سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد ـ سراسری ۱۳۹۴

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی رشته‌های برق ـ مکانیک و کامپیوتر در کتاب اصلی ارائه شده است. علاقه‌مندان می‌توانند سؤالات و پاسخ‌های سایر رشته‌ها را از این قسمت دانلود کنند.

تذکر: سؤالات سال ۷۸ تا ۹۲ تمام رشته‌ها به صورت طبقه‌بندی شده در پایان هر درسنامه کتاب ریاضی مهندسی ارائه شده است.

مهندسی هوا فضا

۱ـ حاصل $\frac{d\bar{z}}{dz}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) وجود ندارد.

۲ـ تصویر نیم‌صفحه پایینی $\operatorname{Im}(z)\le 0$ تحت تبدیل $w=e^{i\alpha}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)$ (که α یک عدد حقیقی ثابت و $\operatorname{Im}(z_0)<0$)، کدام است؟

۱) $|w|\ge 1$ ۲) $|w|\le 1$ ۳) $\operatorname{Im} w\le 0$ ۴) $\operatorname{Im} w\ge 0$

۳ـ تعداد نقاط تکین تابع $f(z)=\begin{cases}\frac{2y}{z} & ;\ |z|\ge 1\\ |z|^2 & ;\ |z|<1\end{cases}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ندارد

۴ـ فرض کنید سری فوریه تابع $y=f(x)$ و $-\pi<x<\pi$ به صورت مقابل باشد: $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)+\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)\right)$، در این صورت مقدار $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos x)^2dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^3}{2}+\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi^3}{2}+\frac{\pi}{6}$

۵ـ اگر با استفاده از انتگرال فوریه داشته باشیم: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\frac{\omega\pi}{2})\cos\omega x}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\cos x & ;\ |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ |x|\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$، انتگرال فوریه تابع $\begin{cases}x\cos x & ;\ |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ |x|\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(1-\omega^2)\sin(\frac{\omega\pi}{2})-2\omega\cos\frac{\omega\pi}{2}}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega x\,d\omega$

۲) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega\pi}{2}\cos\omega x}{(1-\omega^2)^2}d\omega$

۳) $-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}\sin\omega x}{(1-\omega^2)^2}d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega\pi}{2}\sin\omega x}{(1-\omega^2)^2}d\omega$

۶ـ اگر C دایره‌ی یکه به مرکز مبدأ مختصات باشد، کدام‌یک از انتگرال‌های زیر دارای مقدار ناصفر است و این مقدار چقدر است؟

$$I_1=\oint_C\frac{dz}{z^2-2z}\ ,\ I_2=\oint_C\frac{zdz}{z^2+4}\ ,\ I_3=\oint_C\frac{z^3dz}{z^4+4}\ ,\ I_4=\oint_C\frac{zdz}{z+2i}$$

۱) $2\pi i\ ,\ I_4$ ۲) $\pi\ ,\ I_2$ ۳) $-\pi\ ,\ I_3$ ۴) $-\pi i\ ,\ I_1$

۷ـ مقدار انتگرال $\int_C((\bar{z})^2+2|z|)dz$ روی منحنی C که در نیم صفحه فوقانی بر دایره $x^2+y^2=1$ در جهت مثلثاتی قرار دارد، کدام است؟

۱) 0 ۲) $2i$ ۳) -2 ۴) $2\pi i$

۸ـ برای $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}=0$، کدام مورد معادله را به فرم کانونی، تبدیل می‌کند؟

۱) $\begin{cases}\xi=y+2x\\ \eta=y-2x\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\xi=y-(1+i)x\\ \eta=y+(1+i)x\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y+x\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\xi=y-(1+i)x\\ \eta=y+(i-1)x\end{cases}$

۹ــ جواب حاصل از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $x^2u_{xx}+xu_x-u_y=0$ از روش تفکیک متغیرها شامل ترکیب خطی چه توابعی است؟ (k یک عدد حقیقی دلخواه است)

۱) $e^{k^2y}x^{\pm k}\ ,\ e^{-k^2y}\cos(k\,Lnx),\ e^{-k^2y}\sin(k\,Lnx),\ Lnx, 1$

۲) $e^{k^2y}\,Lnx,\ e^{-k^2y}Lnx,\ e^{\pm k^2y}x^{-k}\ ,\ Lnx, 1$

۳) $e^{\pm k^2y}\cos(k\,Lnx),\ e^{\pm k^2y}\sin(k\,Lnx),\ Lnx, 1$

۴) $e^{\pm k^2y}Lnx\ ,\ e^{\pm k^2y}x^{\pm k}\ ,\ Lnx, 1$

۱۰ــ جواب معادله زیر با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی به صورت $ce^{2n^2t}+F(n)$ است. $F(n)$ کدام است؟ (c عدد ثابت است.)

$$\begin{cases} u_t+2u_{xx}=x^2 & ,\ 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0\ ,\ u_x(\pi,t)=0 & ,\ t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) & ,\ 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

۱) $\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi-1}{n^2}$

۲) $\frac{2(-1)^n}{(n+1)^2}$

۳) $\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n^4}$

۴) $\frac{2(-1)^{n+1}}{n^4}$

مهندسی مواد

۱۱ــ پاسخ انتگرال $\oint_C \frac{2z+1}{z^3-iz^2+6z}dz$ که در آن C دایره‌ای به مرکز $3i$ و با شعاع $\frac{1}{3}$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}(12-2i)$

۲) $\frac{\pi}{3}(12+2i)$

۳) $\frac{\pi}{15}(12-2i)$

۴) $\frac{\pi}{15}(12+2i)$

۱۲ــ معادله $u_{xx}-u_{yy}=0$ با کدام‌یک از تغییر متغیرهای زیر به معادله $u_{\xi\eta}=0$ تبدیل می‌شود؟

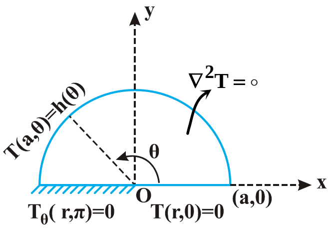
۱) $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases}$

۲) $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=x\end{cases}$

۳) $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=y-x\end{cases}$

۴) $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=y+x^2\end{cases}$

۱۳ــ مسأله مقدار مرزی در داخل یک نیم‌دایره به مرکز O و به شعاع a و با یک قطر واقع بر محور x داده شده است. در داخل نیم‌دایره معادله دیفرانسیل لاپلاس است، همراه با شرایط مرزی داده شده، صورت کلی جواب $T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(r,\theta)$، کدام است؟



۱) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k-\frac{1}{2}}\sin(k-\frac{1}{2})\theta$

۲) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k}\sin(k-\frac{1}{2})\theta$

۳) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k}\sin(2k-1)\theta$

۴) $\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k-\frac{1}{2}}\sin(2k-1)\theta$

۱۴ــ جواب‌های معادله $\sin z=a$، وقتی $a>1$ ثابت باشد، کدام است؟

۱) $z_m=(2m-\frac{1}{2})\pi+iLn(a+\sqrt{a^2-1})$

۲) $z_m=(2m+\frac{1}{2})\pi+iLn(a+\sqrt{a^2-1})$

۳) $z_m=(2m-\frac{1}{2})\pi\pm iLn(a+\sqrt{a^2-1})$

۴) $z_m=(2m+\frac{1}{2})\pi\pm iLn(a+\sqrt{a^2-1})$

۱۵ــ جواب مسأله مقدار اولیه ــ مرزی $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & ,\ 0<x<L \\ u(x,0)=g(x) & ,\ u_t(x,0)=h(x) \\ u(0,t)=0 & ,\ u_x=(L,t)=0 \end{cases}$ در لحظه $t=2KL\ ,\ k\in\mathbb{N}$ (عدد طبیعی)، کدام است؟

۱) $-g(x)$

۲) $(-1)^k g(x)$

۳) $g(x)$

۴) 0

مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بهداشت، ایمنی و محیط زیست ـ بیوتکنولوژی و داروسازی

توضیح: سؤالات ۱۶ تا ۴۰ مشترک بین رشته‌های مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ـ بهداشت، ایمنی و محیط زیست و مهندسی نانومواد، بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد.

سؤالات ۱۶ تا ۲۳ مشترک بین مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ـ بهداشت، ایمنی و محیط زیست می‌باشد.

۱۶ـ با توجه به سری فوریهٔ تابع متناوب $0<x<1\ ,\ f(x)=\sin\pi x\ ,\ f(x+1)=f(x)$ به شکل: $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos2\pi x+\frac{1}{3\times5}\cos4\pi x+\cdots)$ سری فوریهٔ تابع متناوب $|x|<\frac{1}{2}\ ,\ g(x)=\cos\pi x\ ,\ g(x+1)=g(x)$، کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos2\pi x+\frac{1}{3\times5}\cos4\pi x+\cdots)$

۲) $g(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos2\pi x-\frac{1}{3\times5}\cos4\pi x+\cdots-\cdots)$

۳) $g(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos2\pi x-\frac{1}{3\times5}\cos4\pi x+\cdots-\cdots)$

۴) $g(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\times3}\cos2\pi x+\frac{1}{3\times5}\cos4\pi x+\cdots)$

۱۷ـ مقدار $A(\omega)$ در انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ;\ |x|<1\\ 2-|x| & ;\ 1<|x|<2\\ 0 & ;\ |x|>2\end{cases}$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\cos\omega-\cos2\omega}{\pi\omega}$

۲) $\frac{2(\cos2\omega-\cos\omega)}{\pi\omega^2}$

۳) $\frac{2(\cos\omega-\cos2\omega)}{\pi\omega^2}$

۴) $\frac{\cos2\omega-\cos\omega}{\pi\omega}$

۱۸ـ با فرض اینکه تغییر متغیر $u(x,t)=V(x,t)+h(x)$ معادلهٔ $\begin{cases}u_t=u_{xx}+xe^x+\sin x\\ u(0,t)=1\\ u_x(0,t)=2\end{cases}$ را به یک معادلهٔ همگن با شرایط مرزی همگن برای V تبدیل کند، تابع $h(x)$ کدام است؟

۱) $1-e+\cos1$

۲) $-1+e+\sin1$

۳) $-2-e-\sin1$

۴) $+2+e-\cos1$

۱۹ـ یک جواب معادلهٔ $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$، عبارت است از:

۱) $u(x,y)=e^{3x+6y}$

۲) $u(x,y)=e^{3x-2y}$

۳) $u(x,y)=e^{x-3y}$

۴) $u(x,y)=e^{-x+y}$

۲۰ـ مقدار اصلی $(\frac{1-i}{1+i})^{1+i}$، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

۲) $\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

۳) $ie^{-\frac{\pi}{2}}$

۴) $-ie^{\frac{\pi}{2}}$

۲۱ـ فرض کنید $f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی و $v(x,y)=axy^2-2x^3+4xy$ باشد. آنگاه $f'(z)$ برابر کدام است؟

۱) $f'(z)=12xy+4x+i(6y^2-6x^2+4y)$

۲) $f'(z)=-12xy-4x+i(6y^2-6x^2+4y)$

۳) $f'(z)=12xy+4x-i(6y^2-6x^2+4y)$

۴) $f'(z)=-12xy+4x-i(6y^2-6x^2+4y)$

۲۲ـ اگر $I=\oint_C\frac{\cos zdz}{z(z-\pi)^2}$ و C دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد، که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است. در آن صورت مقدار I کدام است؟

۱) $I=-\frac{4}{\pi}i$

۲) $I=-4\pi i$

۳) $I=\frac{4}{\pi}i$

۴) $I=4\pi i$

۲۳ـ بسط لورانت تابع $f(z)=ze^{-\frac{1}{z-2}}$ حول ۲، $z=2$، کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون

۲۴ـ ضرایب سری فوریهٔ تابع متناوب f با دورهٔ تناوب ۲π به صورت $\{a_\circ , a_n , b_n\}$ است. اگر ضرایب سری فوریهٔ $g(x)=f(x)\sin^۲ x$ برابر $\{a'_\circ , a'_n , b'_n\}$ باشد، $a'_۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}(a_۱+a_۳)$
۲) $\frac{۱}{۲}(a_۱+a_۳)$
۳) $\frac{۱}{۲}(a_۱-a_۳)$
۴) $\frac{۱}{۴}(a_۱-a_۳)$

۲۵ـ تبدیل فوریهٔ تابع $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & ; b<x<c \\ \circ & ; \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$، $a>\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{e^{(a-i\omega)c}-e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{۲\pi}(a-i\omega)}$
۲) $\frac{e^{(a-i\omega)c}-e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{۲\pi}(a+i\omega)}$
۳) $\frac{e^{(a-i\omega)c}+e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{۲\pi}(a-i\omega)}$
۴) $\frac{e^{(a-i\omega)c}+e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{۲\pi}(a+i\omega)}$

۲۶ـ در معادلهٔ موج $\begin{cases} u_{tt}=۲۵u_{xx} & ; \circ<x<\pi \\ u(\circ,t)=u(\pi,t)=\circ & ; t>\circ \\ u(x,\circ)=۱ \,,\, u_t(x,\circ)=\circ \end{cases}$ حاصل $u(\frac{\pi}{۲},۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\circ$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۷ـ تبدیل لاپلاس جواب معادلهٔ غیرهمگن $\frac{\partial u}{\partial x}+۲x\frac{\partial u}{\partial t}=۲x$ با شرایط $u(x,\circ)=u(\circ,t)=۱$، برابر کدام است؟

۱) $U(x,s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-sx^۲}-\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s^۲}$
۲) $U(x,s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-sx^۲}+\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^۲}$
۳) $U(x,s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-sx}-\frac{۱}{s^۲}-۱$
۴) $U(x,s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-sx}-\frac{۱}{s^۲}-\frac{۳}{s}$

۲۸ـ انتگرال تابع $f(z)=z$ روی مسیر متشکل از دو پاره‌خط AB و BC که مختصات نقاط $A(۲,۲)$ ، $B(۶,۲)$ ، $C(۶,۳)$ می‌باشند، عبارتست از:

۱) $۷+۲۷i$
۲) $\frac{۲۷}{۲}-۱۴i$
۳) $۷-۲۷i$
۴) $\frac{۲۷}{۲}+۱۴i$

۲۹ـ نگاشت ناحیهٔ $D=\{z=x+iy \mid x>\circ \,,\, y>\circ\}$ تحت تابع $w=\operatorname{Ln}z$، کدام ناحیه است؟

۱) $\left\{w=u+iv \mid -\infty<u<\infty \,,\, \circ<v<\frac{\pi}{۲}\right\}$
۲) $\{w=u+iv \mid u>\circ \,,\, \circ<v<\pi\}$
۳) $\{w=u+iv \mid u<\circ \,,\, -\pi<v<\circ\}$
۴) $\left\{w=u+iv \mid -\infty<u<\infty \,,\, -\frac{\pi}{۲}<v<\circ\right\}$

۳۰ـ حاصل $Pr.V\int_\circ^\infty \frac{x^۲}{۱-x^۴}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $-\frac{\pi}{۲}$
۴) $-\frac{\pi}{۴}$

سؤالات ۳۱ تا ۴۰ مشترک بین مهندسی نانو مواد و بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد.

۳۱ـ اگر $u=u(x,y)$ در ناحیه‌ی D از صفحه‌ی xoy همساز و $z=x+iy$ باشد، آنگاه $\frac{\partial^۲ u}{\partial z \partial \bar{z}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴i}$

۳۲ـ تصویر خط $y=\frac{\pi}{۴}$ تحت نگاشت $w=\cosh z$ کدام است؟

۱) $u^۲-v^۲=\frac{۱}{۲}$
۲) $v^۲-u^۲=\frac{۱}{۲}$
۳) $v^۲-u^۲=۱$
۴) $u^۲-v^۲=۱$

۳۳ـ مقدار انتگرال $\oint_C \tan z\,dz$ وقتی که C دایره $|z|=۲$ است، کدام می‌باشد؟

۱) $۲\pi i$
۲) $-۲\pi i$
۳) $۴\pi i$
۴) $-۴\pi i$

۳۴ـ سری لوران تابع $f(z)=\frac{2}{z^2-z-2}$ در ناحیه‌ی $|z|>2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^n}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{z^{n+1}}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$

۳۵ـ اگر سری فوریه تابع $f(x)=|x|$ در بازه $-\pi\le x\le\pi$ $(T=2\pi)$ به صورت $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ باشد، مقدار سری عددی $I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{32}$ ۲) $\frac{\pi^2}{64}$ ۳) $\frac{\pi^3}{32}$ ۴) $\frac{\pi^3}{64}$

۳۶ـ ضریب $\sin x$ در بسط فوریه $0<x<2\pi$, $f(x)=x\sin x$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۳۷ـ یک جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای (جزئی) $u_{xy}+2u_y=x$ کدام است؟

۱) $u(x,y)=f(y)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(x)$ ۲) $u(x,y)=f(x)e^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)y+g(y)$

۳) $u(x,y)=f(y)e^{2x}+(2x-1)y+g(x)$ ۴) $u(x,y)=f(x)e^{2x}+(2x-1)y+g(y)$

۳۸ـ کدام عبارت در مورد معادله $(2xy-1)u_{xx}+(x+2y)u_{xy}+u_{yy}+x^2u_x+y^2u_y=1$ صحیح است؟

۱) بیضی‌گون است. ۲) سهمی‌گون است. ۳) هذلولی است. ۴) به مقادیر x و y بستگی دارد.

۳۹ـ تابع جواب $u_{tt}-u_{xx}=\sin x\sin t$ با شرایط اولیه مرزی $\begin{cases}u(x,0)=u_t(x,0)=0\\u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $u=0/5\sin x(\sin t-t\cos t)$ ۲) $u=\sin t(\sin x-t\cos t)$

۳) $u=\cos x(\sin t-x\cos x)$ ۴) $u=\sin t(\cos x-x\cos t)$

۴۰ـ معادله دیفرانسیل پاره‌ای (جزئی) زیر مفروض است:

$$u_{xx}=\sin\frac{x}{2}+u_{tt}\quad,\quad 0<x<\pi$$

$$\begin{cases}u(0,t)=3 & ,\ u(\pi,t)=1\\u(x,0)=1 & ,\ u_t(x,0)=x\end{cases}$$

با فرض $u(x,t)=w(x,t)+v(x)$، برای آنکه معادله حاکم بر $w(x,t)$ از نوع همگن و با شرایط مرزی صفر باشد. عبارت $v(x)$ کدام است؟

۱) $-4\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}x+4$ ۲) $-4\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi}x+3$ ۳) $-4\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\pi}x+4$ ۴) $-4\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{\pi}x+3$

مهندسی نانومواد

۴۱ـ اگر تابع $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^2-y^2+1)^2-4x^2y^2$ باشد، آنگاه با شرط $v(0,0)=0$ مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۴۲ـ حاصل $\oint_C\frac{\tan\frac{z}{2}}{z^2}dz$ روی دایره یکه (در جهت مثلثاتی) کدام است؟

۱) πi ۲) $-\pi i$ ۳) $2\pi i$ ۴) $-2\pi i$

۴۳ـ تعداد نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\frac{e^z}{\cos z\,\mathrm{Ln}(z^2-z)}$، روی $|z+2|\le 2$ کدام است؟ (شاخه اصلی لگاریتم مدنظر است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۴۴ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ سری فوریه $0<x<2\pi$, $f(x)=\pi-x$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

۱) $b_2=0$ ۲) $b_5=\frac{1}{4}$ ۳) $b_3=\frac{2}{3}$ ۴) $b_1=1$

۴۵ـ مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله $y''+\lambda y=0$ با فرض $y'(0)=0\ ,\ y(a)=0$ کدام است؟

۱) $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2\ ,\ y_n=\cos\frac{n\pi}{a}x$

۲) $\lambda_n=(\frac{(2n-1)\pi}{2a})^2\ ,\ y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$

۳) $\lambda_n=\frac{(2n-1)}{2a}\pi\ ,\ y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$

۴) $\lambda_n=\frac{n\pi}{a}\ ,\ y_n=\cos\frac{n\pi}{a}x$

مهندسی معماری کشتی

۴۶ـ نقطه $z=0$ قطب ساده کدام تابع است؟

۱) $\frac{\bar{z}}{z}$

۲) $\frac{\cot z}{z}$

۳) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z^2+1)}$

۴) $\frac{z-\tan z}{z^4(z^2+1)}$

۴۷ـ اگر $u(x,t)$ جواب مسأله موج زیر باشد، مقدار $u(0/25,1/5)$، کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}-9u_{xx}=0 & ,\quad 0<x<1\ ,\ t>0\\ u(x,0)=x & ,\quad 0\le x\le 1\\ u_t(x,0)=0 & ,\quad 0\le x\le 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0\ ,\ t>0\end{cases}$$

۱) $0/5$

۲) $0/25$

۳) 0

۴) $-0/25$

۴۸ـ حاصل انتگرال مختلط $\oint_C\frac{e^{z^2}dz}{z^2+4}$ که C منحنی بسته $|z-i|=2$ در جهت مثلثاتی می‌باشد، کدام است؟

۱) 0

۲) πe^{-4}

۳) $\frac{\pi e^{-4}}{2}$

۴) $\frac{\pi e^4}{2}$

۴۹ـ اگر تابع $f(x)=2x+1,\ -\pi<x\le\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ دارای سری فوریه $1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$ باشد، مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{4}$

۵۰ـ تصویر دایره $(x+1)^2+(y-1)^2=2$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$، کدام است؟

۱) $u+v+\frac{1}{2}=0$

۲) $u=v+\frac{1}{2}$

۳) $(u-1)^2+(v+1)^2=\frac{1}{2}$

۴) $(u+1)^2+(v-1)^2=\frac{1}{2}$

مهندسی نفت

۵۱ـ تابع $f(x)$ در معادلهٔ انتگرالی $s>0$, $\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=e^{-s\omega}$ کدام است؟

۱) $\frac{2x}{\pi(s^2-x^2)}$

۲) $\frac{2x}{\pi(s^2+x^2)}$

۳) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{(s^2-x^2)}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{(s^2+x^2)}$

۵۲ـ فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}1 & ,\quad 0<x<\pi\\ 0 & ,\quad x>\pi\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & ,\quad 0<x<\pi\\ 0 & ,\quad x>\pi\end{cases}$ و انتگرال فوریهٔ کسینوسی تابع f به صورت زیر باشد، در آن صورت انتگرال فوریهٔ سینوسی تابع g کدام است؟

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

۱) $g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\omega-\pi\omega\cos\pi\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$

۲) $g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi\omega+\pi\omega\cos\pi\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$

۳) $g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\pi\omega-\pi\cos\pi\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$

۴) $g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\pi\omega+\pi\cos\pi\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$

۵۳ـ کدام‌یک از توابع داده شده یک جواب خصوصی برای معادلهٔ دیفرانسیل $u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}=-33e^{2x+3y}$ می‌باشد؟

۱) $u_p(x,y)=-3e^{2x+3y}$

۲) $u_p(x,y)=-6e^{2x+3y}$

۳) $u_p(x,y)=3e^{2x+3y}$

۴) $u_p(x,y)=6e^{2x+3y}$

۵۴ـ جواب مسأله، با شرایط داده شده کدام است؟

$u_{tt}=u_{xx}\ ,\ \ 0<x<\pi$

$u(x,0)=u_t(x,0)=\sin x$

$u(0,t)=0\ ,\ u(\pi,t)=0\ ,\ \forall t$

۱) $u(x,t)=\sin x\sin t-\frac{1}{2}\sin x\cos t$

۲) $u(x,t)=\sin x\sin t+\frac{1}{2}\sin x\cos t$

۳) $u(x,t)=\sin x\sin t+\sin x\cos t$

۴) $u(x,t)=\sin x\sin t-\sin x\cos t$

۵۵ـ مساحت ناحیهٔ محدود شده با نامعادلهٔ $\mathrm{Re}(\frac{i}{2z+3i})\geq 1$ ، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{16}$

۲) $\frac{\pi}{16}$

۳) $\frac{\pi}{8}$

۴) $\frac{\pi}{4}$

۵۶ـ ماندهٔ $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z^3+z}$ ، در $z=0$ ، کدام است؟

۱) $\cosh(1)$

۲) $-\cosh(1)$

۳) $\sinh(1)$

۴) $-\sinh(1)$

۵۷ـ مقدار انتگرال $\oint_C \frac{\cosh z}{(z^2+1)^2}dz$ وقتی که C دایره $|z+1-\frac{1}{2}i|=\frac{3}{2}$ بوده و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت جهت داده شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}(\sin 1-\cos 1)$

۲) $\frac{\pi}{2}(\sinh 1-\cosh 1)$

۳) $\frac{\pi}{2}(\sin 1+\cos 1)$

۴) $\frac{\pi}{2}(\sinh 1+\cosh 1)$

۵۸ـ تصویر خط $x=1$ تحت نگاشت $w=\sinh z$ کدام است؟ $(w=u+iv)$

۱) بیضی

۲) خط راست

۳) سهمی

۴) هذلولی

پاسخنامه آزمون‌های کارشناسی ارشد ـ سراسری ۱۳۹۴

مهندسی هوا فضا

۱ـ گزینه «۴»

روش اول: یادآوری می‌کنیم که برای تابع مختلط $f(z)$ داریم $\frac{df(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ در نتیجه برای تابع $\bar{z}$ نیز خواهیم داشت:

$$\frac{d\bar{z}}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{[x+\Delta x-i(y+\Delta y)]-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

روی مسیرِ $\Delta y=0$ مقدار این حد برابر است با: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$ و روی مسیر $\Delta x=0$، مقدار حد برابر است با: $\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$ بنابراین مشتقِ $\bar{z}$ وجود ندارد.

روش دوم: فرض کنیم $f(z)=\bar{z}=x-iy$ باشد. در این صورت $f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\frac{d\bar{z}}{dz}$ است. اما $f'(z)$ وجود ندارد زیرا $u=\mathrm{Re}f=x$ و $v=\mathrm{Im}f=-y$ است و شرایط کوشی ریمان در هیچ نقطه‌ای برقرار نیست: $u_x=1\neq-1=v_y$.

۲ـ گزینه «۲» نگاشت $w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ به نگاشت موبیوس معروف است و رفتار آن چنین است: اگر $\mathrm{Im}\,z_0<0$ باشد؛ نیم صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,z\le 0$ توسط این نگاشت به درون و روی دایره‌ی واحد تصویر می‌شود و نیم صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,z>0$ به خارج از دایره‌ی واحد نگاشته می‌شود.
اگر $\mathrm{Im}\,z_0>0$ باشد؛ این رفتار عکس می‌شود. نیم صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,z\ge 0$ به درون و روی دایره‌ی واحد و نیم صفحه‌ی $\mathrm{Im}\,z<0$ به خارج از آن نگاشته می‌شود. بنابراین در این مثال، ناحیه‌ی درون و روی دایره‌ی واحد بدست می‌آید. به عبارتی ناحیه‌ی $|w|\le 1$ جواب است.

۳ـ گزینه «۴» فرض کنید $u=\mathrm{Re}f$ و $v=\mathrm{Im}f$ باشد. با قرارداد $z=x+iy$ داریم:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{2y}{x+iy}=\frac{2y(x-iy)}{x^2+y^2} & ; \quad |z|\ge 1\\ |z|^2=x^2+y^2 & ; \quad |z|<1\end{cases}$$

اکنون اگر $|z|<1$ باشد داریم $u=x^2+y^2$ و $v=0$.

شرایط کوشی ریمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}u_x=v_y\Rightarrow 2x=0\\ u_y=-v_x\Rightarrow 2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

پس به جز $z=0$ در سایر نقاط داخل دایره‌ی واحد؛ شرایط کوشی ریمان برقرار نیستند و f در این نقاط مشتق ندارد.

در خارج و روی دایره نیز داریم:

$$|z|\ge 1\Rightarrow f(z)=\frac{2xy-i2y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow v=\frac{-2y^2}{x^2+y^2} \text{ و } u=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

شرایط کوشی ریمان را می‌نویسیم:

$$u_x=v_y\Rightarrow\frac{2y(x^2+y^2)-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4y(x^2+y^2)+4y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow 2yx^2+2y^3-4yx^2=-4yx^2-4y^3+4y^3\Rightarrow 2y(x^2+y^2)=0\xrightarrow{x^2+y^2\ge 1}y=0$$

$$u_y=-v_x\Rightarrow\frac{2x(x^2+y^2)-4y^2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow 2x(x^2+y^2)=0\xrightarrow{x^2+y^2\ge 1}x=0$$

پس باز هم نقطه‌ی $(0,0)$ بدست می‌آید که البته قابل قبول نیست زیرا در خارج از دایره‌ی واحد قرار ندارد. بررسی‌ها نشان می‌دهد $f(z)$ فقط در $z=0$ مشتق دارد و در سایر نقاط؛ مشتق‌پذیر نیست. پس نقاط غیرتحلیلی $f(z)$ به صورت تکین (تنها) نیستند. f نقطه‌ی تکین ندارد.

۴ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ است. بنابراین داریم:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx$$

از طرفی درسری فوریه‌ی داده شده داریم $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$ و $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi^2}{3} \\ a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx = \frac{4(-1)^2}{2^2} = 1 \end{cases}$$

در نتیجه داریم $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{3}\pi^3$ و $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x dx = \pi$. مقدار I به این ترتیب به دست می‌آید:

$$I = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\pi^3 + \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$$

۵ـ گزینه «۱» فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} \cos x \; ; & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 \; ; & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد و $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(\frac{\omega}{2}\pi)}{1-\omega^2}\right)$. مطابق صورت سؤال داریم $f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x d\omega$ در نتیجه $A(\omega)$ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ است. پس داریم:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

با مشتق‌گیری نسبت به ω خواهیم داشت:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\sin\omega x dx$$

به عبارتی داریم:

$$-\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\sin\omega x dx$$

این نشان می‌دهد که تابع $xf(x)$ دارای انتگرال فوریه‌ی سینوسی است که ضریب آن $-\frac{dA(\omega)}{d\omega}$ است. یعنی داریم: $xf(x) = \int_0^{\infty}\left(-\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right)\sin\omega x d\omega$

$A(\omega)$ را از صورت سؤال داریم، حالا با محاسبه‌ی مشتق $A(\omega)$ داریم:

$$xf(x) = \int_0^{\infty} -\frac{2}{\pi}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\omega\pi}{2})[1-\omega^2]+2\omega\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega x d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(1-\omega^2)\sin(\frac{\omega\pi}{2})-2\omega\cos(\frac{\omega\pi}{2})}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega x d\omega$$

بنابراین نمایش انتگرال فوریه‌ی $xf(x)$ برابر با گزینه (۱) است.

۶ـ گزینه «۱» در I_1 داریم $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$. تنها نقطه‌ی تکین درون دایره‌ی واحد $z=0$ است و مانده‌ی f در آن برابر است با:

$$\text{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = -\frac{1}{2}$$

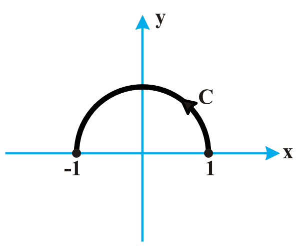
در نتیجه $I_1 = 2\pi i \times (-\frac{1}{2}) = -\pi i$ است. پس گزینه (۱) صحیح است. اما در مورد سایر گزینه‌ها:

در I_3، ریشه‌های مخرج $z = \pm 2i$ هر دو خارج از دایره‌ی واحد قرار دارند، پس $I_3 = 0$ است. در I_2 نیز ریشه‌های مخرج عبارتند از ریشه‌های چهارم عدد -4. اما چون $|-4| > 1$ است پس $\sqrt[4]{|-4|} > 1$ است یعنی همه‌ی ریشه‌ها خارج از دایره‌ی واحد هستند. پس $I_2 = 0$ است. در I_4 نیز $z = -2i$ خارج از دایره واحد است و $I_4 = 0$ می‌شود.

۷ـ گزینه «۳» منحنی C بسته نیست. پس نمی‌توان از قضیه‌ی مانده‌ها استفاده کرد. تابع زیر انتگرال هم تحلیلی نیست زیرا $\bar{z}$ و $|z|$ هیچکدام تحلیلی نیستند. بنابراین باید مرز C را پارامتری کنیم.

روی دایره‌ی به شعاع R داریم $z = Re^{i\theta}$ بنابراین روی دایره‌ی به شعاع $R=1$ داریم $z = e^{i\theta}$.

البته فقط نیم‌دایره‌ی بالایی را طی می‌کنیم پس $0 \leq \theta \leq \pi$ است.



$$z = e^{i\theta} \Rightarrow |z| = 1 \quad , \quad \bar{z} = e^{-i\theta} \quad , \quad dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$I = \int_C \left[(\bar{z})^2 + 2|z|\right] dz = \int_0^{\pi}(e^{-2i\theta}+2)\, ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{\pi}(e^{-i\theta}+2e^{i\theta})d\theta$$

$$= i(-\frac{1}{i}e^{-i\theta} + \frac{2}{i}e^{i\theta})\Big|_0^{\pi} = (-e^{-i\theta}+2e^{i\theta})\Big|_0^{\pi} = +1-2+1-2 = -2$$

دقت کنید که $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ است.

۸ـ گزینه «۴» ضرایب u_{xx}، u_{xy} و u_{yy} به ترتیب عبارتند از: $A=1$، $B=2$ و $C=2$.

معادله‌ی دیفرانسیل $A(\frac{dy}{dx})^2 - B(\frac{dy}{dx}) + C = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(\frac{dy}{dx})^2 - 2(\frac{dy}{dx}) + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

بنابراین یا $\frac{dy}{dx} = 1+i$ یا $\frac{dy}{dx} = 1-i$. در نتیجه $y=(1+i)x+c_1$ و $y=(1-i)x+c_2$. به عبارتی $y-(1+i)x=c_1$ و $y+(i-1)x=c_2$.

این نشان می‌دهد که تغییر متغیرهای: $\begin{cases}\xi = y-(1+i)x \\ \eta = y+(i-1)x\end{cases}$ معادله را به فرم کانونی تبدیل می‌کنند.

۹ـ گزینه «۱» فرض کنیم $u(x,y)=F(x)G(y)$ باشد. با جایگذاری در معادله‌ی دیفرانسیل داریم:

$$x^2F''G + xF'G - FG' = 0$$

با تقسیم طرفین بر FG و جداکردن متغیرها خواهیم داشت:

$$\frac{x^2F''(x)+xF'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)} = -\lambda$$

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{G'(y)}{G(y)} = -\lambda$ بدون در نظرگرفتن ضریب ثابت آن، به صورت $\operatorname{Ln}G(y) = -\lambda y$ یعنی $G(y)=e^{-\lambda y}$ است.

اما معادله‌ی دیفرانسیل $x^2F''+xF'+\lambda F=0$ یک معادله‌ی کوشی- اویلر است که با تغییر متغیر $z=\operatorname{Ln}x$ به معادله‌ی با ضرایب ثابت $F''(z)+\lambda F(z)=0$ تبدیل می‌شود.

اکنون ۳ حالت داریم:

۱ـ اگر $\lambda=0$ باشد $F''(z)=0$ است و داریم $F=Az+B=A\operatorname{Ln}x+B$ در این حالت $G(y)=e^0=1$ است و جواب‌های $\operatorname{Ln}x$ و ۱ بدست می‌آیند.

۲ـ اگر $\lambda=k^2>0$ باشد $F''(z)+k^2F(z)=0$ دارای ریشه‌های $\pm ik$ و جواب‌های $\cos kz=\cos(k\operatorname{Ln}x)$ و $\sin kz=\sin(k\operatorname{Ln}x)$ است. در این حالت $G(y)=e^{-k^2y}$ است. پس به $\cos(k\operatorname{Ln}x)\,e^{-k^2y}$ و $\sin(k\operatorname{Ln}x)\,e^{-k^2y}$ می‌رسیم.

۳ــ اگر $\lambda=-k^2<0$ باشد، معادله‌ی $F''(z)-k^2F(z)=0$ دارای ریشه‌های $\pm k$ و جواب‌های $e^{kz}=x^k$ و $e^{-kz}=x^{-k}$ است. در این حالت $G(y)=e^{k^2y}$ است و به جواب‌های $x^ke^{k^2y}$ و $x^{-k}e^{k^2y}$ می‌رسیم. پس گزینه (۱) صحیح است.

۱۰ـ گزینه «۴» از طرفین معادله؛ تبدیل فوریه‌ی کسینوسی متناهی می‌گیریم:

$$F_c[u_t]+2F_c[u_{xx}]=F_c[x^2] \Rightarrow F_c[u_t]+2[\frac{2}{\pi}\{(-1)^n u_x(\pi,t)-u_x(0,t)\}-(\frac{n\pi}{\pi})^2F_c[u]]=F_c[x^2]$$

با توجه به شرایط مرزی $u_x(\pi,t)=u_x(0,t)=0$ خواهیم داشت:

$$F_c[u_t]-2n^2F_c[u]=F_c[x^2]$$

تبدیل فوریه‌ی کسینوسی x^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$F_c[x^2]=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

حال با فرض آن‌که $v(n,t)$ تبدیل فوریه‌ی کسینوسیِ متناهی برای $u(x,t)$ باشد داریم:

$$v_t(n,t)-2n^2v(n,t)=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

عامل انتگرال‌ساز این معادله‌ی دیفرانسیل برابر است با: $e^{-\int 2n^2dt}=e^{-2n^2t}$ و جواب عمومی آن چنین است.

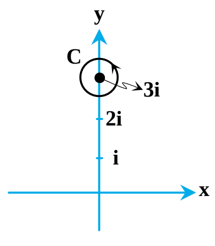
$$v(n,t)=e^{2n^2t}[\int e^{-2n^2t}\frac{4}{n^2}(-1)^n dt+c]=e^{2n^2t}[\frac{4(-1)^n}{n^2}\times\frac{-1}{2n^2}e^{-2n^2t}+c]=ce^{2n^2t}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n^4}$$

بنابراین $v=ce^{2n^2t}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n^4}$ است و با توجه به صورت سؤال داریم: $F(n)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^4}$

مهندسی مواد

۱۱ـ گزینه «۳» ریشه‌های مخرج را تعیین می‌کنیم:

$$z(z^2-iz+6)=0 \Rightarrow \Delta=-1-24=-25 \Rightarrow z=\frac{i\pm 5i}{2}\ ,\ z=0$$



به این ترتیب نقاط تکین عبارتند از $z=0$، $z=-2i$ و $z=3i$ و فقط $z=3i$ درون این دایره قرار دارد.

با فرض $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{2z+1}{z^3-iz^2+6z}$ داریم:

$$\operatorname{Res}(f,3i)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=3i}=\frac{2z+1}{3z^2-2iz+6}\Big|_{z=3i}=\frac{6i+1}{-27+6+6}=\frac{6i+1}{-15}$$

با استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها خواهیم داشت:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\times\frac{6i+1}{-15}=\frac{\pi(12-2i)}{15}$$

۱۲ـ گزینه «۳» ضرایب u_{xx}؛ u_{xy} و u_{yy} به ترتیب عبارتند از $A=1$؛ $B=0$ و $C=-1$. پس معادله‌ی دیفرانسیل زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\left(\frac{dy}{dx}\right)+C=0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm 1$$

پس داریم $y=x+c_1$ و $y=-x+c_2$ به عبارتی $y-x=c_1$ و $y+x=c_2$ یعنی تغییر متغیرهای $\eta=y-x$ و $\xi=y+x$ مناسب هستند.

۱۳ـ گزینه «۱» فرض کنیم $T(r,\theta)=F(\theta)G(r)$ باشد. می‌دانیم که $F(\theta)$ فرم مثلثاتی دارد. شرط مرزی $T(r,0)=0$ نشان می‌دهد $F_k(\theta)=\sin(\sqrt{\lambda_k}\,\theta)$ سینوسی است. شرط مرزی $T_\theta(r,\pi)=0$ نشان می‌دهد که $F_k'(\pi)=0$ است. پس $\sqrt{\lambda_k}\cos(\sqrt{\lambda_k}\,\pi)=0$ است. در نتیجه $\sqrt{\lambda_k}\,\pi=(2k-1)\frac{\pi}{2}$ و $\sqrt{\lambda_k}=\frac{2k-1}{2}=k-\frac{1}{2}$ خواهد بود. در مورد $G(r)$ از آنجا که $0\le r\le a$ است؛ توابع $r^{-\sqrt{\lambda_k}}$ و $\operatorname{Ln} r$ ظاهر نمی‌شوند و داریم $G_k(r)=r^{\sqrt{\lambda_k}}$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$T(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k-\frac{1}{2}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۱۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ است. از تساوی $\sin z=a>1$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sin x\cosh y=a\\ \cos x\sinh y=0\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم یا $\sinh y=0$ است یا $\cos x=0$. اگر $\sinh y=0$ باشد می‌دانیم که $y=0$ تنها جواب آن است و با جایگذاری در معادله اول خواهیم داشت:

$$\sin x\cosh(0)=a \Rightarrow \sin x=a>1$$

اما این غیرممکن است زیرا همواره $-1\le\sin x\le 1$ است. در نتیجه داریم $\cos x=0$ و از آنجا $x=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ است. با جایگذاری در معادله‌ی اول داریم:

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\cosh y=a \Rightarrow (-1)^{n+1}\cosh y=a$$

اگر $n=2m$ زوج باشد داریم $\cosh y=-a$ که غیرممکن است زیرا $\cosh y\ge 1$ همواره بزرگتر از یک و مثبت است. پس $n=2m+1$ فرد است و داریم:

$$\cosh y=a \Rightarrow \frac{e^y+e^{-y}}{2}=a$$

با ضرب طرفین در $2e^y$ داریم:

$$e^{2y}+1=2ae^y \Rightarrow e^{2y}-2ae^y+1=0$$

از آنجا که $a>1$ است داریم:

$$\Delta=4a^2-4=4(a^2-1)>0$$

پس داریم:

$$e^y=\frac{2a\pm 2\sqrt{a^2-1}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

در نتیجه $y=\operatorname{Ln}(a\pm\sqrt{a^2-1})$ است. البته با کمی دقت متوجه می‌شویم که:

$$a-\sqrt{a^2-1}=(a-\sqrt{a^2-1})\times\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

پس داریم $\operatorname{Ln}(a-\sqrt{a^2-1})=-\operatorname{Ln}(a+\sqrt{a^2-1})$ و می‌توان نوشت: $y=\pm\operatorname{Ln}(a+\sqrt{a^2-1})$.

با جمع‌بندی موارد فوق داریم:

$$z_m=(4m+1)\frac{\pi}{2}\pm i\operatorname{Ln}(a+\sqrt{a^2-1}) \Rightarrow z_m=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi\pm i\operatorname{Ln}(a+\sqrt{a^2-1})$$

۱۵ـ گزینه «۲» از حل دالامبر معادله‌ی موج به روش جبری استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $H(x)=\frac{1}{c}\int h(x)\,dx$ باشد. البته در این مثال $c=1$ است. شرایط $u(0,t)=0$ و $u_x(L,t)=0$ نشان می‌دهند که $g(x)$ و $h(x)$ در $x=0$ گسترش فرد و در $x=L$ گسترش زوج دارند و دوره‌ی تناوب آن‌ها $4L$ است. پس $H(x)$ در $x=0$ گسترش زوج و در $x=L$ گسترش فرد دارد. (برخلاف $h(x)$) فرض کنیم H^* و g^* گسترش‌های موردنظر باشند. داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[g^*(x+t)+g^*(x-t)]+\frac{1}{2}[H^*(x+t)-H^*(x-t)]$$

اکنون اگر $t=2kL$ و $k=2n$ زوج باشد داریم $t=4nL$ که مضربی از دوره‌ی تناوب است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}H^*(x\pm t)=H^*(x\pm 4nL)=H(x)\\ g^*(x\pm t)=g^*(x\pm 4nL)=g(x)\end{cases}$$

بنابراین در این نقطه داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[g(x)+g(x)]+\frac{1}{2}[H(x)-H(x)]=g(x)$$

اما اگر $t=2kL$ و $k=(2n+1)$ فرد باشد داریم $t=4nL+2L$ پس در این حالت داریم: $H^*(x\pm t)=H^*(x\pm 4nL\pm 2L)=H^*(x\pm 2L)$

و با استفاده از دوره‌ی تناوب $4L$ داریم: $H^*(x+2L)=H^*(x+2L-4L)=H^*(x-2L)$. در نتیجه $H^*(x+2L)-H^*(x-2L)=0$ خواهد بود.

$$g^*(x+t)=g^*(x+4nL+2L)=g^*(x+2L)$$

$$g^*(x-t)=g^*(x-4nL-2L)=g^*(x-2L)$$

با توجه به این که $4L$ دوره تناوب است، و g در $x=0$ گسترش فرد دارد در اینجا هم داریم: $g^*(x+2L)=g^*(x-2L)=-g(x)$

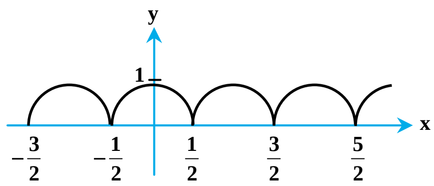
بنابراین خواهیم داشت: $u(x,t)=\frac{1}{2}[-g^*(x)-g^*(x)]=-g(x)$

نتیجه آن است که جواب همواره $(-1)^k g(x)$ است و علامت آن بستگی به زوج یا فرد بودنِ k دارد. $\mathbf{u(x,2kL)=(-1)^k g(x)}$

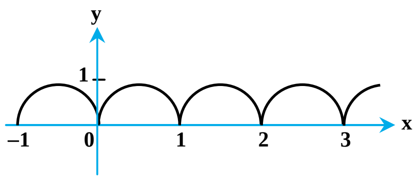
مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ــ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ــ بیوتکنولوژی و داروسازی

سؤالات ۱۶ تا ۲۳ مشترک بین مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ــ بهداشت، ایمنی و محیط زیست می‌باشد.

۱۶ــ گزینه «۳» لازم است با رسم نمودارهای f و g رابطه‌ی بین آنها را پیدا کنیم.



نمودار $y=g(x)$



نمودار $y=f(x)$

در بازه‌ی $0\le x\le 1$ داریم $f(x)=\sin\pi x$ و در بازه‌ی $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ داریم $g(x)=\cos\pi x$ دوره‌ی تناوب هر دوی آنها هم $T=1$ است.

با کمی دقت معلوم می‌شود که $g(x)$ از انتقال $f(x)$ به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ به سمت چپ (یا راست) بدست می‌آید: $g(x)=f(x+\frac{1}{2})$

پس در سری فوریه‌ی $f(x)$ به جای x ها $x+\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$g(x)=f(x+\frac{1}{2})=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}[\frac{1}{1\times 3}\cos 2\pi(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{3\times 5}\cos 4\pi(x+\frac{1}{2})+\cdots]=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}[\frac{1}{1\times 3}\cos(2\pi x+\pi)+\frac{1}{3\times 5}\cos(4\pi x+2\pi)+\cdots]$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}[-\frac{1}{1\times 3}\cos 2\pi x+\frac{1}{3\times 5}\cos 4\pi x-\cdots]=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}[\frac{1}{1\times 3}\cos 2\pi x-\frac{1}{3\times 5}\cos 4\pi x+\cdots]$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۱۷ــ گزینه «۳» طبق تعریف $A(\omega)$ داریم: $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$

$f(x)$ تابعی زوج است. (زیرا $f(x)=f(-x)$ است)، پس داریم: $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$

ضابطه‌ی f را در انتگرال قرار می‌دهیم: $A(\omega)=\frac{2}{\pi}[\int_0^1\cos\omega x\,dx+\int_1^2(2-x)\cos\omega x\,dx]$

دومین انتگرال، با کمک جدول حل می‌شود.

$2-x$	$\cos\omega x$
-1	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
0	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{\omega}\sin\omega x]\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}[\frac{(2-x)}{\omega}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x]\Big|_1^2=\frac{2}{\pi}[\frac{\sin\omega}{\omega}-0-\frac{1}{\omega^2}\cos 2\omega-\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{\cos\omega}{\omega^2}]=\mathbf{\frac{2(\cos\omega-\cos 2\omega)}{\pi\omega^2}}$$

۱۸ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. سؤال ناقص است. منظور طراح سؤال $h(1)$ است. اگر اصلاح کنیم گزینه‌ی (۲) درست است.

مطابق صورت سؤال، فرض کنیم $u(x,t)=V(x,t)+h(x)$ که V جواب معادله‌ی همگن است و $h(x)$ جواب ویژه‌ی ناهمگن. با جایگذاری در معادله‌ی داده شده و اختصاص دادنِ شرایط مرزی ناهمگن به $h(x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xe^x + \sin x \Rightarrow V_t + 0 = V_{xx} + h''(x) + xe^x + \sin x \Rightarrow V_t = V_{xx} \quad , \quad 0 = h''(x) + xe^x + \sin x \\ u(0,t)=1 \Rightarrow V(0,t)+h(0)=1 \Rightarrow V(0,t)=0 \quad , \quad h(0)=1 \\ u_x(0,t)=2 \Rightarrow V_x(0,t)+h'(0)=2 \Rightarrow V_x(0,t)=0 \, , \ h'(0)=2 \end{cases}$$

پس معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به $h(x)$ چنین است:

$$\begin{cases} h''(x) = -xe^x - \sin x \\ h(0)=1 \\ h'(0)=2 \end{cases}$$

با دو بار انتگرال‌گیری از $h''(x)$؛ جواب عمومی $h(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$h'(x) = -\int xe^x dx - \int \sin x dx = -[xe^x - e^x] + \cos x + a$$

برای حل اولین انتگرال از روش جدول استفاده می‌کنیم. با انتگرال‌گیری مجدد خواهیم داشت:

$$h(x) = \int h'(x)dx$$

x	e^x
۱	e^x
۰	e^x

$$\Rightarrow h(x) = -\int xe^x dx + \int e^x dx + \int (\cos x + a)\,dx = -(xe^x - e^x) + e^x + \sin x + ax + b$$

حالا شرایط مرزی $h(0)=1$ و $h'(0)=2$ را لحاظ می‌کنیم:

$$\begin{cases} h'(0)=2 \Rightarrow 2+a=2 \Rightarrow a=0 \\ h(0)=2 \Rightarrow 2+b=1 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی $h(x)$ چنین است:

$$h(x) = -xe^x + 2e^x + \sin x - 1$$

اکنون می‌توانیم مقدار $h(1)$ را حساب کنیم:

$$\mathbf{h(1) = e + \sin 1 - 1}$$

۱۹ـ گزینه «۱» از آنجا که جوابی به فرم $u = e^{ax+by}$ را می‌خواهیم؛ با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی و قرار دادن آن‌ها در معادله داریم:

$$4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0 \Rightarrow 4a^2 e^{ax+by} - 4ab e^{ax+by} + b^2 e^{ax+by} = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

با تقسیم طرفین بر b^2 داریم:

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

و با حل این معادله‌ی درجه‌ی دو داریم $\Delta = 0$ و $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ به عبارتی $b = 2a$ است. یعنی جواب معادله به شکل $u = e^{ax+2ay}$ است.

به ازای $a = 3$ به جواب $u = e^{3x+6y}$ می‌رسیم.

۲۰ـ گزینه «۴» عبارت مورد نظر را w می‌نامیم. ابتدا مقدار کسر را ساده‌تر کنیم:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$$

بنابراین داریم:

$$w = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1+i} = (-i)^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Ln}(-i)}$$

در عدد مختلط $z=-i$ داریم $r=1$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$. دقت کنید که در مقدار اصلی لگاریتم باید $-\pi < \theta \le \pi$ باشد. پس مثلاً $\theta = \frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیست.

$$\operatorname{Ln}(-i) = \operatorname{Ln}(r) + i\theta = \operatorname{Ln}(1) - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}$$

به این ترتیب حاصل w چنین است:

$$w = e^{(1+i)(-i\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} = -ie^{\frac{\pi}{2}}$$

۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا باید ضریب a را مشخص کنیم. بخش‌های حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی، باید همساز (هارمونیک) باشند یعنی:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow 2ax - 12x = 0 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین $v = 6xy^2 - 2x^3 + 4xy$ است. برای محاسبه‌ی $f'(z)$ می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم که فقط به مشتق‌های جزئی v نیاز دارد:

$$f'(z) = v_y + iv_x = (12xy + 4x) + i(6y^2 - 6x^2 + 4y)$$

۲۲ـ گزینه «۳» تست دارای نقص است اما جواب گزینه‌ی (۳) است.

تابع $f(z)=\frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$ دارای قطب مرتبه‌ی یک (ساده) در $z_0=0$ و قطب مرتبه‌ی دو در $z_1=\pi$ است.

شعاع دایره‌ی C مشخص نشده است. حالات مختلف را در نظر خواهیم گرفت. اما پیش از آن مانده‌ی f را در نقاط تکین محاسبه می‌کنیم.

$$\operatorname{Res}(f,z_0=0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\left.\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}\right|_{z=0}=\frac{1}{\pi^2}$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1=\pi)=\lim_{z\to\pi}\frac{d}{dz}[(z-\pi)^2 f(z)]=\lim_{z\to\pi}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z}\right)=\lim_{z\to\pi}\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}=\frac{1}{\pi^2}$$

بنابراین دو حالت زیر را داریم:

الف) اگر شعاع C کمتر از π باشد، فقط $z_0=0$ درون آن قرار دارد و در این حالت:

$$I=\int_C f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=2\pi i\times\frac{1}{\pi^2}=\frac{2i}{\pi}$$

ب) اگر شعاع C بزرگتر از π باشد هر دو نقطه‌ی $z_0=0$ و $z_1=\pi$ درون آن قرار دارند و در این حالت داریم:

$$I=\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{4i}{\pi}$$

چون جواب حالت «الف» در گزینه‌ها نیست، متوجه می‌شویم منظور طراح سؤال حالت (ب) بوده است.

۲۳ـ گزینه «۲» برای نوشتن سری لوران حول $z=2$ می‌توانیم از تغییر متغیر $t=z-2$ کمک بگیریم:

$$f(z)=ze^{-\frac{1}{z-2}}=(t+2)e^{-\frac{1}{t}}$$

حالا بسط $e^{-\frac{1}{t}}$ را می‌نویسیم:

$$(t+2)e^{-\frac{1}{t}}=(t+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{t})^n}{n!}=(t+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!t^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!t^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!t^n}$$

اکنون $t=z-2$ را جایگذاری می‌کنیم و بسط لوران f حول $z=2$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}}$$

مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون

۲۴ـ گزینه «۱» با توجه به روابط موجود در آنالیز فوریه برای توابع f و g داریم:

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad,\quad n=1,2,3,\dots \\ a'_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos x\,dx\end{cases}$$

با جایگذاری $g(x)$ و استفاده از اتحاد $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ خواهیم داشت:

$$a'_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^2 x\cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(1-\cos 2x)\cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x\cos x\,dx\right]$$

از فرمول تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2x\cos x=\frac{1}{2}[\cos(2x-x)+\cos(2x+x)]=\frac{1}{2}[\cos x+\cos 3x]$$

به این ترتیب داریم:

$$a'_1=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 3x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[a_1-\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_3\right]=\mathbf{\frac{1}{4}(a_1+a_3)}$$

۲۵ـ گزینه «۱» مطابق فرمول تبدیل فوریه $f(x)$ داریم:

$$f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

ضابطه‌ی $f(x)$ را در انتگرال قرار می‌دهیم:

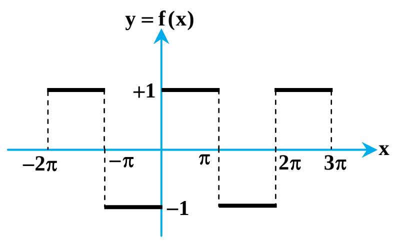
$$f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^c e^{ax}e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^c e^{(a-i\omega)x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)x}\Big|_b^c=\frac{e^{(a-i\omega)c}-e^{(a-i\omega)b}}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)}$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۲۶ـ گزینه «۲» از جواب دالامبر معادله‌ی موج استفاده می‌کنیم. در این مثال داریم: $f(x)=۱\ ,\ g(x)=۰\ ,\ c=۵\ ,\ ۰<x<\pi$

بنابراین داریم: $u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f(x-ct)+f(x+ct)] \Rightarrow u(\frac{\pi}{۲},۱)=\frac{۱}{۲}[f(\frac{\pi}{۲}-۵)+f(\frac{\pi}{۲}+۵)]$

هیچ‌کدام از اعداد $\frac{\pi}{۲}+۵$ و $\frac{\pi}{۲}-۵$ در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ قرار ندارند.



با توجه به شرایط مرزی $u(۰,t)=u(\pi,t)=۰$ تابع f نسبت به هر دو نقطه‌ی $x=۰$ و $x=\pi$ فرد است و در ضمن دوره‌ی تناوب آن $T=۲L=۲\pi$ خواهد بود. بهتر است به نمودار f دقت کنیم زیرا ضابطه‌ی آن بسیار ساده است.

به مقدار $\frac{\pi}{۲}+۵$ و $\frac{\pi}{۲}-۵$ دقت کنید. خواهیم داشت: $\pi<\frac{\pi}{۲}+۵<۲\pi$ و $-۲\pi<\frac{\pi}{۲}-۵<-\pi$.

بنابراین $f(\frac{\pi}{۲}+۵)=-۱$ و $f(\frac{\pi}{۲}-۵)=+۱$ است. در نتیجه داریم: $\mathbf{u(\frac{\pi}{۲},۱)=\frac{۱}{۲}[۱-۱]=۰}$

۲۷ـ گزینه «۲» فرض کنیم $U(x,s)=\ell[u(x,t)]$ باشد. با گرفتن لاپلاس از طرفین معادله داریم:

$$\ell[u_x(x,t)]+۲x\ell[u_t(x,t)]=\ell[۲x] \Rightarrow U_x(x,s)+۲x[sU(x,s)-u(x,۰)]=\frac{۲x}{s}$$

شرط اولیه‌ی $u(x,۰)=۱$ را جایگذاری می‌کنیم، خواهیم داشت: $U_x(x,s)+۲xsU(x,s)=۲x(\frac{۱}{s}+۱)$

این یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول نسبت به متغیر x است. عامل انتگرال‌ساز این معادله، $\mu=e^{\int ۲xsdx}=e^{x^۲s}$ و جواب عمومی آن چنین است: $U(x,s)=e^{-x^۲s}[\int e^{x^۲s}۲x(\frac{۱}{s}+۱)dx+c(s)]=e^{-x^۲s}[(\frac{۱}{s}+۱)\frac{۱}{s}e^{x^۲s}+c(s)]=\frac{۱}{s}(\frac{۱}{s}+۱)+c(s)e^{-x^۲s}$

دقت کنید که ثابت این انتگرال می‌تواند بر حسب s باشد. اکنون از شرط مرزی $u(۰,t)=۱$ نیز تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

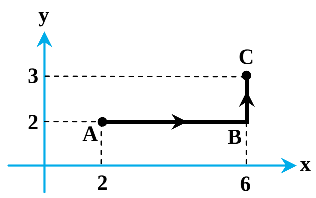
$$\ell[u(۰,t)]=\ell[۱] \Rightarrow U(۰\ ,\ s)=\frac{۱}{s}$$

این شرط را در $U(x,s)$ قرار می‌دهیم: $U(۰,s)=\frac{۱}{s}(\frac{۱}{s}+۱)+c(s)=\frac{۱}{s} \Rightarrow \frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^۲}+c(s)=\frac{۱}{s} \Rightarrow c(s)=-\frac{۱}{s^۲}$

بنابراین $U(x,s)$ برابر است با: $U(x,s)=\frac{۱}{s^۲}+\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s^۲}e^{-x^۲s}$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۲۸ـ گزینه «۴» تابع $f(z)=z$ همه جا تحلیلی است و دارای تابع اولیه‌ی $F(z)=\int f(z)dz=\frac{z^۲}{۲}$ است. بنابراین مقدار انتگرال فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. فرض کنیم γ مسیر تشکیل شده از پاره‌خط‌های AB و BC باشد. خواهیم داشت:



$$\int_\gamma f(z)dz=\int_A^B f(z)dz+\int_B^C f(z)dz=F(B)-F(A)+F(C)-F(B)=F(C)-F(A)$$

$$=\frac{۱}{۲}[(۶+۳i)^۲-(۲+۲i)^۲]=\frac{۱}{۲}[۳۶-۹+۳۶i-۴+۴-۸i]=\frac{۱}{۲}(۲۷+۲۸i)=\mathbf{\frac{۲۷}{۲}+۱۴i}$$

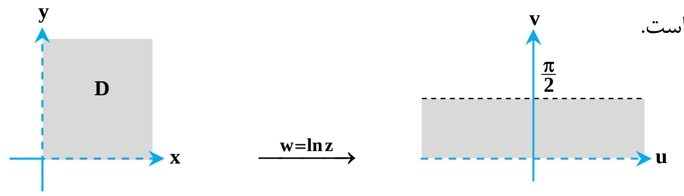
۲۹ـ گزینه «۱» برای نگاشت $w = \mathrm{Ln}z$ بخش‌های حقیقی و موهومی را مشخص می‌کنیم: $w = \mathrm{Ln}z = \mathrm{Ln}r + i\theta$

پس $\begin{cases} u = \mathrm{Re}\,w = \mathrm{Ln}r \\ v = \mathrm{Im}\,w = \theta \end{cases}$، ناحیه‌ی D ربع اول صفحه‌ی z است. در این ناحیه داریم $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $0 < r < \infty$ بنابراین در تصویر این ناحیـه تحـت نگاشت $w = \mathrm{Ln}z$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{Ln}(0^+) < u < \mathrm{Ln}(\infty) \Rightarrow -\infty < u < +\infty$$

$$v = \theta \Rightarrow 0 < v < \frac{\pi}{2}$$

به این ترتیب $-\infty < u < +\infty$ و $0 < v < \frac{\pi}{2}$ است.



ناحیه‌ی D در صفحه‌ی z — تصویر D در صفحه‌ی w

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۳۰ـ گزینه «۴» فرض کنیم $f(z) = \frac{z^2}{1-z^4}$ باشد. با تجزیه‌ی مخرج داریم $1 - z^4 = (1-z^2)(1+z^2)$ و نقـاط تکـین f عبارتنـد از ± 1 و $\pm i$. فـرض کنـیم $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2}{1-z^4}$ باشد. مانده‌ی f در این نقاط با استفاده از قاعده‌ی $\frac{p(z)}{q'(z)}$ به دست می‌آید: $\mathrm{Res}\,f(z) = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{z^2}{-4z^3} = -\frac{1}{4z}$

به این ترتیب $\mathrm{Res}(f,1) = -\frac{1}{4}$ است، $\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{4}$ و $\mathrm{Res}(f,i) = -\frac{1}{4i}$ است. اکنون از فرمول انتگرال‌گیری زیر استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\{2\pi i[\text{مجموع مانده‌های } f \text{ در قطب‌های بالای محور حقیقی}] + \pi i[\text{مجموع مانده‌های } f \text{ در قطب‌های روی محور حقیقی}]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i) + \pi i[\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,-1)]\} = \frac{1}{2}[-\frac{2\pi i}{4i} + \pi i(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})] = -\frac{\pi}{4}$$

سؤالات ۳۱ تا ۴۰ مشترک بین مهندسی نانو مواد و بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد.

۳۱ـ گزینه «۲» اگرچه تساوی $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy})$ یک معادله‌ی معروف است اما در اینجا آن را به طور کاملاً تشریحی محاسبه می‌کنیم.

توجه کنید که $z = x + iy$ است و $\bar{z} = x - iy$. بنابراین خواهیم داشت: $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

اکنون از قاعده‌ی زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = u_x \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + u_y \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = u_x(\frac{1}{2}) + u_y(\frac{1}{2i}) = \frac{1}{2i}(u_y + iu_x)$$

با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}) = \frac{1}{2i}[u_{yx}\frac{\partial x}{\partial z} + u_{yy}\frac{\partial y}{\partial z} + i(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial z} + u_{xy}\frac{\partial y}{\partial z})] = \frac{1}{2i}[\frac{1}{2}u_{yx} - \frac{1}{2i}u_{yy} + \frac{i}{2}u_{xx} - \frac{1}{2}u_{xy}] = \frac{1}{4}u_{yy} + \frac{1}{4}u_{xx} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy})$$

حالا دقت کنید که u در ناحیه‌ی D همساز (هارمونیک) است. به این معنی که $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ می‌شود. پس داریم: $\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy}) = 0}$

توضیح: البته در متن کتاب گفتیم برای هر تابع همساز مانند u، همواره تساوی $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ را داریم.

۳۲ـ گزینه «۱» بخش‌های حقیقی و موهومی $f(z) = \cosh z$ به این صورت هستند: $f(z) = \underbrace{\cosh x \cos y}_{u} + i\underbrace{\sinh x \sin y}_{v}$

روی خط $y = \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\begin{cases} u = \cosh x \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh x \Rightarrow \cosh x = \sqrt{2}\,u \\ v = \sinh x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sinh x \Rightarrow \sinh x = \sqrt{2}\,v \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ است. بنابراین $2u^2 - 2v^2 = 1$ است، یعنی داریم: $\mathbf{u^2 - v^2 = \frac{1}{2}}$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۳۳ـ گزینه «۴» ابتدا نقاط تکین تابع $f(z)=\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\cos z=0 \Rightarrow z=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

نقاط $z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ تنها نقاط تکینِ داخل مرز C هستند، فرض کنیم $f(z)=\dfrac{P(z)}{q(z)}=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ باشد.

$$\operatorname{Res}(f,\pm\frac{\pi}{2})=\frac{P(z)}{q'(z)}\bigg|_{z=\pm\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin z}{-\sin z}\bigg|_{z=\pm\frac{\pi}{2}}=-1$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها مقدار انتگرال بدست می‌آید:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i(-1-1)=-4\pi i$$

توجه: همان‌طور که در این مثال دیدید، چون $\tan z$ فرد است، مانده‌ی آن در $z=\dfrac{\pi}{2}$ و $z=-\dfrac{\pi}{2}$ با هم برابر شدند.

۳۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اشتباه تایپی در گزینه‌ها داریم. اما گزینه‌ی (۴) مورد نظر بوده است.

ابتدا با تجزیه‌ی مخرج، $f(z)$ را به مجموع کسرهای ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{2}{z^2-z-2}=\frac{2}{(z-2)(z+1)}=\frac{\frac{2}{3}}{z-2}+\frac{-\frac{2}{3}}{z+1}=\frac{2}{3}(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1})$$

چون $|z|>2$ است واضح است که $|z|$ بزرگتر از یک هم هست. بنابراین در هر دو کسر از z فاکتور می‌گیریم:

$$f(z)=\frac{2}{3}[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}]=\frac{2}{3}[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z})^n]=\frac{2}{3}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}]=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

اگر در گزینه‌ها هم ضریب $\dfrac{2}{3}$ را لحاظ کنیم، گزینه‌ی (۴) صحیح می‌شود.

۳۵ـ گزینه «۳» با توجه به آن که در سریِ I مخرج کسر از درجه‌ی ۳ است، ابتدا از سری فوریه‌ی $f(x)$؛ انتگرال می‌گیریم. این انتگرال‌گیری؛ بـه صـورت $\int_0^t$ انجام می‌شود که $0\le t\le\pi$ است.

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^t\frac{\pi}{2}dx-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}dx$$

در بازه‌ی $[0,t]$ داریم $f(x)=|x|=x$ بنابراین داریم:

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^t x\,dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^t=\frac{t^2}{2}$$

بنابراین با محاسبه‌ی انتگرال‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{t^2}{2}=\frac{\pi}{2}t-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3}$$

با مرتب کردن جملات داریم:

$$\frac{\pi t}{2}-\frac{t^2}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^3}$$

اکنون با جایگذاری $t=\dfrac{\pi}{2}$ در طرفین تساوی و با توجه به پیوسته بودن تابع $y=\dfrac{\pi t}{2}-\dfrac{t^2}{2}$ در این نقطه خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3}$$

یادآوری می‌کنیم که: $\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2}=(-1)^n$ در نتیجه با انجام محاسبات در تساوی فوق خواهیم داشت:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۳۶ـ گزینه «۱» هرگاه برای $f(x)$ در بازه‌ی $[0,T]$ سری فوریه بنویسیم خواهیم داشت:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

در این مثال $T=2\pi$ و $L=\frac{T}{2}=\pi$ است. ضریب $\sin x$ همان b_1 است.

$$b_1=\frac{1}{L}\int_0^T f(x)\sin\frac{\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin x\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(1-\cos 2x)\,dx$$

با استفاده از جدول جزء به جزء به جواب می‌رسیم:

x	$1-\cos 2x$
1	$-\frac{1}{2}\sin 2x$
0	$\frac{1}{4}\cos 2x$

$$b_1=\frac{1}{\pi}[-\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x]\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}[0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}]=0$$

۳۷ـ گزینه «۱» ابتدا از طرفین معادله، نسبت به y انتگرال می‌گیریم:

$$\int(u_{xy}+2u_y)\,dy=\int x\,dy\Rightarrow u_x+2u=xy+h(x)$$

با توجه به آن که نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم، ثابت انتگرال تابعی برحسب x است که آن را $h(x)$ نامیده‌ایم. معادله‌ی بدست آمده یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی یک است:

$$u_x+2u=xy+h(x)$$

عامل انتگرال‌ساز این معادله؛ برابر است با: $\mu=e^{\int 2dx}=e^{2x}$ و جواب عمومی آن چنین است:

$$u=\frac{\int e^{2x}(xy+h(x))\,dx+f(y)}{e^{2x}}=e^{-2x}[y\int xe^{2x}\,dx+\int h(x)e^{2x}\,dx+f(y)]$$

با محاسبه‌ی $\int xe^{2x}\,dx$ به روش جدول داریم:

x	e^{2x}
1	$\frac{1}{2}e^{2x}$
0	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\int x\,e^{2x}\,dx=e^{2x}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})+c$$

بنابراین داریم:

$$u=e^{-2x}[ye^{2x}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})+cy+\int h(x)e^{2x}\,dx+f(y)]=y(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})+cy\,e^{-2x}+f(y)e^{-2x}+e^{-2x}\int h(x)e^{2x}\,dx$$

اگر فرض کنیم $g(x)=e^{-2x}\int h(x)e^{2x}dx$ و $F(y)=cy+f(y)$ باشند، جواب عمومی چنین است:

$$\mathbf{u=\frac{1}{4}(2x-1)y+F(y)e^{-2x}+g(x)}$$

۳۸ـ گزینه «۳» در معادله‌ی داده شده ضرایب u_{xx}، u_{xy} و u_{yy} به ترتیب برابرند با:

$$C=1\ ,\ B=x+2y\ ,\ A=2xy-1$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta=B^2-4AC=(x+2y)^2-4(2xy-1)=x^2+4y^2+4xy-8xy+4=x^2-4xy+4y^2+4=(x-2y)^2+4>0$$

علامت Δ همواره مثبت است، پس این معادله، هذلولوی است.

۳۹ـ گزینه «۱» یک معادله‌ی ناهمگن داریم که همه‌ی شرایط اولیه‌ی و مرزی آن همگن هستند. استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل آن مناسب است.

فرض کنیم $\ell[u(x,t)]=U(x,s)$ باشد داریم:

$$s^2U-su(x,0)-u_t(x,0)-U_{xx}=\frac{\sin x}{1+s^2}$$

شرایط اولیه همگن هستند بنابراین داریم:

$$s^2U-U_{xx}=\frac{\sin x}{1+s^2}$$

جواب همگن این معادله به صورت $U_h=c_1e^{-sx}+c_2e^{sx}$ است. c_1 و c_2 ممکن است توابعی بر حسب s باشند، اما با استفاده از شرایط $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ داریم:

$U(0,s)=U(\pi,s)=0$ و از اینجا دستگاه $\begin{cases}c_1+c_2=0\\ c_1e^{-s\pi}+c_2e^{s\pi}=0\end{cases}$ تشکیل می‌شود که جواب آن $c_1=c_2=0$ است. پس $U_h=0$ است. با توجه به عبارت $\frac{\sin x}{1+s^2}$ داریم $U_p=A(s)\sin x$ و از قرار دادن آن در معادله داریم:

$$s^2A(s)\sin x+A(s)\sin x=\frac{\sin x}{1+s^2}\Rightarrow A(s)=\frac{1}{(1+s^2)^2}$$

پس $U=U_h+U_p=\frac{\sin x}{(1+s^2)^2}$ است. با محاسبه‌ی تبدیل معکوس داریم:

$$u(x,t)=\ell^{-1}[\frac{\sin x}{(1+s^2)^2}]=\sin x\,\ell^{-1}[\frac{1}{1+s^2}\times\frac{1}{1+s^2}]=\sin x\int_0^t \sin(x)\sin(t-x)dx=\sin x\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(2x-t)-\cos(t)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\times[\frac{\sin(2x-t)}{2}-x\cos t]\Big|_0^t=\frac{1}{2}\sin x(\frac{\sin t}{2}-t\cos t+\frac{\sin t}{2})=\frac{1}{2}\sin x(\sin t-t\cos t)$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۴۰ــ گزینه «۴» با فرضِ $u=w+v$ و دقت به این که $v(x)$ یک متغیره است داریم:

$$u_{xx}=\sin\frac{x}{2}+u_{tt}\Rightarrow w_{xx}+v''=\sin\frac{x}{2}+w_{tt}$$

می‌دانیم که w در معادله‌ی همگن $w_{xx}=w_{tt}$ صدق می‌کند پس داریم $v''=\sin\frac{x}{2}$ و با دو بار انتگرال‌گیری ضابطه‌ی $v(x)$ به شکل $v(x)=-4\sin\frac{x}{2}+ax+b$ به دست می‌آید. حالا طبق شرایط مرزی ناهمگن داریم:

$$\begin{cases}v(0)=3\\ v(\pi)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=3\\ -4+a\pi+b=1\end{cases}$$

بنابراین $b=3$ و $a=\frac{2}{\pi}$ است. در نهایت داریم:

$$\mathbf{v(x)=-4\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{\pi}x+3}$$

مهندسی نانومواد

۴۱ــ گزینه «۳» ضابطه‌ی u را داریم. با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی آن داریم:

$$\begin{cases}u_x=4x(x^2-y^2+1)-8xy^2=4x^3-12xy^2+4x\\ u_y=-4y(x^2-y^2+1)-8x^2y=4y^3-12yx^2-4y\end{cases}$$

با استفاده از فرمول زیر، ضابطه‌ی v به دست می‌آید:

$v(x,y)=\int u_x dy-\int($ عبارتی که از حذف جملات شامل y از u_y به دست می‌آید $)dx$

$$=\int(4x^3-12xy^2+4x)dy-\int(0)dx=4x^3y-4y^3x+4xy+c$$

حالا از شرط $v(0,0)=0$ داریم $c=0$، بنابراین خواهیم داشت:

$$v(x,y)=4x^3y-4y^3x+4xy\Rightarrow v(1,1)=4$$

۴۲ــ گزینه «۱» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{\tan\frac{z}{2}}{z^2}=\frac{\sin\frac{z}{2}}{z^2\cos\frac{z}{2}}$ را تعیین می‌کنیم:

$$z^2\cos\frac{z}{2}=0\Rightarrow z=0\quad,\quad \frac{z}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=0\ ,\ z=(2k+1)\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین نقاط تکین f عبارتند از $0,\pm\pi,\pm3\pi,\cdots$ که فقط $z_0=0$ درون دایره‌ی یکه قرار می‌گیرد. مانده‌ی f را در نقطه‌ی $z_0=0$ بدست می‌آوریم. دقت کنید که $z_0=0$ ریشه‌ی $\sin\frac{z}{2}$ هم هست. در واقع اگر از بسط مک لورن $\sin\frac{z}{2}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{\frac{z}{2}-\frac{z^3}{3!2^3}+\cdots}{z^2\cos\frac{z}{2}}=\frac{z(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{3!2^3}+\cdots)}{z^2\cos\frac{z}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{3!\,2^3}+\cdots}{z\cos\frac{z}{2}}$$

بنابراین $z_0=0$ قطب ساده (مرتبه‌ی یک) برای f است. مانده‌ی f را در صفر بدست می‌آوریم:

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to0} z f(z)=\lim_{z\to0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{3!2^3}+\cdots}{\cos\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}$$

طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم:

$$\int_C \mathbf{f(z)dz=2\pi i\frac{1}{2}=\pi i}$$

۴۳ـ گزینه «۳» نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z\, \mathrm{Ln}(z^2-z)}$ عبارتند از ریشه‌های مخرج و نقـاط غیرتحلیلـی $\mathrm{Ln}(z^2-z)$. یـادآوری مـی‌کنـیم کـه شاخه‌ی اصلی $\mathrm{Ln}(w)$ در نقاطی غیر تحلیلی است که $\mathrm{Re}\,w\le 0$ و $\mathrm{Im}\,w=0$ باشد.

$$w=z^2-z=(x+iy)^2-(x+iy)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y)$$

با بررسی بخش‌های حقیقی و موهومی w؛ نقاط غیر تحلیلی را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,w=x^2-y^2-x\le 0\\ \mathrm{Im}\,w=2xy-y=0\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم $y(2x-1)=0$ پس $y=0$ یا $x=\frac{1}{2}$ است.

اگر $y=0$ باشد در نامعادله‌ی بالا داریم: $x^2-x\le 0$ پس $x(x-1)\le 0$ بنابراین $0\le x\le 1$ است. (دقت کنید که برای $x<0$ و $x>1$ مقدار $x(x-1)$ مثبت می‌شود). بنابراین نقاطی که در آن‌ها $y=0$ و $0\le x\le 1$ باشد، از نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}w$ هستند.

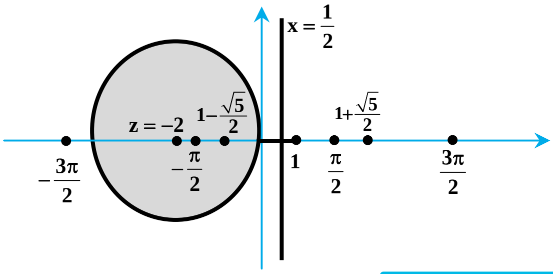
حالت دیگر آن است که $x=\frac{1}{2}$ باشد. در این صورت در نامعادله‌ی اول داریم $\frac{1}{4}-y^2-\frac{1}{2}\le 0$ بنابراین $y^2+\frac{1}{4}\ge 0$ که همیشه برقرار است. به عبارتی $y\in\mathbb{R}$ هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد در نتیجه همه‌ی نقاط روی خط $x=\frac{1}{2}$ از نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}w$ هستند.

اکنون ریشه‌های مخرجِ $f(z)$ را نیز معین می‌کنیم.

$$\cos z=0\Rightarrow z=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\mathrm{Ln}(z^2-z)=0\Rightarrow z^2-z=1\Rightarrow z^2-z-1=0\xrightarrow{\Delta=5} z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

در بین همه‌ی نقاط غیرتحلیلی بدست آمده؛ فقـط سـه نقطـه‌ی $z=0$؛ $z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $z=-\frac{\pi}{2}$ در ناحیه‌ی $|z+2|\le 2$ قرار دارند. دقت کنید که این ناحیه، یک دیسک به مرکز ۲- و شعاع ۲ است.



۴۴ـ گزینه «۳» بنابر فرمول‌های آنالیز فوریه در بازه‌ی $[0,T]$ داریم:

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

که در این معادله؛ T دوره‌ی تناوب و $L=\frac{T}{2}$ است. در این مثال $T=2\pi$ و $L=\pi$ است. بنابراین داریم:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx$$

با استفاده از جدول جزء به جزء انتگرال را حل می‌کنیم:

$\pi-x$	$\sin nx$
-1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi-x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big]\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\Big]=\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow b_1=2\,,\ b_2=1\,,\ b_3=\frac{2}{3}\,,\ b_4=\frac{1}{2}\,,\ b_5=\frac{2}{5}$$

بنابراین تنها گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی (۳) است که طبق آن داریم: $b_3=\frac{2}{3}$.

۴۵ـ گزینه «۲» معادله‌ی $y''+\lambda y=0$، همگن و با ضرایب ثابت است. معادله‌ی مشخصه‌ی آن $r^2+\lambda=0$ و ریشه‌های معادله‌ی مشخصه $r=\pm\sqrt{\lambda}$ است. (از گزینه‌ها معلوم است که λ باید منفی باشد. در غیر این صورت جواب‌های نمایی بدست می‌آمد.) بنابراین داریم:

$$y=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

اکنون شرایط مرزی را لحاظ می‌کنیم:

$$y'=-A\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}\,x+B\sqrt{\lambda}\,\cos\sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases}y'(0)=0\ \Rightarrow B\sqrt{\lambda}=0\ \Rightarrow\ B=0\ \Rightarrow y=A\cos\sqrt{\lambda}x\\ y(a)=0\ \Rightarrow A\cos\sqrt{\lambda}\,a=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}\,a=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها و مقادیر ویژه به این صورت هستند:

$$\lambda_n=\Big(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\Big)^2\ ,\ y_n=\cos\frac{(2n-1)}{2a}\pi x$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

مهندسی معماری کشتی

۴۶ـ گزینه «۴» می‌دانیم که تابع $\bar{z}=x-iy$ در شرایط کوشی ریمان در هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. زیرا:

$$\begin{cases} u=x \Rightarrow u_x=۱ \\ v=-y \Rightarrow v_y=-۱ \end{cases} \Rightarrow u_x \neq v_y$$

پس $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ نیز در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست و نقطه‌ی تکین یا قطب ندارد. در گزینه‌ی (۲) داریم:

$$f(z)=\frac{\cot z}{z}=\frac{۱}{z\,tgz}$$

$z=۰$ ریشه‌ی هر دو عبارتِ tgz و z است. پس قطب ساده نیست بلکه قطب مرتبه‌ی دو است.

در گزینه‌ی (۳) عبارت $\sin(\frac{۱}{z})$ نشان می‌دهد $z=۰$ قطب اساسی است. اگر بسط $\sin(\frac{۱}{z})$ را بنویسیم توان‌های منفیِ z نامتناهی هستند.

در گزینه‌ی (۴) اگر از بسط tgz استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{z-(z-\frac{z^۳}{۳}+\cdots)}{z^۴(z^۲+۱)}=\frac{z^۳(\frac{۱}{۳}+\cdots)}{z^۴(z^۲+۱)}$$

$z=۰$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۳ برای صورت و ریشه‌ی مرتبه‌ی ۴ برای مخرج است. پس یک قطب ساده و از مرتبه‌ی یک خواهد بود.

۴۷ـ گزینه «۲» از حل دالامبر معادله‌ی موج استفاده می‌کنیم. داریم $f(x)=x(۰\le x\le ۱)$ و $g(x)=۰$. بنابراین داریم:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}[f(x+ct)+f(x-ct)]$$

در این مثال $c=۳$ است و هر دو شرط مرزی در $x=۰$ و $x=۱$ روی u هستند پس f در این دو نقطه گسترش فرد دارد و دوره‌ی تناوب آن $T=۲L=۲$ است. با فرض $x=۰/۲۵$ و $t=۱/۵$ داریم:

$$x-ct=۰/۲۵-۴/۵=-۴/۲۵ \quad , \quad x+ct=۰/۲۵+۴/۵=۴/۷۵$$

$$u(۰/۲۵,۱/۵)=\frac{۱}{۲}[f(۴/۷۵)+f(-۴/۲۵)]=\frac{۱}{۲}[f(۴/۷۵-۴)+f(-۴/۲۵+۴)]=\frac{۱}{۲}[f(۰/۷۵)+f(-۰/۲۵)]=\frac{۱}{۲}[f(۰/۷۵)-f(۰/۲۵)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[۰/۷۵-۰/۲۵]=۰/۲۵ \Rightarrow \mathbf{u(۰/۲۵,۱/۵)=۰/۲۵}$$

۴۸ـ گزینه «۳» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{e^{z^۲}}{z^۲+۴}$ عبارتند از: $z=\pm ۲i$ که نقطه $z=۲i$ درون مرز است. با فرض $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ داریم:

$$Res(f,۲i)=\frac{p(z)}{q'(z)}\Big|_{z=۲i}=\frac{e^{z^۲}}{۲z}\Big|_{z=۲i}=\frac{e^{-۴}}{۴i}$$

بنابراین داریم:

$$\int_C f(z)dz=۲\pi i\times\frac{e^{-۴}}{۴i}=\frac{\pi}{۲}e^{-۴}$$

۴۹ـ گزینه «۲» تابع $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی دیریکله داریم:

$$f(x)=۱-۴\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sin nx}{n}\xrightarrow{x=۱}f(۱)=۱-۴\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sin n}{n}\Rightarrow ۳=۱+۴\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin n}{n}\Rightarrow \boldsymbol{\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin n}{n}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}}$$

۵۰ـ گزینه «۱» بخش‌های حقیقی و موهومی $w=\frac{۱}{z}$ را تعیین می‌کنیم:

$$w=\frac{۱}{z}=\frac{۱}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^۲+y^۲}$$

پس داریم: $u=\frac{x}{x^۲+y^۲}$ و $v=-\frac{y}{x^۲+y^۲}$. روی دایره‌ی $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ خواهیم داشت:

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲=۲y-۲x$$

در نتیجه داریم:

$$u=\frac{x}{x^۲+y^۲}=\frac{x}{۲(y-x)} \quad , \quad v=-\frac{y}{x^۲+y^۲}=-\frac{y}{۲(y-x)}$$

به این ترتیب با جمع کردنِ u و v خواهیم داشت:

$$u+v=\frac{x-y}{۲(y-x)}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \mathbf{u+v+\frac{۱}{۲}=۰}$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

مهندسی نفت

۵۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم که در نمایش انتگرال فوریه‌ی سینوسی داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\int_{۰}^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \\ B(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx \end{cases}$$

از صورت سؤال با ضرب $\frac{۲}{\pi}$ در طرفین تساوی داده شده داریم:

$$\frac{۲}{\pi}e^{-s\omega}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx$$

پس داریم $B(\omega)=\frac{۲}{\pi}e^{-s\omega}$ و در نتیجه:

$$f(x)=\int_{۰}^{\infty}\frac{۲}{\pi}e^{-s\omega}\sin\omega x\, d\omega=\frac{۲}{\pi}\ell[\sin\omega x]=\frac{۲}{\pi}\frac{x}{s^{۲}+x^{۲}}$$

در حل انتگرال نسبت به متغیر ω از تبدیل لاپلاسِ سینوس استفاده کرده‌ایم.

۵۲ـ گزینه «۱» دقت کنید که $g(x)=xf(x)$ است. اگر $f(x)=\int_{۰}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$ باشد (از صورت سؤال می‌دانیم $A(\omega)=\frac{۲}{\pi}\frac{\sin\pi\omega}{\omega}$ است) آنگاه داریم:

$$A(\omega)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx$$

با مشتق‌گیری از طرفین، نسبت به ω خواهیم داشت:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=-\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} x f(x)\sin\omega x\, dx=-\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} g(x)\sin\omega x\, dx \Rightarrow -\frac{dA(\omega)}{d\omega}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} g(x)\sin\omega x\, dx$$

پس ضریب انتگرال فوریه‌ی سینوسیِ $g(x)$ برابر است با:

$$-\frac{dA(\omega)}{d\omega}=-\frac{d}{d\omega}\left(\frac{۲}{\pi}\frac{\sin\pi\omega}{\omega}\right)=\frac{۲}{\pi}\frac{-\pi\omega\cos\pi\omega+\sin\pi\omega}{\omega^{۲}}$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۵۳ـ گزینه «۳» با توجه به عبارت $-۳۳e^{۲x+۳y}$ در سمت راست معادله، جواب خصوصی به شکل $u=Ae^{ax+by}$ است. با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی داریم:

$$u_{xx}=Aa^{۲}e^{ax+by} \quad و \quad u_{xy}=Aabe^{ax+by} \quad و \quad u_{yy}=Ab^{۲}e^{ax+by}$$

با جایگذاری آن‌ها در معادله داریم:

$$Ae^{ax+by}(a^{۲}-۴ab+b^{۲})=-۳۳e^{۲x+۳y}$$

بنابراین $a=۲$ و $b=۳$ است. همچنین داریم:

$$A(a^{۲}-۴ab+b^{۲})=-۳۳ \Rightarrow -۱۱A=-۳۳ \Rightarrow A=۳$$

پس $u=۳e^{۲x+۳y}$ است.

۵۴ـ گزینه «۳» یک معادله‌ی موج متناهی داریم. زیرا $۰<x<\pi$ است. جواب‌های ویژه آن به شکل مثلثاتی هستند. شرط $u(۰,t)=۰$ نشان می‌دهد که $F_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ سینوسی است. از شرط $u(\pi,t)=۰$ داریم: $F_n(\pi)=\sin(\sqrt{\lambda_n}\pi)=۰$ بنابراین $\sqrt{\lambda_n}\pi=n\pi$ و $\lambda_n=n^{۲}$ است. جواب‌های $G_n(t)$ نیز به صورت $G_n(t)=a_n\cos(nct)+b_n\sin(nct)$ هستند. که البته $c=۱$ است. بنابراین داریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\sin nx[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$$

شرط اولیه‌ی $u(x,۰)=\sin x$ نشان می‌دهد که به ازای $t=۰$ داریم:

$$\sin x=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\sin nx$$

پس $a_۱=۱$ است و برای $n\ge ۲$ داریم $a_n=۰$. شرط اولیه‌ی $u_t(x,۰)=\sin x$ را با محاسبه مشتق نسبت به t و سپس جایگذاری $t=۰$ به کار می‌گیریم:

$$\sin x=\sum_{n=۱}^{\infty}nb_n\sin nx$$

پس $b_۱=۱$ است و برای $n\ge ۲$ داریم $b_n=۰$. به این ترتیب داریم $a_۱=b_۱=۱$ و سایر ضرایب صفر هستند.

$$u(x,t)=\sin x(\cos t+\sin t)$$

به روش حلِ تستی سؤال فکر کنید!!

۵۵ـ گزینه «۲» با جایگذاری $z=x+iy$ داریم:

$$\frac{i}{۲z+۳i}=\frac{i}{۲x+i(۲y+۳)}=\frac{i[۲x-i(۲y+۳)]}{[۲x+i(۲y+۳)][۲x-i(۲y+۳)]}=\frac{(۲y+۳)+i۲x}{۴x^{۲}+(۲y+۳)^{۲}}$$

پس داریم:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{i}{۲z+۳i}\right)\ge ۱ \Rightarrow \frac{۲y+۳}{۴x^{۲}+(۲y+۳)^{۲}}\ge ۱ \Rightarrow ۲y+۳\ge ۴x^{۲}+(۲y+۳)^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲}+(۲y+۳)^{۲}-(۲y+۳)\le ۰$$

با محاسبه‌ی اتحاد داریم:

$$۴x^{۲}+۴y^{۲}+۱۰y+۶\le ۰ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+\frac{۵}{۲}y+\frac{۳}{۲}\le ۰ \Rightarrow x^{۲}+(y+\frac{۵}{۴})^{۲}-\frac{۲۵}{۱۶}+\frac{۳}{۲}\le ۰ \Rightarrow x^{۲}+(y+\frac{۵}{۴})^{۲}\le\frac{۱}{۱۶}$$

این ناحیه، درون یک دایره به شعاع $R=\frac{۱}{۴}$ است. پس مساحت آن برابر است با $\pi R^{۲}=\frac{\pi}{۱۶}$.

۵۶ـ گزینه «۱» $z=0$ یک قطب اساسی است. بنابراین با نوشتن بسط لوران f ضریب $\frac{1}{z}$ را تعیین می‌کنیم.

$$f(z)=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1+z^2}\times\cos(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}=\frac{1}{z}(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots)$$

$$=(\frac{1}{z}-z+z^3-z^5+\cdots)(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\cdots)$$

ضریب $\frac{1}{z}$ در این حاصلضرب برابر است با:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots=\cosh(1)$$

اگر در بسط $\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$، مقدار $z=1$ را قرار دهید؛ تساوی فوق به دست می‌آید.

۵۷ـ گزینه «۳» نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{\cosh z}{(z^2+1)^2}$ عبارتند از $z=\pm i$ با جایگذاری $z_1=i$ و $z_2=-i$ در معادله‌ی دایره داریم:

$$|i+1-\frac{1}{2}i|=|1+\frac{1}{2}i|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}<\frac{3}{2}\qquad,\qquad|-i+1-\frac{1}{2}i|=|1-\frac{3}{2}i|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}>\frac{3}{2}$$

پس فقط $z_1=i$ درون دایره است.

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2\frac{\cosh z}{(z-i)^2(z+i)^2}]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{\cosh z}{(z+i)^2}=\frac{\sinh(i)(2i)^2-2(2i)\cosh(i)}{(2i)^4}=\frac{-4i\sin(1)-4i\cos(1)}{16}$$

$$=-\frac{i}{4}(\sin(1)+\cos(1))$$

بنابراین داریم:

$$\int_C f(z)\,dz=-2\pi i\times\frac{i}{4}(\sin(1)+\cos(1))=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(\sin(1)+\cos(1))}$$

۵۸ـ گزینه «۱» می‌دانیم که بخش‌های حقیقی و موهومیِ $w=\sinh z$ عبارتند از:

$$u=\sinh x\cos y\ ,\ v=\cosh x\sin y$$

روی خط $x=1$ داریم:

$$\begin{cases}u=\sinh(1)\cos y\\ v=\cosh(1)\sin y\end{cases}\Rightarrow(\frac{u}{\sinh(1)})^2+(\frac{v}{\cosh(1)})^2=\cos^2 y+\sin^2 y=1$$

که معادله‌ی یک بیضی در صفحه‌ی $u-v$ است.
