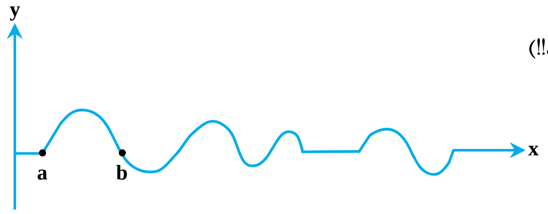
درسنامه: انتگرال روی خط یا انتگرال روی منحنی

در این بخش می‌خواهیم مبحث جدیدی تحت عنوان «انتگرال روی خط» و یا به عبارت صحیح‌تر «انتگرال روی منحنی» را با هم یاد بگیریم. (نظر شخصی بنده این است که انتگرال روی منحنی صحیح‌تر است، چرا که اصولاً ما اغلب در این فصل روی منحنی انتگرال می‌گیریم تا روی خط! اما چون در کتاب‌ها بیشتر انتگرال روی خط استفاده می‌شود ما هم در این کتاب این عبارت را بیشتر به کار می‌بریم!)

هیچ تردیدی نیست اکثر دانشجویان در درک مطالب این مبحث دچار مشکل هستند، اما اگر کمی به کار دل دهید! قول می‌دهم مشکل شما را برای همیشه حل کنم! اما بِریم سراغ آموزش! بحث ما در مورد این نوع انتگرال‌ها به دو بخش اصلی ۱ـ انتگرال خطِ **توابع عددی** و ۲ـ انتگرال خطِ **توابع برداری**، دسته‌بندی می‌شوند که ابتدا انتگرال خط توابع عددی را بررسی می‌کنیم.

۱ـ انتگرال روی منحنی برای توابع عددی

در این حالت ما می‌خواهیم انتگرال یک «تابع عددی» مثلاً $f(x,y)=xy$ را روی یک منحنی یا خط حساب کنیم. اما قبل از ورود کامل به بحث، بهتر است ابتدا کمی با مفهوم انتگرال روی خط آشنا شویم. اگر خاطر شریفتان باشد؛ وقتی در ریاضی عمومی (۱) می‌خواستیم حاصل انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را حساب کنیم، از تابع $f(x)$ در فاصله‌ی a تا b روی محور x ها انتگرال می‌گرفتیم. خُب اگه محور x ها یک خط صاف افقی نبود! در واقع همین انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را می‌شد اسمشُ گذاشت انتگرال روی منحنی!



یعنی اگر مثلاً محور x ها به‌صورت مقابل بود، (که اینجوری واقعاً محور چقدر زشت می‌شد!!)

اونوقت می‌شد؛ انتگرال $I=\int_a^b f(x)dx$، را انتگرال روی منحنی نام‌گذاری کرد!

یا به عبارت دیگر می‌توان گفت؛ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ که در ریاضی عمومی (۱) یاد گرفتیم، به نوعی انتگرال خط روی محور x ها (روی یک خط صاف و افقی) بود.

توجه کنید؛ درست است که ما در کتاب ریاضی (۲) هستیم، اما در حل اکثر سؤالات انتگرال روی منحنی، با یک انتگرال‌گیری عادی یگانه سر و کار داریم. اما تفاوت‌ها به همین‌جا ختم نمیشه، چون در این‌جا ما به جای $f(x)$ با $f(x,y,z)$ یا در حالت کمی ساده‌تر، با $f(x,y)$ سر و کار داریم.

خُب تا اینجا سعی کردم شما کمی وارد باغ شوید و نترسید و بدانید بحث خیلی هم سخت نیست. برای قدم زدن آرام در باغ! ابتدا با تابع دو متغیره $f(x,y)$ شروع می‌کنیم و آگاه باشید که اگر تابع حتی $f(x,y,z)$ هم باشه، ماجرا تفاوت چندانی نداره! از همه‌ی این‌ها که بِگذریم، شما بالاخره عشقِ فرمول هستید و ما هم اعتقاد داریم بی‌فرمول که نمیشه! پس برِیم سراغ فرمول و چند مثال آموزشی.

فرض کنید بخواهیم از تابع $f(x,y)$ روی منحنی C با ضابطه‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b به طوری که $a\le t\le b$ می‌باشد، انتگرال بگیریم، فرمول محاسبه به شکل زیر است:

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt}$$

فارسی فرمول بالا یعنی چی؟ یعنی این که انتگرال سمت چپُ بی‌خیال شُو، و به جای اون، انتگرال سمت راستی رو حساب کُن، می‌دونم نیاز به توضیح نیست، ولی من برای اون یه درصدی که شاید نَدونن انتگرال سمت راستی داستانِش چیه؟ باید توضیح بِدم! برای این که از انتگرال سمت چپ به انتگرال سمت راست برسیم، باید تو ضابطه‌ی $f(x,y)$، به جای تمام x ها، $x(t)$ و به جای تمام y ها، $y(t)$ قرار بِدیم و همچنین از $x(t)$ و $y(t)$ مشتق بگیریم و هر کدوم رو به توان دو برسونیم و با هم جمع کنیم و یک رادیکال هم بالا سر اونا بذاریم و در نهایت این رادیکالُ در dt ضرب کنیم و به جای ds قرار بِدیم.

توجه دارید که همه‌ی متغیرها بر حسب t نوشته شدند و دیگه خبری از متغیرهای دیگر نیست! حل چند مثال موضوع را بهتر روشن می‌کند:

مثال ۱: حاصل انتگرال $\int_C xyds$ که در آن C منحنی پارامتری با معادله‌ی $\vec{C}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}$ می‌باشد، از نقطه‌ی $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به ضابطه‌ی $C(t)$، واضح است؛ $x(t)=\cos t$ و $y(t)=\sin t$، بنابراین $xy=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$، از طرفی $x'(t)=-\sin t$ و $y'(t)=\cos t$ و لذا داریم:

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\sqrt{1}dt=1dt$$

همه چی آماده‌ی یک انتگرال‌گیری ساده و معمولی یگانه از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ شده است، بنابراین داریم:

$$\int_C xyds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2t)\times 1\times dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}\cos(2\times\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cos(0)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$$

مثال ۲: اگر C دارای معادلات پارامتری $x = Ln(1+t^2)$ و $y = 2arctgt - t + 3$، باشد، حاصل انتگرال $I = \int_C ye^{-x}ds$، برای $0 \le t \le 1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{16} - Ln2 + \frac{3\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi^2}{16} - Ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi^2}{4} - Ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$
۴) $\frac{\pi^2}{4} - Ln2 + \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» در این سؤال $x(t)$، $y(t)$ و بازه‌ی تغییرات t داده شده و بنابراین کافیست $x'(t)$ و $y'(t)$ را حساب کنیم و در فرمول قرار دهیم:

$$x(t) = Ln(1+t^2) \Rightarrow x'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow (x_t')^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \quad , \quad y(t) = 2arctgt - t + 3 \Rightarrow y'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1$$

$$\Rightarrow (y_t')^2 = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 \Rightarrow \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = 1$$

بنابراین داریم:

$$I = \int_0^1 (2arctgt - t + 3)e^{-Ln(1+t^2)}dt \xrightarrow{e^{Lnu}=u} I = \int_0^1 (2arctgt - t + 3) \times \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{arctgt}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt + 3\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow I = [(arctgt)^2]_0^1 - \frac{1}{2}[Ln(1+t^2)]_0^1 + 3[arctgt]_0^1 = (arctg1)^2 - \frac{1}{2}Ln2 + 3arctg1 = (\frac{\pi}{4})^2 - Ln2^{\frac{1}{2}} + 3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \mathbf{Ln}\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۳: هرگاه C پاره‌خطی از نقطه‌ی $A(0,0)$ تا $B(1,1)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\int_C (x+y^2)ds$، چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{5}{8}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳» خُب ماجرا کمی سخت‌تر از حالت قبل شد، چون سؤال ضابطه‌ی $C(t)$ را به وضوح اعلام نکرده است. اما به‌دست آوردن $C(t)$ برای این سؤال چندان سخت نیست. واضح است؛ معادله‌ی خط C به‌صورت $y = x$ است و این یعنی می‌توان معادله‌ی پارامتری C را با فرض $x = t$ و در نتیجه $y = t$ به شکل زیر نوشت:

$$\vec{C}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = t\vec{i} + t\vec{j}$$

بنابراین داریم:

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \sqrt{1^2+1^2}dt = \sqrt{2}\,dt$$

از طرفی بازه و تغییرات t به‌صورت $0 \le t \le 1$ است، چرا؟ چون که ما فرض کردیم: $x = t$، بنابراین تغییرات t مانند تغییرات x است و چون x از ۰ تا ۱ تغییر کرده، t هم بازه‌ی تغییراتش از ۰ تا ۱ است، بنابراین داریم:

$$\int_C (x+y^2)ds = \int_0^1 (t+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}]_0^1 = \sqrt{2}[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}] = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

پارامتری کردن منحنی‌ها

با توجه به مثال‌های ذکر شده به نظر می‌رسد؛ کلید حل سؤالات انتگرال‌های منحنی‌الخط، پیدا کردن ضابطه‌ی منحنی پارامتری C و از آن مهم‌تر تعیین حدود تغییرات t باشد (البته در خیلی از سؤالات، منحنی C به وضوح داده می‌شود) به همین دلیل قبل از ادامه‌ی بحث، با هم چند تمرین در این خصوص انجام می‌دهیم.

۱) C قسمتی از منحنی $y = x^3$، از نقطه‌ی $A(1,1)$ تا نقطه‌ی $B(2,8)$ است.

راحت‌ترین و شاید بهترین نوع پارامتری کردن منحنی‌هایی به شکل کلی $y = f(x)$، در نظر گرفتن $x = t$ و در نتیجه $y = f(t)$ می‌باشد، یعنی $x = t$ و بنابراین $y = t^3$ و لذا منحنی پارامتری C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$$

و چون $1 \le x \le 2$، لذا حدود تغییرات t نیز به‌صورت $1 \le t \le 2$ می‌باشد.

۲) منحنی C $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ از نقطه‌ی $x = 1$ تا $x = 2$ می‌باشد.

با فرض $x = t$، آن‌گاه $y = t^2$ و $z = t^3$ و لذا $C(t)$ به‌صورت $\vec{C}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$، می‌باشد و چون $1 \le x \le 2$، لذا حدود تغییرات t نیز به‌صورت $1 \le t \le 2$ است.

۳) C پاره‌خطی است که نقطه‌ی $A(\pi^2, 0)$ را به نقطه‌ی $B(\pi^2, \frac{\pi}{2})$ می‌رساند.

چون طول دو نقطه ثابت و فقط عرض آن‌ها تغییر می‌کند، با فرض این که $x = \pi^2$، آن‌گاه $y = t$ است و لذا معادله پارامتری C به‌صورت $\vec{C}(t) = \pi^2\vec{i} + t\vec{j}$ می‌باشد و چون $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ و داریم $y = t$، لذا $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

روش دیگر برای پارامتری کردن پاره‌خط AB، استفاده از فرمول کلی $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ است. با جایگذاری مختصات نقاط A و B در این فرمول به رابطه‌ی $\vec{C}(t)=(x(t),y(t))$ می‌رسیم که منظور همان معادله‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ است. در این روش همواره $0\le t\le 1$ خواهد بود. در این مثال با جایگذاری $A(\pi^2,0)$ و $B(\pi^2,\frac{\pi}{2})$ خواهیم داشت: $\vec{C}(t)=A+(B-A)t=(\pi^2,0)+(0,\frac{\pi}{2})t=(\pi^2,\frac{\pi}{2}t)=\pi^2\vec{i}+\frac{\pi}{2}t\vec{j}\ ,\ 0\le t\le 1$

توجه داشته باشید که در این روش کلی، همواره $0\le t\le 1$ است اما در روش اول با توجه به تغییرات y حدود t را مشخص کردیم.

۴) C پاره‌خطی است که نقطه‌ی $A(0,1,-1)$ را به نقطه‌ی $B(1,2,1)$ وصل می‌کند.

ابتدا از روش کلی پارامتری کردن پاره‌خط‌ها استفاده می‌کنیم. در این روش می‌نویسیم $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ و حدود t همواره به‌صورت $0\le t\le 1$ هستند. پس داریم: $\vec{C}(t)=(0,1,-1)+(1-0,2-1,1+1)t=(t,1+t,-1+2t)=t\vec{i}+(1+t)\vec{j}+(-1+2t)\vec{k}\ ;\ 0\le t\le 1$

یک راه دیگر آن است که ابتدا معادله‌ی خط AB را بنویسیم و سپس آن را پارامتری کنیم:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Rightarrow\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z+1}{1-(-1)}\Rightarrow x=y-1=\frac{z+1}{2}$$

با فرض $x=t$، آن‌گاه $y=t+1$ و $z=2t-1$ و لذا معادله‌ی پارامتری C به شکل زیر است، دقت کنید چون $0\le x\le 1$ و $x=t$ لذا $0\le t\le 1$ می‌باشد.

$$\vec{C}(t)=t\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(2t-1)\vec{k}\ \ ,\ \ 0\le t\le 1$$

در این مثال خاص، تغییرات t از هر دو روش به‌صورت $0\le t\le 1$ به‌دست آمد. این موضوع کاملاً تصادفی است. همان‌طور که گفتیم؛ در روش استفاده از فرمول $\vec{C}(t)=A+(B-A)t$ همیشه $0\le t\le 1$ است، اما در سایر روش‌ها، حدود t با توجه به محدوده‌ی تغییر متغیرها مشخص می‌شود.

۵) C قسمتی از منحنی $y=1-|1-x|$ است که نقطه‌ی $(0,0)$ را به نقطه‌ی $(2,0)$ وصل می‌کند.

با توجه به وجود قدرمطلق، باید مسیر را به دو بخش تقسیم کنیم:

$$y=\begin{cases}x & ;\ 0\le x\le 1\\ -x+2 & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}\xrightarrow{x=t}\begin{cases}y=t & ;\ 0\le t\le 1\\ y=-t+2 & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}\xrightarrow{\vec{C}(t)=\vec{C}_1(t)+\vec{C}_2(t)}\begin{cases}\vec{C}_1(t)=t\vec{i}+t\vec{j} & ;\ 0\le t\le 1\\ \vec{C}_2(t)=t\vec{i}+(-t+2)\vec{j} & ;\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

۶) C منحنی $x^2+y^2=1$ است.

یکی از منحنی‌های پارامتری $x^2+y^2=1$ به‌صورت $x(t)=\cos t$ و $y(t)=\sin t$ است، چون می‌توان نوشت: $\cos^2 t+\sin^2 t=1$، اما حدود تغییرات t، به‌صورت $0\le t\le 2\pi$ است. یادتان باشد به طور کلی دایره $x^2+y^2=r^2$ را می‌توان به‌صورت $\vec{C}(t)=(r\cos t)\vec{i}+(r\sin t)\vec{j}$ پارامتری کرد.

۷) C بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد که مرکز بیضی، مبدأ مختصات است.

برای این بیضی فرض می‌کنیم؛ $\frac{x}{a}=\cos t$ و به عبارت دیگر $x(t)=a\cos t$، همچنین $\frac{y}{b}=\sin t$ و به عبارت دیگر $y(t)=b\sin t$ و لذا معادله‌ی پارامتری C به شکل $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$ می‌باشد، حدود تغییرات t نیز برای بیضی $0\le t\le 2\pi$ است. یادتان باشد به طور کلی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$ را می‌توان به‌صورت $\vec{C}(t)=(ra\cos t)\vec{i}+(rb\sin t)\vec{j}$ پارامتری کرد.

۸) C منحنی تقاطع مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=2$ است.

واضح است باید به جای z، عدد ۲ را قرار دهیم و بنابراین $\sqrt{x^2+y^2}=2$ و به عبارت دیگر $x^2+y^2=4$ و می‌دانیم معادله‌ی پارامتری این دایره به‌صورت $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$ می‌باشد و بنابراین معادله‌ی C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+2\vec{k}$$

و با توجه به تغییرات $\cos t$ و $\sin t$، در بازه صفر تا 2π، لذا $0\le t\le 2\pi$ خواهد بود.

۹) C محل برخورد صفحه $y=x$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول صفحه است.

$y=x$ را در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم و به معادله‌ی مقابل می‌رسیم: $x^2+x^2+z^2=4\Rightarrow 2x^2+z^2=4$

به نظر شما به جای x و z چی قرار دهیم که حاصل ۴ شود، راهنمایی می‌کنم؛ حتماً باید دو عبارت بر حسب سینوس و کسینوس باشند، برای جلوگیری از اتلاف وقت به نظر می‌رسد باید خودم جواب دهم! فرض کنید؛ $x=\sqrt{2}\cos t$ و $z=2\sin t$، چون به شکل زیر تساوی برقرار می‌شود:

$$2(\sqrt{2}\cos t)^2+(2\sin t)^2=4\cos^2 t+4\sin^2 t=4\ \ ,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

چون در یک هشتم اول صفحه است لذا $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته می‌شود.

۱۰) C منحنی فصل مشترک کره $x^2+y^2+z^2=3$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $x^2+y^2=2z$ است.

با تلاقی دادن دو منحنی داریم:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x^2+y^2=2z\end{cases} \Rightarrow z^2+2z=3 \Rightarrow z^2+2z-3=0 \Rightarrow (z+3)(z-1)=0 \Rightarrow z=1\ ,\ z=-3$$

اما $z=-3$ قابل قبول نیست، چون معادله‌ی سهمی به‌صورت $x^2+y^2=2z$ است و چگونه ممکن است x^2+y^2 برابر با یک عددی منفی $(2z=2(-3)=-6)$ شود!؟ بنابراین فقط $z=1$ مورد قبول است و به ازای آن معادله‌ی $x^2+y^2=2$ را داریم و این یعنی یک دایره داریم که معادله‌ی پارامتری آن با فرض $x=\sqrt{2}\cos t$ و $y=\sqrt{2}\sin t$ به‌صورت مقابل است: $\vec{C}(t)=(\sqrt{2}\cos t)\vec{i}+(\sqrt{2}\sin t)\vec{j}+1\vec{k}$

و حدود تغییرات t نیز از ۰ تا 2π است (چون دایره‌ای به مرکز مبدأ داریم.)

روش حل انتگرال روی منحنی (یا انتگرال روی خط)

با توجه به توضیحات داده شده می‌توان مراحل حل انتگرال روی خط را برای تابع $f(x,y,z)$ به شکل زیر دسته‌بندی نمود:

۱) اگر منحنی C به وضوح داده نشده باشد، ابتدا منحنی C را بر حسب t پارامتری می‌کنیم و با توجه به حدود داده شده برای متغیرهای x، y یا z حدود t را برای انتگرال جدید تعیین می‌کنیم.

۲) پس از تعیین ضابطه‌ی C بر حسب t، درضابطه‌ی $f(x,y,z)$، تمام متغیرها را بر حسب t می‌نویسیم، در این جایگذاری با توجه به ضابطه‌ی $\vec{C}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ به جای تمام x ها، $x(t)$، به جای تمام y ها، $y(t)$ و به جای تمام z ها، $z(t)$ قرار می‌دهیم.

۳) مرحله‌ی بعدی نوشتن ds بر حسب t می‌باشد که همواره از ضابطه‌ی $ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt$ تعیین می‌شود.

۴) در این مرحله یک انتگرال معین معمولی برحسب یک متغیر t داریم که به راحتی با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$$

تذکر ۱: با توجه به این که انتگرال روی مسیر در نهایت به یک انتگرال معین با یک متغیر تبدیل می‌شود، بنابراین این نوع انتگرال‌ها تمام خواص انتگرال‌های معین را دارند و از آن جمله این که می‌توان انتگرال روی منحنی C را به چند قسمت تقسیم کرد. مثلاً اگر C از سه قسمت C_1، C_2، C_3 تشکیل شده باشد، رابطه‌ی مقابل را داریم: $\int_C f(x,y,z)ds=\int_{C_1} f(x,y,z)ds+\int_{C_2} f(x,y,z)ds+\int_{C_3} f(x,y,z)ds$

مثال ۴: حاصل $\int_C x^2ds$، در امتداد فصل مشترک دو صفحه $x-y+z=0$ و $x+y+2z=0$، از مبدأ تا نقطه‌ی $(3,1,-2)$ کدام است؟

۱) $9\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $9\sqrt{14}$ ۴) $3\sqrt{14}$

پاسخ: گزینه «۴» فصل مشترک دو صفحه با تلاقی دادن دو صفحه $x-y+z=0$ و $x+y+2z=0$، حاصل می‌شود که یک خط به معادله‌ی $2x+3z=0$ است، با فرض $x=t$، آن‌گاه $z=-\frac{2}{3}t$ و لذا $y=\frac{1}{3}t$ و بنابراین معادله‌ی پارامتری C به‌صورت زیر است:

$$\vec{C}(t)=(t)\vec{i}+(\frac{1}{3}t)\vec{j}+(-\frac{2}{3}t)\vec{k} \Rightarrow |\vec{C}'(t)|=\sqrt{1+(\frac{1}{3})^2+(\frac{-2}{3})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3} \Rightarrow ds=\frac{\sqrt{14}}{3}dt$$

بنابراین داریم:

$$\int_C x^2ds=\int_0^3 t^2(\frac{\sqrt{14}}{3})dt=\frac{\sqrt{14}}{3}[\frac{t^3}{3}]_0^3=\frac{\sqrt{14}}{3}(\frac{27}{3})=3\sqrt{14}$$

مثال ۵: اگر خم C را قسمتی از هذلولی $x^2-y^2=1$ از نقطه‌ی $A(1,0)$ تا نقطه‌ی $B(\cosh 2,\sinh 2)$، در نظر بگیریم، آن‌گاه حاصل انتگرال $\int_C\sqrt{3x^2+3y^2}ds$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی (۲) دانشگاه Oxford)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh(4)$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}\cosh(4)$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh(2)$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}\cosh(2)$

پاسخ: گزینه «۱» خُب با توجه به معادله‌ی هذلولی برای این که عبارت سمت چپ برابر با ۱ شود، باید $x=\cosh t$ و $y=\sinh t$ و قسمت مهم حل سؤال تعیین حدود t است، اما تعیین حدود t نیز چندان سخت نیست، چون $0\le y\le\sinh 2$ بنابراین $0\le\sinh t\le\sinh 2$ و لذا $0\le t\le 2$ می‌باشد، حالا به راحتی داریم:

$$\vec{C}(t)=(\cosh t)\vec{i}+(\sinh t)\vec{j} \Rightarrow ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt=\sqrt{\sinh^2 t+\cosh^2 t}\,dt$$

بنابراین داریم:

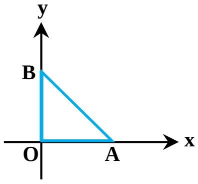
$$\int_C\sqrt{3x^2+3y^2}ds=\int_0^2\sqrt{3(\cosh^2 t+\sinh^2 t)}\sqrt{\cosh^2 t+\sinh^2 t}\,dt=\sqrt{3}\int_0^2(\cosh^2 t+\sinh^2 t)dt=\sqrt{3}\int_0^2\cosh(2t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}[\sinh 2t]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh 4$$

مثال ۶: حاصل انتگرال $\int_C (x+y)ds$ که در آن C دورگرد (محیط) مثلثی با رئوس $O(۰,۰)$ ، $B=(۰,۱)$ و $A(۱,۰)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}+۱$ ۳) ۰ ۴) $\sqrt{۲}+\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۲» برای درک بهتر مسیر C را ترسیم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است مسیر C شامل سه مسیر متفاوت OB ، BA و AO است:

$$\int_C (x+y)ds=\int_{OB}(x+y)ds+\int_{BA}(x+y)ds+\int_{AO}(x+y)ds$$

پس برای هر سه مسیر باید جداگانه معادلات پارامتری را بنویسیم.

در مسیر OB داریم، $\begin{cases} x=۰ \\ y=t \end{cases}$ ، بنابراین $OB=۰\vec{i}+t\vec{j}=t\vec{j}$ که $۰\le t\le ۱$ است و در مسیر BA داریم:

$\overline{BA}=B+(A-B)t=(۰,۱)+(۱-۰,۰-۱)t=(t,۱-t)=t\vec{i}+(۱-t)\vec{j}\ ;\ ۰\le t\le ۱$

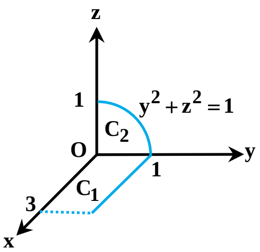
و بالاخره روی مسیر AO داریم $x=۱-t$ و $y=۰$ که $۰\le t\le ۱$. حالا با جایگذاری معادلات پارامتری داریم:

$$\int_C (x+y)\,ds=\int_۰^۱ (۰+t)\sqrt{۰^۲+۱^۲}dt+\int_۰^۱ (t+۱-t)\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}dt+\int_۰^۱ (۱-t+۰)\sqrt{(-۱)^۲+۰^۲}dt$$

$$=[\frac{t^۲}{۲}]_۰^۱+[\sqrt{۲}t]_۰^۱+[t-\frac{t^۲}{۲}]_۰^۱=\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{۲}+۱$$

توضیح: در انتگرال توابع حقیقی روی مسیر C که به صورت $\int_C fds$ هستند، جهت حرکت روی منحنی C تأثیری بر جواب ندارد، به این شرط که همواره در جهت افزایش t حرکت کنید. وقتی روی یک مسیر $a\le t\le b$ است، باید کران‌ها را به صورت $\int_a^b$ بنویسید. در همین مثال، وقتی از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ O می‌رویم، مقدار x از $x=۱$ تا $x=۰$ در حال کاهش است، اما ما نباید انتگرال‌ها را در جهت کاهش t حساب کنیم. به همین دلیل از معادلهٔ $x=۱-t$ استفاده می‌کنیم که با افزایش t از $t=۰$ تا $t=۱$ مقدار x از ۱ به ۰ می‌رسد. در واقع استفاده از فرمول کلی پارامتری کردن پاره‌خط‌ها شما را به معادلهٔ $x=۱-t$ می‌رساند: $A+(O-A)t=(۱,۰)+(۰-۱,۰-۰)t=(۱-t,۰)$

مثال ۷: اگر C مسیری متشکل از خط صاف $C_۱$ و منحنی $C_۲$ مطابق شکل زیر باشد، آن‌گاه حاصل $\int_C (۳x-۲y+z)ds$ ، کدام است؟



۱) ۷/۵
۲) ۶/۵
۳) ۵/۵
۴) ۸/۵

پاسخ: گزینه «۲» مسیر داده شده برای این انتگرال از دو بخش $C_۱$ و $C_۲$ تشکیل شده است، ابتدا منحنی پارامتری هر یک از آن‌ها را مشخص می‌کنیم؛ $C_۱$ خط صافی است که نقطهٔ $(۳,۱,۰)$ را به $(۰,۱,۰)$ وصل می‌کند، ارتفاع هر دو نقطه ثابت و برابر صفر است. همچنین «عرض» دو نقطه ثابت و برابر با ۱ است و فقط «طول» آن‌ها تغییر می‌کند، بنابراین معادلهٔ پارامتری خط واصل آن‌ها به شکل $x=t, y=۱, z=۰$ نوشته می‌شود و لذا داریم:

$\vec{C}_۱(t)=t\vec{i}+\vec{j}\quad,\quad ۰\le t\le ۳$

اما $C_۲$ بخشی از دایره $z^۲+y^۲=۱$ است که در ربع اول قرار دارد، یعنی داریم: $z=\sin t\ ,\ y=\cos t\ \Rightarrow \vec{C}(t)=(\cos t)\vec{j}+(\sin t)\vec{k}$

اما از روی شکل واضح است حدود تغییرات t، به‌صورت $۰\le t\le \frac{\pi}{۲}$ است، اما اگر این موضوع را از روی شکل متوجه نشویم! می‌توانیم به‌صورت جبری این‌طور استدلال کنیم؛ که چون $۰\le y\le ۱$ و $y=\cos t$ ، لذا $۰\le \cos t\le ۱$ و می‌دانیم بازه‌ای که کسینوس بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ است، بنابراین نتیجه می‌گیریم $۰\le t\le \frac{\pi}{۲}$ ، پس داریم:

$$\int_C (۳x-۲y+z)\,ds=\int_{C_۱}(۳x-۲y+z)ds+\int_{C_۲}(۳x-۲y+z)ds$$

$$=\int_۰^۳ (۳\times t-۲\times ۱+۰)\sqrt{۱^۲+۰^۲+۰^۲}dt+\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۳\times ۰-۲\times \cos t+\sin t)\sqrt{۰^۲+(-\sin t)^۲+\cos^۲ t}\,dt=\int_۰^۳ (۳t-۲)dt+\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(-۲\cos t+\sin t)dt$$

$$=[\frac{۳t^۲}{۲}-۲t]_۰^۳+[-۲\sin t-\cos t]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳\times ۳^۲}{۲}-۲\times ۳+[-۲\sin\frac{\pi}{۲}-\cos\frac{\pi}{۲}+۲\sin(۰)+\cos(۰)]=\frac{۲۷}{۲}-۶-۱=\frac{۱۳}{۲}$$

در این مثال برای پارامتری کردن $C_۱$ می‌توانستیم از روش کلی پارامتری کردن پاره‌خط‌ها هم استفاده کنیم. نقطهٔ ابتدا $A(۳,۱,۰)$ و نقطهٔ انتها $B(۰,۱,۰)$ است. پس داریم $\vec{C}_۱(t)=A+(B-A)t=(۳-۳t,۱,۰)$ و در این روش همیشه $۰\le t\le ۱$ است.

بررسی میدان‌هایی که کرل آن‌ها صفر است، اما پایستار نیستند

همان‌طور که قبلاً گفتیم؛ شرط $\operatorname{curl}\vec{F}=0$، برای پایستار بودن میدان $\vec{F}$، یک شرط **لازم** است، اما شرط **کافی** نیست. حالا به ذکر چند نمونه تابع با این شرایط معروف می‌پردازیم که در آن‌ها کرل $\vec{F}$ صفر است، اما میدان $\vec{F}$ پایستار نیست.

در این حالت یکی از معروف‌ترین توابع برداری به شکل مقابل است:
$$\vec{F}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

برای مثال کار انجام شده توسط میدان فوق روی دایره C به معادله‌ی $x^2+y^2=a^2$، که **یکبار** در جهت مثلثاتی پیموده شده است را حساب می‌کنیم.

در واقع دنبال $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ هستیم. برای این منظور ابتدا پایستار بودن $\vec{F}$ را بررسی می‌کنیم:

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-1(x^2+y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$Q=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1(x^2+y^2)-2x(x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

همان‌طور که می‌بینید تساوی $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$، برقرار است. اما نباید ناشیانه حکم دهیم میدان $\vec{F}$ پایستار است! چرا که صفر شدن مخرج در مبدأ مختصات، باعث ناپیوستگی تابع $\vec{F}$ شده است؛ پس نقطه‌ای درون مرز C وجود دارد که $\vec{F}$ در آن ناپیوسته است و لذا نمی‌توانیم از روش گفته شده در مورد میدان‌های پایستار به حاصل این انتگرال برسیم و چاره کار استفاده از روش پارامتری‌سازی است.

با فرض این که $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}$ و $0\le t\le 2\pi$، خواهیم داشت:
$$\vec{C}'(t)=(-a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}$$
$$\vec{F}(x(t),y(t))=-\frac{a\sin t}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\vec{i}+\frac{a\cos t}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\vec{j}=-\frac{\sin t}{a}\vec{i}+\frac{\cos t}{a}\vec{j}$$

بنابراین داریم:

$$\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\int_a^b F[\vec{C}(t)].\vec{C}'(t)dt=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t}{a}\vec{i}+\frac{\cos t}{a}\vec{j}\right).[(-a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}]=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\int_0^{2\pi}dt=[t]_0^{2\pi}=\mathbf{2\pi}$$

همان‌طور که دیدید حاصل انتگرال 2π شد، یعنی عددی مخالف صفر، پس **$\vec{F}$ پایستار نیست، با وجود این که کرل آن صفر شده بود.**
(چون $\vec{F}$ دارای حفره درون C می‌باشد و ناپیوستگی در نقطه‌ی $(0,0)$ دارد.)

نکته مهم: دو تابع برداری داریم که زیاد در این‌گونه سؤالات استفاده می‌شود و بهتر است آن‌ها را به خاطر بسپارید:

۱) اگر $\vec{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که تابع پتانسیل آن $f=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$ است که همان θ در مختصات قطبی می‌باشد.

الف) اگر خم باز C از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B روی مبدأ قرار **نداشته** باشد، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با $\theta_B-\theta_A$ است که θ_B زاویه‌ی قطبی در نقطه‌ی انتهایی و θ_A زاویه‌ی قطبی در نقطه‌ی ابتدایی خم C است.

ب) برای هر خم بسته‌ی C که مبدأ را دور نزند، آن‌گاه حاصل انتگرال $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$، برابر با صفر است.

ج) برای هر خم بسته‌ی C که مبدأ در ناحیه‌ی محصور توسط خم قرار داشته باشد و n بار در جهت مثلثاتی طی شده است، حاصل انتگرال $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با $2n\pi$ است. (واضح است وقتی خم C با شرایط فوق یکبار در جهت مثلثاتی طی شود، حاصل انتگرال برابر با 2π می‌شود.)

۲) میدان برداری $\vec{F}=\frac{x}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ را در نظر بگیرید، به سادگی می‌توان دید تابع پتانسیل $\vec{F}$ به‌صورت $f=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+y^2)$ است که همان $\operatorname{Ln}r$ در مختصات قطبی می‌باشد.

الف) اگر خم **باز** C که **مبدأ روی آن قرار ندارد** از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B طی شود، آن‌گاه حاصل انتگرال $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با $\operatorname{Ln}r_B-\operatorname{Ln}r_A$ است که r_A فاصله‌ی شعاعی نقطه‌ی A و r_B فاصله‌ی شعاعی نقطه‌ی B می‌باشد.

ب) برای هر **خم بسته‌ی** C، حاصل $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با صفر است. (در مورد این میدان مهم نیست خم C مبدأ را دور می‌زند یا نمی‌زند، در هر دو صورت حاصل برابر با صفر است.)

تذکر ۳: ممکن است برخی داوطلبان در حفظ کردن نتایج دو میدان گفته شده دچار مشکل شوند. این دوستان باید توجه کنند مخرج کسرها در این دو میدان، یکسان است و تفاوت در صورت این کسرها است. یک پیشنهاد می‌تواند این باشد که؛ داوطلبان به یاد داشته باشند آن میدانی که هر دو مؤلفه‌ی آن علامت **مثبت** دارد، و پشت x ، $\vec{i}$ و پشت y ، $\vec{j}$ قرار دارد (مطابق آنچه معمولاً در ذهن ما است، همه چی سرجایش است!)، حاصل انتگرالش برای هر خم بسته که مبدأ درون آن باشد و یا نباشد، صفر می‌شود (چه پسر خوبی! بچه **مثبت** و همه چی سرجایش، حرف گوش کن) و آن میدانی که سر ناسازگاری دارد! یعنی یکی از علامت‌های آن **منفی** است و تازه بر خلاف تصور معمول ذهن ما، پشت $\vec{i}$ ، $-y$ و پشت $\vec{j}$ ، x قرار دارد، ادا و اصول دارد! یعنی اگر مبدأ درونش باشد، لج بازی کرده و به ما 2π تحویل می‌دهد و صرفاً اگر مبدأ درون آن نباشد، خیلی سر به سر ما نمی‌گذارد و صفر تولید می‌کند! (البته دوستان هر جوری که راحت هستند، حفظ کنند!)

توجه: هرگاه از تابع $\theta = \text{Arctg}\dfrac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم، لازم است به علامت x دقت کنیم تا مقدار θ را به درستی تشخیص دهیم. اگر مقدار x منفی باشد، باید به زاویه‌ی به‌دست آمده، π را اضافه کنید. برای مثال همه می‌دانیم که $\text{Arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ است. حالا فرض کنید نقاط $A(2,2)$ و $B(-2,-2)$ ابتدا و انتهای مسیر باشند. در نقطه‌ی A داریم $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{2} = 1$ ، در نقطه‌ی B هم $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ پس اگر بی‌دقتی کنیم در هر دو نقطه $\theta = \text{Arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌آوریم. اما با دقت به علامت x این‌طور عمل می‌کنیم: در نقطه‌ی A ، $x > 0$ است پس $\theta = \text{Arctg}(\dfrac{2}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$. در نقطه‌ی B ، $x < 0$ است پس $\theta = \text{Arctg}(\dfrac{-2}{-2}) = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$ در واقع اگر بخواهیم دقت ریاضی به خرج دهیم باید زاویه‌ی θ را این‌طور محاسبه کنیم:

$$\theta = \begin{cases} \text{Arctg}\dfrac{y}{x} & ; \quad x > 0 \quad \text{(ربع اول و چهارم)} \\ \pi + \text{Arctg}\dfrac{y}{x} & ; \quad x < 0 \quad \text{(ربع دوم و سوم)} \end{cases}$$

اما با کمی دقت به این‌که نقطه‌ی (x, y) در کدام ناحیه قرار دارد، نیازی به پیچیده کردن موضوع نداریم.

مثال ۲۰: مقدار $\oint_C \dfrac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$ ، که در آن C دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$ است که یکبار در جهت مثلثاتی طی شده است، چقدر است؟

۱) 0 ‏ ۲) 2π ‏ ۳) -2π ‏ ۴) 4π

پاسخ: گزینه «۳» دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم: $x = a\cos t \ , \ y = a\sin t \ , \ 0 \le t \le 2\pi$

بنابراین:

$$\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \oint_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi}\frac{-a^2}{a^2}dt = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi$$

البته سؤال بالا را می‌توان با توجه به نتایج دو تابع برداری گفته شده در نکته‌ی قبل نیز پاسخ داد، دقت کنید که انتگرال این سؤال را می‌توان به دو قسمت به شکل مقابل تفکیک کرد:

$$I = -\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + \oint_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

خُب گفتیم انتگرال دوم روی هر مسیر بسته برابر با صفر است، پس فقط می‌ماند انتگرال اول، گفتیم حاصل این انتگرال وقتی در جهت مثلثاتی طی می‌شود، برابر با 2π است، اما چون یک علامت منفی پشت آن قرار دارد، حاصل -2π می‌شود.

مثال ۲۱: اگر خم C قوسی از دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، از نقطه‌ی $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تا $B(-2, 0)$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار $\int_C \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-\dfrac{3\pi}{4}$ ‏ ۲) $\dfrac{3\pi}{4}$ ‏ ۳) 2π ‏ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲» نظر به این که $\text{curl}\vec{F} = 0$ و $\vec{F}$ ناحیه داده شده پیوسته است، با توجه به مطالب متن کتاب، حاصل انتگرال اختلاف زاویه‌ی انتهایی و ابتدایی است، بنابراین کافیست زاویه‌ی نقاط ابتدایی و انتهایی را حساب کنیم. نقطه‌ی ابتدایی $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و نقطه‌ی انتهایی $B(-2, 0)$ است، لذا داریم:

$$\theta_{\text{ابتدایی}} = \text{Arctg}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = \text{Arctg}1 = \frac{\pi}{4} \ , \ \theta_{\text{انتهایی}} = \text{Arctg}(\frac{0}{-2}) = \pi \Rightarrow I = \theta_{\text{انتهایی}} - \theta_{\text{ابتدایی}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۲۲: فرض کنید C پاره‌خطی متشکل از خط واصل نقطه‌ی $(1,1)$ به $(3,0)$ و سپس پاره‌خط واصل از نقطه‌ی $(3,0)$ به $(-1, -\sqrt{3})$ باشد. اگر $\vec{F}_1 = \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ و $\vec{F}_2 = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ در این صورت حاصل $I = \int_C \vec{F}_1.d\vec{r} - \int_C \vec{F}_2 d\vec{r}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}(\text{Ln}2 + \dfrac{13\pi}{6})$ ‏ ۲) $\dfrac{1}{2}(\text{Ln}2 - \dfrac{13\pi}{6})$ ‏ ۳) $\dfrac{1}{2}(\text{Ln}2 + \dfrac{\pi}{6})$ ‏ ۴) $\text{Ln}2 - \dfrac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که منحنی C از مبدأ عبور نمی‌کند، طبق مطالب متن کتاب می‌توان گفت؛ تابع پتانسیل $\vec F_1$ برابر با $f_1=\frac{1}{2}Ln(x^2+y^2)$ و تابع پتانسیل $\vec F_2$ برابر با $f_2=Arctg\frac{y}{x}$ است. در واقع $f_1=Lnr$ و $f_2=\theta$ است. دقت کنید در این سؤال نقطه‌ی ابتدایی $(1,1)$ و نقطه انتهایی $(-1,-\sqrt{3})$ است. پس داریم:

$$\int_C \vec F_1.d\vec r = Lnr_{\text{انتهایی}} - Lnr_{\text{ابتدایی}} = \frac{1}{2}Ln[(-1)^2+(-\sqrt{3})^2]-\frac{1}{2}Ln(1^2+1^2)=\frac{1}{2}Ln4-\frac{1}{2}Ln2=\frac{1}{2}Ln\frac{4}{2}=\frac{1}{2}Ln2$$

$$\int_C \vec F_2.d\vec r = \theta_{\text{انتهایی}} - \theta_{\text{ابتدایی}} = Arctg(\frac{-\sqrt{3}}{-1})-Arctg(\frac{1}{1})=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}$$

پس داریم:

$$I=\frac{1}{2}Ln2-\frac{13\pi}{12}=\frac{1}{2}(Ln2-\frac{13\pi}{6})$$

مثال ۲۳: اگر $f(x,y)=Ln(x^2+y^2)$ و C دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\oint_C \vec\nabla f.\vec n ds$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) 0 ۲) 2π ۳) 4π ۴) -2π

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\vec\nabla f$ را حساب می‌کنیم (توجه کنید که $\vec\nabla f$ همان $\vec F$ می‌باشد.)

$$\vec F=\vec\nabla f=\vec\nabla Ln(x^2+y^2)=\frac{2x}{x^2+y^2}\vec i+\frac{2y}{x^2+y^2}\vec j$$

$$\int \vec F.\vec n ds=\oint_C Pdy-Qdx=2\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

با توجه به مطالب گفته شده حاصل انتگرال فوق برابر با 2π است و چون عدد $\underline{2}$ در پشت انتگرال ضرب می‌شود، جواب سؤال **4π** است.

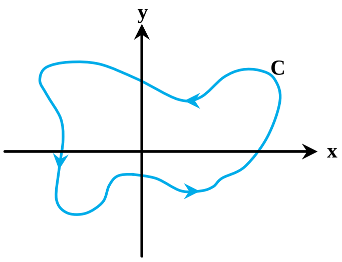
مثال ۲۴: حاصل انتگرال $I=\oint_C\frac{-2\alpha y}{x^2+y^2}dx+\frac{2\alpha x}{x^2+y^2}dy$، در صورتی که C منحنی بسته‌ی $x^8+y^8=1$ باشد، که دو بار در جهت مثلثاتی طی شده برابر با $2\pi^2$ است، مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که C منحنی بسته‌ای است که مبدأ در ناحیه‌ی محصور این خم قرار دارد و ۲ بار پیموده شده است، بنابراین داریم:

$$I=2\alpha\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=2\alpha(2\times2\pi)=8\alpha\pi \quad , \quad 8\alpha\pi=2\pi^2\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۵: فرض کنید $\vec F(x,y)=\frac{(2x^3+2xy^2-2y)\vec i+(2y^3+2x^2y+2x)\vec j}{x^2+y^2}$ و C منحنی شکل زیر باشد، مقدار $\oint \vec F.d\vec r$، کدام است؟



۱) 0
۲) 6π
۳) 2π
۴) 4π

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ منحنی C مبدأ را در بر می‌گیرد، از طرفی چون عبارت x^2+y^2 در مخرج وجود دارد و باعث شده $\vec F$ در مبدأ ناپیوسته شود، پس باید سراغ روش پارامتری برویم. اما به نظر می‌رسد حجم محاسبات کمی کار را سخت کند! با نگاهی به ضابطه‌ی میدان $\vec F$ می‌توان دریافت که $\vec F$ قابل تفکیک به دو قسمت است که حاصل یکی از انتگرال‌های $\vec F$ را از قبل بلدیم:

$$\vec F(x,y)=\frac{2x^3+2xy^2}{x^2+y^2}\vec i+\frac{2y^3+2x^2y}{x^2+y^2}\vec j+2(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec i+\frac{x}{x^2+y^2}\vec j)=\underbrace{2x\vec i+2y\vec j}_{\vec F_1}+2\underbrace{(\frac{-y}{x^2+y^2}\vec i+\frac{x}{x^2+y^2}\vec j)}_{\vec F_2}$$

بنابراین داریم:

$$\oint_C\vec F.d\vec r=\oint_C\vec F_1.d\vec r+2\oint_C\vec F_2.d\vec r$$

اما می‌دانیم حاصل $\int_C\vec F_2.d\vec r$، برابر با 2π است و با توجه به ضریب $\underline{2}$ در پشت آن، حاصل قسمت دوم برابر با $2\times2\pi=4\pi$ می‌شود، پس کافیست حاصل $\int_C\vec F_1.d\vec r$ را به‌دست آورده و با 4π جمع کنیم، اما $\int_C\vec F_1.d\vec r$ به‌صورت مقابل است:

$$\oint_C\vec F_1.d\vec r=\oint_C 2xdx+2ydy$$

اگر دقت کنید، ملاحظه می‌کنید؛ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$، و این یعنی حاصل انتگرال فوق صفر است و لذا حاصل کل انتگرال همان **4π** می‌شود.

مثال ۲۶: اگر C دایره $x^2+y^2=1$ باشد که در جهت مثلثاتی طی شده است، آن‌گاه حاصل انتگرال زیر کدام است؟

$$I=\int_C[\frac{2xy^2}{x^4+y^4}+(tgx)e^{\cos x}-\frac{3y}{x^2+y^2}]dx+[\frac{3x}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}+(tgy)e^{\sin y}]dy$$

۱) 0 ۲) 2π ۳) 8π ۴) 6π

پاسخ: گزینه «۴» ظاهر سؤال کمی وحشتناک به نظر می‌رسد! اما اگر خوب به عبارات زیر انتگرال دقت کنیم، متوجه می‌شویم سؤال سخت نیست! ابتدا انتگرال را به سه انتگرال مجزا به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_C\frac{2xy^2}{x^4+y^4}dx-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}dy+\int_C(tgx)e^{\cos x}dx+(tgy)e^{\sin y}dy+3\int_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

خُب حالا هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم:

در انتگرال اول میدان پایستار نیست، چون در مخرج میدان داده شده در زیر انتگرال عبارت x^4+y^4 داریم، که در مبدأ پیوسته نیست، بنابراین با استفاده از روش پارامتری حاصل انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$I_1=\int_C\frac{2xy^2}{x^4+y^4}dx-\frac{2x^2y}{x^4+y^4}dy=\int_0^{2\pi}[\frac{(2\cos t)(\sin t)^2\times(-\sin t)-2(\cos t)^2(\sin t)\cos t}{\cos t^4+\sin^4 t}]dt$$

در صورت کسر از عبارت «$-2\sin t\cos t$» فاکتور گرفته و در مخرج کسر از اتحاد $\cos^4 t+\sin^4 t=1-2\sin^2 t\cos^2 t$ استفاده می‌کنیم:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin t\cos t(\sin^2 t+\cos^2 t)}{1-2\sin^2 t\cos^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin 2t\,dt}{1-2(\frac{1}{2}\sin 2t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin 2t)dt}{1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2t)}=\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin 2t)2dt}{1+\cos^2 2t}=[Arctg(\cos 2t)]_0^{2\pi}=0$$

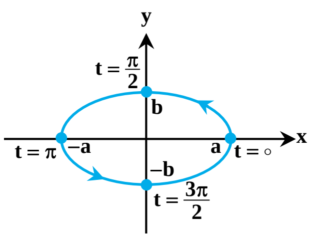
حالا سراغ انتگرال I_2 می‌رویم، در این انتگرال چون مبدأ هیچ‌گونه ناپیوستگی برای میدان داده شده ایجاد نمی‌کند، می‌توان شرط پایستار بودن را بررسی کرد:

$$\int_C(tgx)e^{\cos x}dx+(tgy)e^{\sin y}dy\ \Rightarrow\ P=(tgx)e^{\cos x},Q=(tgy)e^{\sin y}$$

چون $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$، لذا میدان پایستار می‌باشد و چون منحنی C بسته است، پس حاصل این انتگرال صفر است. تا این‌جا مجموع دو انتگرال اول صفر شده است، بنابراین حاصل انتگرال I برابر با حاصل انتگرال سوم است و حاصل انتگرال سوم با دانستن نکته‌ی گفته شده نیاز به محاسبه ندارد، چون می‌دانیم حاصل این انتگرال برابر با 2π است و چون عدد ۳ در این انتگرال ضرب شده است، پس $I=3\times 2\pi=6\pi$ می‌شود.

نکاتی در مورد تعداد دفعات و جهت پیموده شدن منحنی‌های بسته

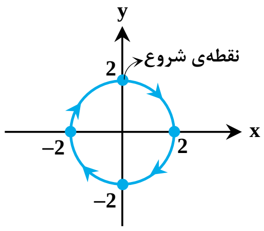
گاهی اوقات ممکن است با سؤالاتی برخورد کنیم که تعداد دفعات پیموده شدن و جهت حرکت بر روی منحنی به طور واضح و آشکار در صورت سؤال بیان نشده باشد و البته این موضوع در معادله‌ی پارامتری منحنی مشخص شده باشد. برای این که مطلب را خوب متوجه شوید، فرض می‌کنیم یک بیضی با شعاع‌های افقی a و عمودی b و مرکز مبدأ با معادله‌ی پارامتری $0\le t\le 2\pi$، $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$ مشخص شده باشد. ضابطه‌ی پارامتری این منحنی دو مطلب را به ما می‌گوید؛ اول این که منحنی فقط یک دور کامل از $t=0$ تا $t=2\pi$ طی شده است و دوم این که در جهت مثلثاتی طی شده است. برای درک بهتر به شکل و توضیحات زیر توجه کنید:



به ازای $t=0$، در نقطه‌ی شروع، یعنی $(a,0)$ هستیم، در $t=\frac{\pi}{2}$ به نقطه‌ی $(0,b)$، در $t=\pi$ به نقطه‌ی $(-a,0)$، در $t=\frac{3\pi}{2}$ به نقطه‌ی $(0,-b)$ و در $t=2\pi$ دوباره به نقطه‌ی $A(a,0)$ می‌رسیم که ابتدای منحنی است. پس در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 2\pi$ یک دور کامل در جهت مثلثاتی طی کرده‌ایم. حالا اگر همین منحنی به‌صورت $\vec{C}(t)=(a\cos 2t)\vec{i}+(b\sin 2t)\vec{j}\ ,\ 0\le t\le 2\pi$ پارامتری شده باشد، می‌توانیم بگوییم در بازه‌ی زمانی ۰ تا 2π، دو بار طی می‌شود (منحنی با سرعت بیشتری، یعنی با سرعت ۲ برابر طی می‌شود) چرا که به ازای $t=0$ در نقطه‌ی $(a,0)$، به ازای $t=\frac{\pi}{2}$ در نقطه‌ی $(-a,0)$ و به ازای $t=\pi$ در نقطه‌ی $(a,0)$ یعنی اول منحنی هستیم. پس در بازه‌ی زمانی $0\le t\le\pi$ یک دور کامل منحنی را طی کرده‌ایم و بنابراین در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 2\pi$ دو بار منحنی را طی کرده‌ایم.

نتیجه ۱: برای معادله‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=(a\cos kt)\vec{i}+(b\sin kt)\vec{j}$ می‌توان گفت؛ منحنی « k دور» منحنی را در جهت مثلثاتی طی می‌کند، که هر دور در مدت زمان $\frac{2\pi}{k}$، از $t=0$ تا $t=\frac{2\pi}{k}$ $(0\le t\le\frac{2\pi}{k})$، طی می‌شود.

موضوع بعد، فهمیدن جهت طی شدن منحنی با توجه به منحنی پارامتری داده شده می‌باشد. دقت کنید برای $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}$، چون با افزایش t، به سمت y های مثبت حرکت می‌کنیم، پس یعنی در جهت مثلثاتی حرکت می‌کنیم. ولی اگر مثلاً $\vec{C}(t)=(a\cos t)\vec{i}-(b\sin t)\vec{j}$ را داشته باشیم چون با افزایش t به سمت y های منفی حرکت می‌کنیم، پس یعنی در جهت خلاف مثلثاتی (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) در حرکت هستیم و یا حتی اگر مثلاً $\vec{C}(t)=(a\sin t)\vec{i}+(b\cos t)\vec{j}$ را داشته باشیم، چون با افزایش t از نقطه شروع $(\circ,b)$ در حال حرکت به سمت نقطه‌ی $(a,\circ)$ هستیم، پس در جهت عقربه‌های ساعت و یا همان جهت خلاف مثلثاتی حرکت می‌کنیم.



برای مثال، فرض کنید منحنی با ضابطه‌ی پارامتری $\vec{C}(t)=(۲\sin\pi t)\vec{i}+(۲\cos\pi t)\vec{j}$ داده شده است، با توجه به توضیحات داده شده، در این $k=\pi$ می‌باشد، پس برای t از صفر تا $\frac{۲\pi}{\pi}$ و به عبارت دیگر از ۰ تا ۲ $(\circ\le t\le ۲)$، یک دور کامل دایره پیموده می‌شود. اگر به نقاط مختلف مسیر حرکت دقت کنید، در $t=\circ$ در نقطه‌ی $(\circ,۲)$، یا همان نقطه‌ی شروع هستیم، در $t=\frac{۱}{۲}$ به نقطه‌ی $(۲,\circ)$، در $t=۱$ به نقطه‌ی $(\circ,-۲)$، در $t=\frac{۳}{۲}$ به نقطه‌ی $(-۲,\circ)$ و در نهایت در $t=۲$ دوباره به نقطه‌ی $(\circ,۲)$ یا همان نقطه‌ی شروع می‌رسیم همان‌طور که دیدید به دلیل تعویض جای sin با cos، جهت حرکت تغییر کرد. بنابراین نتیجه زیر را داریم:

نتیجه۲: اگر جای sinkt و coskt را با هم عوض کنیم، آن‌گاه جهت حرکت تغییر می‌کند و اگر علامت یکی از جملات sinkt و یا coskt را عوض کنیم، باز هم جهت حرکت تغییر می‌کند.

مثال ۲۷: منحنی پارامتری $\vec{C}(t)=(۳\cos ۴t,\sin ۴t)$ و $\circ\le t\le ۲\pi$ را در نظر بگیرید. حاصل انتگرال $\int_C \frac{-y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{x}{x^۲+y^۲}dy$، چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۲π ۳) ۴π ۴) ۸π

پاسخ: گزینه «۴» اگر مبدأ درون ناحیه‌ی محدود به مرز C نباشد، آن‌گاه حاصل انتگرال صفر است اما با تبدیل منحنی از پارامتری به دکارتی داریم:

$$\vec{C}(t)=۳\cos ۴t\,\vec{i}+\sin ۴t\,\vec{j}\Rightarrow x=۳\cos ۴t\ ,\ y=\sin ۴t\Rightarrow \frac{x^۲}{۹}+y^۲=۱$$

پس مسیر یک بیضی است که مبدأ درون آن قرار دارد، اما دقت کنید نباید سریع گزینه (۲) را انتخاب نمایید، چون ۲π **زمانی است که مسیر یکبار در جهت مثلثاتی طی شده باشد،** اما در این سؤال $\sin ۴t$ و $\cos ۴t$ داریم و این یعنی $k=۴$ و به عبارت دیگر برای این منحنی در $\circ\le t\le\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$، یکبار منحنی طی می‌شود و چون بازه داده شده در صورت سؤال $\circ\le t\le ۲\pi$ است، پس بیضی ۴ بار در جهت مثلثاتی طی شده است و این یعنی حاصل انتگرال ۴ برابر ۲π، یعنی ۸π است. دقت کنید اگر در صورت سؤال $\circ\le t\le\frac{\pi}{۲}$ قید می‌شد، جواب به سؤال ۲π، یعنی گزینه (۲) بود، چون در این مدت منحنی فقط یکبار طی می‌شود.

مثال ۲۸: اگر $\vec{C}_۱(t)=(۲۶\cos ۲\pi t)\vec{i}-(۱۰\sin ۲\pi t)\vec{j}$ و $\vec{C}_۲(t)=(۸\cos ۲\pi t)\vec{i}+۱۷\sin ۲\pi t\vec{j}$، برای $\circ\le t\le ۱$، و $\vec{F}=\frac{y}{x^۲+y^۲}\vec{i}-\frac{x}{x^۲+y^۲}\vec{j}$، آن‌گاه مقدار A از تساوی $۳\int_{C_۱}\vec{F}.d\vec{r}-۴\int_{C_۲}\vec{F}.d\vec{r}=۲A\pi$، کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۷ ۳) ۱ ۴) ۷−

پاسخ: گزینه «۲» همان‌طور که مشاهده می‌کنید یک میدان آشنا به ما داده شده است که اتفاقاً مبدأ درون منحنی C قرار دارد. می‌دانیم برای این میدان اگر مسیر بسته‌ای داشته باشیم که مبدأ درون آن قرار داشته باشد و در جهت مثلثاتی طی شده باشد، آن‌گاه حاصل این انتگرال برابر -۲π است و اگر در همین مسیر در جهت غیر مثلثاتی حرکت کرده باشیم، آن‌گاه حاصل برابر با $+۲\pi$ می‌شود (دقت کنید ما قبلاً گفته بودیم برای میدان $\vec{F}=\frac{-ydx}{x^۲+y^۲}+\frac{xdy}{x^۲+y^۲}$ اگر مسیر در جهت مثلثاتی طی شود، آن‌گاه حاصل $+۲\pi$ است، در این سؤال میدان ما در یک علامت منفی با آن فرق دارد، بنابراین حاصلش هم در یک منفی فرق می‌کند!) از طرفی دقت کنید $C_۱$ در خلاف جهت مثلثاتی و $C_۲$ در جهت مثلثاتی طی شده است، **(دانشجو نباید همیشه منتظر باشد، جهت در سؤال به طور مستقیم بیان شود! در این سؤال برای $C_۱$ ضریب $\sin ۲\pi t$، منفی است و این یعنی با افزایش t، به سمت y های منفی در حرکت هستیم و به عبارت دیگر در خلاف جهت مثلثاتی در حال حرکت هستیم!)** پس حاصل انتگرال $I_۱=\int_{C_۱}\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با $+۲\pi$ و حاصل انتگرال $I_۲=\int_{C_۲}\vec{F}.d\vec{r}$ برابر با -۲π می‌شود، پس داریم:

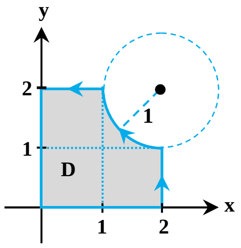
$$I=۳I_۱-۴I_۲=۳(+۲\pi)-۴(-۲\pi)=+۱۴\pi$$

و چون گفته شده این حاصل برابر با $۲A\pi$ است، پس $A=۷$ است.

مثال ۵: میدان برداری $\vec{F}=(y,۲x+tg(tgy))$ را در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید و خم C را مرز ناحیه‌ی محدود $D=\{۰\le x\le ۲\,,\,۰\le y\le ۲ \text{ و } (x-۲)^۲+(y-۲)^۲\ge ۱\}$، که در جهت مثلثاتی جهت‌گذاری شده است، در نظر بگیرید. حاصل $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی ۲ دانشگاه Harvard)

۱) $۲+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $۴-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $۴-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲-\frac{\pi}{۲}$



پاسخ: گزینه «۳» با توجه به ناحیه D داده شده شکل به‌صورت مقابل است، با توجه به این که مسیر بسته است، لذا از قضیه‌ی گرین کمک می‌گیریم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D(۲-۱)dA=\iint_D dA=D \text{ مساحت ناحیه}$$

اما مساحت ناحیه D برابر با مقدار زیر است:

$$D \text{ مساحت ناحیه} = (\text{مساحت مربعی به ضلع ۲})-\frac{۱}{۴}\times(\text{مساحت دایره‌ای به شعاع ۱})=۲\times۲-\frac{۱}{۴}\times\pi\times۱=۴-\frac{\pi}{۴}$$

توضیح: استفاده از روش پارامتری‌سازی به محاسبات طولانی منجر خواهد شد و این مثال هم از آن مثال‌هایی است که می‌تواند ارزش قضیه گرین را مشخص کند!

مثال ۶: چرخش بردار $\vec{V}=\frac{x}{۱+x^۲+y^۲}\vec{i}+\frac{y}{۱+x^۲+y^۲}\vec{j}$ در طول منحنی C به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۱$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

پاسخ: گزینه «۱» با تعریف $\vec{V}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ داریم:

$$P=\frac{x}{۱+x^۲+y^۲}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-۲yx}{(۱+x^۲+y^۲)^۲}\quad,\quad Q=\frac{y}{۱+x^۲+y^۲}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-۲xy}{(۱+x^۲+y^۲)^۲}$$

می‌دانیم چرخش برابر با $\int_C\vec{V}.d\vec{r}$ است که چون منحنی C دایره‌ی $(x-۱)^۲+y^۲=۲$ است، لذا از قضیه گرین داریم:

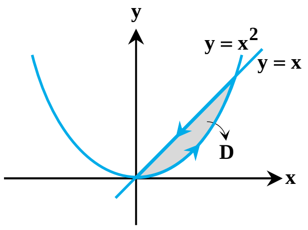
$$\int_C\vec{V}.d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=۰$$

دقت کنید $\vec{V}$ در تمام نقاط پیوسته است و بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم.

مثال ۷: حاصل انتگرال خط $\int_C[(\text{arctg}\frac{y}{x})dy-dx]$، که در آن C منحنی بسته حاصل از تقاطع $y=x^۲$ و $y=x$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}+۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}-۱$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» چون مسیر بسته است از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. ناحیه‌ی درون C را با D نشان می‌دهیم:



$$\begin{cases}Q=\text{Arctg}\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\frac{-y}{x^۲}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}}=\frac{-y}{x^۲+y^۲}\\ P=-۱\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=۰\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-y}{x^۲+y^۲}$$

$$\text{حاصل انتگرال}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D\frac{-y}{x^۲+y^۲}dA=\int_۰^۱\int_{x^۲}^{x}\left(\frac{-y}{x^۲+y^۲}\right)dydx$$

$$=\int_۰^۱\left[\frac{-۱}{۲}Ln(x^۲+y^۲)\right]_{x^۲}^{x}dx=\frac{-۱}{۲}\int_۰^۱[Ln(۲x^۲)-Ln(x^۲+x^۴)]dx$$

تابع زیر انتگرال به این صورت ساده‌تر می‌شود: $Ln(۲x^۲)-Ln(x^۲+x^۴)=Ln\left(\frac{۲x^۲}{x^۲+x^۴}\right)=Ln\left(\frac{۲}{۱+x^۲}\right)=Ln۲-Ln(۱+x^۲)$ پس داریم:

$$\text{حاصل انتگرال}=\frac{-۱}{۲}\int_۰^۱[Ln۲-Ln(۱+x^۲)]dx=\frac{-۱}{۲}[xLn۲-xLn(۱+x^۲)+۲x-۲Arctgx]_۰^۱=\frac{\pi}{۴}-۱$$

توضیح: برای حل انتگرال $\int Ln(۱+x^۲)dx$ از روش جزء به جزء استفاده کردیم، به این شکل که $u=Ln(۱+x^۲)$ و $dv=dx$ پس $du=\frac{۲x}{۱+x^۲}$ و $v=x$ است.

$$\int Ln(۱+x^۲)dx=xLn(۱+x^۲)-\int\frac{۲x^۲}{۱+x^۲}dx=xLn(۱+x^۲)-۲\int\frac{۱+x^۲-۱}{۱+x^۲}dx$$

$$=xLn(۱+x^۲)-۲\int\left(۱-\frac{۱}{۱+x^۲}\right)dx=xLn(۱+x^۲)-۲x+۲Arctgx$$

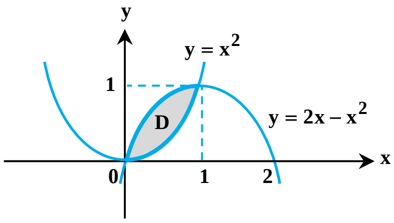
مثال ۸: اگر C مرز منحنی بسته‌ی محدود به سهمی‌های $y=x^۲$ و $y=x(۲-x)$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، آن‌گاه حاصل $I=\oint_C x^۲y^۲dx+(۱۰-x-y)dy$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۶۰}$ ۲) $-\frac{۷}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۳۰}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا نقاط تلاقی دو سهمی را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=x^۲ \\ y=x(۲-x) \end{cases} \Rightarrow x^۲=x(۲-x) \Rightarrow x^۲=۲x-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۱$$

در واقع نمودار زیر را داریم و چون منحنی بسته است، حاصل انتگرال خط را با استفاده از قضیه‌ی گرین حساب می‌کنیم:



$$I=\iint_D[(-۱)-(۲x^۲y)]dA=-\int_۰^۱\int_{y=x^۲}^{y=۲x-x^۲}(۲x^۲y+۱)dydx=-\int_۰^۱[x^۲y^۲+y]_{x^۲}^{۲x-x^۲}dx$$

$$=-\int_۰^۱[(x^۲(۲x-x^۲)^۲+۲x-x^۲)-(x^۲\times x^۴+x^۲)]dx$$

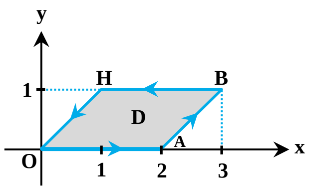
$$=-\int_۰^۱[x^۲(۴x^۲+x^۴-۴x^۳)+۲x-x^۲-x^۶-x^۲]dx=-\int_۰^۱(۴x^۴-۴x^۵+۲x-۲x^۲)dx$$

$$=-[\frac{۴x^۵}{۵}-\frac{۴x^۶}{۶}+x^۲-\frac{۲x^۳}{۳}]_۰^۱=-[\frac{۴}{۵}-\frac{۲}{۳}+۱-\frac{۲}{۳}]=-(\frac{۱۲-۱۰+۱۵-۱۰}{۱۵})=-\frac{۷}{۱۵}$$

مثال ۹: حاصل انتگرال $\oint_C(۳y^۲+۲xe^{y^۲})dx+(۲x^۲ye^{y^۲})dy$، در صورتی که C مرز متوازی‌الاضلاعی به رئوس (۰,۰)، (۲,۰)، (۳,۱) و (۱,۱) باشد که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۱» مرز C، مرز متوازی‌الاضلاع شکل مقابل است:



با توجه به این که مسیر بسته است، بنابراین می‌توانیم از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اگر دقت کنید ناحیه نسبت به محور y ها نامنظم است و برای رفع این مشکل ابتدا لازم است معادله‌ی خطوط OH و AB تعیین شوند:

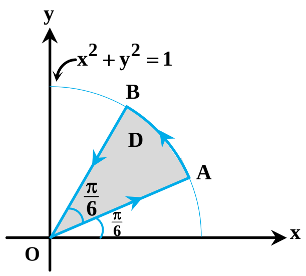
$$\text{معادله خط OH} \Rightarrow y-۰=\frac{۱-۰}{۱-۰}(x-۰) \Rightarrow y=x \Rightarrow x=y$$

$$\text{معادله خط AB} \Rightarrow y-۰=\frac{۱-۰}{۳-۲}(x-۲) \Rightarrow y=x-۲ \Rightarrow x=y+۲$$

و با توجه به این که کران‌های y هم از ۰ تا ۱ تغییر می‌کنند، بنابراین داریم:

$$I=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{y=۰}^{y=۱}\int_{x=y}^{x=y+۲}(-۶y)dxdy=\int_۰^۱[-۶xy]_y^{y+۲}dy=\int_۰^۱-۱۲ydy=[-۶y^۲]_۰^۱=-۶$$

مثال ۱۰: انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C -xy^۲dx+x^۲ydy$ را که در آن C مرز ناحیه قطاعی D (مرز ناحیه هاشورخورده) می‌باشد، چقدر است؟



۱) ۰
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به بسته بودن منحنی C، واضح است بهترین روش حل استفاده از قضیه گرین است: لذا با فرض $P=-xy^۲$ و $Q=x^۲y$ آن‌گاه $\frac{\partial P}{\partial y}=-۲xy$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}=۲xy$ و بنابراین داریم:

$$\oint_C[(-xy^۲dx+x^۲ydy)]=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D[۲xy-(-۲xy)]dxdy=\iint(۴xy)dxdy$$

با توجه به منحنی داده شده، برای محاسبه‌ی انتگرال دوگانه بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید مطابق شکل داده شده معادله‌ی منحنی اصلی به‌صورت $x^۲+y^۲=۱$ است، ناحیه فوق را می‌توان به شکل مقابل نوشت: $x^۲+y^۲\le ۱ \Rightarrow r^۲\le ۱ \Rightarrow ۰\le r\le ۱\ ,\ \frac{\pi}{۶}\le\theta\le\frac{\pi}{۳}$

و لذا انتگرال به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

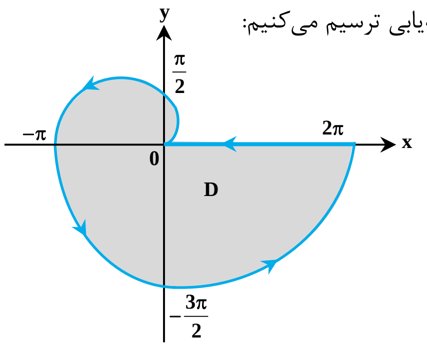
$$\iint_D ۴xydxdy=۴\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^۱(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta=۴\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^۱(r^۳\sin\theta\cos\theta)drd\theta=۴\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(\sin\theta\cos\theta)d\theta[\frac{r^۴}{۴}]_۰^۱=۴\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)d\theta\times(\frac{۱}{۴})$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\sin ۲\theta d\theta=\frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{۲}\cos ۲\theta]_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}=-\frac{۱}{۴}\cos(۲\times\frac{\pi}{۳})+\frac{۱}{۴}\cos(۲\times\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۴}(-\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۱ (سخت): فرض کنید C اجتماع نمودار تابع $r=\theta$ ، $(\circ\le\theta\le ۲\pi)$ و پاره‌خط از $(\circ,\circ)$ تا $(۲\pi,\circ)$ در صفحه‌ی xoy است. انتگرال میدان برداری $\vec{F}=-y^۳\vec{i}+x^۳\vec{j}$ ، در صورتی که C در جهت مثلثاتی طی شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲\pi^۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲۴\pi^۵}{۵}$ ۳) $۱۲\pi^۴$ ۴) $۲۴\pi^۵$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا منحنی قطبی را با روش نقطه‌یابی ترسیم می‌کنیم:



θ	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
r	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

(دقت کنید $r=\theta$ است)

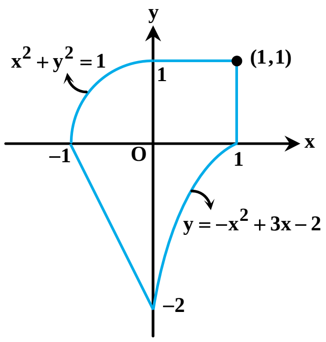
بنابراین ناحیه D به‌صورت $\circ\le r\le\theta$ و $D:\circ\le\theta\le ۲\pi$ می‌باشد. (توجه داشته باشید که پاره‌خط از $(\circ,\circ)$ تا $(۲\pi,\circ)$ جزء منحنی قطبی $r=\theta$ نیست و شکل بالا از اجتماع این پاره‌خط با نمودار منحنی قطبی $r=\theta$ حاصل شده است.) از طرفی چون منحنی بسته است، لذا برای محاسبه‌ی انتگرال خط می‌توانیم از قضیه گرین کمک بگیریم:

$$I=\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint_C -y^۳dx+x^۳dy=\iint_D\left(\frac{\partial(x^۳)}{\partial x}-\frac{\partial(-y^۳)}{\partial y}\right)dxdy=۳\iint_D(x^۲+y^۲)dxdy$$

$$\Rightarrow I=۳\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\theta}r^۲.rdrd\theta=۳\int_\circ^{۲\pi}\left[\frac{r^۴}{۴}\right]_\circ^\theta d\theta=\frac{۳}{۴}\int_\circ^{۲\pi}\theta^۴d\theta=\frac{۳}{۴}\left[\frac{\theta^۵}{۵}\right]_\circ^{۲\pi}=\frac{۳\times(۲\pi)^۵}{۴\times۵}=\frac{۲۴\pi^۵}{۵}$$

مثال ۱۲ (سخت): اگر C منحنی شکل زیر در جهت مثبت باشد،

آن‌گاه کار انجام شده به وسیله‌ی نیروی $\vec{F}=(y+\cos y-y\sin x)\vec{i}+(۲x+\cos x-x\sin y)\vec{j}$ کدام است؟



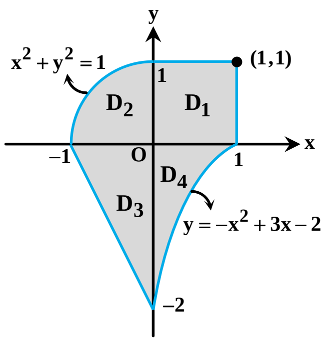
۱) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۳}$

۲) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۶}$

۳) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱۷}{۶}$

۴) $\frac{\pi}{۲}+\frac{۱۷}{۳}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا ناحیه داده شده را به چهار قسمت به شکل مقابل تقسیم می‌کنیم که هر چهار منحنی بسته هستند و بنابراین برای به‌دست آوردن انتگرال خط می‌توانیم از قضیه گرین کمک بگیریم:



$$I=\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\int_{C_۱}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۲}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۳}\vec{F}.d\vec{r}+\int_{C_۴}\vec{F}.d\vec{r}$$

اما قبل از استفاده از قضیه گرین بهتر است $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(۲-\sin x-\sin y)-(۱-\sin y-\sin x)=۱$$

بنابراین حاصل انتگرال به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$I=\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_{D_۱}۱\times dxdy+\iint_{D_۲}۱\times dxdy+\iint_{D_۳}۱\times dxdy+\iint_{D_۴}۱\times dxdy$$

می‌دانیم حاصل انتگرال $\iint_D dxdy$ ، برابر با مساحت ناحیه D است، و چون سه انتگرال اول شکل‌هایی هستند که مساحت آن‌ها معلوم است، بنابراین لازم به انتگرال‌گیری نیست و همان عدد مساحت شکل‌های مربوطه را به جای این انتگرال‌ها وارد می‌کنیم، اما در مورد انتگرال چهارم باید حاصل انتگرال به روش انتگرال‌گیری حساب شود:

$$I=(\text{مساحت ناحیه } D_۱)+(\text{مساحت ناحیه } D_۲)+(\text{مساحت ناحیه } D_۳)+\int_\circ^۱\int_{-x^۲+۳x-۲}^{\circ}dydx=۱\times۱+\frac{۱}{۴}(\pi\times۱^۲)+\frac{۱}{۲}(۱\times۲)+\int_\circ^۱(x^۲-۳x+۲)dx$$

$$\Rightarrow I=۱+\frac{\pi}{۴}+۱+\left[\frac{x^۳}{۳}-۳\left(\frac{x^۲}{۲}\right)+۲x\right]_\circ^۱=۲+\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۲}+۲=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱۷}{۶}$$