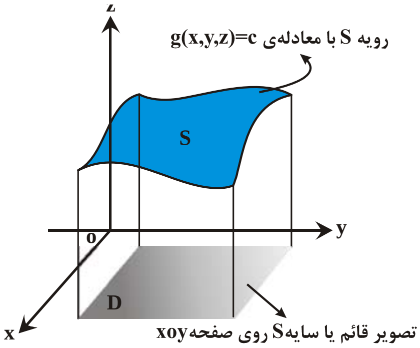
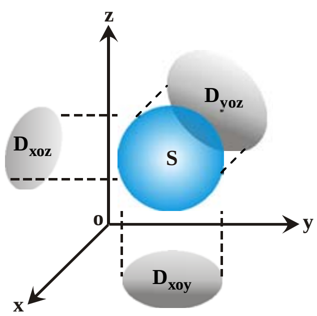
درسنامه: انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی و کاربردهای آن

در فصل انتگرال روی‌خط با سؤالاتی آشنا شدیم که در آن‌ها، انتگرال تابعی بر روی یک خط و یا یک منحنی در فضا حساب می‌شد. در این فصل می‌خواهیم با انتگرال‌گیری بر روی یک **رویه در فضا** آشنا شویم.

در واقع برای محاسبه‌ی انتگرال روی یک سطح یا رویه، مهم‌ترین کاری که ما انجام می‌دهیم، تصویر کردن آن بر روی یک **صفحه** است و این کار به این دلیل انجام می‌گیرد که ما از فصل انتگرال‌های چندگانه روش‌های انتگرال‌گیری بر روی سطوح دو بعدی را بلدیم و به محض این که تصویر رویه مشخص شود، ما دیگر خیلی به فضا فکر نمی‌کنیم!! و سعی می‌کنیم در روی زمین به کار خود ادامه بدهیم!! همان‌طور که در شکل «الف» می‌بینید، رویه‌ی S بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده است. ذکر این نکته لازم است که رویه را در هر کدام از صفحات مختصات می‌توانیم تصویر کنیم (البته محدودیت‌هایی داریم که بعداً به ذکر آن‌ها می‌پردازیم) شکل «ب» تصویر یک کره را بر روی هر سه صفحه نشان داده که بدیهی است هر سه تصویر، دایره‌ای به شعاع کره هستند.



«شکل الف»



«شکل ب»

همانند فصل انتگرال روی‌خط، اینجا نیز با دو نوع تابع، یعنی توابع حقیقی (اسکالر) و توابع برداری سر و کار داریم. در این درسنامه روش محاسبه انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی را بیان کرده و سپس در درسنامه بعد، در مورد انتگرال روی سطح برای توابع برداری بحث می‌کنیم.

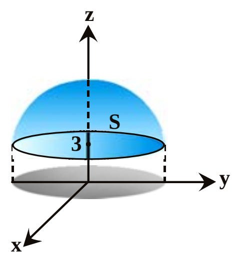
انتگرال روی سطح برای توابع حقیقی: فرض کنید رویه‌ای مانند S به معادله‌ی $g(x,y,z)=C$ داریم و می‌خواهیم انتگرال تابعی حقیقی (اسکالر) مانند $f(x,y,z)$ را روی S حساب کنیم، یعنی قراره حاصل $I=\iint_S f d\sigma$ رو حساب کنیم، در این صورت اگر فرض کنیم D تصویر ناحیه S روی یکی از صفحات مختصات باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\boxed{\iint_S f d\sigma = \iint_D f \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{p}|} dA}$$

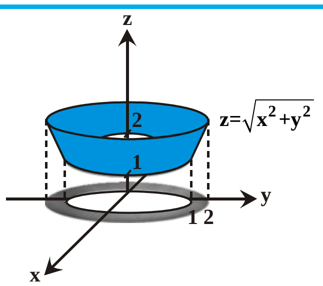
در این رابطه، $\vec{\nabla} g$، گرادیان رویه g و $\vec{p}$ بردار یکه عمود بر صفحه‌ی تصویر است. برای مثال اگر صفحه‌ی تصویر xoy باشد، آن‌گاه $\vec{p}=\vec{k}$ در نظر گرفته می‌شود. در واقع $\vec{p}$ یکی از سه بردار $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ می‌باشد، (صفحه‌ی تصویر همیشه طوری انتخاب می‌شود کـه $\vec{\nabla} g.\vec{p} \neq 0$ و ایـن انتخـاب همیشـه امکـان‌پـذیر است.) همچنین dA، المان مساحت در ناحیه‌ای است که رویه موردنظر تصویر شده است. (برای صفحه xoy برابـر بـا dxdy، بـرای صـفحه xoz برابـر بـا dxdz و برای صفحه zoy برابر با dzdy است.)

قبل از پرداختن به روش‌های حل انتگرال روی سطح، بهتر است تصویر چند رویه را بر روی صفحات مختصات با هم مرور کنیم:

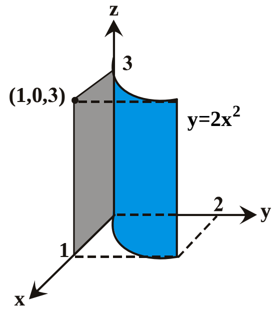
یک نیم‌کره به مرکز (۰,۰,۳) کـه بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن یک دایره است.



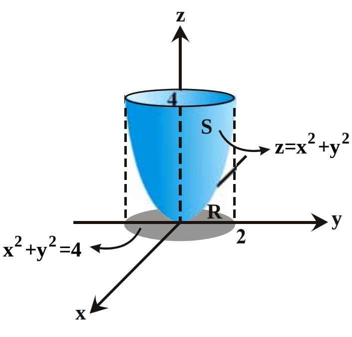
قسمتی از یک مخروط که بر روی صفحه‌ی xoy تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن ناحیه‌ی بین دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ است.



قسمتی از استوانه‌ی $y=2x^2$ کـه بر روی صفحه‌ی zox تصویر شده و همان‌طور که می‌بینید تصویر آن یک مستطیل با طول ۳ و عـرض ۱ است.



قسمتی از یک سهمی‌گون که بـر روی صفحه‌ی xoy تصویر شـده و همان‌طور که می‌بینید تصـویر آن ناحیه‌ی درون یک دایره به شـعاع ۲ است.



روش حل سؤالات انتگرال روی سطح برای توابع عددی

برای حل انتگرال سطح $\iint_S fd\sigma$، یعنی انتگرال تابع اسکالر f بر روی سطح S باید مراحل زیر را انجام دهیم:

گام اول: ابتدا سطح را بر یکی از صفحات مختصات تصویر می‌کنیم و ناحیه به‌دست آمده را D می‌نامیم.

گام دوم: با توجه به معادله‌ی g تلاش می‌کنیم $d\sigma$ را حساب کنیم. دو روش برای این کار وجود دارد که ما این‌جا روش اول را بیان می‌کنیم:

در این روش با دقت به صورت سؤال، متوجه می‌شویم که سطح S دارای چه معادله‌ای است. این معادله را به‌صورت $g(x,y,z)=C$ می‌نویسیم و سپس از رابطه‌ی زیر $d\sigma$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

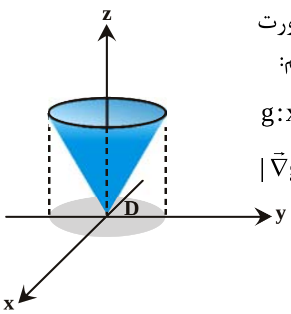
گام سوم و نهایی: در این مرحله $d\sigma$ به‌دست آمده را در انتگرال جایگذاری کرده و بر ناحیه D انتگرال دوگانه عادی را حساب می‌کنیم. دقت کنید در این حالت اگر مثلاً صفحه‌ی تصویر، صفحه‌ی xoy باشد، در انتگرال دوگانه، فقط متغیرهای x و y را داریم و لازم است در ضابطه‌ی $f(x,y,z)$ به جای تمام zها، مقدار آن را برحسب x و y قرار دهیم.

مثال زیر مطلب را به خوبی روشن می‌کند:

مثال ۱: حاصل $I=\iint_S zd\sigma$ در صورتی که S پوسته‌ی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=0$ و $z=1$ باشد، چند برابر π است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا ناحیه‌ی S را بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌کنیم و آن را D می‌نامیم. همانطور که از معادله‌ی رویه مشخص است، سایه رویه داده شده، دایره‌ی $x^2+y^2=1$ در صفحه‌ی xoy است. البته بدون نیاز به رسم شکل هم می‌شد با تلاقی $z=1$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ به این نتیجه رسید. همچنین توجه کنید که بردار $\vec{p}$ برای صفحه‌ی xoy برابر با $\vec{k}$ است.



حالا باید $d\sigma$ را حساب کنیم. رویه‌ی S، پوسته‌ی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است. باید این معادله را به‌صورت $g(x,y,z)=c$ بنویسیم. می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم و سپس همه‌ی متغیرها را به یک سمت تساوی بیاوریم:

$$g:x^2+y^2-z^2=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-2z)^2}$$

$$|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4(x^2+y^2)+4z^2}=\sqrt{4z^2+4z^2}=\sqrt{8z^2}=2\sqrt{2}z$$

از طرفی $\vec{\nabla g}.\vec{k}=-2z$ و بنابراین $|\vec{\nabla}g.\vec{k}|=2z$، پس خواهیم داشت: $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{2\sqrt{2}z}{2z}dA=\sqrt{2}dA$

حالا با جایگذاری $d\sigma$ و همچنین $\sqrt{x^2+y^2}$ به جای z در زیر انتگرال به راحتی حاصل انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$I=\iint_D z(\sqrt{2}dA)=\sqrt{2}\iint_D zdA=\sqrt{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dA$$

با توجه به وجود «x^2+y^2» زیر انتگرال و همچنین ناحیه انتگرال‌گیری داده شده، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم، که می‌دانیم در این ناحیه $dA=rdrd\theta$، $0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le 2\pi$. پس I به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(rdrd\theta)=\sqrt{2}(\int_0^{2\pi}d\theta)\times(\int_0^1 r^2dr)=\sqrt{2}[\theta]_0^{2\pi}\times[\frac{r^3}{3}]_0^1=2\pi\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=(\frac{2\sqrt{2}}{3})\pi$$

روشی دیگر برای محاسبه‌ی $d\sigma$

این روش که شاید حفظ کردن و به خاطر سپردن اون راحت‌تر از روش قبل باشه، بر مبنای معادله‌ی رویه‌ی g فرمول‌بندی میشه که معمولاً در اکثر سؤالات یکی از سه حالت زیر را داریم:

الف) اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که z به طور صریح برحسب x و y داده شده باشه (یعنی یک طرف تساوی فقط z و طرف دیگه، فقط عبارتی بر حسب x و y داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو xoy انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$\boxed{d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy}$$

ب) اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که x به طور صریح برحسب z و y داده شده باشه، (یعنی یک طرف تساوی فقط x و طرف دیگه، فقط عبارتی بر حسب z و y داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو yoz انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$\boxed{d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}dydz}$$

ج) اگه معادله‌ی سطح S جوری باشه که y به طور صریح برحسب x و z داه شده باشه (یعنی یک طرف تساوی فقط y و طرف دیگه، فقط عبارتی بر حسب x و z داشته باشیم!) اونوقت صفحه‌ی تصویر رو xoz انتخاب می‌کنیم و $d\sigma$ به‌صورت زیر حساب میشه:

$$\boxed{d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}dxdz}$$

سؤال دانشجو: استفاده از کدام روش برای محاسبه‌ی $d\sigma$ بهتر است و اصولاً روش دوم چه موقع به کار ما می‌آید؟

خُب، طبیعتاً با توجه به اینکه در روش اول باید گرادیان رویه را حساب کرد و همچنین ضرب برداری انجام داد، شاید این روش کمی با خطا توأم باشد، البته واقعاً نمی‌توان گفت حجم محاسبات روش اول خیلی بیشتر است؛ بنابراین هر کسی باید ببیند در استفاده و حفظ کردن کدام رابطه راحت‌تر است!؟ اما یادتان باشد که این طور نیست که اصلاً لازم نباشد روش اول به خاطر سپرده شود! چون در مواقعی که مثلاً نتوان یک متغیر را به طور صریح برحسب دو متغیر دیگر معین کرد، بهتر است از روش اول در محاسبه‌ی $d\sigma$ کمک بگیریم. البته شاید تاکنون در آزمون‌ها (و حتی در اکثر کتاب‌های مرجع دانشگاهی) سؤالی با این شرایط مطرح نشده باشد، اما به هر حال سؤالاتی با این شرایط قابل طرح کردن می‌باشند. مثلاً اگر معادله رویه به‌صورت $x^2+y^2+z^2=4z$ داده شده باشد، آن‌گاه محاسبه‌ی صریح z بر حسب x و y کمی پیچیده است و بنابراین بهتر است از روش اول استفاده کنیم. اما برای انتگرال سطح توابع برداری چون با بردار سر و کار داریم همچنین به دلیل برخی ملاحظات دیگر، بهتر است از روش اول (محاسبه گرادیان) استفاده کنیم.

حالا برای تمرین در یک سؤال، $d\sigma$ را از دو روش حساب می‌کنیم:

برای مثال حاصل $I=\iint_S (x^2+y^2)d\sigma$ در صورتی که S بخشی از سطح مخروطی $z^2=x^2+y^2$ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ باشد را به‌دست می‌آوریم.

گام اول: ابتدا توجه کنید که ناحیه مورد نظر بر صفحه‌ی xoy تصویر می‌شود و تصویر آن دایره واحد به مرکز مبدأ می‌باشد.

گام دوم: همان‌طور که گفتیم برای تمرین و درک بهتر $d\sigma$ را از هر دو روش به‌دست می‌آوریم.

با توجه به صورت سؤال و معادله‌ی مخروط داریم $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (دقت کنید که در صورت سؤال گفته شده؛ سطح مخروط بین صفحات $z=0$ و $z=1$ قرار دارد، و این یعنی ضابطه‌ی $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ قابل قبول نیست.) بنابراین می‌توانیم از روش دوم استفاده کنیم:

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

حالا از روش اول هم $d\sigma$ را حساب می‌کنیم:

$$g(x,y,z)=0\Rightarrow z^2-x^2-y^2=0\Rightarrow \vec{\nabla}g=(-2x)\vec{i}+(-2y)\vec{j}+(2z)\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

از طرفی چون بردار یکه عمود بر سطح $\vec{p}=\vec{k}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\vec{\nabla}g.\vec{k}=2z\Rightarrow|\vec{\nabla}g.\vec{k}|=2z$$

پس داریم:
$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dxdy=\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}dxdy=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dxdy\xrightarrow{z^2=x^2+y^2}d\sigma=\frac{\sqrt{z^2+z^2}}{z}dxdy=\frac{\sqrt{2}z}{z}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

گام سوم: حالا باید انتگرال مقابل را حساب کنیم:
$$I=\iint_D(x^2+y^2)(\sqrt{2}dxdy)=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

از طرفی همان‌طور که در گام اول گفتیم، میدان D، دایره $x^2+y^2=1$ است و با توجه به این که زیر انتگرال، عبارت x^2+y^2 وجود دارد، بهتر است از مختصات قطبی کمک بگیریم. در این دستگاه $dxdy=rdrd\theta$ و با توجه به اینکه ناحیه دایره واحد است، پس $0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le 2\pi$، لذا داریم:

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2.rdrd\theta=\sqrt{2}(\int_0^{2\theta}d\theta)\times(\int_0^1 r^3dr)=\sqrt{2}[\theta]_0^{2\pi}\times\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\sqrt{2}\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲: انتگرال $\iint_S xzd\sigma$ را که در آن S بخشی از سطح $z=x^2$ است و در یک هشتم اول فضای سه بعدی و داخل سهمی‌گون $z=1-3x^2-y^2$ قرار دارد، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{192}$ ۲) $\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{1}{96}$ ۴) $\frac{1}{92}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی سطح S به‌صورت $g:x^2-z=0$ است بنابراین $\vec{\nabla}g=(2x)\vec{i}-\vec{k}$ و لذا $|\vec{\nabla}g|=\sqrt{4x^2+1}$

اگر صفحه تصویر را صفحه xoy در نظر بگیریم، در این صورت داریم:
$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\sqrt{4x^2+1}dA$$

تصویر ناحیه S روی صفحه xoy از تلاقی سهمی‌گون و سطح $z=x^2$ حاصل می‌شود:
$$x^2=1-3x^2-y^2\Rightarrow 4x^2+y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{1}=1$$

یک بیضی با شعاع افقی $\frac{1}{2}$ و شعاع عمودی 1 داریم. البته فقط ربع اول از این بیضی موردنظر است. پس $0\le x\le\frac{1}{2}$ و $0\le y\le\sqrt{1-4x^2}$ است.

بنابراین انتگرال مورد‌نظر برابر است با:

$$\iint_S xzd\sigma=\iint_D x.x^2\sqrt{4x^2+1}dA=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}x^3\sqrt{1+4x^2}dydx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^3\sqrt{1-16x^4}dx=\frac{-1}{96}[(1-16x^4)^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{96}$$

درسنامه۲: انتگرال سطح برای توابع برداری و قضیه دیورژانس

در درسنامه قبل با انتگرال‌گیری روی سطح برای توابع عددی آشنا شدیم. در این درسنامه به بررسی انتگرال‌هایی می‌پردازیم که تابع زیر انتگرال، یک تابع برداری است.

فرض کنید رویه‌ای مانند S به معادله‌ی $g(x,y,z)=C$ را داریم که $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S باشد، می‌خواهیم انتگرال تابعی برداری مانند $\vec{F}$ را روی S یعنی $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ حساب کنیم. در این صورت اگر فرض کنیم D تصویر ناحیه S باشد، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D \vec{F}.\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

روش حل انتگرال روی سطح برای توابع برداری

برای حل انتگرال $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$، یعنی انتگرال تابع برداری $\vec{F}$ بر روی سطح S باید مراحل زیر را انجام دهیم:

گام اول: ابتدا سطح را بر یکی از صفحات مختصات تصویر می‌کنیم و ناحیه موردنظر را D می‌نامیم.

گام دوم: با استفاده از معادله‌ی g، تلاش می‌کنیم $d\sigma$ را حساب کنیم که این کار به دو روش، مانند آنچه در مورد روش حل انتگرال روی سطح برای توابع عددی گفتیم، صورت می‌گیرد و البته چون در این قسمت بحث‌های برداری مطرح می‌شود، برای دوری از اشتباه، بهتر است صرفاً از فرمول زیر $d\sigma$ را حساب کنیم:

$$\boxed{d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

گام سوم: بردار $\vec{n}$ را از رابطه‌ی $\vec{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}$ به‌دست می‌آوریم.

گام چهارم: عبارت $\vec{F}.\vec{n}$ را حساب کرده و به همراه $d\sigma$ که حساب کرده بودیم، در انتگرال جایگذاری کرده و بر ناحیه D انتگرال دوگانه عادی را حساب می‌کنیم.

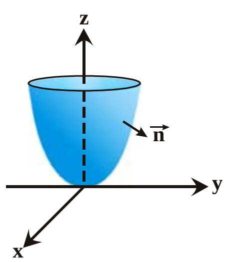
توضیح مهم: البته در گام‌های دوم تا چهارم می‌توان چنین استدلال کرد که چون $\vec{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}$ و $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}$، لذا می‌توان $\vec{n}d\sigma$ را که برابر با $\vec{n}d\sigma=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}$ می‌باشد، مستقیم تشکیل داده و بعد آن را در $\vec{F}$ ضرب داخلی کرد؛ بدیهی است نتیجه آن یکسان با همین حالتی است که در گام‌های دوم و چهارم گفتیم! فکر می‌کنم اگر $\vec{n}d\sigma$ را یکباره حساب کنیم کار راحت‌تر باشد. پس رابطه‌ی زیر یادتان باشد:

$$\boxed{\vec{n}d\sigma=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA}$$

توضیح مهم در مورد علامت بردار $\vec{n}$: انتخاب علامت مثبت یا منفی برای بردار $\vec{n}$، به جهت بردار $\vec{n}$ بستگی دارد. اگر $\vec{n}$ رو به بالا باشد، اونوقت باید مولفه‌ی سومش مثبت باشد و اگر $\vec{n}$ رو به پایین باشد، اونوقت باید مولفه‌ی سومش منفی باشه، به دو مثال زیر توجه کنید:

برای مثال اول فرض کنید رویه $z=x^۲+y^۲$ را داریم و قرار است بردار عمود بر سطح آن، یعنی $\vec{n}$ برون‌سو باشد، داریم:

$$g:x^۲+y^۲-z=۰\Rightarrow\vec{\nabla}g=(۲x)\vec{i}+(۲y)\vec{i}-\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}$$



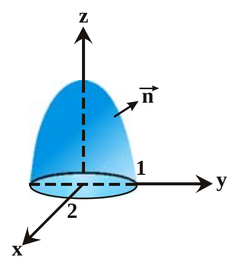
بنابراین بردار $\vec{n}$ به‌صورت $\vec{n}=\pm\frac{(۲x)\vec{i}+(۲y)\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}}$ می‌باشد.

خُب چون می‌خواهیم بردار $\vec{n}$ برون‌سو (رو به خارج) باشد و همان‌طور که در شکل می‌بینید بردار برون‌سوی این سهموی به سمت پایین است $(-\vec{k})$، پس مؤلفه‌ی سوم $\vec{n}$ باید منفی باشد، و چون مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ خودش منفی است، پس باید علامت مثبت را انتخاب کنیم.

و یا برای مثال دوم، بخشی از سهمی‌گون $z=۱-x^۲-y^۲$ که بالای صفحه‌ی $z=۰$ است را در نظر بگیرید.

فرض کنید می‌خواهیم $\vec{n}$ برون‌سو باشد، ابتدا $\vec{\nabla}g$ را حساب می‌کنیم:

$$g:x^۲+y^۲+z-۱=۰\Rightarrow\vec{\nabla}g=(۲x)\vec{i}+۲y\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}g|=\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}$$



بنابراین بردار $\vec{n}$ به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $\vec{n}=\pm\frac{(۲x)\vec{i}+(۲y)\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}}$

خُب، چون می‌خواهیم بردار $\vec{n}$ برون‌سو و به سمت خارج باشد، و مطابق شکل بردار برون‌سوی این سهموی به سمت بالا است $(\vec{k})$ پس مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ باید مثبت باشد و چون مولفه‌ی سوم $\vec{n}$ خودش مثبت است، پس باز هم باید علامت مثبت را انتخاب کنیم.

مثال۱: اگر S بخشی از سطح $z=x^2-y^2$ باشد که داخل استوانه $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد و $\vec{n}$ بردار یکه رو به خارج سطح S باشد. آن‌گاه با فرض $\vec{F}=x\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$، حاصل $I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}a^4$ ۲) $-\frac{\pi}{2}a^4$ ۳) $\frac{\pi}{4}a^2(2-a^2)$ ۴) $\frac{\pi}{2}a^2(2-a^2)$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال معادله‌ی رویه‌ی g به‌صورت $g:z-x^2+y^2=0$ تعریف شده است که برای آن داریم: $\vec{\nabla}g=(-2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}+1$
از طرفی با توجه به اینکه تصویر رویه بر روی صفحه‌ی xoy قرار دارد، پس $\vec{p}=\vec{k}$ و بنابراین خواهیم داشت: $\vec{\nabla}g.\vec{p}=[(-2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}+\vec{k}].(\vec{k})=1$
حالا $\vec{n}d\sigma$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}=\frac{-2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{1}=-2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$$

حالا دیگه همه چی آماده‌ی انتگرال‌گیری شده! ابتدا تابع انتگرال را با جایگذاری $\vec{F}$ و $\vec{n}d\sigma$ بازنویسی کرده و آن را به سه انتگرال تفکیک می‌کنیم.

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D(x\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k})(-2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k})dA=\iint_D(-2x^2+2xy+1)dxdy=-2\iint_D x^2.dxdy+2\iint_D(xy)dxdy+\iint_D dxdy$$

$$I=-2\iint_D x^2dxdy+2\iint_D xy\,dxdy+(\text{مساحت ناحیه } D)$$

دقت کنید در انتگرال دوم چون ناحیه متقارن است، پس حاصل انتگرال صفر است و چون ناحیه D دایره $x^2+y^2=a^2$ است، پس مساحت ناحیه D برابر با πa^2 است، لذا داریم: $I=-2\iint_D x^2dxdy+\pi a^2=I_1+\pi a^2$

حالا کافیست I_1 را حساب کنیم؛ توجه کنید که چون ناحیه D به‌صورت $x^2+y^2=a^2$ است، پس کران‌های انتگرال در مختصات قطبی به‌صورت $0\le r\le a$ و $0\le\theta\le 2\pi$ نوشته می‌شود:
همچنین در مختصات قطبی $dxdy=rdrd\theta$ و $x=r\cos\theta$، پس داریم:

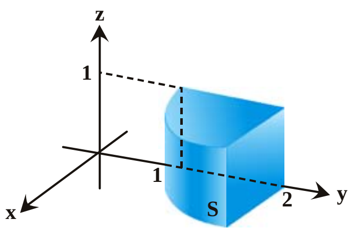
$$I_1=-2\int_0^{2\pi}\int_0^a(r^2\cos^2\theta)rdrd\theta=-2(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta)\times[\frac{r^4}{4}]_0^a=-2[\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta]\times[\frac{a^4}{4}]=[-\int_0^{2\pi}(1)d\theta-\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta]\times\frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow I_1=[-2\pi-[\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}](\frac{a^4}{4})=-\frac{\pi a^4}{2}\Rightarrow I=I_1+\pi a^2=\frac{\pi}{2}a^2(2-a^2)$$

مثال۲: فرض کنید S آن قسمتی از استوانه $y=e^x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائم آن بر صفحه yoz، مستطیل $0\le z\le 1$ و $D:1\le y\le 2$ باشد. همچنین فرض کنید $\vec{n}$ بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه yoz است. شار میدان $\vec{F}(x,y,z)=-2\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k}$ گذرنده از S در جهت بردار $\vec{n}$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که طبق گفته‌ی صورت سؤال تصویر رویه S، مستطیل $0\le z\le 1$ و $D:1\le y\le 2$، روی صفحه‌ی yoz است.
حالا با فرض $g:e^x-y=0$ داریم: $\vec{\nabla}g=e^x\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\vec{\nabla}g.\vec{i}=e^x\Rightarrow\vec{\nabla}g.\vec{i}=e^x$



و بنابراین داریم: $\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{p}|}dA=(\frac{e^x\vec{i}-\vec{j}}{e^x})dA=(\vec{i}-\frac{1}{e^x}\vec{j})dA$

حالا $\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را تشکیل داده و به جای yهای $\vec{F}$، e^x قرار می‌دهیم:

$$\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(-2\vec{i}+2e^x\vec{j}+z\vec{k})(\vec{i}-\frac{1}{e^x}\vec{j})dA=-2-2=-4$$

پس داریم: $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D -4dA=-4\int_1^2\int_0^1 dzdy=-4$

البته بعد از رسیدن به $I=-4\iint_D dA$، دیگر نیاز به محاسبه انتگرال دوگانه نبود و می‌توانستیم بگوییم حاصل انتگرال برابر با مساحت مستطیلی به ابعاد 1×1 است و لذا $I=-4(1\times1)=-4$.

تذکر۱: به مقدار انتگرال $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$، شار عبوری میدان $\vec{F}$ از سطح S در جهت $\vec{n}$ گفته می‌شود.

نکته۱: اگر معادله‌ی پارامتری رویه‌ای به‌صورت $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ داده شده باشد، آن‌گاه بردار یکه عمود بر رویه از رابطه‌ی $\vec{n}=\pm\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|}$ حساب می‌شود و چون گفتیم برای این رویه‌ی پارامتری، $d\sigma$ از رابطه‌ی زیر $d\sigma=|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|dudv$ حساب می‌شود، پس می‌توان گفت $\vec{n}d\sigma$ برای این رویه به شکل زیر است:

$$\vec{n}d\sigma=\pm(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v})dudv$$

مثال ۳: شار آب گذرنده از سطحی با معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+u^2\vec{j}+v\vec{k}$ در فاصله‌ی $0\le u\le 2$ و $0\le v\le 3$ با بردار سرعت $\vec{F}=y\vec{i}+2\vec{j}+xz\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{i}+2u\vec{j}\ ,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{k}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2u&0\\0&0&1\end{vmatrix}=2u\vec{i}-\vec{j}$$

بنابراین $\vec{n}d\sigma=(2u\vec{i}-\vec{j})dudv$ می‌باشد، از طرفی در این سؤال $x=u\ ,\ y=u^2$ و $z=v$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\int_0^3\int_0^2(u^2\vec{i}+2\vec{j}+uv\vec{k})(2u\vec{i}-\vec{j})dudv=\int_0^3\int_0^2(2u^3-2)dudv=[v]_0^3\times[\frac{2u^4}{4}-2u]_0^2=\mathbf{12}$$

مثال ۴: اگر S رویه پارامتری با قائم رو به بالا و معادله‌ی پارامتری $S:\vec{r}(u,v)=(u^2+v^2)\vec{i}-u^2\vec{j}+(u^2+v^2)\vec{k}\ ,\ (u,v)\in D$ باشد، و $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=2u(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=2v(\vec{i}+\vec{k})\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2u&-2u&2u\\2v&0&2v\end{vmatrix}=-4uv\vec{i}+4uv\vec{k}=4uv(-\vec{i}+\vec{k})$$

پس $\vec{n}d\sigma=\pm4uv(-\vec{i}+\vec{k})dudv$ (که علامت مثبت را در نظر می‌گیریم) حالا $\vec{F}(u,v)$ را تشکیل می‌دهیم. برای این‌کار ابتدا با توجه به معادله‌ی پارامتری $\vec{r}(u,v)$ متوجه می‌شویم که $x=u^2+v^2$ و $y=-u^2$ و $z=u^2+v^2$ است، حالا با جایگذاری این نتایج در $\vec{F}(x,y,z)$ می‌توانیم آن را برحسب u و v بنویسیم:

$$\vec{F}(u,v)=(u^2+v^2-u^2)\vec{i}+(-u^2+u^2+v^2)\vec{j}+(u^2+v^2-u^2)\vec{k}=v^2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

بنابراین $\vec{F}.\vec{n}$ برابر است با: $[v^2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})].4uv(-\vec{i}+\vec{k})=-4uv^3+4uv^3=0$، پس حاصل $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ نیز برابر با صفر است.

مثال ۵ (سخت): فرض کنید S رویه‌ی پارامتری زیر باشد که در آن D ناحیه $u^2+v^2=1$ برای $u\ge0$ و $v\ge0$ می‌باشد.

$$S:\vec{r}(u,v)=(u^2+v^2)\vec{i}+(u^2-v^2)\vec{j}+u^2v^2\vec{k}$$

و $\vec{F}=\frac{1}{2}(x+y)\vec{i}+(y^2+4z)\vec{j}+\frac{1}{2}z\vec{k}$، در این صورت حاصل $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=(2u,2u,2uv^2)\quad,\quad\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=(2v,-2v,2vu^2)$$

$$\vec{n}d\sigma=(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v})dudv=4uv[(u^2+v^2)\ ,\ -(u^2-v^2)\ ,\ -2]dudv$$

$$\text{میدان روی سطح}=\vec{F}(\vec{r}(u,v))=(u^2,(u^2+v^2)^2,\frac{u^2v^2}{2})$$

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D4uv(u^2(u^2+v^2)-(u^2-v^2)(u^2+v^2)^2-u^2v^2)dudv\xrightarrow{u^2+v^2=1}I=\iint_D4uv(u^2-u^2+v^2-u^2v^2)dudv$$

$$\Rightarrow I=\iint_D4uv(v^2-u^2v^2)du=\iint_D4uv^3(1-u^2)dudv\xrightarrow{1-u^2=v^2}I=\iint_D4uv^5dudv$$

با استفاده از تغییر متغیر $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$ و $dudv=rdrd\theta$ داریم. $0\le r\le1\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$، پس حاصل انتگرال به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\iint_D4uv^5dudv=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4r\cos\theta)(r^5\sin^5\theta)rd\theta dr=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}4r^7\cos\theta\sin^5\theta d\theta dr=[\frac{4r^8}{8}]_0^1\times[\frac{\sin^6\theta}{6}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{12}$$

مثال ۳۴: تابع $u(x,y,z)$ که متحد با صفر نیست، دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم است و مقدارش بر روی سطح کره به مرکز مبدأ و شعاع $a > 0$ ثابت $(\rho = a)$ صفر می‌باشد. اگر قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u\vec{\nabla}u$ در داخل و بر روی سطح کره به کار ببریم، آن‌گاه مقدار $I = \iiint_{\rho<a^2} u\nabla^2 u\,dxdydz$ کدام است؟

۱) منفی است. ۲) مثبت است. ۳) صفر است. ۴) علامت ثابتی ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iiint_V \vec{\nabla}.(u\vec{\nabla}u)dv = \iint_S (u\vec{\nabla}u).\vec{n}ds$$

توجه کنید که مقدار u روی سطح کره (S) صفر است، پس طرف دوم تساوی فوق صفر است و بنابراین داریم:

$$\iint_S (u\vec{\nabla}u)\vec{n}ds = 0 \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\vec{\nabla}.(u\vec{\nabla}u) = \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}u + u\nabla^2 u = |\vec{\nabla}u|^2 + u\nabla^2 u$$

پس طبق تساوی $(*)$ داریم:

$$\iiint_V [|\vec{\nabla}u|^2 + u\nabla^2 u]dv = 0 \Rightarrow \iiint_V u\nabla^2 u dv = -\iiint_V |\vec{\nabla}u|^2\,dv$$

و چون u ثابت نیست $|\nabla u|^2$ مخالف صفر و همواره مثبت است، پس انتگرال سمت راست مثبت و بنابراین سمت راست منفی و سمت چپ هم منفی است.

مثال ۳۵: فرض کنید تابع u در ناحیه D همساز باشد و در تمام نقاط رویه S که مرز ناحیه D می‌باشد $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$. در این صورت مقدار $\vec{\nabla}u$ در ناحیه D:

۱) مثبت است. ۲) منفی است. ۳) صفر است. ۴) ثابت است.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که داریم:

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iiint_D (|\vec{\nabla}u|^2 + u\nabla^2 u)\,dv$$

طبق فرض می‌دانیم u همساز است و این یعنی $\nabla^2 u = 0$ و بر روی رویه S داریم؛ $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$، بنابراین از رابطه فوق نتیجه می‌شود $\iiint_D |\vec{\nabla}u|^2\,dv = 0$ و این انتگرال تنها در صورتی برابر صفر است که $\vec{\nabla}u = 0$ باشد (یعنی u در ناحیه D ثابت باشد.)

مثال ۳۶: فرض کنید $\vec{n} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ بردار قائم یکه برون‌سوی رویه‌ی بسته‌ای مانند S باشد که جسم همگنی مانند V را که در شرایط قضیه دیورژانس صدق می‌کند را در خود محدود کرده است. اگر مرکز جرم این جسم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ و حجم آن $|V|$ و گشتاور لختی آن حول محور x ها، برابر با I_x و گشتاور لختی آن حول محور z ها، I_z باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست <u>نیست</u>؟

۱) $\iint_S (xz\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 3z^2\cos\gamma)d\sigma = 9|V|\bar{z}$

۲) $\iint_S (y^2\cos\alpha + 2xy\cos\beta - xz\cos\gamma)d\sigma = |V|\bar{x}$

۳) $\iint_S (x^2+y^2)(x\vec{i}+y\vec{j}).\vec{n}d\sigma = 4I_z$

۴) $\iint_S (x^2-y^2)(x\vec{i}+y\vec{j}).\vec{n}d\sigma = 4I_x$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها مجبوریم هر چهار گزینه را بررسی کنیم؛ اما قبل از آن اولاً توجه کنید که چون سطح بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس کمک بگیریم و ثانیاً به یادآوری زیر که در فصل انتگرال‌های چندگانه اشاره کردیم، توجه کنید:

یادآوری: با توجه به فصل انتگرال‌های چندگانه، تساوی‌های زیر را داریم:

$$\iiint_V xdv = \bar{x}\iiint_V dv = \bar{x}|V|\ ,\ \iiint_V ydv = \bar{y}\iiint_V dv = \bar{y}|V|\ ,\ \iiint_V \bar{z}dv = \bar{z}\iiint_V dv = \bar{z}|V|$$

گشتاور ماند نسبت به محور x ها $= I_x = \iiint_V (y^2+z^2)dv$ ، گشتاور ماند نسبت به محور z ها $= I_z = \iiint_V (x^2+y^2)dv$

گزینه (۱): $I = \iint_S (xz\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 3z^2\cos\gamma)d\sigma = \iiint_V (\mathrm{div}\vec{F})dv = \iiint_V (z+2z+6z)dv = \iiint_V (9z)dv = 9|V|\bar{z}$

گزینه (۲): $I = \iint_S (y^2\cos\alpha + 2xy\cos\beta - xz\cos\gamma)d\sigma = \iiint_V (\mathrm{div}\vec{F})dv = \iiint_V (0+2x-x)dv = \iiint_V xdv = \bar{x}|V|$

گزینه (۳): $I = \iint_S [(x^3+xy^2)\vec{i} + (x^2y+y^3)\vec{j}].\vec{n}d\sigma = \iiint_V (\mathrm{div}\vec{F})dv = \iiint_V (3x^2+y^2+x^2+3y^2)dv = \iiint_V 4(x^2+y^2)dv = 4I_z$

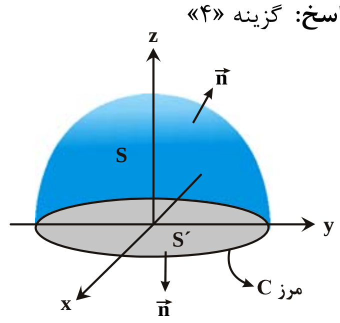
گزینه (۴): $I = \iint_S [(x^3-xy^2)\vec{i} + (x^2y-y^3)\vec{j}]\vec{n}d\sigma = \iiint_V (\mathrm{div}\vec{F})dv = \iiint_V (3x^2-y^2+x^2-3y^2)dv = 4\iiint_V (x^2-y^2)\,dv \neq 4I_x$

نکته ۳: گاهی اوقات سؤالاتی داریم که سطح S **بسته نیست** و ما نمی‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. در این‌گونه سؤالات ما نباید نگران باشیم! چون می‌توانیم یک سطح ساده مانند S' را به سطح S اضافه کنیم و آن را به یک منحنی بسته تبدیل کرده و سپس از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. واضح است در نهایت باید مقدار انتگرالی را که روی سطح S' حساب کرده‌ایم، از مقدار انتگرالی که با استفاده از قضیه دیورژانس به‌دست آورده‌ایم، کم کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

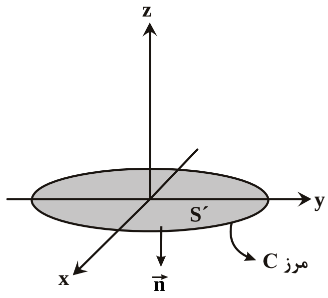
مثال ۳۷: اگر S سطح نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ برای $z>0$ باشد و $\vec{n}$ بردار قائم یکه رو به خارج رویه S باشد و $\vec{F} = (2xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + (1+z^2)\vec{k}$، در این صورت حاصل $I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{4}a^4 - \pi a^2$ ۲) $\frac{5a^4\pi}{2}$ ۳) $\frac{5\pi a^4}{4}$ ۴) $\frac{5\pi a^4}{4} + \pi a^2$

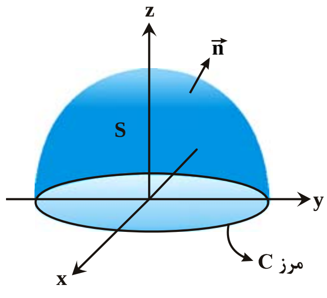
☑ **پاسخ:** گزینه «۴»



(شکل ۳)



(شکل ۲)



(شکل ۱)

خُب همان‌طور که می‌بینید سطح S بسته نیست و نمی‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد! ولی به راحتی با اضافه کردن S' یعنی بخشی از صفحه‌ی $z=0$ که درون دایره $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد، می‌توان یک ناحیه بسته تولید کرده و از قضیه دیورژانس استفاده کرد؛ پس داریم:

$$\iint_S \vec F.\vec n d\sigma = \iint_{S\cup S'} \vec F.\vec n d\sigma - \iint_{S'} \vec F.\vec n d\sigma \Rightarrow I=\iint_S \vec F.\vec n d\sigma = \underbrace{\iiint_V (\mathrm{div}\vec F)dv}_{I_1} - \underbrace{\iint_{S'}\vec F.\vec n d\sigma}_{I_2}$$

ابتدا انتگرال I_1 را حساب می‌کنیم، برای این منظور توجه کنید که داریم:

$$\mathrm{div}\vec F = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 2z+z+2z=5z$$

$$I_1=\iiint_V (\mathrm{div}\vec F)dv = \iiint_V (5z)dzdydx = 5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 5(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi)(\int_0^a\rho^3 d\rho)$$

$$\Rightarrow I_1 = 5(2\pi)[\frac{\sin^2\varphi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\rho^4}{4}]_0^a = 10\pi(\frac{1}{2})(\frac{a^4}{4}) = \frac{5a^4\pi}{4}$$

خُب حالا باید سراغ محاسبه‌ی I_2 برویم:

$$I_2 = \iint_{S'}\vec F.\vec n d\sigma = \iint_{S'} -(z^2+1)dydx = \iint_{S'} -(0+1)dydx = -\iint_{S'} dydx = -S_D = -\pi a^2$$

بنابراین داریم:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{5\pi a^4}{4} - (-\pi a^2) = \frac{5\pi a^4}{4} + \pi a^2$$

توضیح در مورد جهت بردار قائم $\vec n$ در محاسبه‌ی انتگرال I_2: بردار قائم $\vec n$ برابر با $\underline{\underline{-\vec k}}$ تعیین شد، چون که جهت این بردار، همیشه باید جوری باشد که رو به خارج سطح بسته‌ی $S\cup S'$ باشد.

مثال ۳۸: اگر S بخشی از سطح مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، (برای $0<z<h$) بوده و $\vec n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ بردار عمود خارجی رو به بالا بر این سطح باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi h^4}{2}$ ۲) $\frac{\pi h^4}{2}$ ۳) πh^4 ۴) $-\pi h^4$

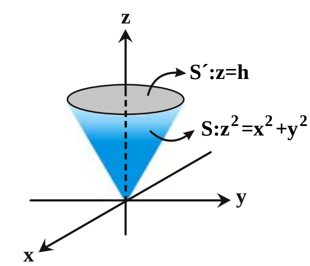
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که انتگرال داده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$I=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma = \iint_S \vec F.\vec n d\sigma \quad , \quad \vec F=(x^2,y^2,z^2)$$

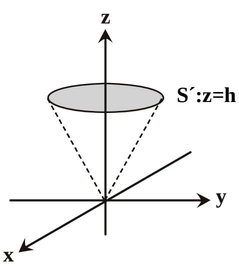
ناحیه‌ی S، فقط شامل بخشی از بدنه‌ی مخروط است، یعنی درپوش ندارد؛ پس **بسته نیست**. می‌خواهیم با اضافه کردن این درپوش به سطح S، آن را به سطحی بسته تبدیل کنیم. فرض کنیم S' قسمتی از صفحه‌ی $z=h$ است که با مخروط $z^2=x^2+y^2$ تلاقی دارد. در این صورت $S\cup S'$ یک سطح بسته است. پس می‌توان با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس نوشت:

$$J=\iint_{S\cup S'}\vec F.\vec n d\sigma = \iiint_V(\mathrm{div}\vec F)dv = \iiint_V(2x+2y+2z)dv$$

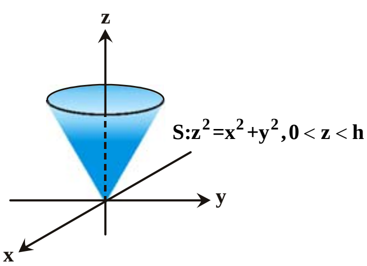
که ناحیه‌ی V درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه‌ی $z=h$ قرار دارد. معادله‌ی $z=\sqrt{x^2+y^2}$ به ازای $\pm x$ و $\pm y$ تغییر نمی‌کند، بنابراین با استفاده از فرد بودن تابع زیر انتگرال می‌توان نتیجه گرفت که $\iiint_V(2x+2y)dv=0$.



با ترکیب این دو سطح به یک سطح بسته می‌رسیم



می‌خواهیم بخشی از صفحه‌ی $z=h$ را به مخروط اضافه کنیم.



S مخروط بدون درپوش است.

خُب حالا باید مقدار $J=\iiint_V 2z\,dv$ را حساب کنیم، برای ناحیه محدود به مخروط و صفحه، از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. از برخورد مخروط با صفحه $z=h$ دایره‌ی $x^2+y^2=h^2$ به‌دست می‌آید. پس داریم $0\le\theta\le 2\pi$ ؛ $0\le r\le h$ کران پایین z از معادله‌ی مخروط به‌دست می‌آید $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ و کران بالای آن $z=h$ است. پس داریم:

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_r^h 2z\,r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^h r[\frac{z^2}{2}]_r^h\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^h r(\frac{h^2}{2}-\frac{r^2}{2})dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}[\frac{h^2r^2}{4}-\frac{r^4}{8}]_0^h\,d\theta=\frac{\pi h^4}{2}$$

خُب حالا باید مقدار انتگرال سطح روی S' را حساب کنیم و مقدار آن را از $\frac{\pi h^4}{2}$ کم کنیم تا به I برسیم. روی $S':z=h$ داریم: $\vec{n}=(0,0,1)$ بنابراین $\vec{F}.\vec{n}=z^2=h^2$ و می‌توان نوشت:

$$\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}h^2d\sigma=h^2\times(S'\ \text{مساحت})=h^2(\pi h^2)=\pi h^4$$

پس خواهیم داشت:

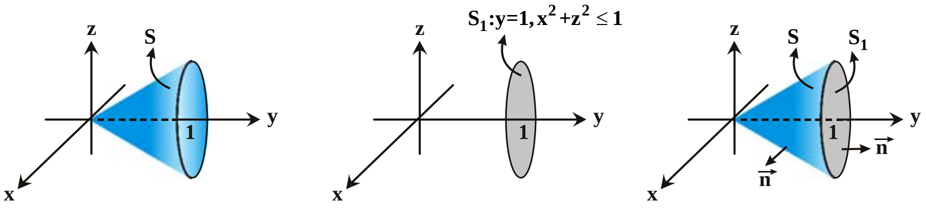
$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}$$

مثال ۳۹: فرض کنید $\vec{F}=(y^2+z^2)\vec{i}-y^2\vec{j}+2yz\vec{k}$ و S رویه‌ای با معادله‌ی $x^2+z^2=y^2$ $(0\le y<1)$ و $\vec{n}$ قائم یکه رو به خارج رویه S است، مقدار $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$　　۲) π　　۳) $-\frac{\pi}{4}$　　۴) $-\pi$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجا که رویه S بسته نیست، بنابراین نمی‌توان از قضیه دیورژانس استفاده کرد؛ لذا برای حل این سؤال بهتر است. سطح S_1 را به صورت مشخص شده به سطح S اضافه کنیم تا شرایط استفاده از قضیه دیورژانس مهیا شود:

$$\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma+\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma\Rightarrow\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$



حالا با توجه به اینکه سطح $S\cup S_1$ بسته است، پس با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\mathrm{div}\vec{F})dv$$

ابتدا دیورژانس تابع برداری $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

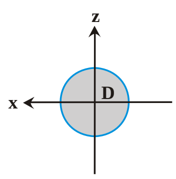
$$\vec{F}=(y^2+z^2\ ,-y^2\ ,2yz)\Rightarrow\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial(y^2+z^2)}{\partial x}+\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(2yz)}{\partial z}=-2y+2y=0\Rightarrow\oiint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=0$$

از طرفی با توجه به اینکه سطح S_1 یعنی صفحه‌ی $y=1$ یک صفحه موازی xoz است، بنابراین $\vec{n}=\vec{j}$ و لذا داریم:

$$\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iint_D(y^2+z^2,-y^2,2yz).(0,1,0)dA=\iint_D-y^2dA=-\iint_D(1)dA=-(D\ \text{مساحت})=-\pi$$

ناحیه‌ی D تصویر S_1 بر صفحه‌ی xoz است که با معادله‌ی $x^2+z^2=1$ مشخص می‌شود.

$D:x^2+z^2=1$;



به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=0-(-\pi)=\pi$$

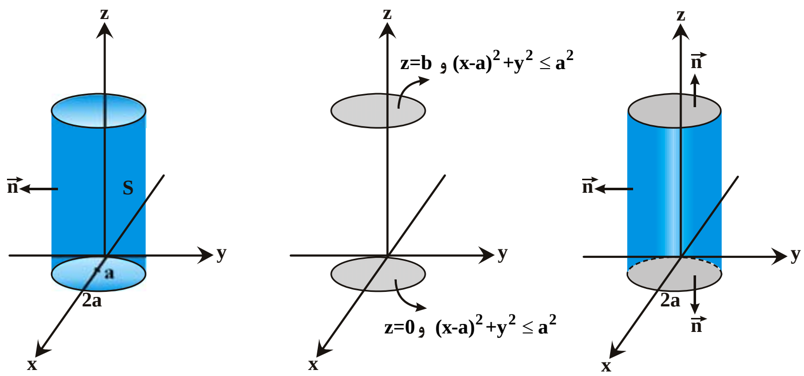
مثال ۴۰: فرض کنید S قسمتی از استوانه‌ی $x^2+y^2=2ax$ باشد که بین صفحات افقی $z=0$ و $z=b$ $(b>0)$ قرار دارد. شار رو به خارج میدان $\vec{F}=x\vec{i}+(\cos z^2)\vec{j}+e^z\vec{k}$ کدام است؟

۱) $2\pi a^2b$　　۲) $b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2$　　۳) πa^2b　　۴) $b\pi a^2+e^b\pi a^2-2\pi a^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی استوانه به صورت مقابل است:　$x^2+y^2=2ax\Rightarrow(x-a)^2+y^2=a^2$

در واقع قاعده‌ی این استوانه در صفحه‌ی xoy یک دایره به مرکز $(a,0)$ و شعاع a است. از طرفی استوانه در راستای محور zها، بین صفحات $z=0$ و $z=b$ قرار دارد، شکل سمت چپ سطح S را نشان می‌دهد. دقت کنید شار خروجی از پوسته‌ی جانبی استوانه (یعنی همان S) خواسته شده است و درپوش‌های استوانه که از تلاقی استوانه با صفحات $z=0$ و $z=b$ حاصل می‌شود، جزء سطح S **نیستند**. اما می‌توانیم این درپوش‌ها را قرار دهیم و تساوی زیر را بنویسیم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv-\iint_{z=b}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=I_1-I_2-I_3$$



ابتدا انتگرال اول را به دست می‌آوریم و بعد از آن انتگرال‌های دوم و سوم را حساب می‌کنیم و مقدار آن‌ها را از انتگرال اول کم می‌کنیم. فرض کنیم D تصویر ناحیه‌ی V بر صفحه‌ی xoy باشد.

$$I_1=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_V(1+0+e^z)\,dv=\iint_D dxdy\int_0^b(1+e^z)dz=\iint_D dxdy[z+e^z]_0^b=\iint_D(b+e^b-1)\,dxdy$$

$$I_1=(b+e^b-1)\iint_D dxdy=(b+e^b-1)\times(\text{مساحت ناحیه } D)$$

ناحیه‌ی D درون دایره $(x-a)^2+y^2=a^2$ است و لذا مساحت آن $\pi\times a^2=\pi a^2$ می‌باشد.

بنابراین $I_1=(b+e^b-1)\pi a^2=b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2$، حالا سراغ محاسبه‌ی انتگرال دوم، یعنی محاسبه‌ی شار روی سطح $z=b$ می‌رویم: واضح است بردار $\vec{n}$ برابر با $+\vec{k}$ است (چون باید رو به خارج سطح بسته باشد)

$$\iint_{z=b}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{D_1}(\vec{F}.\vec{k})\,dA=\iint_{D_1}e^b dA=e^b\iint_{D_1}dA=e^b\times(\text{مساحت ناحیه } D_1)=e^b\times\pi a^2$$

و در نهایت سراغ حل انتگرال سوم می‌رویم: (توجه دارید که بردار $\vec{n}$ باید رو به خارج سطح بسته باشد، یعنی $\vec{n}=-\vec{k}$ است)

$$\iint_{z=0}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{D_2}\vec{F}.(-\vec{k})\,dA=\iint_{D_2}(-e^0)dA=-\iint_{D_2}dA=-(\text{مساحت ناحیه } D_2)=-\pi a^2$$

بنابراین حاصل انتگرال خواسته شده در صورت سؤال به صورت مقابل است: $I=I_1-I_2-I_3=b\pi a^2+e^b\pi a^2-\pi a^2-e^b\pi a^2+\pi a^2=\pi a^2 b$

مثال ۴۱: فرض کنید $\vec{F}=(x^2+y+z^2+2)\vec{i}+(e^{x^2}+y^2)\vec{j}+(3+x)\vec{k}$ و S بخشی از سطح کروی $x^2+y^2+z^2=3a^2+2az$ باشد به طوری که $a>0$ و ناحیه بالای صفحه xoy باشد. در این صورت شار رو به خارج $\vec{F}$ در سراسر سطح S کدام است؟

۱) $3\pi a^2$ ۲) $9\pi a^2$ ۳) $6\pi a^2$ ۴) $18\pi a^2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» معادله‌ی کره داده شده را می‌توان به‌صورت $x^2+y^2+(z-a)^2=4a^2$ نوشت. سطح S بخشی از این کره است که بالای صفحه‌ی $z=0$ قرار دارد. از برخورد کره و صفحه‌ی $z=0$ به دایره‌ی $x^2+y^2=3a^2$ می‌رسیم. پس سطح S، به همراه سطح درون دایره $x^2+y^2=3a^2$ روی صفحه $z=0$ که آن را S' می‌نامیم، یک سطح بسته را تشکیل می‌دهند، طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\underbrace{\iiint_V\operatorname{div}\vec{F}dv}_{I_1}-\underbrace{\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma}_{I_2}$$

ناحیه‌ی V ناحیه‌ی درون $S\cup S'$ است. با محاسبه‌ی $\operatorname{div}\vec{F}$ می‌بینیم که $\operatorname{div}\vec{F}=2x+2y$ است. با توجه به فرد بودن $2x$ و $2y$ و با استفاده از این نکته که جایگذاری $\pm x$ و $\pm y$ معادله مرزهای V را تغییر نمی‌دهد، خواهیم داشت: $I_1=\iiint_V(2x+2y)dv=0$

کافیست I_2 را حساب کنیم. بردار عمود بر سطح S' و رو به خارج، بردار $(-\vec{k})$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$\iint_S\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma$ را به‌دست می‌آوریم. $I=0-I_2=-\iint_{S'}\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma=\iint_{S'}(3+x)dxdy=\iint_{S'}3dxdy=3\,(\text{مساحت } S')=9\pi a^2$

و در نتیجه $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=9\pi a^2$ است.

مثال ۴۲: یک قلمرو مخروطی شکل به رأس $(0,0,b)$ دارای قاعده‌ای به شکل یک دیسک به شعاع a در صفحه‌ی xoy و محوری در امتداد محور z ها داریم. اگر سطح جانبی این مخروط را S بنامیم و قائم S رو به بالا باشد، آن‌گاه با فرض $\vec{F}=(x+y^2)\vec{i}+(3x^2y+y^3-x^3)\vec{j}+(z+1)\vec{k}$، مقدار $I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi a^2 b}{3}+\frac{3\pi a^4 b}{5}-\pi a^2$ ۲) $\frac{2\pi a^2 b}{3}+\frac{3\pi a^4 b}{10}-\pi a^2$ ۳) $\frac{\pi a^2 b}{3}+\frac{3\pi a^4 b}{10}$ ۴) $\frac{2\pi a^2 b}{3}+\frac{3\pi a^4 b}{10}+\pi a^2$