درسنامه۲: تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

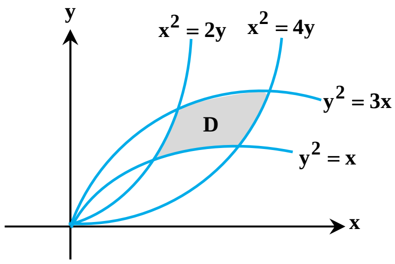
در برخی از انتگرال‌های دوگانه، تعویض ترتیب متغیرها نیز کمکی به حل انتگرال نمی‌کند. این مشکل ممکن است بـه خـاطر ضـابطه‌ی $f(x,y)$ یـا شـکل خاصِ ناحیه‌ی D به وجود آمده باشد. به نمونه‌های زیر دقت کنید:

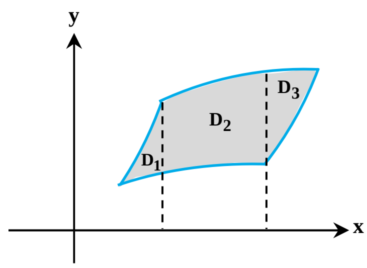
نمونه ۱: اگر تابع زیر انتگرال، e^{x^2} باشد، ترتیب $\iint_D e^{x^2}dydx$ مناسب است. اگر e^{y^2} باشد، ترتیب $\iint_D e^{y^2}dxdy$ خوب اسـت. امـا انتگـرالِ $\iint_D e^{x^2+y^2}dA$ با هیچ‌کدام از این ترتیب‌ها قابل حل نیست. به همین ترتیـب، انتگـرال دوگانـه‌ی $I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ بـا هیچکـدام از ترتیـب‌هـای $dxdy$ و $dydx$ به سادگی حل نمی‌شود.

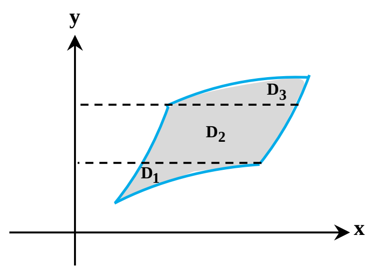
نمونه ۲: برای انتگرال‌گیری از تابع $\cos(\frac{x}{y})$ باید متغیر y را که در مخرج کسر است به انتگرال بیرونی بیاوریم؛ یعنی فرم $\iint_D\cos(\frac{x}{y})dxdy$ مناسب است. برای انتگرال‌گیری از $\cos(\frac{y}{x})$ باید متغیر x را به انتگرال بیرونی بیاوریم؛ یعنی فرم $\iint\cos(\frac{y}{x})dydx$ مناسب است. حالا تصور کنید که تـابع زیـر انتگـرال، $f(x,y)=\cos(\frac{x}{x+2y})$ باشد. در مخرج کسر هر دو متغیر x و y ظاهر شده‌اند. بنابراین هیچ‌کدام از فرم‌های $dxdy$ و $dydx$ قابل حل نیستند. برای حل چنین انتگرال‌هایی به چیزی بیشتر از جابه‌جایی متغیرها نیاز داریم.

نمونه‌های فوق نشان می‌دهند که پیچیده بودنِ ضابطه‌ی $f(x,y)$ ممکن است تعویض ترتیب متغیرها را بی‌اثر کند. عـلاوه بـر ایـن، در برخی از مثـال‌هـا، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری در راستای هیچ‌کدام از محورها منظم نیست. در نتیجه با هیچ‌کدام از ترتیب‌های $dxdy$ و $dydx$ نمی‌توان کران‌ها را به سـادگی بیـان کرد. از آن‌جا که این نواحی معمولاً شکلی شبیه به یک لوزی دارند، می‌توانیم آن‌ها را نواحی لوزی‌گون بنامیم. به نمونه‌های زیر دقت کنید.

نمونه ۳: ناحیه‌ی D که به منحنی‌های $x^2=2y$، $x^2=4y$، $y^2=x$ و $y^2=3x$ محصور شده است را در نظر بگیرید.

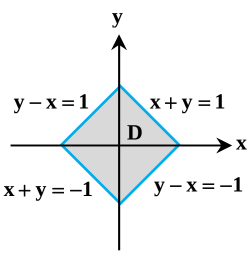






این ناحیه لوزی‌گون است و در راستای هیچ‌کدام از محورها منظم نیست. اگر بخواهیم در راستای محور yها از پایین بـه بـالا مرزهـای ورودی و خروجـی را تعیین کنیم مجبور می‌شویم ناحیه‌ی D را به سه ناحیه‌ی D_1، D_2 و D_3 بشکنیم (شکل وسط). به همین ترتیب اگر در راستای محورxها از چپ به راست حرکت کنیم باز هم مجبوریم سه ناحیه‌ی D_1، D_2 و D_3 را ایجاد کنیم (شکل سمت راست). بنابراین عوض کردن ترتیب متغیرها کمکـی بـه حـل انتگـرال دوگانه روی این ناحیه نخواهد کرد.

نمونه ۴: ناحیه‌ی D که با نامعادله‌ی $|x|+|y|\le 1$ مشخص شده را در نظر بگیرید.



این ناحیه هم نسبت به هیچ‌کدام از محورها منظم نیست. اگر بخـواهیم ترتیـب $\iint_D f(x,y)dxdy$ را بنویسـیم مجبوریم به این شکل عمل کنیم: در نیمه‌ی سمت چپ داریم $-1\le x\le 0$ و برای متغیر y، از پایین به بالا مـرز ورودی $y=-1-x$ و مرز خروجی $y=x+1$ است. اما در نیمه‌ی سمت راست داریم $0\le x\le 1$ و برای متغیر y از پایین به بالا، مرز ورودی $y=x-1$ و مرز خروجی $y=1-x$ است. با عوض کردن ترتیب متغیرها نیز مشکل حل نمی‌شود. باز هم مجبوریم برای نیمه بالایی و پایینی کران‌ها را جداگانه تعیین کنیم.

راه‌حل چیست؟ اکنون که مشکل را توضیح دادیم، باید راه‌حل آن را هم شرح دهیم. در چنین مواردی با معرفی متغیرهای جدید u و v، تلاش مـی‌کنـیم انتگرال دوگانه را از دستگاه محورهای xoy به دستگاه محورهای uov ببریم طوری که در دستگاه جدید انتگرال ساده‌تری داشته باشـیم. بـرای انجـام ایـن کار، مراحل زیر باید طی شوند:

الف) انتخاب u و v به شکلی باشد که باعث ساده‌تر شدن تابع زیر انتگرال یا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری شود.

ب) تعیین کران‌های u و v و در صورت نیاز، رسمِ شکل ناحیه D در دستگاه جدید uov.

ج) تبدیل انتگرال دوگانه‌ای که بر حسب x و y است به انتگرال دوگانه‌ای که بر حسب u و v است. باید دید به جای $f(x,y)$ و $dxdy$ چه عباراتی قرار می‌گیرند.

اکنون این مراحل را گام به گام شرح می‌دهیم.

همه‌ی انتگرال‌هایی که نیاز به تغییر متغیر u و v دارند در یکی از این سه دسته قرار می‌گیرند:

دسته اول: انتگرال‌هایی که در آن‌ها تابع زیر انتگرال پیچیده است و نمی‌توان از آن نسبت به x یا y انتگرال گرفت. در این حالت u و v را با توجه به ضابطه‌ی $f(x,y)$ انتخاب می‌کنیم. در توابع $\sin(\frac{ax+by}{cx+dy})$، $\cos(\frac{ax+by}{cx+dy})$ یا $e^{\frac{ax+by}{cx+dy}}$، با انتخاب $u=ax+by$ و $v=cx+dy$ می‌توانیم به توابع ساده‌ترِ $\sin\frac{u}{v}$ یا $\cos(\frac{u}{v})$ یا $e^{\frac{u}{v}}$ برسیم. با رعایت این نکته به شکل ساده‌تری از انتگرال دوگانه خواهیم رسید. برای مثال در انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dydx$ تغییر متغیر $u=x-y$، $v=x+y$ باعث ساده‌تر شدن انتگرال می‌شود. واضح است که این تغییر متغیر را برای هر تابعی که به صورت $f(\frac{ax+by}{cx+dy})$ باشد می‌توان به کار برد.

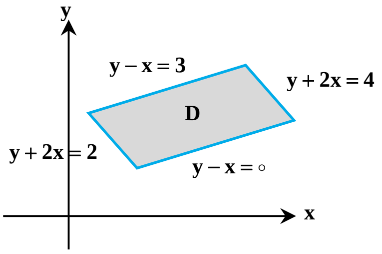
اگرچه مثال‌های زیادی با همین ایده حل می‌شوند اما قاعده‌ی کلی‌تر آن است که با توجه به عبارات به کار رفته در ضابطه‌ی $f(x,y)$، متغیرهای u و v را انتخاب کنیم. برای مثال در انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}})dydx$ اگر نیاز به تغییر متغیر داشتیم، انتخاب $u=xy$ و $v=\frac{y}{x}$ مناسب است.

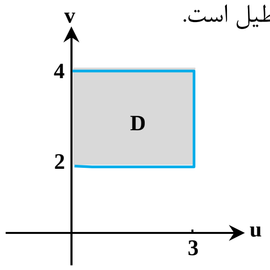
دسته دوم: در برخی از مثال‌ها، تابع $f(x,y)$ پیچیدگی ندارد، اما ناحیه‌ی D لوزی‌گون است. نواحی لوزی‌گون معمولاً نامنظم هستند. حتی اگر منظم باشند، نوشتن حدود x و y در آن‌ها ساده نیست. در این صورت انتخاب u و v با توجه به معادله‌ی مرزهای D انجام می‌شود. نواحی لوزی‌گون دارای چهار مرز هستند که وقتی معادله‌ی آن‌ها را مرتب می‌کنیم متوجه می‌شویم دو تا از مرزها به صورت $h(x,y)=c_1$ و $h(x,y)=c_2$ و دو مرز دیگر به شکل $g(x,y)=c_3$ و $g(x,y)=c_4$ هستند. ابتدا معادله‌ی مرزها را طوری بنویسید که در سمت راست عددی ثابت باقی بماند. مثلاً به جای $y=\frac{2}{x}$ بنویسید $xy=2$ یا به جای $y=x+1$ بنویسید $y-x=1$. وقتی $h(x,y)$ و $g(x,y)$ را تشخیص دادیم، تغییر متغیر مناسب $u=h(x,y)$ و $v=g(x,y)$ است. به دو نمونه‌ی زیر توجه کنید:

نمونه ۱: فرض کنید ناحیه‌ی D به خطوط $y=2-2x$، $y=4-2x$، $y=x+3$ و $y=x$ محدود شده باشد. این چهار معادله را به این شکل می‌نویسیم:

$y+2x=4 \quad , \quad y+2x=2 \quad , \quad y-x=3 \quad , \quad y-x=0$

در سمت چپ تساوی‌ها عبارات $h(x,y)=y-x$ و $g(x,y)=y+2x$ را داریم. یکی را u و دیگری را v می‌نامیم. واضح است که با انتخاب $u=y-x$ و $v=y+2x$ مرزهای داده شده تبدیل به خطوط $u=0$، $u=3$، $v=2$ و $v=4$ می‌شوند. پس کران‌های u و v به اعداد ثابت تبدیل شده‌اند و ناحیه‌ی D در دستگاه جدید یک مستطیل است.



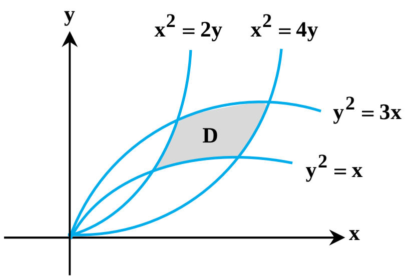


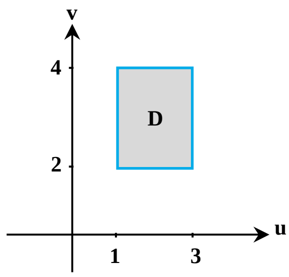
پس از تعیین ناحیه‌ی D در دستگاه جدید، در تابع زیر انتگرال هم باید x و y را برحسب u و v جایگذاری کنیم. اگر روابط $u=y-x$ و $v=y+2x$ را از هم کم کنیم، خواهیم داشت: $v-u=3x$. بنابراین $x=\frac{1}{3}(v-u)$ است و با جایگذاری آن در روابط، $y=\frac{1}{3}(v+2u)$ حاصل می‌شود. حالا می‌توانیم تابع $f(x,y)$ را برحسب u و v بنویسیم.

نمونه ۲: فرض کنیم ناحیه‌ی D به منحنی‌های $x^2=2y$، $x^2=4y$، $y^2=x$ و $y^2=3x$ محدود شده باشد. قبلاً دیده‌اید که این ناحیه لوزی‌گون است. معادله‌ی مرزهای D را طوری می‌نویسیم که سمت راستِ تساوی‌ها عدد ثابت داشته باشیم. به این صورت:

$\frac{x^2}{y}=2 \quad , \quad \frac{x^2}{y}=4 \quad , \quad \frac{y^2}{x}=1 \quad , \quad \frac{y^2}{x}=3$

در سمت چپ تساوی‌ها عبارات $h(x,y)=\frac{y^2}{x}$ و $g(x,y)=\frac{x^2}{y}$ را داریم. تغییر متغیر $u=\frac{y^2}{x}=x^{-1}y^2$ و $v=\frac{x^2}{y}=x^2y^{-1}$ معادله‌ی مرزها را به شکل $u=1$، $u=3$، $v=4$ و $v=2$ ساده خواهد کرد. ضمن آن که کران‌های u و v به‌صورت $1\le u\le 3$ و $2\le v\le 4$ به‌دست آمدند. شکل تبدیل یافته‌ی D در دستگاه uov یک مستطیل است.



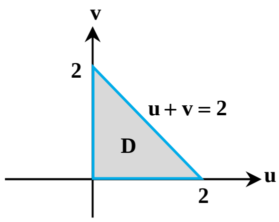


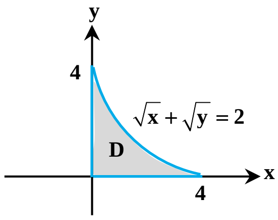
در این نمونه هم اگر $f(x,y)$ را داشتیم باید آن را برحسب متغیرهای u و v می‌نوشتیم.

دسته سوم: گاهی اوقات ناحیه‌ی D یک ناحیه‌ی مثلث‌گون است که به محورهای مختصات و منحنی $h(x)+g(y)=c$ محدود شده است. در چنین مواردی با انتخاب $u=h(x)$ و $v=g(y)$ می‌توانیم ناحیه‌ی D را به یک مثلث ساده در صفحه‌ی uov تبدیل کرده و انتگرال دوگانه را حل کنیم. بر خلاف دو دسته‌ی قبلی که در آن‌ها تابع زیر انتگرال پیچیده است یا ناحیه‌ی D نامنظم است، در این دسته از انتگرال‌ها عبارت زیر انتگرال معمولاً ساده است و ناحیه‌ی D هم منظم است. ولی با این حال، مرزهای D معادله‌ی ساده‌ای ندارند و انجام تغییر متغیر ضروری است.

مثال ۱: هرگاه ناحیه‌ی D به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲$ محدود شده باشد، تغییر متغیر مناسب و کران‌های u و v در دستگاه جدید را بیابید.

پاسخ:





ناحیه‌ی D به محورهای مختصات ($x=۰$ و $y=۰$) و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲$ محدود شده است. فرض می‌کنیم $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ باشد. حالا باید معادله‌ی مرزهای D را در دستگاه جدید uov بنویسیم:

$$\begin{cases} y=۰ \Rightarrow v=۰ \\ x=۰ \Rightarrow u=۰ \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۲ \Rightarrow u+v=۲ \end{cases}$$

بنابراین در صفحه‌ی uov مثلثی داریم که به خطوط $u=۰$، $v=۰$ و $u+v=۲$ محدود است. کران‌های u به شکل $۰\le u\le ۲$ هستند و برای v اگر از پایین به بالا حرکت کنیم، خط $v=۰$ مرز ورودی و خط $v=۲-u$ مرز خروجی است. یعنی $۰\le v\le ۲-u$ است.

توضیح: در صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی D مرزی با معادله‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۲$ داشت که نوشتن x بر حسب y یا نوشتن y بر حسب x را مشکل می‌کرد. با انجام تغییر متغیر، این مرز به خطی با معادله‌ی $u+v=۲$ تبدیل شد که معادله‌ی بسیار ساده‌تری دارد.

ژاکوبین

پس از انتخاب متغیرهای u و v و همچنین مشخص کردن کران‌های آن‌ها، نوبت آن است که معادل $f(x,y)$ و $dxdy$ را در دستگاه جدید بنویسیم. واضح است که با توجه به ضابطه‌ی u و v، باید $f(x,y)$ را برحسب آن‌ها یافته و در انتگرال قرار دهیم. برای مثال اگر $u=۲x$ و $v=۲x+y$ باشند نتیجه می‌گیریم که $x=\frac{u}{۲}$ و $y=v-u$ است. بنابراین در تابع $f(x,y)$ به جای xها، $\frac{u}{۲}$ و به جای yها، vou قرار می‌دهیم. اما موضوع مهم‌تر، جایگزین کردن $dxdy$ با معادل آن در دستگاه جدید است.

در انتگرال یگانه وقتی مثلاً تغییر متغیر $x=u^۲$ را انجام می‌دهیم، لازم است dx را برحسب متغیر جدید به‌دست آورده و در انتگرال قرار دهیم. با گرفتن دیفرانسیل از تساوی $x=u^۲$ داشتیم $dx=۲udu$ و با جایگذاری آن در انتگرال، تغییر متغیر انجام می‌شد.

به همین ترتیب، در انتگرال‌های دوگانه هم وقتی تغییر متغیرهای u و v را انجام می‌دهیم، لازم است $dxdy$ را با معادل آن در دستگاه uov جایگزین کنیم. این کار با استفاده از مفهوم ژاکوبین انجام می‌شود. ژاکوبین x و y نسبت به u و v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{uv}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\times\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\times\frac{\partial y}{\partial u}$$

به همین ترتیب، ژاکوبینِ u و v نسبت به x و y برابر است با:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\times\frac{\partial v}{\partial x}$$

رابطه‌ی زیر، شیوه‌ی انجام تغییر متغیر از $dxdy$ به $dudv$ را نشان می‌دهد:

$$\boxed{dxdy=|J_{uv}|dudv}$$

تذکر ۱: مطابق روابط فوق واضح است که J_{xy} و J_{uv} وارون یکدیگر هستند:

$$J_{uv}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{۱}{J_{xy}}$$

بنابراین می‌توانیم به جای J_{uv} در فرمول بالا، $\frac{۱}{J_{xy}}$ را قرار دهیم:

$$\boxed{dxdy=\frac{۱}{|J_{xy}|}dudv}$$

در حقیقت، اغلب اوقات ما u و v را برحسب x و y انتخاب می‌کنیم. بنابراین محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی u و v نسبت به متغیرهای x و y برای ما ساده‌تر است. به همین دلیل ابتدا J_{xy} را حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از تساوی $J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}$ به ژاکوبین u و v می‌رسیم.

برای مثال می‌دانید که انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3 dxdy$ با تغییر متغیر $u=x-2y$ و $v=x+2y$ قابل حل است. در این صورت داریم $\left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3=\left(\frac{u}{v}\right)^3$ و برای جانشانیِ dxdy باید ژاکوبین دستگاه جدید را حساب کنیم. ولی ما x و y را برحسب u و v نداریم بلکه u و v را برحسب x و y داریم:

$$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+2y\end{cases}$$

پس بهتر است مشتق‌های u و v را نسبت به x و y گرفته و J_{xy} را حساب کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4$$

در نتیجه داریم: $J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=\frac{1}{4}$ و از اینجا خواهیم داشت:

$$dx\,dy=\frac{1}{4}du\,dv$$

تا اینجا همه‌ی مراحل انجام تغییر متغیر در انتگرال دوگانه را مرور کردیم.

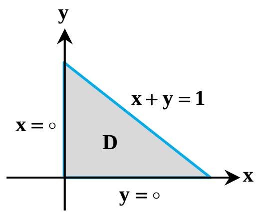
مثال ۲: حاصل انتگرال دوگانه‌ی $I=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}dydx$ کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $\frac{1}{2}e$ ۳) $1-\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{1}{2}(e-1)$

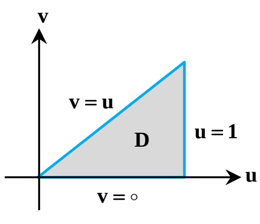
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در تابع $f(x,y)=e^{\frac{y}{x+y}}$ هر دو متغیر x و y در مخرج کسر آمده‌اند پس این انتگرال با هیچکدام از ترتیب‌های dxdy و dydx حل نمی‌شود. بنابراین باید متغیرهای مناسب u و v را پیدا کنیم طوری که حل این انتگرال در دستگاه uov ساده‌تر باشد. همان‌طور که در متن درس گفتیم، وقتی کسر $\frac{ax+by}{cx+dy}$ در ضابطه‌ی $f(x,y)$ به کار رفته باشد، تغییر متغیرهای $v=ax+by$ و $u=cx+dy$ می‌توانند باعث ساده‌تر شدن انتگرال شوند. از ضابطه‌ی $f(x,y)=e^{\frac{y}{x+y}}$ متوجه می‌شویم که انتخاب $u=x+y$ و $v=y$ مناسب است. ژاکوبین دستگاه جدید را محاسبه می‌کنیم.

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \Rightarrow J_{uv}=J_{xy}^{-1}=1$$

حالا باید ناحیه‌ی D را در صفحه‌ی xoy تشخیص دهیم و سپس تبدیل شده‌ی آن را در دستگاه uov پیدا کنیم. برای تشخیص ناحیه‌ی D به حدود انتگرال در صورت سؤال دقت می‌کنیم. با توجه به کران‌های داده شده، این ناحیه بین خطوط $y=0$ و $y=1-x$ (یعنی $y+x=1$) قرار دارد و در آن $0\le x\le 1$ است. بنابراین مثلثی است که خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$ مرزهای آن هستند. در شکل سمت چپ ناحیه‌ی D را در صفحه‌ی xoy مشاهده می‌کنید.



(ناحیه‌ی D در صفحه‌ی xoy)



(ناحیه‌ی D در صفحه‌ی uov)

ناحیه‌ی D در صفحه‌ی xoy دارای سه مرز است که عبارتند از $x+y=1$، $y=0$ و $x=0$. با قرار دادن این معادله‌ها در ضابطه‌ی $u=x+y$ و $v=y$ هر کدام از این مرزها را به معادله‌ای بر حسب u و v تبدیل می‌کنیم. از مرز $x+y=1$ به وضوح به معادله‌ی $u=1$ می‌رسیم. همچنین از $y=0$ به این نتیجه می‌رسیم که $v=0$ است. حالا به مرز $x=0$ دقت کنیم. با قرار دادن $x=0$ در ضابطه‌ی u و v خواهیم داشت $u=y$ و $v=y$، ولی ما به دنبال رابطه‌ای هستیم که فقط بر حسب u و v باشد. از این دو تساوی به سادگی نتیجه می‌گیریم که $u=v$ است. به طور خلاصه هر کدام از مرزهای قدیمی به یکی از مرزهای جدید در دستگاه uov تبدیل شده‌اند:

$$\begin{aligned}&x+y=1 \Rightarrow u=1\\ &y=0 \quad\;\; \Rightarrow v=0\\ &x=0 \quad\;\; \Rightarrow v=y\,,\,u=y \Rightarrow v=u\end{aligned}$$

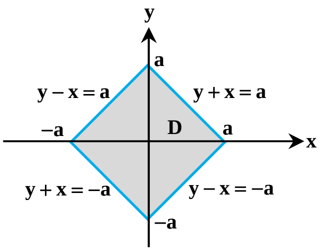
بنابراین ناحیه‌ی D در دستگاه جدید، مثلثی با خطوط $v=0$، $u=1$ و $v=u$ است. کران‌های u عبارتند از $0\le u\le 1$ و اگر در امتداد محور v از پایین به بالا حرکت کنیم، $v=0$ مرز ورودی و $v=u$ مرز خروجی است. پس $0\le v\le u$ است. تابع زیر انتگرال را در $|J_{uv}|=1$ ضرب کرده و آن را برحسب u و v می‌نویسیم:

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dydx=\int_0^1\int_0^u e^{\frac{v}{u}}dvdu \Rightarrow I=\int_0^1[ue^{\frac{v}{u}}]_0^u du=\int_0^1[ue-u]du=\int_0^1(e-1)u\,du=(e-1)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

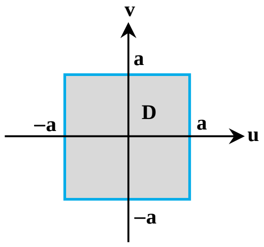
مثال ۳: حاصل $I=\iint_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}dA$، کدام است؟

۱) $۴a(e^{a}-e^{-a})$ ۲) $a(e^{a}-e^{-a})$ ۳) $۲a(e^{a}-e^{-a})$ ۴) $\frac{a}{۲}(e^{a}-e^{-a})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه $|x|+|y|\le a$ را با رسم خطوط $\pm x\pm y=a$ در ۴ ربع صفحه مشخص می‌کنیم. این ناحیه لوزی شکل است. نواحی لوزی شکل نسبت به هر دو محور x و y نامنظم هستند. به همین دلیل برای حل انتگرال روی چنین ناحیه‌ای از تغییر دستگاه (u,v) استفاده می‌کنیم. مطابق متن درس، برای انتخاب u و v معادله‌ی مرزها را طوری می‌نویسیم که سمت راست تساوی، عدد ثابت باشد. اگر به معادله‌ی مرزها توجه کنید دو تا از آن‌ها $y+x=\pm a$ و دو تای دیگر $y-x=\pm a$ هستند. پس با معرفی $u=y+x$ و $v=y-x$ معادله‌ی مرزها در صفحه‌ی uov به خطوط $u=\pm a$ و $v=\pm a$ تبدیل می‌شوند. یعنی در دستگاه جدید ناحیه‌ی D یک مربع است.



$\Rightarrow$



ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} ۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}=۲\Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{J_{xy}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\iint_R e^{x+y}dy\,dx=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{۱}{۲}e^{u}\,dvdu=\frac{۱}{۲}\int_{-a}^{a}۲ae^{u}\,du=\frac{۱}{۲}۲a\,e^{u}\Big|_{-a}^{a}=\frac{۱}{۲}۲a(e^{a}-e^{-a})=a(e^{a}-e^{-a})$$

مثال ۴: انتگرال دوگانه $I=\iint_S f(xy)dxdy$، که در آن S ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $y=۴x$، $y=x$، $xy=۲$ و $xy=۱$ برای $x>۰$، $y>۰$ می‌باشد، برابر کدام انتگرال زیر است؟

۱) $۲Ln۲\int_{۱}^{۲}f(u)du$ ۲) $Ln۲\int_{۱}^{۲}f(u)du$ ۳) $۲Ln۲\int_{۱}^{۴}f(u)du$ ۴) $Ln۲\int_{۱}^{۴}f(u)du$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری دارای چهار مرز است. این نوع از نواحی را نواحی لوزی‌گون می‌گوییم. مطابق متن درس، بهتر است از تغییر متغیر مناسب u و v برای ساده‌تر کردن این ناحیه استفاده کنیم. برای انتخاب u و v ابتدا معادله‌ی مرزها را طوری می‌نویسیم که سمت راست تساوی، عدد ثابت باشد. می‌بینیم که دو تا از مرزها به صورت $\frac{y}{x}=۴$ و $\frac{y}{x}=۱$، و دو تای دیگر به‌صورت $xy=۲$ و $xy=۱$ است، بنابراین از تغییر متغیر $u=xy$ و $v=\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم. معادله‌ی مرزها در دستگاه جدید به‌صورت $v=۱$، $v=۴$، $u=۲$ و $u=۱$ در می‌آیند. ژاکوبین را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x\\ -\frac{y}{x^{۲}} & \frac{۱}{x}\end{vmatrix}=۲\frac{y}{x}=۲v\Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{J_{xy}}=\frac{۱}{۲v}$$

در این ناحیه $۱\le v\le ۴$ است. پس $J_{uv}=\frac{۱}{۲v}$ مثبت است و قدرمطلق نمی‌خواهد. بنابراین انتگرال دوگانه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$I=\int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{۴}f(u)\frac{۱}{۲v}dvdu$$

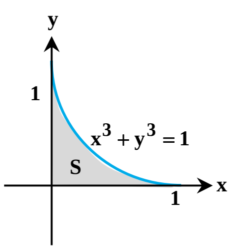
$$I=\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{۲}[Lnv]_{۱}^{۴}f(u)du=\frac{۱}{۲}Ln۴\int_{۱}^{۲}f(u)du=Ln۲\int_{۱}^{۲}f(u)du$$

مثال ۵: اگر S سطح محدود به خطوط $x=۰$، $y=۰$ و منحنی $x^{۳}+y^{۳}=۱$ واقع در ربع اول باشد، حاصل $I=\iint_S x^{۲}y^{۲}\sqrt{۱-x^{۳}-y^{۳}}dxdy$ کدام است؟

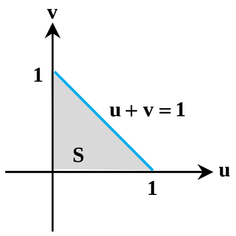
۱) $\frac{۴}{۱۳۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۸}$ ۳) $\frac{۸}{۱۳۵}$ ۴) $\frac{۳}{۲۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» نمونه‌ای از دسته سوم تغییر متغیرها را می‌بینید. هرگاه ناحیه‌ی S مرزی به صورت $f(x)+g(y)=c$ داشته باشد و به محورهای مختصات محدود باشد، ناحیه‌ای مثلث‌گون است و ما برای ساده‌تر شدن انتگرال از تغییر متغیر $u=f(x)$ و $v=g(y)$ استفاده می‌کنیم.

$$x^{۳}+y^{۳}=۱\Rightarrow\begin{cases}u=x^{۳}\\ v=y^{۳}\end{cases}\Rightarrow u+v=۱$$



ناحیه‌ی S در صفحه xoy



ناحیه‌ی S در صفحه uov

در این صورت در دستگاه جدید ناحیه‌ای داریم که به محورهای مختصات و خط $u+v=1$ محدود شده است. پس $0\le u\le 1$ و $0\le v\le 1-u$ است.

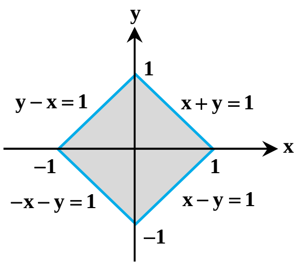
ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:
$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3x^2 & 0\\ 0 & 3y^2\end{vmatrix}=9x^2y^2 \Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=\frac{1}{9x^2y^2}$$

با ضرب کردن قدرمطلق ژاکوبین در تابع زیر انتگرال، عامل x^2y^2 از این تابع حذف می‌شود.

$$I=\iint_S x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{1-u}\frac{1}{9}\sqrt{1-u-v}\,dvdu=\frac{1}{9}\int_0^1\Big[-\frac{2}{3}(1-u-v)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{1-u}du=-\frac{2}{27}\int_0^1\Big[0-(1-u)^{\frac{3}{2}}\Big]du$$
$$=-\frac{2}{27}\Big[\frac{2}{5}(1-u)^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1=-\frac{2}{27}\Big[0-\frac{2}{5}\Big]=\frac{4}{135}$$

مثال ۶: حاصل $I=\iint_{|x|+|y|\le 1}x^2dxdy$، برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲



پاسخ: گزینه «۲» ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر است، با توجه به اینکه مرز ناحیه یعنی نمودار $|x|+|y|=1$ از چهار خط $x-y=\pm1$ و $x+y=\pm1$ تشکیل شده است، همان‌طور که می‌دانید این نوع نواحی نسبت به هر دو محور x و y نامنظم هستند پس با توجه به معادله‌ی مرزها از تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم: $-1\le u\le 1$, $-1\le v\le 1$

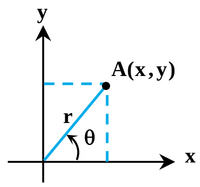
ژاکوبین به صورت مقابل محاسبه می‌شود:
$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow |J_{uv}|=\frac{1}{|J_{xy}|}=\frac{1}{2}$$

در تابع زیر انتگرال باید x^2 را برحسب u و v بنویسیم.
$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow u+v=2x \Rightarrow x=\frac{u+v}{2}$$

بنابراین $x^2=\frac{(u+v)^2}{4}$ است.

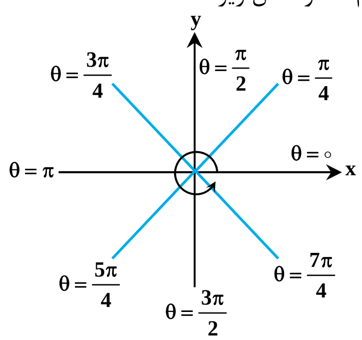
$$I=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\frac{(u+v)^2}{4}\times\frac{1}{2}dvdu=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1(u+v)^2dvdu \Rightarrow I=\frac{1}{8}\int_{-1}^1\Big[\frac{(u+v)^3}{3}\Big]_{-1}^1du=\frac{1}{24}\int_{-1}^1[(u+1)^3-(u-1)^3]du$$
$$=\frac{1}{24}\Big[\frac{(u+1)^4}{4}-\frac{(u-1)^4}{4}\Big]_{-1}^1=\frac{1}{96}[2^4-0-0+2^4]=\frac{1}{3}$$

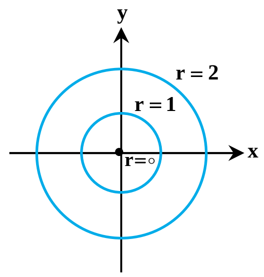
تغییر متغیر قطبی



هرگاه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه، بخشی از یک دایره یا ناحیه‌ی بین دو دایره باشد، ترجیح می‌دهیم از تغییر متغیر قطبی (دایروی) استفاده کنیم. در دستگاه قطبی، مختصات هر نقطه با مؤلفه‌های (r,θ) مشخص می‌شود. θ زاویه با جهت مثبت محور x هاست و r فاصله‌ی هر نقطه تا مبدأ را می‌دهد.

در یک دور کامل حول مبدأ داریم $0\le\theta\le 2\pi$ یا $-\pi\le\theta\le\pi$. مقادیر مهم θ در شکل زیر داده شده‌اند.





چگونگی افزایش مقدار r در شکل سمت راست مشخص شده است. در مبدأ $r=0$ است و با افزایش شعاع دایره‌های به مرکز مبدأ، مقدار r افزایش می‌یابد.

نکته۱: در اغلب موارد، وجود عبارت x^2+y^2 یک نشانه برای ما است که از تغییر متغیر قطبی برای حل انتگرال دوگانه استفاده کنیم. بنابراین دایروی بودنِ ناحیه‌ی D و وجودِ عاملِ x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، نشانه‌های معمولِ استفاده از دستگاه قطبی هستند.

مثلاً در انتگرال‌های دوگانه‌ی $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA$ و $\iint_D\frac{dA}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ و $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$، استفاده از دستگاه قطبی می‌تواند مفید باشد.

ژاکوبین دستگاه قطبی: استفاده از مختصات قطبی، در واقع نوعی تغییر متغیر است که در آن به جای u و v از متغیرهای r و θ استفاده می‌کنیم. در واقع می‌خواهیم انتگرال را از دستگاه xoy به‌دستگاه $ro\theta$ ببریم. روابط بین متغیرهای x و y از دستگاه دکارتی و متغیرهای r و θ در دستگاه قطبی را

می‌توان به شکل $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ نوشت. در این صورت با محاسبه‌ی ژاکوبین $J_{r\theta}$ داریم:

$$J_{r\theta}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r(\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta)=r$$

به همین دلیل در تغییر دستگاه از دکارتی به قطبی خواهیم داشت:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr\,d\theta}$$

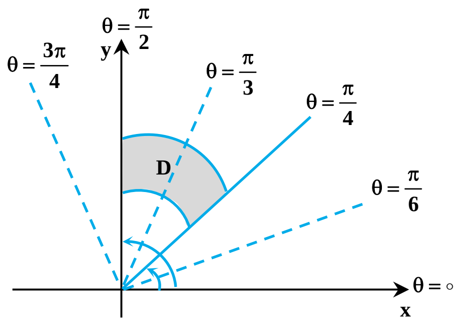
در نوشتن انتگرالده برحسب متغیرهای r و θ از این روابط استفاده می‌کنیم: $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta\ ,\ x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}\ ,\ tg^{-۱}(\frac{y}{x})=\theta$

یافتن کران‌ها در دستگاه قطبی

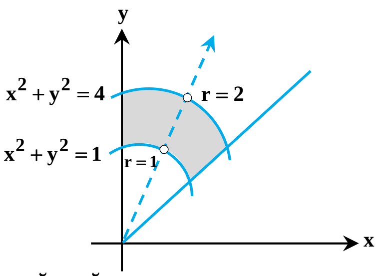
در دستگاه قطبی، کران‌های θ به‌صورت دو عدد ثابت به‌دست می‌آیند و کران‌های r ممکن است ثابت یا توابعی برحسب θ باشند. به همین دلیل معمولاً کران‌های θ را در انتگرال بیرونی و کران‌های r را در انتگرال میانی می‌نویسیم. بنابراین ترتیب زیر را خواهیم داشت:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int\int_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

پیدا کردن کران‌های θ معمولاً به سادگی انجام می‌شود. شعاع‌هایی را تصور کنید که از مبدأ به اطراف رسم می‌شوند. در جهت مثلثاتی حرکت کنید. اولین و آخرین شعاع‌هایی که با ناحیه‌ی D تماس دارند را در نظر بگیرید. کمترین و بیشترین مقدار θ در ناحیه‌ی D کران‌های θ را تشکیل می‌دهند.

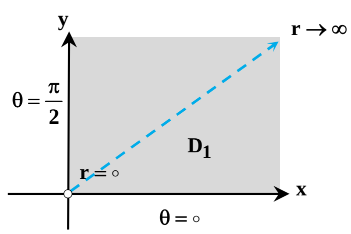


در شکل مقابل، ناحیه‌ی D بین دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴$، محور yها و خط $y=x$ قرار گرفته است. می‌خواهیم کران‌های θ را مشخص کنیم. مطابق شکل از نیم‌خط $\theta=۰$ در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم. نیم‌خط $\theta=۰$ هیچ برخوردی با ناحیه‌ی D ندارد. نیم‌خط $\theta=\frac{\pi}{۶}$ نیز ناحیه‌ی D را قطع نمی‌کند. اما $\theta=\frac{\pi}{۴}$ اولین شعاعی است که از ناحیه‌ی D می‌گذرد. به همین ترتیب در جهت مثلثاتی پیش می‌رویم. ملاحظه می‌کنید که $\theta=\frac{\pi}{۲}$ آخرین زاویه‌ای است که با ناحیه‌ی D در تماس است و بعد از آن از این ناحیه خارج می‌شویم.



بنابراین حدود θ در این ناحیه به‌صورت $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ هستند. حالا نوبت به تعیین حدود r می‌رسد. یکی از شعاع‌هایی که از مبدأ آغاز شده و از ناحیه‌ی D می‌گذرد را رسم کنید. در شکل مقابل می‌بینید که این شعاع، از دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ وارد ناحیه‌ی D شده و از دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۴$ از آن خارج می‌شود. روی مرز ورودی داریم $r=۱$ و روی مرز خروجی $r=۲$ است. بنابراین حدود r به شکل $۱\le r\le ۲$ هستند.

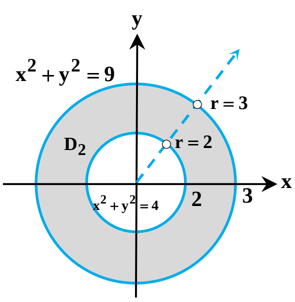
تذکر ۲: اگر ناحیه‌ی D درون دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ باشد، کران‌های r به‌صورت $۰\le r\le a$ هستند. در ناحیه‌ی بین دو دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ و $x^{۲}+y^{۲}=b^{۲}$ خواهیم داشت $a\le r\le b$ و در خارج از دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ حدود r به‌صورت $a\le r<\infty$ هستند.



مثال ۷: **در نواحی مقابل کران‌های θ و r را مشخص کنید.**

پاسخ:

ناحیه‌ی $D_۱$ ربع اول صفحه‌ی xoy است. این ناحیه از $\theta=۰$ تا $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ادامه دارد و اگر شعاعی از مبدأ رسم کنیم، از همان $r=۰$ وارد ناحیه شده و تا $r=\infty$ ادامه خواهد یافت. پس داریم: $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r<\infty$.



ناحیه‌ی $D_۲$ بین دایره‌های $x^{۲}+y^{۲}=۴$ و $x^{۲}+y^{۲}=۹$ قرار دارد. در این ناحیه یک دور کامل حول مبدأ داریم پس $۰\le\theta\le ۲\pi$ است. البته می‌توانید حدود θ را به‌صورت $-\pi\le\theta\le\pi$ هم بنویسید. حالا شعاعی را تصور کنید که از مبدأ آغاز شده و از ناحیه‌ی D عبور می‌کند. این شعاع از دایره‌ای به شعاع $r=۲$ وارد ناحیه می‌شود و از دایره‌ای به شعاع $r=۳$ خارج می‌شود. بنابراین $۲\le r\le ۳$ است.

درسنامه۴: انتگرال‌های سه‌گانه

اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک ناحیه‌ی سه‌بعدی باشد که توپُر و دارای حجم است، دیگر نمی‌توانیم فقط با نوشتن محدوده‌ی تغییرات x و y آن را بیان کنیم. بنابراین نیاز به انتگرال سه‌گانه‌ای داریم که کران‌هایش حدود تغییرات x، y و z را در ناحیه‌ی موردنظر نشان دهند. شکل کلی انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z)$ در ناحیه‌ی D چنین است:

$$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ \boxed{dz}\ \boxed{dy}\ \boxed{dx}$$

حدود x که در انتگرال بیرونی آمده‌اند، دو عدد ثابت‌اند و کمترین و بیشترین مقدار x را در ناحیه‌ی D نشان می‌دهند. کران‌های y توابعی برحسب x هستند و کران‌های z توابعی دو متغیره برحسب متغیرهای x و y خواهند بود. البته انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z)$ روی یک ناحیه را به شش ترتیب مختلف می‌توان نوشت:

$$dxdydz \ ، \ dydxdz \ ، \ dzdydx$$
$$dxdzdy \ ، \ dydzdx \ ، \ dzdxdy$$

که به طور معمول، ترتیب dzdydx را انتخاب می‌کنیم. وقتی از تابع $f(x,y,z)$ نسبت به z انتگرال می‌گیریم و حدود z را به جای آن قرار می‌دهیم تابع دو متغیره‌ی $F(x,y)$ به‌دست می‌آید. سپس با انتگرال‌گیری نسبت به y و قرار دادن حدود y در آن به تابع یک متغیره‌ی $G(x)$ می‌رسیم. در نهایت با انتگرال‌گیری نسبت به x عددی حقیقی به‌دست می‌آید که پاسخ نهایی انتگرال است.

مثال۱: حاصل انتگرال سه‌گانه‌ی $I=\int_0^1\int_{-x}^{x}\int_0^{\sqrt{x+y}}\frac{z(x-y)}{x+y}dzdydx$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** ابتدا انتگرال میانی را نسبت به متغیر z خواهیم گرفت. از آنجا که x و y را ثابت فرض می‌کنیم عبارت $\frac{x-y}{x+y}$ ضریبی ثابت است و داریم:

$$\int_0^{\sqrt{x+y}}\frac{z(x-y)}{x+y}dz=\frac{x-y}{x+y}\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x+y}}=\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}(x-y)$$

حاصل این انتگرال، تابع دو متغیره‌ی $F(x,y)=\frac{1}{2}(x-y)$ است. اکنون از عبارت به‌دست آمده، انتگرال دوم را نسبت به y می‌گیریم. در این انتگرال، x عددی ثابت و y متغیر است.

$$\int_{-x}^{x}\frac{1}{2}(x-y)dy=\frac{1}{2}(xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{-x}^{x}=\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{x^2}{2})=x^2$$

با انتگرال‌گیری نسبت به z و y تا اینجا به تابع یک متغیره‌ی $G(x)=x^2$ رسیده‌ایم. آخرین انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

جواب نهایی انتگرال سه‌گانه، یک عدد حقیقی است. همان‌طور که در انتگرال دوگانه مشاهده کردید، این عدد ممکن است مفهوم فیزیکی یا هندسی داشته باشد.

مثال۲: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}\int_0^{y}\sin(x+y+z)dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}\int_0^{y}\sin(x+y+z)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}[-\cos(x+y+z)]_0^{y}\ dydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}[-\cos(2y+z)+\cos(y+z)]dydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\frac{1}{2}\sin(2y+z)+\sin(y+z)]_0^{z}\ dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\sin 3z+\sin 2z+\frac{1}{2}\sin z-\sin z)dz=[\frac{1}{6}\cos 3z-\frac{1}{2}\cos 2z-\frac{1}{2}\cos z+\cos z]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

ترتیب متغیرها در انتگرال سه‌گانه

مطابق قضیه‌ی فوبینی برای توابع انتگرال‌پذیر، با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، مقدار انتگرال دوگانه تغییر نخواهد کرد. همین مطلب برای انتگرال سه‌گانه نیز برقرار است. توجه داشته باشید که تعویض ترتیب متغیرها در انتگرال‌های سه‌گانه خیلی مورد سؤال نیست، اما نکات مطرح شده در تعویض ترتیب انتگرال دوگانه را رعایت خواهیم کرد.

برای مثال اگر $f(x,y,z)=e^{\frac{x}{z}}$ زیر انتگرال باشد، چون در ضابطه‌اش متغیر y وجود ندارد، پس بهتر است dy در انتگرال میانی باشد و در ادامه با توجه به آن که در $e^{\frac{x}{z}}$ متغیر z در مخرج کسر و x در صورت کسر آمده است، ابتدا نسبت به x و در پایان نسبت به z انتگرال می‌گیریم. بنابراین ترتیب $I=\iiint_D e^{\frac{x}{z}}dydxdz$ بهترین راه برای حل این انتگرال است.

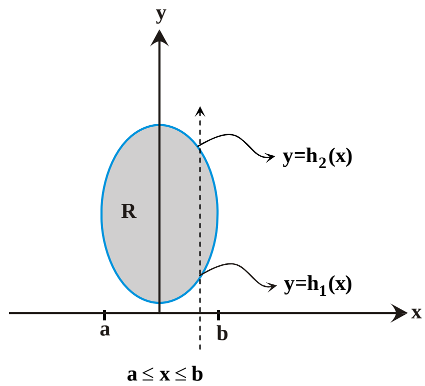
مثال ۳: ترتیب مناسب برای حل انتگرال $\iiint_D ye^{z^2}\,dzdydx$ را بنویسید.

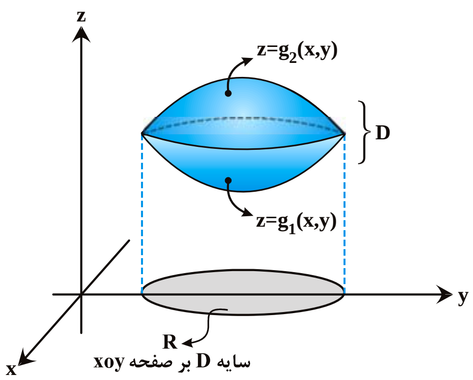
پاسخ: در تابع ye^{z^2} متغیر x حضور ندارد، بنابراین ترجیح می‌دهیم dx در انتگرال میانی باشد. در ضمن به علت وجود e^{z^2} انتگرال‌گیری نسبت به z مشکل است، بنابراین dz را به انتگرال بیرونی می‌آوریم. پس بهترین ترتیب برای این انتگرال به‌صورت $\iiint_D ye^{z^2}\,dxdydz$ است.

البته همان‌طور که اشاره کردیم، انتگرال‌های سه‌گانه در دستگاه دکارتی معمولاً با ترتیب $\iiint_D f(x,y,z)\,dzdydx$ حل می‌شوند و آنچه در انتگرال سه‌گانه اهمیت دارد، تشخیص صحیح حدود انتگرال با توجه به ناحیه‌ی داده شده است.

تعیین حدود انتگرال سه‌گانه

هر ناحیه‌ی سه‌بعدی مانند D، یک تصویر دوبعدی (سایه) بر صفحه‌ی xoy دارد. (البته این تصویر در صفحات zox و zoy هم می‌توانند باشد.) اگر تصویر در صفحه‌ی xoy را با R نشان دهیم، حدود x و y با توجه به ناحیه‌ی R در صفحه‌ی xoy مانند انتگرال دوگانه نوشته می‌شوند. اما حدود z را با عبور از ناحیه‌ی D در امتداد محور zها و تشخیص رویه‌های پایینی و بالایی تعیین می‌کنیم. در شکل سمت چپ ناحیه‌ی D و سایه‌ی آن بر صفحه‌ی xoy را می‌بینید. در شکل سمت راست فقط سایه‌ی D بر صفحه‌ی xoy رسم شده است.





بنابراین در هر مسأله‌ی انتگرال سه‌گانه با یک ناحیه‌ی توپر و سه‌بعدی به نام D و یک ناحیه‌ی دوبعدی به نام R روبرو هستیم که R سایه‌ی D بر صفحه‌ی xoy است. در ادامه نشان می‌دهیم که بدون نیاز به رسم شکل، چطور می‌توانیم کران‌های انتگرال سه‌گانه را تعیین کنیم. البته اگر بتوانید ناحیه‌ی D یا حداقل سایه‌ی آن بر صفحه‌ی xoy را رسم کنید، تعیین حدود انتگرال ساده‌تر خواهد شد.

تعیین حدود انتگرال سه‌گانه بدون رسم ناحیه‌ی D

فرض کنید می‌خواهیم حدود انتگرال سه‌گانه‌ی تابع $f(x,y,z)$ را روی ناحیه‌ی D بدون رسم این ناحیه بنویسیم. این فرآیند را می‌توان در ۳ مرحله‌ی زیر شرح داد:

مرحله اول: به تابع زیر انتگرال دقت کرده و یک ترتیب مناسب برای حل انتگرال انتخاب می‌کنیم. همان‌طور که شرح دادیم اغلب اوقات ترتیب $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ مناسب است. مگر آن که به دلیل خاصی بخواهیم ترتیب متغیرها عوض شود.

مرحله دوم: در این مرحله می‌خواهیم کران‌های z را برحسب x و y به‌دست آوریم. این کار بسیار ساده و بدون نیاز به ترسیم رویه‌ها انجام می‌شود. در صورت سؤال معادله‌ی رویه‌هایی که ناحیه‌ی D را محدود کرده‌اند، داده شده است. از این معادلات می‌توانیم zها را برحسب x و y به‌دست آورده و کران‌هایی به‌صورت $z=g_۱(x,y)$ و $z=g_۲(x,y)$ پیدا کنیم. معمولاً با دقت به‌صورت سؤال مشخص می‌شود که کدام یک از آن‌ها کران بالا و کدام یک کران پایین است اما اگر تردید دارید که کدام یک از آن‌ها کران پایین و کدام کران بالاست، صبر کنید تا حدود x و y مشخص شوند. سپس یک نقطه‌ی (x,y) از این ناحیه انتخاب کرده و در $g_۱(x,y)$ و $g_۲(x,y)$ قرار دهید. هر کدام که مقدارش بیشتر بود، کران بالاست. برای مثال اگر ناحیه‌ی D به رویه‌های $z=۲-x-y$ و $z=۲x^۲+y^۲$ محدود باشد و در ناحیه‌ی $x^۲+y^۲\le ۱$ قرار داشته باشد، نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۰)$ را از این ناحیه انتخاب می‌کنیم و با قرار دادن آن در کران‌های z داریم $\begin{cases} ۲-x-y=۲-۰=۲ \\ ۲x^۲+y^۲=۰+۰=۰ \end{cases}$. بنابراین $z=۲-x-y$ کران بالا و $z=۲x^۲+y^۲$ کران پایین است.

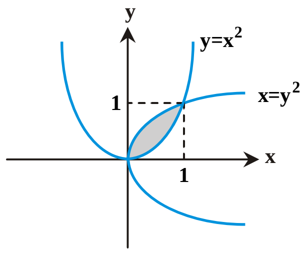
در این مرحله ممکن است به جای دو تابع $g_۱$ و $g_۲$ با سه تابع $z=g_۱(x,y)$، $z=g_۲(x,y)$ و $z=g_۳(x,y)$ روبرو شویم؛ در این صورت باید با دقت به علامت z و سایر اطلاعات داده شده در صورت سؤال، کران‌های z را از بین آن‌ها تشخیص دهیم.

مثلاً فرض کنید ناحیه‌ی D از بالا به کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود شده باشد، از معادله‌ی مخروط داریم $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و از معادله‌ی کره دو رابطه‌ی $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ و $z=-\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ به‌دست می‌آیند. از میان این سه، باید دو کران برای z انتخاب کنیم. از آنجا که یکی از مرزها مخروط و دیگری کره است، معلوم می‌شود که $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ یکی از کران‌هاست. در صورت سؤال تأکید شده که مخروط کران پایین برای D است. چون $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ مثبت است، کران بالا هم باید مثبت باشد، یعنی کران بالا $z=\sqrt{۱-x^۲-y^۲}$ است.

مرحله سوم: حالا می‌خواهیم کران‌های x و y را پیدا کنیم. ابتدا باید تصویر ناحیه‌ی D در صفحه‌ی xoy را پیدا کنیم. به ضابطه‌ی رویه‌های داده شده دقت می‌کنیم. اگر برخی از این رویه‌ها معادله‌ای برحسب x و y داشته باشند، مثلاً استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۴$ همین معادله می‌تواند تصویر D در صفحه xoy را مشخص کند. اما اگر در معادله‌ی همه‌ی رویه‌ها متغیر z وجود داشته باشد و آن‌ها نتوانند یک ناحیه‌ی بسته در صفحه‌ی xoy را مشخص کنند، باید آن‌ها را با هم برخورد داده و با حذف z از این معادلات رابطه‌ای برحسب x و y بەدست آوریم.

برای نمونه فرض کنید ناحیه‌ی D به مخروط $z^۲=x^۲+y^۲$ و کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ محدود شده باشد، در هر دو معادله، متغیر z حضور دارد. بنابراین آن‌ها را برخورد می‌دهیم و خواهیم داشت $x^۲+y^۲+x^۲+y^۲=۴$ به عبارتی $x^۲+y^۲=۲$ که دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ و مرکز مبدأ است. از این دایره، می‌توانیم حدود x و y را بنویسیم.

مثال ۴: ناحیه‌ی D یک جسم توپر است که به سطوح $z=xy$، $y=x^۲$ و $x=y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$ محدود شده است. کران‌های انتگرال $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ را روی این ناحیه بنویسید.



☑ **پاسخ:** ابتدا دقت کنید که از معادلات داده شده، دو مقدار برای z به‌دست می‌آید: $z=۰$ و $z=xy$ بنابراین کران‌های z همین‌ها هستند. اگر تردید دارید که کدام‌یک از آن‌ها کران پایین است، باید کمی حوصله کنید تا حدود x و y بهتر مشخص شوند. معادلات $y=x^۲$ و $x=y^۲$ یک ناحیه در صفحه‌ی xoy را مشخص می‌کنند. محل برخورد این دو منحنی در $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ است.

برای x داریم $۰\le x\le ۱$ و برای y با حرکت از پایین به بالا مرز ورودی $y=x^۲$ و مرز خروجی $y=\sqrt{x}$ است. در نتیجه حدود y به شکل $x^۲\le y\le\sqrt{x}$ به‌دست می‌آیند. حالا که محدوده‌ی تغییرات x و y را فهمیدیم، مشخص شد که در این ناحیه x و y نامنفی هستند؛ بنابراین در مورد کران‌های z با اطمینان می‌توان گفت که $z=xy$ کران بالا و $z=۰$ کران پایین است در نتیجه $۰\le z\le xy$ و حدود انتگرال به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$I=\int_۰^۱\int_{x^۲}^{\sqrt{x}}\int_۰^{xy}f(x,y,z)dzdydx$$

مثال ۵: ناحیه‌ی D توسط رویه‌های $z=x^۲+۳y^۲$ و $z=۸-x^۲-y^۲$ محصور شده است. کران‌های انتگرالِ سه‌گانه‌ی $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ را مشخص کنید.

☑ **پاسخ:** با توجه به رویه‌های داده شده، واضح است که حدود z عبارتند از $z=۸-x^۲-y^۲$ و $z=x^۲+۳y^۲$. اگر شکل را رسم نکرده باشیم، در حال حاضر نمی‌دانیم کدام‌یک از آن‌ها کران پایین و کدام‌یک کران بالاست. این مشکل را در ادامه حل خواهیم کرد. برای نوشتن کران‌های x و y از آن‌جا که هیچ‌کدام از رویه‌ها ناحیه‌ای در صفحه‌ی xoy به ما نمی‌دهند، باید آن دو را برخورد دهیم و با حذف z، رابطه‌ای بین x و y پیدا کنیم.

$$\begin{cases}z=x^۲+۳y^۲\\ z=۸-x^۲-y^۲\end{cases}\Rightarrow x^۲+۳y^۲=۸-x^۲-y^۲\Rightarrow x^۲+۲y^۲=۴$$

معادله‌ی $x^۲+۲y^۲=۴$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضی است. شعاع‌های افقی و عمودی این بیضی را تعیین می‌کنیم. به ازای $x=۰$ داریم $y=\pm\sqrt{۲}$ و به ازای $y=۰$ داریم $x=\pm۲$. در نتیجه یک بیضی با شعاع عمودی $\sqrt{۲}$ و شعاع افقی ۲ داریم. کران‌های x به‌صورت $-۲\le x\le ۲$ هستند و برای کران‌های y از معادله‌ی بیضی $x^۲+۲y^۲=۴$ خواهیم داشت: $y=\pm\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۲}}$، به عبارتی داریم:

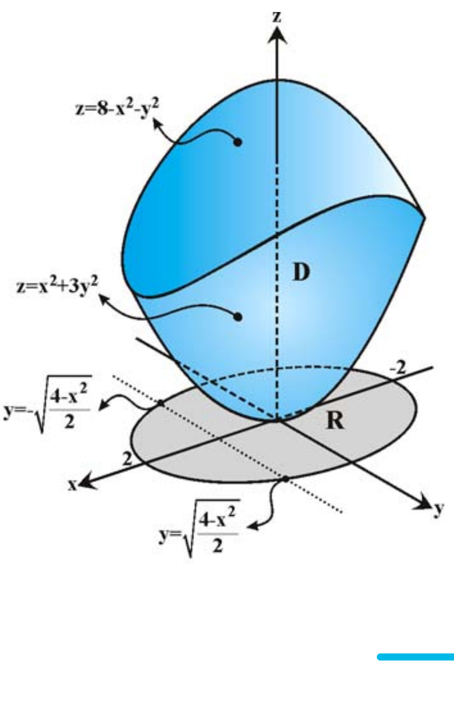
$$-\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۲}}\le y\le\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۲}}$$

اکنون وقت آن رسیده است که کران‌های بالا و پایین z را بهتر بشناسیم. یک نقطه از درون این بیضی انتخاب کنید. مثلاً نقطه‌ی $(x,y)=(۰,۰)$ در این ناحیه قرار دارد. با جایگذاری آن در کران‌های z داریم:

$$\begin{cases}z=۸-x^۲-y^۲=۸\\ z=x^۲+۳y^۲=۰\end{cases}$$

پس $z=۸-x^۲-y^۲$ کران بالا و $z=x^۲+۳y^۲$ کران پایین است:

$$I=\int_{-۲}^{۲}\int_{-\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۲}}}^{\sqrt{\frac{۴-x^۲}{۲}}}\int_{x^۲+۳y^۲}^{۸-x^۲-y^۲}f(x,y,z)dzdydz$$



نوشتن کران‌ها برای یک هشتم اول یک ناحیه:

همان‌طور که می‌دانیم؛ هر کدام از محورهای x، y و z دارای یک نیمه‌ی مثبت و یک نیمه‌ی منفی هستند. به همین خاطر در صفحه‌ی xoy ما چهار ربع مختلف داریم که حالت $x \geq 0$، $y \geq 0$ نشان‌دهنده‌ی ربع اول آن است. بنابراین در فضای (x,y,z) ما $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت مختلف از نظر علامت داریم که یک هشتمِ اول آن مربوط به حالتِ $x,y,z \geq 0$ است. در برخی از سؤالات مقدار انتگرال را برای $\frac{1}{8}$ اول از ناحیه‌ی D می‌خواهند. در این صورت شما می‌توانید مانند حالت عادی کران‌ها را روی ناحیه‌ی D به‌دست آورید و در پایان اگر کران پایین برخی از متغیرها منفی بود به جای آن باید صفر را قرار دهیم.

مثال ۶: **انتگرال سه‌گانه‌ی $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx$ روی ناحیه‌ی D که به استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و صفحات $z+y=2$ و $z=1$ محدود می‌شود، داده شده است.**

الف) حدود انتگرال را روی این ناحیه مشخص کنید.

ب) حدود انتگرال را برای $\frac{1}{8}$ اول از این ناحیه تعیین کرده و با حدود به‌دست آمده در حالت (الف) مقایسه کنید.

پاسخ: هر کدام از دو قسمت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف) ناحیه‌ی D به رویه‌های $z=1$، $z=2-y$ و $x^2+y^2=1$ محدود شده است. بنابراین کران‌های z عبارتند از $z=1$ و $z=2-y$.

برای نوشتن کران x و y از آنجا که معادله‌ی $x^2+y^2=1$ دایره‌ای در صفحه‌ی xoy را به ما می‌دهد، نیازی به برخورد دادن رویه‌های دیگر نداریم. در این دایره $-1 \leq x \leq 1$ است و از معادله‌ی دایره به روابط $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ می‌رسیم که کران‌های y هستند. در ضمن اگر تردید داریم که ترتیب کران‌های z چگونه است کافیست یک نقطه از درون این دایره مثلاً نقطه‌ی $(x,y)=(0,0)$ را در آن‌ها قرار دهیم:

$$\begin{cases} z=1 \\ z=2-y=2 \end{cases}$$

می‌بینیم که $2-y>1$ است. پس $z=1$ کران پایین و $z=2-y$ کران بالاست.

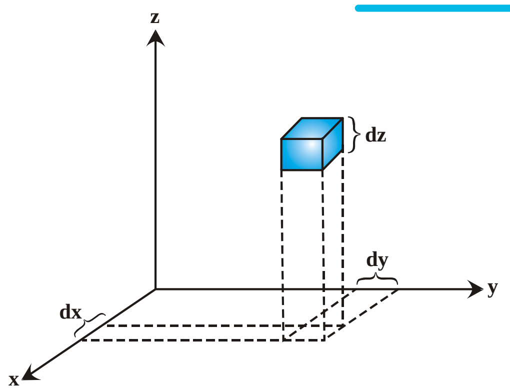
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dzdydx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{2-y} f(x,y,z)\,dzdydx$$

ب) برای نوشتن کران‌ها در $\frac{1}{8}$ اول، کافیست در حالت (الف) به کران‌های پایین دقت کنیم و اگر منفی هستند، به جای آن‌ها صفر را قرار دهیم:

$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{2-y} f(x,y,z)\,dzdydx$$

اگر جواب‌های به‌دست آمده در حالات (الف) و (ب) را مقایسه کنید، می‌بینید که کران‌های z تغییری نکرده‌اند. زیرا مثبت هستند، اما کران‌های x و y به جای مقادیر منفی از $x=0$ و $y=0$ آغاز شده‌اند.

تذکر ۱: حاصل‌ضرب $dzdydx$ حجم قطعه‌ی کوچکی از ناحیه‌ی D را نشان می‌دهد که مکعبی با ابعادِ dx، dy و dz است. به همین علت این حاصل‌ضرب را گاه با علامت dv نشان می‌دهیم و به آن المانِ حجم در دستگاه دکارتی می‌گوییم.



نکته ۱: معمولاً برای معرفی ناحیه‌ی D رویه‌هایی به‌صورت $z=g(x,y)$ و $z=h(x,y)$ در مسأله داده می‌شود که کران‌های پایین و بالای z هستند. حالا اگر در مسأله‌ای رویه‌های $y=g(x,z)$ و $y=h(x,z)$ آمده باشند، یعنی y برحسب x و z به‌صورت صریح داده شده باشد، یکی از این دو کار را می‌توانیم انجام دهیم:

۱ـ می‌توانیم در آن مسأله به جای همه‌ی yها، z قرار دهیم و به جای همه‌ی zها، y قرار دهیم. سپس آن را به‌صورت عادی یعنی با ترتیب $dzdydx$ حل کنیم. استفاده از این روش نیاز به دقت و تجربه دارد.

۲ـ از آنجا که حدود y را برحسب x و z داریم می‌توانیم dy را در انتگرال میانی قرار دهیم، حدود y عبارتند از $y=g(x,z)$ و $y=h(x,z)$. برای تعیین حدود x و z نیز از برخورد دادن این دو معادله، و حذف متغیر y، رابطه‌ای برحسب x و z به‌دست می‌آوریم. بدیهی است که مشابه همین نکته را وقتی که رویه‌های $x=g(y,z)$ و $x=h(y,z)$ داده شده باشند به کار می‌بندیم. در این حالت dx را به انتگرال میانی خواهیم آورد.

درسنامه۵: تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه

همانند انتگرال دوگانه، در حل انتگرال سه‌گانه روی یک ناحیه، ممکن است نوشتن کران‌ها یا حل انتگرال در دستگاه مختصات دکارتی مشکل یا ناممکن باشد. در این درسنامه خواهید دید که گاهی اوقات می‌توانیم با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب کاری کنیم که نوشتن کران‌ها و حل انتگرال ساده‌تر شود.
فرض کنید در تابع زیر انتگرال یا در معادله‌ی رویه‌های داده شده، برخی از عبارات تکرار شده باشند، با نامگذاری آن‌ها به‌صورت u، v و w تلاش می‌کنیم عبارت زیر انتگرال و معادله‌ی مرزهای D برحسب این متغیرهای جدید، ساده‌تر از قبل شوند. مثلاً اگر ناحیه‌ی داده شده درون رویه‌ی $(x+y+z)^۲+(x-۲y+z)^۲+(z-x)^۲=۱$ باشد، با انتخاب $u=x+y+z$، $v=x-۲y+z$ و $w=z-x$ معادله‌ی این رویه به‌صورت $u^۲+v^۲+w^۲=۱$ تبدیل می‌شود که معادله‌ی کره‌ی واحد در دستگاه (u,v,w) است. به عنوان یک نمونه‌ی دیگر، وقتی تابع زیر انتگرال به شکل $f(x,y,z)=(x+y+z)^۲e^{\frac{y-x}{x-z}}$ باشد، با انتخاب $u=x+y+z$، $v=y-x$ و $w=x-z$ به تابع ساده‌تر $f(u,v,w)=u^۲e^{\frac{v}{w}}$ تبدیل می‌شود.
بنابراین انتخاب متغیرهای u، v و w با توجه به معادله‌ی رویه‌های داده شده یا با توجه به تابع زیر انتگرال انجام می‌شود.
برای انجام تغییر متغیر، رعایت ترتیب در انجام کارها بسیار اهمیت دارد. این کار را می‌توان در چهار گام به‌صورت زیر انجام داد:
گام اول: با توجه به معادله‌ی رویه‌های داده شده، یا با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x,y,z)$ متغیرهای جدید u، v و w را انتخاب می‌کنیم. مثلاً اگر ناحیه‌ی انتگرال‌گیری به رویه‌ی $(x+y)^۲=(y-z)^۲+(z+x)^۲$ محدود شده باشد، انتخاب $u=z+x$، $v=y-z$ و $w=x+y$ مناسب است.
گام دوم: حالا که ضابطه‌ی u، v و w را برحسب متغیرهای x، y و z داریم می‌توانیم مشتق‌های جزئی آن‌ها را محاسبه کرده و ژاکوبین دستگاه جدید را به‌دست آوریم. نمادهای J_{uvw} و J_{xyz} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J_{uvw}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \quad , \quad J_{xyz}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

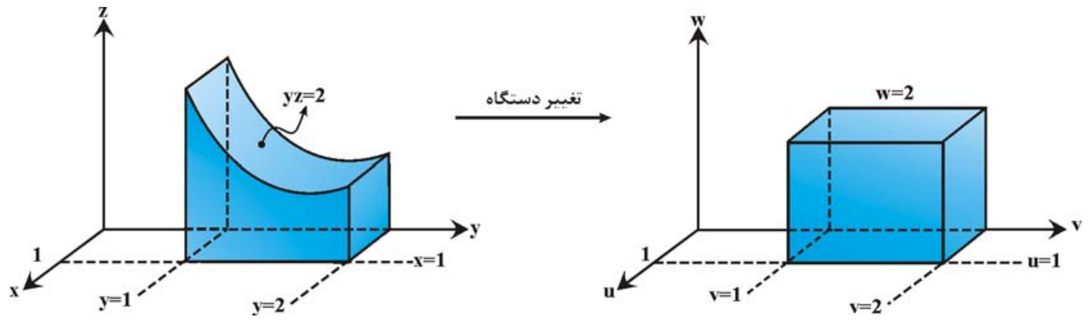
البته در عمل محاسبه‌ی J_{xyz} ساده‌تر است. زیرا معمولاً ما ضابطه‌ی u و v و w را برحسب متغیرهای x، y و z داریم. بنابراین ابتدا J_{xyz} را به‌دست می‌آوریم و سپس با معکوس کردن آن $J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}$ مشخص می‌شود. در هر صورت وقتی از دستگاه مختصات دکارتی (x,y,z) به دستگاه جدید (u,v,w) می‌رویم، جایگذاری زیر لازم است:

$$\boxed{dzdydx=|J_{uvw}|dwdvdu=\left|\frac{۱}{J_{xyz}}\right|dwdvdu}$$

گام سوم: به معادله‌ی رویه‌های داده شده در دستگاه (x,y,z) توجه کنید. باید آن‌ها را به معادلاتی برحسب u، v و w تبدیل کنید. در این مرحله، مرزهای قدیمی به مرزهای جدید در دستگاه (u,v,w) تبدیل می‌شوند. اگر توانستیم، ناحیه‌ی D را در دستگاه جدید رسم می‌کنیم اما این کار ضروری نیست. در این مرحله کران‌های بالا و پایین انتگرال نیز مشخص می‌شوند.
گام چهارم: قدرمطلق ژاکوبین را در تابع $f(x,y,z)$ ضرب می‌کنیم. حالا این تابع را برحسب متغیرهای جدید u، v و w می‌نویسیم. تنها کاری که باقی می‌ماند، حل انتگرال است. در مثال‌های زیر این مراحل چهارگانه را به شکل عملی توضیح داده‌ایم.

مثال۱: ناحیه‌ی D در فضای (x,y,z) به وسیله‌ی نامعادلاتِ $۰\le x\le ۱$، $۱\le y\le ۲$ و $۰\le yz\le ۲$ مشخص شده است، حاصل انتگرال $\iiint_D xzy^۳e^{y^۲}dydxdz$ روی این ناحیه را به‌دست آورید.

پاسخ: گام اول: به نامعادلات داده شده برای مشخص‌کردن ناحیه‌ی D توجه کنید. اگر فرض کنیم $u=x$، $v=y$ و $w=yz$ آن‌گاه ناحیه‌ی D در دستگاه (u,v,w) با نامعادلات $۰\le u\le ۱$، $۱\le v\le ۲$ و $۰\le w\le ۲$ مشخص می‌شود، یعنی به یک مکعب مستطیل تبدیل می‌شود.



گام دوم: حالا باید ژاکوبین دستگاه جدید را محاسبه کنیم. ابتدا J_{xyz} را به‌دست می‌آوریم و سپس آن را وارونه می‌کنیم.

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & z & y \end{vmatrix}=y \quad \Rightarrow \quad J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}=\frac{۱}{y}$$

گام سوم: در این مثال کران‌های u، v و w به سادگی مشخص می‌شوند. ناحیه‌ی انتگرال‌گیری با نامعادلات $0\le x\le 1$، $1\le y\le 2$ و $0\le yz\le 2$ داده شده است. با توجه به انتخاب $u=x$، $v=y$ و $w=yz$ واضح است که کران‌های u، v و w به‌صورت $0\le u\le 1$، $1\le v\le 2$ و $0\le w\le 2$ هستند.

گام چهارم: می‌خواهیم قدرمطلق ژاکوبین را در تابع زیر انتگرال ضرب کنیم. دیدیم که $|J_{uvw}|=|\frac{1}{y}|$ است. در ناحیـه‌ی D مقـدار y مثبت است پـس $|\frac{1}{y}|=\frac{1}{y}$ خواهد بود. پس از ضرب‌کردن قدرمطلق ژاکوبین در تابع زیر انتگرال، آن را برحسب متغیرهای جدید (u,v,w) می‌نویسیم:

$$f(x,y,z)dzdydx = xzy^3e^{y^2}\,dzdydx = xzy^3e^{y^2}\times\frac{1}{y}\times dwdvdu = xzy^2e^{y^2}\,dwdvdu$$

حالا با توجه به آن که $u=x$، $v=y$ و $w=yz$ است داریم:

$$f(x,y,z)dzdydx = (wuve^{v^2})dwdvdu$$

بنابراین تابع زیر انتگرال هم با این تغییر متغیر کمی ساده‌تر شده است. فقط می‌ماند حلِ انتگرال در دستگاه جدید:

$$I=\int_0^1\int_1^2\int_0^2(wuve^{v^2})dwdvdu=\int_0^1\int_1^2 uve^{v^2}\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^2 dvdu=\int_0^1\int_1^2(2uve^{v^2})\,dvdu=\int_0^1 u\left[e^{v^2}\right]_1^2 du$$

$$I=\int_0^1(e^4-e)u\,du=(e^4-e)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^4-e)$$

در پایان به این موضوع توجه کنیم که انجام این تغییر متغیر چه ضرورتی داشت؟ اگر بخواهیم این انتگرال را در همان دستگاه دکارتی حل کنیم، در اولـین گام باید انتگرال $\int xzy^3e^{y^2}dy$ را حل می‌کردیم که انتگرال مشکلی بود. اما با انجام تغییر متغیر، هم انتگرال‌گیری‌ها ساده‌تر شد و هـم حـدود انتگـرال بـه اعداد ثابتی تبدیل شدند.

مثال ۲ (سخت): حاصلِ انتگرالِ سه‌گانه‌ی $I=\iiint_D\frac{(x+y+2z)}{1-(x-y)^2-(x+y+2z)^2}dzdydx$ روی ناحیه‌ی D که محـدود بـه صـفحه‌ی $2y+z=1$ و رویه‌ی $2y+z=(x+y+2z)^2+(x-y)^2$ با شرط $x+y+2z\ge 0$ است را بیابید.

☑ **پاسخ:**

گام اول: اگر به تابع انتگرالده و رویه‌های داده شده دقت کنیم، متوجه می‌شویم که در آن‌ها سـه عبـارت $x-y$، $x+y+2z$ و $2y+z$ بـه کـار رفتـه‌انـد. بدیهی است که حل انتگرال و نوشتن کران‌ها در دستگاه دکارتی مشکل است. امـا بـا نامگـذاری $u=x+y+2z$، $v=x-y$ و $w=2y+z$ عبـارت‌هـای ساده‌تری خواهیم داشت.

گام دوم: با محاسبه‌ی ژاکوبین دستگاه جدید ادامه می‌دهیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1+0+4-0-1-0)=2$$

بنابراین $J_{uvw}=J_{xyz}^{-1}=\frac{1}{2}$ است.

گام سوم: با توجه به‌صورت سؤال، ناحیه‌ی D محدود به صفحه‌ی $w=1$ و رویه‌ی $w=u^2+v^2$ با شرط $u\ge 0$ است. کران‌های w که مربوط به انتگـرال میانی هستند، عبارتند از $w=1$ و $w=u^2+v^2$. برای یافتن کران‌هـای u و v از آنجـا کـه هیچکـدام از معـادلات داده شـده ناحیـه‌ای در uov مشـخص نمی‌کنند دو معادله را برخورد داده و با حذف w از آن‌ها به دایره‌ی $u^2+v^2=1$ می‌رسیم. واضح است که در این دایره $-1\le u\le 1$ است. اما شـرط $u\ge 0$ در مسأله باعث می‌شود که حدود u به شکل $0\le u\le 1$ باشند و کران‌های v از نیم‌دایره‌ی $v=-\sqrt{1-u^2}$ تا نیم‌دایـره‌ی $v=\sqrt{1-u^2}$ هسـتند. در نتیجـه برای کران‌ها خواهیم داشت: $0\le u\le 1$، $-\sqrt{1-u^2}\le v\le\sqrt{1-u^2}$، $u^2+v^2\le w\le 1$

گام چهارم: حالا ژاکوبین دستگاه جدید را در انتگرالده ضرب می‌کنیم و سپس تابع جلوی انتگرال را برحسب متغیرهای جدید می‌نویسیم:

$$\frac{(x+y+2z)}{1-(x-y)^2-(x+y+2z)^2}dzdydx=\left(\frac{u}{1-u^2-v^2}\right)\frac{1}{2}dwdvdu\ \Rightarrow I=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\int_{u^2+v^2}^{1}\left(\frac{u}{1-u^2-v^2}\right)\frac{1}{2}dwdvdu$$

در انتگرال میانی انتگرالده نسبت به w ثابت است و داریم:

$$\int_{u^2+v^2}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{u}{1-u^2-v^2}\right)dw=\frac{1}{2}\left[\frac{uw}{1-u^2-v^2}\right]_{u^2+v^2}^{1}=\frac{1}{2}\left[\frac{u(1-u^2-v^2)}{1-u^2-v^2}\right]=\frac{1}{2}u$$

این عبارت نسبت به v ثابت است. بنابراین دومین انتگرال نیز خیلی راحت گرفته می‌شود:

$$\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{2}u\,dv=\frac{1}{2}uv\Big|_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}=u\sqrt{1-u^2}$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\int_{u^2+v^2}^{1}\frac{u}{1-u^2-v^2}\frac{1}{2}dwdvdu=\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du=-\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

مثال ۳: حاصلِ انتگرال سه‌گانه‌ی $I=\int_0^3\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}}[4(\frac{2x-y}{2})^3-3(\frac{2x-y}{2})^2]e^{(\frac{z}{3})^2}dxdydz$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{e}{6}$ ۳) $\frac{e}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» در تابع انتگرالده عبارت‌های $\frac{2x-y}{2}$ و $\frac{z}{3}$ به کار رفته‌اند. در کران‌های انتگرال نیز عبارت $\frac{y}{2}$ تکرار شده است. بنابراین به نظر می‌رسد با تغییر متغیر $u=\frac{2x-y}{2}=x-\frac{y}{2}$، $v=\frac{y}{2}$ و $w=\frac{z}{3}$ به انتگرال ساده‌تری خواهیم رسید. ژاکوبین دستگاه جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{J_{xyz}}=6$$

بنابراین عبارت زیر انتگرال در ۶ ضرب خواهد شد. برای تشخیص حدود انتگرال در دستگاه جدید باید به کران‌های فعلیِ آن دقت کنیم. هر کدام از کران‌های انتگرال در دستگاه (x,y,z) را به یکی از کران‌ها در دستگاه (u,v,w) تبدیل می‌کنیم:

مرزهای قدیمی	ارتباط بین متغیرهای جدید و قدیم	مرزهای جدید
$z=0$	$w=\frac{z}{3}$	$w=0$
$z=3$	$w=\frac{z}{3}$	$w=1$
$y=0$	$v=\frac{y}{2}$	$v=0$
$y=4$	$v=\frac{y}{2}$	$v=2$
$x=\frac{y}{2}$	$u=x-\frac{y}{2}$	$u=0$
$x=1+\frac{y}{2}$	$u=x-\frac{y}{2}$	$u=1$

پس حدود انتگرال در این دستگاه به‌صورت $0\le u\le 1$، $0\le v\le 2$ و $0\le w\le 1$ هستند. اکنون تابع زیر انتگرال را در قدرمطلق ژاکوبین ضرب کرده و برحسب متغیرهای جدید می‌نویسیم:

$$I=\iiint_D[4u^3-3u^2]e^{w^2}(6)dudvdw=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 6[4u^3-3u^2]e^{w^2}dudvdw$$

همه‌ی کران‌ها اعداد ثابت هستند و تابع زیر انتگرال هم حاصل‌ضرب توابع یک متغیره است، پس می‌توانیم انتگرال سه‌گانه را به حاصل‌ضرب سه انتگرال یگانه تبدیل کنیم:

$$I=6(\int_0^1 dv)(\int_0^2 e^{w^2}dw)(\int_0^1(4u^3-3u^2)du)$$

مقدار آخرین انتگرال صفر است: $\int_0^1(4u^3-3u^2)du=[u^4-u^3]_0^1=0$. بنابراین نیازی به محاسبه‌ی دو انتگرال اول نیست (هر چند انتگرال دوم قابل محاسبه هم نیست!) پس: $I=0$.

مثال ۴: اگر T ناحیه‌ی محدود به صفحات $\begin{cases}x+y+z=\pm 2\\ x-y+z=\pm 3\\ x+y-z=\pm 1\end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\iiint_T yzdv$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه «۱» با معرفی $u=x+y+z$ و $v=x-y+z$ و $w=x+y-z$ داریم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}\overset{\text{ساروس}}{=\!=}(1+1+1+1+1-1)=4\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{J_{xyz}}=\frac{1}{4}$$

با توجه به‌صورت سؤال در دستگاه جدید $u=\pm 2$ و $v=\pm 3$ و $w=\pm 1$ معادلات مرزهای انتگرال هستند. در ضمن $y=\frac{u-v}{2}$ و $z=\frac{u-w}{2}$ پس داریم:

$$I=\iiint_T yz\,dzdydx=\int_{-3}^3\int_{-2}^2\int_{-1}^1(\frac{u-v}{2})(\frac{u-w}{2})(\frac{1}{4})dwdudv=\frac{1}{16}\int_{-3}^3\int_{-2}^2\int_{-1}^1(u^2-uw-vu+vw)dwdudv$$

با توجه به متقارن بودن بازه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به w، جملاتی که نسبت به w فرد هستند، انتگرالشان صفر می‌شود، به عبارتی $\int_{-1}^{1}(-uw+vw)\,dw=0$

پس خواهیم داشت: $I=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(u^2-vu)\,dwdudv=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}2(u^2-vu)\,dudv$

در اینجا هم $\int_{-2}^{2}vudu=0$ است زیرا vu نسبت به u فرد است. پس داریم: $I=\frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2}2u^2\,dudv=\frac{1}{8}\int_{-3}^{3}\frac{16}{3}\,dv=(\frac{1}{8})(\frac{16}{3})(6)=\frac{12}{3}=4$

مثال ۵ (سخت): فرض کنید $g(x,y,z)=(3y+4z\,,\,2x-3z\,,\,x+3y)$ و $S=\{(x,y,z);0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1\}$، در این صورت از تساوی زیر، مقدار α کدام است؟ $\iiint_{g(S)}(2x+y-2z)dxdydz=\alpha\iiint_S zdxdydz$

۱) ۸۵　　۲) ۸۰　　۳) ۷۵　　۴) ۳۰

پاسخ: گزینه «۳» دقت کنید که S ناحیه‌ی مکعب داده شده و $g(S)$ تصویر این ناحیه توسط نگاشت g است. در واقع بهتر است مختصات نقاط را در ناحیه‌ی S با (x,y,z) و در ناحیه‌ی $g(S)$ با (X,Y,Z) نشان دهیم. به عبارتی در ناحیه‌ی $g(S)$ داریم: $(X,Y,Z)=(3y+4z\,,\,2x-3z\,,\,x+3y)$

بنابراین در انتگرال روی $g(S)$ داریم: $F(X,Y,Z)=2X+Y-2Z=2(3y+4z)+(2x-3z)-2(x+3y)=5z$

اگر بخواهیم ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را از $g(S)$ (یعنی دستگاه (X,Y,Z)) به S (یعنی دستگاه (x,y,z)) تبدیل کنیم لازم است ژاکوبین دستگاه (x,y,z) را در انتگرالده ضرب کنیم:

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}X_x & X_y & X_z\\ Y_x & Y_y & Y_z\\ Z_x & Z_y & Z_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=15$$

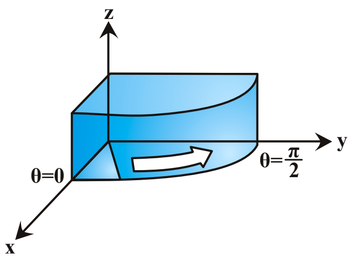
پس داریم $\iiint_{g(S)}F(X,Y,Z)dZdYdX=\iiint_S 5z(15)dzdydx=75\iiint_S zdzdydx$. بنابراین $\alpha=75$ است.

دستگاه مختصات استوانه‌ای

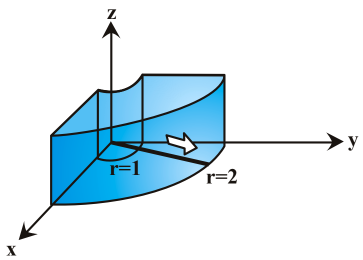
اگر تصویر D بر صفحه xoy قطاعی از دایره یا بین دو دایره باشد، می‌توانیم به جای کران‌های x و y حدود r و θ را در این ناحیه بنویسیم. به عبارتی به جای مؤلفه‌های (x,y,z) از مؤلفه‌های (r,θ,z) استفاده کنیم. رابطه‌ی متغیرهای r و θ با متغیرهای x و y همان است که در مختصات قطبی مطالعه کردیم. بنابراین داریم: $r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\,\theta=tg^{-1}\frac{y}{x}$ و همان‌طور که در دستگاه قطبی برای انتگرال دوگانه دیدید ژاکوبین دستگاه (r,θ,z) برابر با $J_{r\theta z}=r$ است.

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dzdydx=\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dzdrd\theta}$$

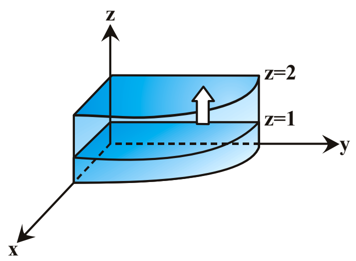
در شکل‌های زیر نحوه‌ی حرکت در امتداد متغیرهای دستگاه استوانه‌ای را مشاهده می‌کنید. در صفحه‌ی xoy در جهت مثلثاتی با چرخش حول مبدأ مقدار θ افزایش می‌یابد و با دور شدن از مبدأ مقدار r افزوده می‌شود. حرکت در امتداد محور zها از پایین به بالا باعث افزایش مقدار z می‌شود.



چرخش در جهت افزایش θ



حرکت شعاعی در امتداد r



حرکت عمودی در راستای z

البته مهم‌ترین مسأله در اینجا، چگونگی تشخیص استفاده از این دستگاه است. همان‌طور که در ابتدای متن گفته شد، اگر تصویر ناحیه‌ی D بر صفحه xoy بخشی از یک دایره یا بین دو دایره باشد، استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب است. همچنین وجود عبارت x^2+y^2 در تابع زیر انتگرال، می‌تواند یک نشانه برای به کار بستن دستگاه استوانه‌ای باشد.

تذکر ۱: هرگاه ناحیه‌ی D، محدود به رویه‌های زیر باشد، معمولاً استفاده از دستگاه استوانه‌ای توصیه می‌شود.

الف ـ استوانه و کره　　ب ـ استوانه و صفحه　　ج ـ مخروط و صفحه　　د ـ کره و صفحه

تذکر ۲: هرگاه ناحیه‌ی D از برخورد یک استوانه‌ی قائم و یک استوانه افقی به‌دست آمده باشد، با این که تصویر آن بر صفحه‌ی xoy دایره است، ممکن است نوشتن کران‌ها و حل انتگرال در همان دستگاه دکارتی ساده‌تر از استوانه‌ای باشد. برای مثال اگر ناحیه‌ی D درون استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ قرار داشته باشد، حل انتگرال در دستگاه دکارتی ساده‌تر از استوانه‌ای است. بهتر است مراقب این حالتِ خاص باشید!

اما اگر مثلاً ناحیه‌ی D درون استوانه‌ی $x^2+y^2=2$ و کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$ قرار داشته باشد، بهتر است از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم.

تذکر ۳: دستگاه استوانه‌ای برای انتگرال‌های سه‌گانه و دستگاه قطبی برای انتگرال‌های دوگانه به کار گرفته می‌شوند. این دو دستگاه شباهت زیادی به هم دارند. ژاکوبین هر دوی آن‌ها r است و هر دوی آن‌ها را وقتی استفاده می‌کنیم که ناحیه‌ی مورد نظر در صفحه‌ی xoy دایره یا بخشی از دایره باشد. تفاوت آن‌ها در این است که در دستگاه قطبی فقط متغیرهای (r,θ) را داریم اما در دستگاه استوانه‌ای علاوه بر r و θ، متغیر z نیز حضور دارد.

$(x,y,z)\xrightarrow{\text{دستگاه استوانه‌ای}}(r,\theta,z)$　　$(x,y)\xrightarrow{\text{دستگاه قطبی}}(r,\theta)$