pi [7 - 3 \ln 2]$$

۲۱- گزینه «۳» سطح  $S$  بسته است، بنابراین تلاش می‌کنیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. ابتدا باید میدان برداری  $\vec{F} = (P, Q, R)$  را طوری پیدا

کنیم که تابع زیر انتگرال برابر با  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  باشد. با توجه به معادله بیضی گون داریم:

$$g: ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|} = \frac{2ax\vec{i} + 2by\vec{j} + 2cz\vec{k}}{\sqrt{4a^2x^2 + 4b^2y^2 + 4c^2z^2}} = \frac{ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}}$$

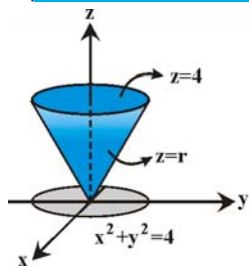
$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}} \Rightarrow (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot \left( \frac{ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}}$$

پس باید کاری کنیم که  $axP + byQ + czR = 1$  باشد. اگر به معادله بیضی گون دقت کنید، انتخاب  $R = z$  و  $Q = y$ ،  $P = x$  مناسب است پس داریم:

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1=3$$

$$I = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V 3 dv = 3 \times (\text{حجم بیضی گون}) = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

توجه کنید که معادله بیضی گون را می‌توان به صورت  $1 = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2}$  نوشت پس شعاع‌های آن به ترتیب  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{b}}$  و  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  هستند.



۲۲- گزینه «۴» S یک سطح بسته است، فرض کنیم V ناحیه‌ی درون S باشد، طبق قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv$$

$$\vec{F} = xz\vec{i} + xyz^2\vec{j} + 3z\vec{k} \Rightarrow \text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = z + xz^2 + 3$$

$$I = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V (z + xz^2 + 3) dv$$

تابع زیر انتگرال از مجموع سه جمله تشکیل شده است که از میان آن‌ها جمله‌ی  $xz^2$  نسبت به x فرد است. با توجه به آن که معادله‌ی  $z^2 = x^2 + y^2$  به ازای  $\pm x$  تغییری نمی‌کند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که انتگرال این جمله برابر با صفر می‌شود. بنابراین داریم:  $I = \iiint_V (z + 3) dv$ . برای ناحیه‌ی محدود به مخروط و صفحه معمولاً از دستگاه استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. از برخورد صفحه‌ی  $z = 4$  و استوانه‌ی  $z^2 = x^2 + y^2$  به دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 4$  می‌رسیم. پس  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 2$  است. حدود z هم عبارتند از  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$  و  $z = 4$ . پس داریم:

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r}^4 (z + 3) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [rz^2 + 3z]_r^4 r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 12r - 2r^2 - 3r) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 - 2r^3 + 9r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} [r^3/3 - 2r^4/4 + 9r^2/2]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (16/3 - 8 + 18) d\theta = \int_0^{2\pi} 16 d\theta = 16 \times 2\pi = 32\pi$$

$$\Rightarrow I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 32\pi$$

۲۳- گزینه «۱» محاسبه‌ی انتگرال روی سطح S به طور مستقیم دشوار و وقت‌گیر است. زیرا باید چهار انتگرال سطح را روی چهار تکه‌ی S

به صورت جداگانه حساب کنیم. اما می‌توانیم از بسته بودن سطح S استفاده کرده و قضیه‌ی دیورژانس را به خدمت بگیریم. در ضمن دیورژانس  $\vec{F}$  ضابطه‌ی

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy) = y + 2y + 0 = 3y$$

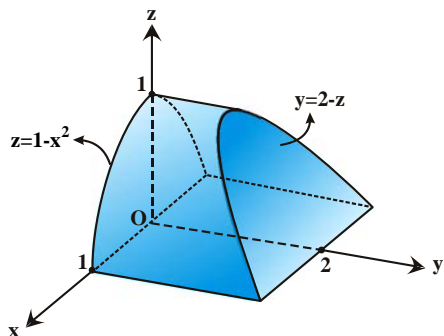
بسیار ساده‌تری نسبت به خود  $\vec{F}$  دارد:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V 3y dv$$

بنابراین از قضیه‌ی دیورژانس برای تبدیل انتگرال سطح موردنظر به انتگرالی سه‌گانه استفاده می‌کنیم:

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی این انتگرال سه‌گانه استفاده از مختصات دکارتی است. کران‌های x از برخورد رویه‌ی  $z = 1 - x^2$  با صفحه‌ی  $z = 0$  به دست می‌آیند که عبارتند از  $x = -1$  و  $x = 1$ . کران پایین z به وضوح  $z = 0$  است. کران بالای z از برخورد صفحات  $y + z = 2$  و  $y = 0$  به صورت  $z = 2$  به دست می‌آید. برای متغیر y از صفحات  $y = 0$

و  $y + z = 2$  دو کران به صورت  $y = 0$  و  $y = 2 - z$  به دست می‌آید. حدود x اعداد ثابت هستند  $-1 \leq x \leq 1$ ، حدود z به صورت  $0 \leq z \leq 1 - x^2$  به دست آمده‌اند و به x بستگی دارند، حدود y هم به صورت  $0 \leq y \leq 2 - z$  هستند و برحسب z نوشته شده‌اند. در نتیجه باید ترتیب  $dydzdx$  را نوشته و حل کنیم:



$$\iiint_V 3y dv = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y dy dz dx = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-z} dz dx$$

$$= 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} dz dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[ -\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 ((x^2+1)^3 - 8) dx$$

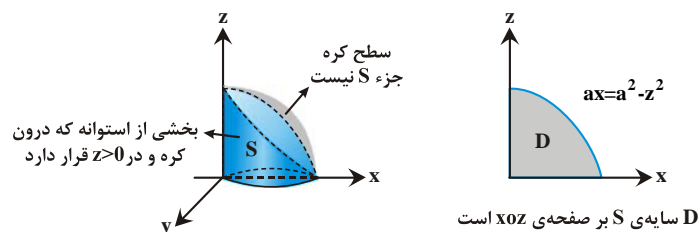
$$\underline{\underline{\text{زوج بودن زیر انتگرال}}} - \int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7) dx = -\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{5} + 1 - 7\right) = \frac{184}{35}$$

۲۴- گزینه «۳» استوانه‌ی  $S: x^2 + y^2 = ax$  نسبت به محور yها تقارن دارد به این معنا که نیمی از آن در  $y \geq 0$  و نیمی از آن در  $y \leq 0$  قرار دارد.

همچنین نیمی از این کره و استوانه در  $z \geq 0$  و نیمی در  $z \leq 0$  قرار دارد. بنابراین ما مساحت بخشی از استوانه را که درون کره و در  $\frac{1}{8}$  اول قرار داد محاسبه و جواب را ۴ برابر می‌کنیم. دقت کنید که همه‌ی سطح استوانه در  $x \geq 0$  قرار دارد و هیچ بخشی از آن در  $x < 0$  قرار ندارد. (اگر شرط  $a > 0$  قرار داده نشده بود باید حاصل انتگرال را در یک عدد ۲ دیگر ضرب می‌کردیم و در واقع جواب را ۸ برابر می‌کردیم.)

برای آن که سایه‌ی S روی صفحه‌ی xoz را درست تشخیص دهیم باید مقطع استوانه و کره را حساب کنیم.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 + ax = a^2$

به عبارتی سهمی  $ax = a^2 - z^2$  روی xoz سایه‌ی S را مشخص می‌کند.



روی سطح  $S: x^2 + y^2 - ax = 0$  داریم:

$$d\sigma = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz = \sqrt{1 + \left(\frac{2x-a}{2y}\right)^2} dx dz = \sqrt{\frac{4y^2 + 4x^2 - 4ax + a^2}{4y^2}} dx dz = \frac{\sqrt{a^2 - 4ax + 4x^2}}{2\sqrt{ax - x^2}} dx dz = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}} dx dz$$

$$\text{مساحت} = \iint_S d\sigma = \frac{a}{2} \iint_D \frac{dx dz}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a}{2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - 4ax}} \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}} dz dx = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - 4ax}}{\sqrt{ax - x^2}} dx = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{\sqrt{a} \sqrt{a-x}}{\sqrt{x} \sqrt{a-x}} dx$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{a}{2} \sqrt{x} \Big|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

**۲۵- گزینه ۴** میدان برداری  $\vec{F}(x, y, z)$  در مبدأ مختصات، ناپیوسته است. اگر سطح بسته  $S$ ، شامل مبدأ نباشد و مبدأ درون آن قرار نگرفته باشد، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \text{div} \vec{F} dv$$

$$\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}} (y - z, z - x, x - y) \quad \text{دیورژانس } \vec{F} \text{ را حساب می‌کنیم. می‌دانیم که } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ است.}$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{F} = -\frac{\alpha}{2} (2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} (y - z) - \frac{\alpha}{2} (2y)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} (z - x) - \frac{\alpha}{2} (2z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} (x - y)$$

$$= -\alpha (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} [x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)] = -\alpha (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} [xy - xz + yz - yx + zx - zy] = 0$$

$$I = \iiint_D (0) dv = 0 \quad \text{بنابراین اگر } S \text{ سطحی بسته باشد که مبدأ مختصات روی آن و درون آن قرار نگرفته است، خواهیم داشت:}$$

حالا فرض کنیم  $S$  سطحی بسته باشد که مبدأ درون آن قرار گرفته است. دیگر نمی‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم زیرا  $\vec{F}$  در مبدأ ناپیوسته است. اما از آنجا که  $\text{div} \vec{F} = 0$  است، می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که مقدار انتگرال روی هر سطح بسته که مبدأ درون آن باشد، برابر است. پس می‌توانیم به جای سطح  $S$ ، یک کره به شعاع دلخواه و مرکز مبدأ انتخاب کنیم. فرض کنیم  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  باشد. در این صورت  $\vec{n} = (x, y, z)$  است.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{r^\alpha} [x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)] = \frac{1}{r^\alpha} [xy - xz + yz - yx + zx - zy] = 0 \quad \text{حالا ضرب داخلی } \vec{F} \cdot \vec{n} \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (0) d\sigma = 0 \quad \text{بنابراین در این حالت هم داریم:}$$

پس چه مبدأ درون  $S$  باشد و چه نباشد، حاصل انتگرال صفر می‌شود.

**۲۶- گزینه ۳**  $S$  یک سطح بسته است. فرض کنیم  $V$  ناحیه درون  $S$  باشد. از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{F} dv = \iiint_V 3 dv = 3 \times (V \text{ حجم})$$

$$V \text{ حجم} = 3^3 - 1^3 = 27$$

$$I = 3 \times 27 = 81 \quad \text{برای محاسبه حجم } V \text{، از حجم مکعب بزرگ، حجم مکعب کوچک را کم می‌کنیم:}$$

$$\text{در نتیجه داریم:}$$

**۲۷- گزینه ۲** فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  برداری ثابت باشد و  $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$  باشد. ابتدا مؤلفه‌های میدان برداری  $\vec{F}$  را مشخص می‌کنیم:

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y) \vec{i} - (a_1 z - a_3 x) \vec{j} + (a_1 y - a_2 x) \vec{k}$$

$$I = \int_C (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \text{با استفاده از قضیه استوکس داریم:}$$

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 z - a_3 y & -a_1 z + a_3 x & a_1 y - a_2 x \end{vmatrix} = 2a_1 \vec{i} + 2a_2 \vec{j} + 2a_3 \vec{k} \Rightarrow \text{curl} \vec{F} = 2(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) = 2\vec{a}$$

ابتدا  $\text{curl} \vec{F}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \iint_S 2\vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = 2 \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \text{با جایگذاری در انتگرال داریم:}$$





۲۸- گزینه «۲» از نتیجه قضیه استوکس استفاده می‌کنیم.  $\Sigma$  را قسمتی از صفحه  $z=1$  می‌گیریم که داخل رویه  $z=r^2$  قرار دارد. چون قائم  $\Sigma$  به سمت خارج سطح و دارای مؤلفه سوم منفی است. پس قائم  $S$  به سمت پایین است و انتگرال داده شده با  $\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$  برابر است. چون  $S$  بر صفحه  $z=1$  واقع است  $\vec{n} = -\vec{k}$ ، پس کافیت مؤلفه سوم  $\text{curl} \vec{F}$  را محاسبه کنیم:  $\text{curl} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) = -2 \Rightarrow \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k} = 2$  مؤلفه سوم کرل  $\text{curl} \vec{F} \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$  پس  $I = \iint_S -2 \, ds$  یعنی منفی دو برابر مساحت  $S$  است. ناحیه  $S$  داخل دایره  $r=1$  و مساحت آن  $\pi$  است. بنابراین جواب مسأله  $I = -2\pi$  می‌باشد.

۲۹- گزینه «۲» نشان می‌دهیم که گزینه‌ی (۲) همواره صحیح نیست. برای این کار کافیت مثالی پیدا کنیم که نادرست بودن این گزینه را نشان دهد. فرض کنیم  $\vec{r} = (x, y, z)$  و  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  اندازه‌ی بردار  $\vec{r}$  باشد. میدان برداری  $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$  را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های  $\vec{F}$  به این صورت هستند:

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

این میدان برداری در مبدأ تعریف نشده است اما در هر نقطه به جز مبدأ تعریف شده و مشتق‌پذیر است. همچنین با محاسبه‌ی  $\text{div} \vec{F}$  می‌بینیم که  $\text{div} \vec{F} = 0$  است. برای محاسبه‌ی دیورژانس  $\vec{F}$  توجه کنید که  $r_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$  و به همین ترتیب داریم  $r_y = \frac{y}{r}$  و  $r_z = \frac{z}{r}$ .

$$\vec{F} = (r^{-3}x, r^{-3}y, r^{-3}z) = -3r^{-4} \frac{x}{r}x + r^{-3} - 3r^{-4} \frac{y}{r}y + r^{-3} - 3r^{-4} \frac{z}{r}z + r^{-3}$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{F} = -3r^{-4} \left( \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} \right) + 3r^{-3} = -3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) + 3r^{-3} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0$$

تا اینجا دیدیم که  $\text{div} \vec{F} = 0$  است و  $\vec{F}$  در هر نقطه به جز  $(0,0,0)$  تعریف شده است. حالا ثابت می‌کنیم که هیچ میدان برداری مانند  $\vec{G}$  وجود ندارد که روی  $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)$  تعریف شده باشد و  $\vec{F} = \text{curl} \vec{G}$  باشد. اگر چنین میدان برداری وجود داشته باشد، آن‌گاه برای هر سطح بسته مانند  $S$  خواهیم داشت:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \text{curl} \vec{G} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

اما نشان می‌دهیم که وقتی  $S$  کره‌ی واحد باشد؛  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \neq 0$  است. روی کره‌ی واحد داریم  $g: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  و کره‌ی واحد از دو نیمه‌ی  $z > 0$  و  $z < 0$  تشکیل می‌شود. که آن‌ها را با  $S_1$  و  $S_2$  نشان می‌دهیم. روی  $S_1$  داریم،  $z > 0$ ،  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  پس داریم:

$$\vec{n} \, d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} \, dA = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2z} \, dA = \frac{1}{z}(x, y, z) \, dA$$

البته  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  است. با محاسبه‌ی  $\vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$  داریم:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \left( \frac{x}{r^3} + \frac{y}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right) \frac{1}{z} \, dA = \frac{r^2}{r^3} \frac{1}{z} \, dA = \frac{dA}{rz} = \frac{dA}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{dA}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

تصویر  $S_1$  بر صفحه‌ی  $xoy$  دایره‌ی واحد است روی این دایره داریم  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $0 \leq r \leq 1$  پس داریم:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_D \frac{dA}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{1 - r^2}} = (2\pi) [-\sqrt{1 - r^2}]_0^1 = 2\pi$$

به همین ترتیب روی  $S_2$  هم داریم  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 2\pi$  پس  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 2\pi + 2\pi = 4\pi$  پس به تناقض رسیدیم یعنی یک سطح بسته مانند  $S$  پیدا کردیم

که  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma \neq 0$  است. این نشان می‌دهد که  $\vec{F}$  نمی‌تواند  $\text{curl} \vec{G}$  باشد. گزینه (۲) نادرست است.

۳۰- گزینه «۱» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. ابتدا  $\text{curl} \vec{F}$  را حساب می‌کنیم:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos^2(x^2) & \sin^2 y & z^2 - x \end{vmatrix} = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} g = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

منحنی  $C$  در صفحه‌ی  $g: x + y + z = 1$  قرار دارد، پس داریم:

تصویر این سطح بر صفحه‌ی  $xoy$  توسط معادله‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  مشخص شده است، در ضمن بردار نرمال صفحه‌ی  $xoy$  همان  $\vec{k}$  است، پس داریم:

$$\vec{n} \, d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|} \, dy \, dx = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \, dy \, dx \Rightarrow \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = dy \, dx$$

البته دقت کنید چون جهت طی شدن منحنی ساعتگرد است، پس یک علامت منفی باید پشت انتگرال دوگانه قرار دهیم:

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\iint_D dy \, dx = -(D \text{ مساحت ناحیه}) = -(1) = -\pi$$