درسنامه: مفهوم حد و قضایای مربوط به آن

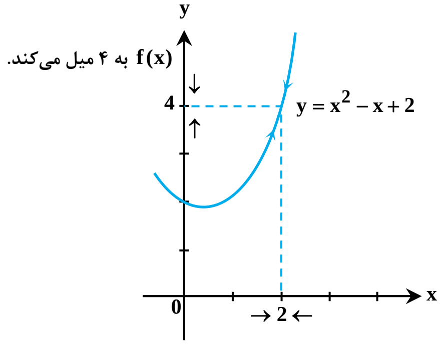
مفهوم حد

برای درک بهتر مفهوم حد، ابتدا نظر شما را به نمودار تابع $f(x)=x^2-x+2$ جلب می‌کنیم.

می‌خواهیم رفتار تابع را به ازای xهای نزدیک به ۲ بررسی کنیم. به جداول زیر که با کمک ماشین‌حساب به دست آمده‌اند، توجه کنید. در جدول سمت چپ، از $x=1$ آغاز کرده‌ایم و مقدار x را به ۲ نزدیک کرده‌ایم. هرچه ما x را به ۲ نزدیک‌تر می‌کنیم، $f(x)$ هم به ۴ نزدیک‌تر می‌شود. در جدول سمت راست همین کار را با شروع از $x=3$ انجام داده‌ایم. باز هم هرچه مقدار x به ۲ نزدیکتر شده، مقدار $f(x)$ هم به ۴ نزدیکتر شده است. از این جدول و نمودار تابع f معلوم می‌شود وقتی x به ۲ از هر طرف نزدیک می‌شود، مقدار تابع، یعنی $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر، می‌توانیم هر قدر که بخواهیم $f(x)$ را به ۴ نزدیک کنیم، البته به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به ۲ نزدیک کرده باشیم.

x	f(x)
۳	۸
۲/۵	۵/۷۵
۲/۲	۴/۶۴
۲/۱	۴/۳۱
۲/۰۵	۴/۱۵۲۵
۲/۰۱	۴/۰۳۰۱
۲/۰۰۵	۴/۰۱۵۰۲۵
۲/۰۰۱	۴/۰۰۳۰۰۱

x	f(x)
۱	۲
۱/۵	۲/۷۵
۱/۸	۳/۴۴
۱/۹	۳/۷۱
۱/۹۵	۳/۸۵۲۵
۱/۹۹	۳/۹۷۰۱
۱/۹۹۵	۳/۹۸۵۰۲۵
۱/۹۹۹	۳/۹۹۷۰۰۱



توضیحات بالا را می‌توان در جمله زیر خلاصه کرد:

«حد تابع $f(x)=x^2-x+2$ وقتی که x به ۲ میل می‌کند، برابر با ۴ است.»

البته در محاسبات نمی‌توانیم همیشه این جمله را به دنبال خودمان بکشیم! برای همین از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

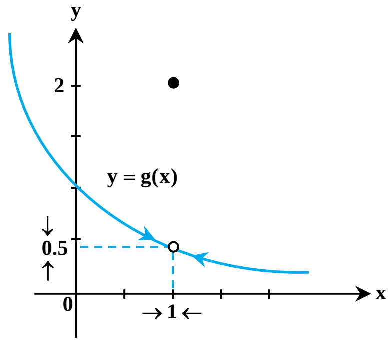
$$\lim_{x\to 2}(x^2-x+2)=4$$

در حالت کلی اگر وقتی x به سمت a میل می‌کند، حد تابع $f(x)$ برابر با L شود، نمادگذاری زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

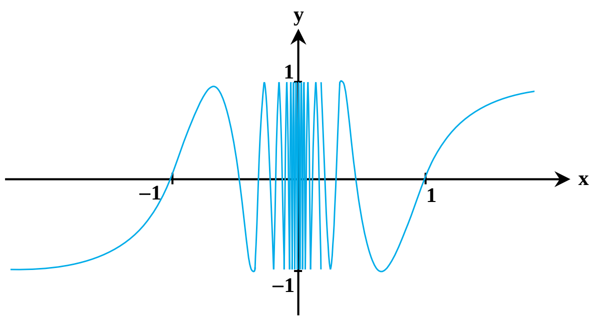
دقت کنید، در پیدا کردن حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند، هرگز حالتی را که $x=a$ است، در نظر نمی‌گیریم. در حقیقت حتی لازم نیست $f(x)$ در $x=a$ تعریف شده باشد، فقط مهم این است که در همسایگی محذوف a (یعنی در همسایگی a به جز خود a) تعریف شده باشد.

برای مثال با انتخاب اعداد مختلف حول $x=2$ و قرار دادن آن به جای x، می‌توان تحقیق کرد که مقدار $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حال آن‌که تابع $f(x)$ در $x=2$ تعریف نشده است. به عنوان یک مثال دیگر، فرض کنید تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1} & , x\neq 1\\ 2 & , x=1\end{cases}$ تعریف شده است که نمودار آن به شکل زیر است:



همان‌طور که در نمودار و ضابطه‌ی تابع می‌بینید، مقدار تابع در $x=1$ برابر با ۲ است (که به‌صورت نقطه توپر نشان داده شده است) و این در حالی است که حد تابع وقتی x به سمت ۱ میل می‌کند، برابر با $\frac{1}{2}$ است. در واقع این مثال به ما می‌گوید لزومی ندارد وقتی $\lim_{x\to a}f(x)=L$ است، مقدار $f(a)$ با L برابر باشد. البته بعداً خواهیم دید در گروهی از توابع، تساوی $f(a)=L$ همواره برقرار است، ولی همان‌طور که گفتیم لزوماً این‌طور نیست.

گاهی اوقات ممکن است با توابعی روبه‌رو شویم که اساساً حد تابع در نقطه‌ای مشخص وجود نداشته باشد. مثلاً تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، حد ندارد. چون وقتی x به صفر میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ همواره بین ۱− تا ۱+ تغییر می‌کنند و به هیچ عدد ثابتی میل نمی‌کنند. در شکل مقابل به قله‌ها توجه کنید، بی‌نهایت نقطه پیدا می‌کنید که در آن‌ها x به صفر میل می‌کند؛ ولی $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ است. حالا به پایین‌ترین نقاط نمودار دقت کنید. باز هم بی‌نهایت نقطه پیدا می‌کنید که در آن‌ها x به صفر میل می‌کند؛ اما این‌بار $\lim_{x\to 0}f(x)=-1$ است. یکی از نشانه‌های این که حدِ $f(x)$ در نقطه‌ای وجود ندارد آن است که جواب‌های مختلفی برای آن به‌دست می‌آید.



تعریف حدود چپ و راست

همان‌طور که در مفهوم حد گفتیم، در محاسبه‌ی حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a، متغیر x می‌تواند از سمت چپ و یا از سمت راست به a نزدیک شود. وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$، منظورمان آن است که حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می‌کند، برابر با L است و وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ یعنی حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می‌کند، برابر با L است. نمادگذاری $x\to a^-$ یعنی فقط x هایی را در نظر می‌گیریم که از a کوچکترند و نمادگذاری $x\to a^+$ یعنی فقط x هایی را در نظر می‌گیریم که از a بزرگترند. با توجه به توضیحات گفته شده می‌توان نتیجه زیر را گرفت:

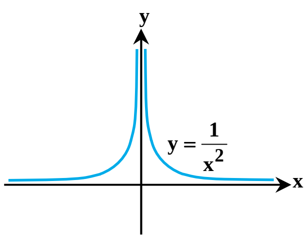
شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن است که $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ (یعنی شرط لازم و کافی برای وجود حد این است که حد چپ و حد راست، هر دو وجود داشته و با هم برابر باشند.) گاهی اوقات حد راست و حد چپ را به‌صورت $f(a^+)$ و $f(a^-)$ می‌نویسیم.

حدود نامتناهی

برای درک بهتر، با یک مثال بحث را شروع می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}$ را تعیین کنیم. وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، $x^{۲}$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود و $\frac{۱}{x^{۲}}$ خیلی بزرگ می‌شود. با ماشین‌حساب به ازای مقادیر مختلف x که نزدیک به صفر می‌شوند، مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ را حساب و نمودار تقریبی تابع را نیز رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌کنید با نزدیک کردن x (به اندازه‌ی کافی) به صفر، مقدارهای $f(x)$ بسیار بزرگ می‌شوند، بنابراین $f(x)$ به هیچ عدد مشخصی میل نمی‌کند و در واقع می‌گوییم حد وجود ندارد و آن را به‌صورت $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}=\infty$ می‌نویسیم. توجه کنید که این نمادگذاری به این معنی نیست که ∞ را عدد به حساب آورده‌ایم. همچنین به این معنی نیست که حد مورد نظر وجود دارد. این نمادگذاری فقط این را می‌گوید که $\frac{۱}{x^{۲}}$ را می‌توانیم هر قدر که بخواهیم بزرگ کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به صفر نزدیک کنیم.

x	$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$
±۱	۱
$\pm۰/۵$	۴
$\pm۰/۲$	۲۵
$\pm۰/۱$	۱۰۰
$\pm۰/۰۵$	۴۰۰
$\pm۰/۰۱$	۱۰۰۰۰
$\pm۰/۰۰۱$	۱۰۰۰۰۰۰



در حالت کلی برای این‌که نشان دهیم وقتی x به a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، مقدارهای $f(x)$ بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند از نمادگذاری $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ استفاده می‌کنیم. البته تعریف مشابهی هم وجود دارد و آن این است که در برخی توابع، وقتی x به a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی، کوچک‌تر می‌شوند و برای همین از نمادگذاری $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ استفاده می‌کنیم.

حد در بی‌نهایت

در قسمت قبل دیدید که گاهی اوقات وقتی x به عدد a میل می‌کند، مقدار $f(x)$ از هر عدد حقیقی، بزرگتر $(+\infty)$ یا از هر عدد حقیقی، کوچکتر $(-\infty)$ می‌شود. این بار می‌خواهیم x را به اندازه دلخواه بزرگ (مثبت) یا کوچک (منفی) کنیم و ببینیم بر سر $f(x)$ چه می‌آید!؟ مثلاً در تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x^{۳}+۱}$ وقتی x بسیار بزرگ شود، $f(x)$ نزدیک به ۱ می‌شود. این جمله را می‌توان به‌صورت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{۳}-۱}{x^{۳}+۱}=۱$ نمایش داد. به طور کلی اگر f تابعی باشد که روی بازه‌ای مانند (a,∞) تعریف شده است، در این صورت معنی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ این است که می‌توانیم مقدار $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه کافی بزرگ کرده باشیم.

تعریف مشابهی هم برای حد در $-\infty$ وجود دارد، فرض کنیم f تابعی باشد که روی بازه‌ای مانند $(-\infty,a)$ تعریف شده است. در این صورت معنی $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ این است که می‌توانیم مقدار $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x را به اندازه کافی کوچک و منفی کرده باشیم.

ویژگی جایگذاری مستقیم در ضابطه‌ی تابع

اگر تابع $f(x)$ از نوع چندجمله‌ای، کسر گویا، مثلثاتی، هیپربولیک، رادیکالی، لگاریتمی و نظایر این‌ها باشد و $f(a)$ تعریف شده باشد، آن‌وقت داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

یعنی برای پیدا کردن حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ از دامنه‌ی f، می‌توانیم در ضابطه‌ی f به جای x، مقدار a را قرار دهیم. به دو موضوع دقت کنید که a اولاً در دامنه $f(x)$ باشد و ثانیاً در همه توابع نمی‌توان مقدار تابع را با حد آن یکسان دانست، مثلاً توابعی مانند جزء صحیح یا توابع چندضابطه‌ای از جمله توابعی هستند که لزوماً مقدار تابع با حد تابع در یک نقطه‌ی مشخص، یکسان نیست. در توابع رادیکالی و لگاریتمی نیز با توجه به دامنه‌ی تابع ممکن است مقدار حد فقط از یک طرف موجود باشد.

قواعد و قضایای حد

در این قسمت، ابتدا به تعدادی از قواعد و اعمال جبری بر روی حدود اشاره می‌کنیم و سپس به یکی از قضایای مهم حد می‌پردازیم. دقت کنید که همه‌ی این قضایا به شرطی برقرار هستند که $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ هر دو موجود باشند:

۱ـ حد مجموع (تفاضل)، برابر با مجموع (تفاضل) حدهاست:
$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

۲ـ ضریب ثابت C می‌تواند از حد خارج شود:
$$\lim_{x\to a}(Cf(x)) = C\lim_{x\to a} f(x) = CL_1$$

۳ـ حد حاصل‌ضرب، برابر با حاصل‌ضرب حدهاست:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x) = L_1L_2$$

۴ـ حد نسبت، برابر با نسبتِ حدهاست (به شرطی که حد مخرج صفر نباشد):
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad , \quad (\text{باشرط } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

۵ـ $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ که n یک عددی طبیعی است.

۶ـ اگر حد $f(x)$ در $x=a$ موجود باشد، حد $|f(x)|$ نیز در این نقطه وجود دارد و خواهیم داشت: $\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$، اما عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً در تابع علامت $f(x)=\operatorname{sgn} x$ حد $|f(x)|$ در $x=0$ برابر با یک است، اما حد $f(x)$ وجود ندارد.

۷ـ $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ که n یک عدد طبیعی است و اگر n زوج باشد، باید مقدار $\lim_{x\to a} f(x)$ نامنفی باشد.

۸ـ اگر به ازای هر x نزدیک a، نامساوی $f(x)\le g(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه داریم:
$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ۱: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = ۱۳۹۶$، آن‌گاه حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا از قاعده ۴ (حد نسبت) و سپس از قاعده ۳ (حد حاصل‌ضرب) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = ۱۳۹۶ \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{(\lim_{x\to 0} x)(\lim_{x\to 0} x)} = ۱۳۹۶ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = ۱۳۹۶\times \lim_{x\to 0} x = ۱۳۹۶\times 0 = 0$$

مثال ۲: اگر $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = ۲$ و $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = ۱$، آن‌گاه مقدار $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴^۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا با کمک حدهای معلوم داده شده، حد هر کدام از توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = ۲ \\ \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کردن دو عبارت}} \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)+f(x)-g(x)] = ۲+۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} ۲f(x) = ۳ \Rightarrow ۲\lim_{x\to a} f(x) = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \frac{۳}{۲}$$

دوباره به دستگاه فوق دقت کنید؛ این بار طرفین را از یکدیگر کم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)-f(x)+g(x)] = ۲-۱ \Rightarrow \lim_{x\to a} ۲g(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \frac{۱}{۲}$$

حالا می‌توانیم حد حاصل‌ضرب دو تابع را حساب کنیم:
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x) = \frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

توضیح: در پاسخ به این مسأله نباید از همان ابتدا از تساوی‌های $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ استفاده کنیم. قاعده‌ی «حد مجموع» به شرطی برقرار است که مطمئن باشیم حد هر کدام از توابع $f(x)$ و $g(x)$ موجود است. پس استفاده از این تساوی‌ها از همان ابتدا، دارای ایراد علمی است. به همین علت ما به جای جدا کردن حدهای $f(x)$ و $g(x)$، طرفین معادلات را با هم جمع کردیم یا از هم کم کردیم.

تعریف 0^+ ، 0^- ، $+\infty$ ، $-\infty$، صفر حدی و صفر مطلق

علامت 0^+ نشان‌دهنده‌ی نزدیک شدن به صفر از سمت راست آن است. به مفهوم حرکت که در ذات این علامت نهفته است، توجه کنید. اگر بگویید 0^+ همان $0/01$ است ما می‌گوییم نه! زیرا از این مقدار به صفر نزدیک‌تر است. اگر بگویید 0^+ یعنی $0/001$ باز همان جواب قبلی را می‌دهیم. خلاصه آن که 0^+ را نمی‌توان با یک عدد ثابت مقایسه کرد؛ اما در عمل و برای سادگی بیشتر، گاهی اوقات ما 0^+ را یک عدد مثبت بسیار کوچک تصور می‌کنیم. البته این کار را با آگاهی از مفهوم واقعی 0^+ انجام می‌دهیم. به طور مشابه، وقتی از علامت 0^- استفاده می‌کنیم، منظورمان کمیتی است که از سمت چپ صفر در حال نزدیک شدن به آن است. در این مورد هم با وجود آگاهی از این که 0^- یک عدد نیست و کمیتی در حال تغییر است، فقط برای سادگی بیشتر آن را یک عدد منفی نزدیک به صفر مثلاً $-0/010$ تصور می‌کنیم. در مورد $+\infty$ و $-\infty$ می‌توانید این‌طور تصور کنید؛ وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت بسیار کوچک تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر بسیار بزرگ (مثبت) می‌شود. مثلاً $\frac{1}{10^{-100000}}$ برابر با 1×10^{100000} می‌شود که یک عدد مثبت بزرگ است. به همین ترتیب تصور کنید وقتی یک عدد مثبت بر یک عدد منفی، (بسیار نزدیک به صفر) تقسیم می‌شود، واضح است که حاصل کسر یک عدد منفی می‌شود که این حاصل منفی را با $-\infty$ نمایش می‌دهیم. مثلاً $\frac{1}{-10^{-100000}}$ برابر با -1×10^{100000} است که آن را با $-\infty$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که این‌گونه تصور نشود این اعداد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ هستند! چون ما برای درک بهتر، این اعداد را انتخاب کردیم تا کمی ملموس‌تر با این مفاهیم آشنا شوید! وگرنه $+\infty$ یا $-\infty$ اعداد مشخصی نیستند. حالا که با این چهار مفهوم آشنا شدید، به مفهوم «صفر حدی» و «صفر مطلق» می‌پردازیم.

ما در فصل حد بیشتر با **صفر حدی** سروکار داریم. اما گاهی اوقات با سؤالاتی روبه‌رو می‌شویم که در آن‌ها صفر، حدی نیست و **صفر مطلق** (صفر واقعی) است. مثلاً تقسیم یک عدد بر «صفر حدی» برابر با ∞ می‌شود و تقسیم آن عدد بر «صفر مطلق» تعریف نشده است. اما صفر مطلق معمولاً چه زمانی پدید می‌آید!؟ به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x}{[x-1]}=\frac{1}{[1^+-1]}=\frac{1}{[\text{عددی بسیار کوچک و البته مثبت}]}=\frac{1}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع، وقتی در محاسبات نهایی به جزء صحیح عددی کمی بزرگ‌تر از صفر می‌رسیم، قطعاً خروجی برابر با صفر مطلق (واقعی) می‌شود. اما به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{1^+-1}=\dfrac{1}{\text{عدد مثبت و بسیار کوچک}}\\[2ex] \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1^--1}=\dfrac{1}{\text{عدد منفی و بسیار نزدیک به صفر}}\end{cases}$$

در این‌جا صفر ما، حدی است و حاصل برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. در واقع در حالت حدی، صفر موجود در مخرج یا 0^- است یا 0^+ که اگر 0^- باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^-}=-\infty$ و اگر 0^+ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{0^+}=+\infty$ می‌شود. برای نمونه چند حالت مهم که ممکن است در سؤالات با آن‌ها روبه‌رو شویم، در زیر آورده شده است:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty\quad,\quad\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=\text{صفر مطلق}\quad,\quad\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\quad,\quad\frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}$$

در واقع همان‌طور که می‌بینید؛ هرجا صفر مطلق در مخرج داریم، حاصل تعریف نشده است و مهم نیست در صورت کسر چه عددی باشد (حتی اگر ∞ هم باشد باز هم حاصل تعریف نشده است). در شرایط $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\pm\infty$، علامت بی‌نهایت، بستگی به علامت صورت کسر و همچنین علامت صفر حدی مخرج کسر دارد:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty\qquad\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty\quad,\quad\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$$

توجه۱: گاهی اوقات 0^+ را با $+\varepsilon$ (اِپسیلُن) و 0^- را با $-\varepsilon$ نشان می‌دهیم. در اینجا «اِپسیلُن» به معنای یک عدد مثبت بسیار کوچک و در حال نزدیک شدن به صفر است.

توجه۲: برای درک بهتر مفاهیم حد باید دو نقطه‌ی فرضی $+\infty$ و $-\infty$ را به مجموعه $\mathbb{R}$ اضافه کنیم. این نقاط خواص زیر را دارند:

۱) $+\infty$ و $-\infty$ قرینه یکدیگر نیستند، یعنی $(+\infty)+(-\infty)$ لزوماً صفر نمی‌شود.

۲) به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{cases}a+(+\infty)=+\infty\quad,\quad a-(+\infty)=-\infty\quad,\quad\dfrac{a}{-\infty}=0\\[2ex] a+(-\infty)=-\infty\quad,\quad a-(-\infty)=+\infty\quad,\quad\dfrac{a}{+\infty}=0\\[2ex] +\infty+\infty=+\infty\ ,\ (+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty\ ,\ (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

۳ـ اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=-\infty$, $a\times(+\infty)=+\infty$

۴ـ اگر $a<0$ باشد، آن‌گاه: $a\times(-\infty)=+\infty$, $a\times(+\infty)=(-\infty)$

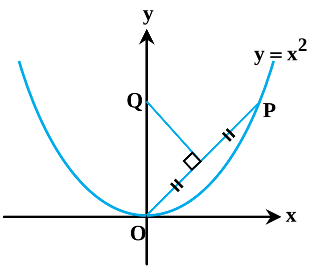
۵ـ اگر $a>1$ باشد، آن‌گاه $a^{+\infty}=+\infty$ و $a^{-\infty}=0$ و اگر $0<a<1$، آن‌گاه $a^{+\infty}=0$ و $a^{-\infty}=+\infty$

موقعیت حدی نقطه

فرض کنیم نقطه‌ی P محل برخورد دو منحنی باشد که یکی از آن‌ها یا هر دوی آن‌ها به یک ثابت مانند c وابسته هستند. در این صورت مختصات نقطه‌ی P به ثابت c وابسته می‌شود. حالا اگر c به سمت $c_\circ$ میل کند، می‌توانیم تشخیص دهیم که در نهایت نقطه‌ی P به چه نقطه‌ای میل خواهد کرد.

در این نوع از سؤالات، محاسبه‌ی حد وقتی $c \to c_\circ$ میل می‌کند باید در آخرین مرحله از جواب انجام شود. یعنی ابتدا مختصات P را به دست می‌آوریم و سپس حدِ آن را وقتی $c \to c_\circ$ محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲۴: **در شکل زیر، نقطه P را که روی سهمی $y=x^۲$ قرار دارد و نقطه Q که محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط OP و محور yها است را در نظر بگیرید. وقتی که P روی این سهمی به مبدأ میل می‌کند، موقعیت حدی نقطه‌ی Q به کدام صورت خواهد بود؟**



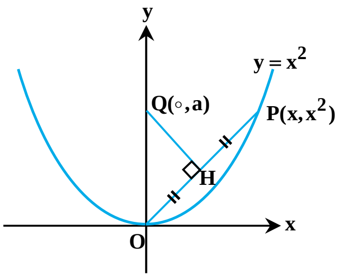
۱) $(\circ,\circ)$

۲) $(\circ,\frac{۱}{۳})$

۳) $(\circ,\frac{۱}{۴})$

۴) $(\circ,\frac{۱}{۲})$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق شکل زیر، فرض کنید نقطه H وسط پاره‌خط OP باشد. نقطه‌ی P روی منحنی $y=x^۲$ قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $P(x,x^۲)$ خواهد بود. نقطه‌ی O هم که مبدأ مختصات است و مختصات آن به صورت $O(\circ,\circ)$ خواهد بود. در نتیجه نقطه‌ی وسط OP دارای مختصاتی به صورت $H(\frac{\circ+x}{۲},\frac{\circ+x^۲}{۲})$ است. نقطه‌ی Q روی محور y قرار دارد. فرض کنید مختصات این نقطه به صورت $Q(\circ,a)$ باشد. حالا می‌خواهیم از عمود بودن خطوط OP و QH استفاده کنیم.



با توجه به مختصات این چهار نقطه می‌توانیم شیب هر کدام از خطوط را حساب کنیم:

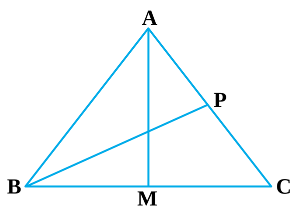
$$m_{OP}=\frac{x^۲-\circ}{x-\circ}=x \quad , \quad m_{QH}=\frac{a-\frac{x^۲}{۲}}{\circ-\frac{x}{۲}}=\frac{x^۲-۲a}{x}$$

به‌دلیل عمود بودن این خطوط، باید رابطه‌ی $m_{OP}=-\frac{۱}{m_{QH}}$ برقرار باشد، بنابراین داریم:

$$m_{OP}=-\frac{۱}{m_{QH}} \Rightarrow x=-\frac{x}{x^۲-۲a} \Rightarrow ۱=-\frac{۱}{x^۲-۲a} \Rightarrow x^۲-۲a=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}+\frac{x^۲}{۲}$$

حالا اگر نقطه‌ی $P(x,x^۲)$ به مبدأ مختصات میل کند، خواهیم داشت $x \to \circ$ و در نتیجه $a \to \frac{۱}{۲}$. پس نقطه‌ی Q به مختصات $(\circ,\frac{۱}{۲})$ میل می‌کند.

مثال ۲۵ (سخت): **در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(\hat{B}=\hat{C})$ و نیمساز زاویه B، ضلع AC را در نقطه P قطع کرده است. فرض کنید طول قاعده BC ثابت ℓ باقی بماند و طول ارتفاع AM در مثلث به صفر میل کند که در نتیجه A به وسط BC، یعنی نقطه M میل می‌کند. اگر مبدأ مختصات را در نقطه‌ی B فرض کنیم، نقطه‌ی P به نقطه‌ای با کدام طول میل خواهد کرد؟**



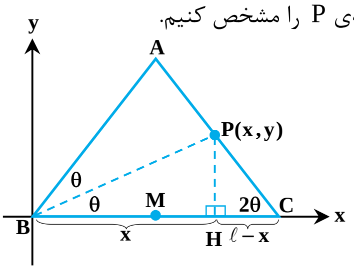
۱) $x=\frac{۲\ell}{۳}$

۲) $x=\frac{\ell}{۳}$

۳) $x=\frac{۳\ell}{۴}$

۴) $x=\frac{\sqrt{۳}\ell}{۴}$

پاسخ: گزینه «۱» مطابق شکل، نقطه‌ی B را در مبدأ مختصات قرار می‌دهیم. فرض کنید مختصات P به صورت (x,y) باشد. طبق فرض، BP نیمساز زاویه‌ی B است. برای آن‌که از این فرض استفاده کنیم، هرکدام از زاویه‌های به‌وجود آمده در رأس B را با θ نشان می‌دهیم. از آن‌جا که ABC متساوی‌الساقین است، زاویه‌ی C با زاویه‌ی B برابر است، پس $\hat{C}=۲\theta$ است. حالا می‌خواهیم رابطه‌ی بین زاویه‌ی θ و مختصات نقطه‌ی P را مشخص کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BHP داریم:

$$\text{tg}\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{y}{x}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی CHP داریم:

$$\text{tg}۲\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{y}{\ell-x}$$

درسنامه۲: صورت‌های مبهم

حدودی که در درسنامه‌ی (۱) بررسی کردیم، هیچکدام مبهم نبودند. در واقع در آن حدود می‌توانستیم پس از جایگذاری بگوییم حاصل حد چقدر می‌شود. (در موارد اندکی هم حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شد که بالاخره باز هم حداقل می‌توانستیم بگوییم حاصل حد بی‌نهایت می‌شود!)
در این درسنامه با حدودی روبه‌رو می‌شویم که تعیین حاصل دقیق آن‌ها پس از جایگذاری مستقیم امکان ندارد. در واقع نمی‌توانیم بلافاصله پس از جایگذاری بگوییم حاصل حد برابر با چه عددی است. حتی نمی‌توانیم بگوییم حاصلشان $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$, ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$, ۳) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=0$

در هر سه مثال فوق، پس از جایگذاری $x=0$، به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. اما همان‌طور که می‌بینید حاصل این حدود با هم فرق می‌کند. این‌که چطور حاصل این حدود محاسبه شده، فعلاً مهم نیست! بحث ما فهمیدن این موضوع است که چرا می‌گوییم حاصل حد مبهم است. در واقع ما نمی‌دانیم وقتی «صفر حدی» بر «صفر حدی» تقسیم می‌شود، حاصل چه می‌شود. البته حالت $\frac{0}{0}$ تنها حالت مبهم در حدود نیست. به طور کلی هفت حالت مختلف داریم که به آن‌ها «صور مبهم» گفته می‌شود که به‌صورت مقابل است: 1^{∞}، ∞^{0}، 0^{0}، $0\times\infty$، $\infty-\infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\frac{0}{0}$.

از بین حالات فوق، دو حالت $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ از بقیه مهم‌ترند، بنابراین آن‌ها را به طور ویژه بررسی کرده‌ایم. اکنون به بررسی جداگانه هر یک از این حالات هفت‌گانه می‌پردازیم.

حالت مبهم $\frac{0}{0}$

این حالت یکی از پرتکرارترین صور مبهم می‌باشد که در حدود با آن‌ها برخورد می‌کنیم. در حالت کلی اگر حدی به شکل $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که وقتی $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to 0$ و $g(x)\to 0$ در این صورت با حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم. در این حالت، $f(x)$ و $g(x)$ مسابقه‌ای برای میل کردن به صفر ترتیب داده‌اند. اگر $f(x)$ برنده‌ی این مسابقه شود، صورت کسر سریع‌تر به صفر می‌رسد و مقدار حد صفر می‌شود. اگر $g(x)$ برنده باشد، مخرج سریع‌تر به صفر می‌رسد و مقدار حد بی‌نهایت است. اما بیشتر وقت‌ها صورت و مخرج با هم به توافق می‌رسند و با یک آهنگ نزدیک به هم کوچک می‌شوند که در این صورت مقدار حد، عددی حقیقی و غیر صفر می‌شود.
برای رفع ابهام این حالت، روش‌های مختلفی وجود دارد که به آن‌ها اشاره می‌کنیم:
۱) حذف عامل مزاحم: یکی از روش‌هایی که کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، حذف عامل مبهم‌کننده (مثلاً حذف عامل صفرشونده) با استفاده از تجزیه و اتحادهای جبری است. به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{9}$$

همان‌طور که دیدید، برای حذف عامل مزاحم که $(\sqrt[3]{x}-1)$ بود، دو بار از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده کردیم.
۲) استفاده از قاعده هوپیتال: همیشه شناسایی عامل مزاحم کار راحتی نیست و یا حداقل پس از شناسایی به راحتی نمی‌توان آن را حذف کرد. در این قسمت به یکی از پرکاربردترین روش‌ها در محاسبه‌ی حد توابع $\frac{0}{0}$ اشاره می‌کنیم که نیاز به دانستن قوانین مشتق‌گیری دارد، اگر مشتق از دبیرستان یادتان نیست می‌توانید هر جا لازم شد از فصل (۴) همین کتاب کمک بگیرید.

قاعده هوپیتال: فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ در همسایگی محذوف a مشتق‌پذیر باشند و $g'(x)\neq 0$ و همچنین $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ باشد.
به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ حالت ابهام $\frac{0}{0}$ داشته باشیم، در این صورت تساوی زیر را داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تساوی بالا به این شرط برقرار است که حد سمت راست وجود داشته باشد (یا حداقل $+\infty$ یا $-\infty$ باشد).

توجه ۱: قاعده هوپیتال یعنی این‌که حد نسبت تابع‌ها برابر با حدِ نسبت مشتق‌هایشان است (البته با توجه به تمام شرایط این قاعده که در بالا گفته شد).
گاهی دانشجویان فکر می‌کنند باید مشتق کسر $\frac{f}{g}$ را حساب کرده و از آن حد بگیرند!! که اشتباه است.

توجه ۲: قاعده هوپیتال همچنین در مورد حدود یک‌طرفه (حد چپ یا حد راست) نیز برقرار است؛ یعنی « $x\to a$ » را می‌توان با نمادهای $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ جایگزین کرد، در ضمن a می‌تواند $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد.

توجه ۳: اگر بعد از استفاده از قاعده هوپیتال دوباره با حالت $\frac{0}{0}$ مواجه شدیم، با برقراری شروط این قاعده برای $f'(x)$ و $g'(x)$، می‌توانیم دوباره از قضیه استفاده کنیم. در واقع با برقراری شرایط قضیه هوپیتال می‌توان به طور متوالی و چندین مرتبه از قاعده هوپیتال کمک گرفت؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

دوباره تأکید می‌کنیم که در هر مرحله باید شرایط قضیه برقرار باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تعریف دو تابع هم‌ارز، باید $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{mx^n}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{mx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{mx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{mx^{n-1}}=1\Rightarrow m=2\ ,\ n=1$$

نکته۱: وقتی $x\to 0$، هر عبارتی که مجموع یا تفاضلی از توان‌های مختلف x باشد، هم‌ارز جمله‌ی با کوچکترین توان می‌باشد.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4+\sqrt{x}+x^2}{x^3+2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\quad ,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{2x}}}{\sqrt[4]{2x}}\simeq\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{2x}}}{\sqrt[4]{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2x}}=1$$

حد توابع مثلثاتی و استفاده از هم‌ارزی در محاسبه حدود

در توابع مثلثاتی عموماً وقتی $x\to 0$، از هم ارزی استفاده می‌کنیم. برای این منظور با بسط‌های مک‌لورن توابع معروف آشنا می‌شویم:

۱) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\dots\ (-\infty<x<\infty)$

۲) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\dots\ (-\infty<x<\infty)$

۳) $\sinh x = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\dots$

۴) $\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\dots$

۵) $\mathrm{tg}x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\dots\dots\ (|x|<\frac{\pi}{2})$

۶) $\mathrm{tgh}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots\ (|x|<\frac{\pi}{2})$

۷) $(1+x)^n = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots(|x|<1)$

۸) $\mathrm{Ln}(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots\ ,\ (-1<x\le 1)$

۹) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\dots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\ ,\ (-\infty<x<\infty)$

۱۰) $\mathrm{Arcsinh}\,x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots\ ,\ (-1<x<1)$

۱۱) $\mathrm{Arcsin}x = x+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{3x^5}{2\times 4\times 5}+\frac{1\times 3\times 5x^7}{2\times 4\times 6\times 7}+\cdots(-1\le x\le 1)$

۱۲) $\mathrm{Arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\dots\ (-1\le x\le 1)$

۱۳) $\mathrm{Arctgh}x = x+\frac{x^3}{3}+\cdots\ ,\ (-1<x<1)$

هم‌ارزی برنولی: در هم‌ارزی مقابل اگر n عددی طبیعی باشد، شرط $|x|<1$ ضروری نیست و برای تمام x ها برقرار است.

تذکر۱: در استفاده از هم‌ارزی‌های گفته شده، با توجه به **نیاز مسأله** می‌توان جمله اول یا دو جمله اول، یا سه جمله اول و یا چند جمله اول را به عنوان هم‌ارز تابع اصلی در نظر گرفت. **نیاز مسأله** با تذکر زیر توضیح داده می‌شود:

تذکر۲: هرگاه بلافاصله بعد از استفاده از هم‌ارزی، جمع جبری برابر صفر شود و یا وقتی به جای عبارتی، هم‌ارز آن را قرار دادیم و کل جملات که به جای عبارت هم‌ارز قرار داده‌ایم، حذف شود، آن‌گاه استفاده از آن هم‌ارزی صحیح نمی‌باشد و باید از جمله‌های بعدی بسط نیز استفاده کنیم (مگر آن‌که استفاده از جملات بعدی، تأثیری روی جواب نداشته باشد).

مثال ۷: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{120}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) حد موجود نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» توجه شود که اگر در این مثال به جای sinx جمله اول بسط، یعنی x را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{1}{6x^2}=+\infty$$

چون عبارتی که به جای sinx قرار داده‌ایم (یعنی x) حذف می‌شود، لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. اگر از جمله‌های اول و دوم استفاده کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{0}{0}$$

مانند حالت قبل چون هر دو جمله بسط حذف می‌شود لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح نیست. با قرار دادن جمله‌های اول تا سوم بسط داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!}}{x^5}=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$$

توجه شود که در این حالت جمله $\frac{x^5}{5!}$ حذف نشد، لذا استفاده از هم‌ارزی صحیح می‌باشد.

نکته ۲: وقتی از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم، باید هم‌ارز تمام جملات را قرار دهیم، مثلاً اگر در سؤالی، عبارت‌های $\cos x$ و $\sin x$ داریم، وقتی به جای $\sin x$ هم‌ارز آن را قرار می‌دهیم، باید به جای $\cos x$ نیز هم‌ارز آن را قرار دهیم. همچنین ذکر این نکته لازم است که وقتی هم‌ارز یک تابع را مثلاً تا جمله‌ی x^5 می‌نویسیم، در هم‌ارز سایر توابع نیز نوشتن جملات x، x^2، ...، x^5 ضروری است و نوشتن جملات با درجه‌ی بالاتر هم ایرادی ندارد اما لازم نیست.

مثلاً فرض کنید برای $\sin x$ از هم‌ارزیِ $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ استفاده کرده‌ایم. اگر e^x و $\cos x$ هم در این حد حضور داشته باشند، هم‌ارز آن‌ها را به این صورت می‌نویسیم: $e^x \simeq 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$، جمله‌ی بعدی $\frac{x^6}{6!}$ است. که نوشتن آن لازم نیست، چون درجه آن از ۵ بیشتر است. در مورد $\cos x$ داریم $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$، جمله‌ی بعدی $-\frac{x^6}{6!}$ است که نوشتن آن لازم نیست (هر چند نوشتن آن تأثیری بر جواب ندارد و اشکالی هم ایجاد نمی‌کند).

مثال ۸: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sin x - 2xe^x + 2x + x^3}{2\cos x - 2 + x^2}$ را حساب کنید.

پاسخ: در مخرج کسر، نوشتن هم‌ارزی $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!}$ کافی نیست، زیرا این دو جمله با جملات دیگری که در مخرج هستند، حذف می‌شوند:

$2\cos x - 2 + x^2 \simeq 2(1 - \frac{x^2}{2}) - 2 + x^2 = 0$. پس متوجه می‌شویم که هم‌ارز $\cos x$ را باید تا جمله‌ی x^4 ادامه دهیم. به همین دلیل وقتی در صورت کسر، هم‌ارز $\sin x$ و e^x را می‌نویسیم، نوشتن x، x^2، x^3 و x^4 ضروری است و نوشتن توان‌های بالاتر اشکالی ندارد، اما لازم نیست. یعنی باید بنویسیم $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!}$، جمله‌ی بعدی $\frac{x^5}{5!}$ است و نوشتن آن لازم نیست، چون درجه‌اش بیشتر از ۴ شده است. همچنین به جای e^x، باید بنویسیم؛ $e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$، جمله‌ی بعدی $\frac{x^5}{5!}$ است که نوشتن آن لازم نیست:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(x - \frac{x^3}{3!}) - 2x(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) + 2x + x^3}{2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) - 2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{12}x^5}{\frac{1}{12}x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(-\frac{2}{3} - \frac{x}{12})}{\frac{1}{12}x^4} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}} = -8$$

مثال ۹: مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - x - 2}{x - \sin x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\pm\infty$

پاسخ: گزینه «۲»

روش اول (نادرست): در مخرج کسر، هم‌ارزی $\sin x \simeq x$ ایجاد اشکال می‌کند؛ زیرا $x - \sin x \simeq x - x = 0$ می‌شود. پس باید هم‌ارزی $\sin x$ را حداقل تا دو جمله بنویسیم: $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!}$. حالا در صورت، (بدون توجه به این‌که هم‌ارزی $\sin x$ را تا x^3 نوشتیم) از هم‌ارزی‌های $e^x \simeq 1 + x$ و $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x) + (1 - \frac{x^2}{2!}) - x - 2}{x - (x - \frac{x^3}{3!})} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-3}{x} = \pm\infty$$

با این بی‌دقتی به پاسخ غلط رسیده‌ایم.

روش دوم (پاسخ صحیح): همان‌طور که دیدیم، در مخرج کسر، هم‌ارزی $\sin x$ را باید تا جمله‌ی $\frac{x^3}{3!}$ ادامه دهیم. بنابراین وقتی در صورت کسر هم‌ارزی e^x و $\cos x$ را می‌نویسیم، نوشتن x، x^2، x^3 ضروری است و نوشتن درجات بالاتر لازم نیست. در هم‌ارزی $\cos x$، نوشتن $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!}$ کافی است. جمله‌ی بعدی $\frac{x^4}{4!}$ است که نوشتن آن ضرورت ندارد. در مورد e^x از هم‌ارزی $e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}) + (1 - \frac{x^2}{2!}) - x - 2}{x - (x - \frac{x^3}{3!})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 1$$

توجه: اگر برای اطمینان بیشتر، هم‌ارزی‌ها را با تعداد جملات بیشتری بنویسید، اشکالی ندارد. به راه‌حل زیر دقت کنید:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) + (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) - x - 2}{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{24}x^4}{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3(1 + \frac{2}{4}x)}{\frac{1}{6}x^3(1 - \frac{1}{20}x^2)} = 1$$

تذکر۳: اگر حد داده شده به‌صورت نسبت دو عبارت، یعنی عبارتی کسری باشد و در مخرج کسر x^n یا عبارتی هم‌ارز x^n داشته باشیم. باید بسط صورت کسر را تا جمله‌ای که شامل x^n باشد، بنویسیم. دقت کنید که در این حالت حتی اگر جمع جبری عبارات پس از نوشتن هم‌ارزی (در صورت کسر) صفر شد، آن هم‌ارزی، صحیح است. در واقع چون مخرج درجه‌ی n است و $x \to 0$، جملات با درجه‌ی بیشتر از n تأثیری بر جواب ندارند و نوشتن آن‌ها لازم نیست.

مثال۱۰: مقدار $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot g^2 x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$A=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

روش نادرست: در مخرج کسر از هم‌ارزی $\sin x \simeq x$ استفاده می‌کنیم. در صورت کسر از هم‌ارزی $\sin x \simeq x$ و $\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2}$ استفاده می‌کنیم و با این بی‌دقتی به جواب مقابل می‌رسیم:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2(1-\frac{x^2}{2})^2}{x^2.x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2(1-x^2+\frac{x^4}{4})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4-\frac{1}{4}x^6}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4(1-\frac{1}{4}x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{4}x^2)=1$$

علت نادرست بودن این جواب آن است که وقتی در مخرج x^4 به‌وجود می‌آید، در صورت کسر باید هم‌ارزی‌ها را تا جایی که جمله‌ی x^4 ایجاد شود، ادامه بدهیم.

روش صحیح: اگر به جای $\cot gx$ از $\frac{\cos x}{\sin x}$ استفاده کنیم، همان‌طور که در روش اول دیدید، مجبور می‌شویم هم‌ارزی را برای چند تابع بنویسیم که نیاز به دقت زیادی دارد. بهتر است به جای $\cot gx$ از $\frac{1}{tgx}$ استفاده کنیم تا فقط با یک تابع سروکار داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{tg^2 x})=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x-x^2}{x^2 tg^2 x}$$

در مخرج کسر استفاده از هم‌ارزی $tgx \simeq x$ کافی است. در مخرج، نوشتن سایر جملات هم‌ارزی، کاری بیهوده است؛ زیرا به هر حال کوچکترین درجه مهم است. پس در مخرج کسر هم‌ارزی به صورت $x^2 tg^2 x \simeq x^2 x^2 = x^4$ است. حالا که در مخرج، x^4 به‌وجود آمد، در هم‌ارزی tgx نوشتن x و x^3 ضروری است، اما نوشتن x^5 ضرورتی ندارد (اشکال هم ندارد). پس داریم $tgx \simeq x+\frac{x^3}{3}$.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3})^2-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}}{x^4}\xrightarrow{\text{قانون کمترین درجه یا فاکتورگیری}}A=\frac{2}{3}$$

توجه: باز هم تأکید می‌کنیم که در مخرج کسر، نوشتن هم‌ارزی با جملات بیشتر، تأثیری ندارد، زیرا طبقِ هم‌ارزیِ کمترین درجه داریم: $x^2(x+\frac{x^3}{3})^2 \simeq x^2.(x)^2=x^4$

مثال۱۱: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» در مخرج کسر، استفاده از هم‌ارزی $\sin x \simeq x$ کافی به نظر می‌رسد؛ چون در این صورت $x\sin x \simeq x.x=x^2$ در مخرج باقی می‌ماند. پس در هم‌ارزی‌های صورت کسر، نوشتن جملات x و x^2 ضروری است و نوشتن درجات بالاتر از ۲ دلخواه است، یعنی اشکالی ندارد اما لازم نیست. البته در هم‌ارزی $\sin x$ جمله‌ی x^2 وجود ندارد. در نتیجه برای e^x از $1+x+\frac{x^2}{2!}$ و برای $\sin x$ از همان x استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x\sin x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}-1-x}{x(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

تمرین: مثال فوق را با استفاده از قاعده هوپیتال حل کرده و جواب‌ها را مقایسه کنید.

توضیح: توجه شود که در بعضی سؤالات استفاده از قاعده هوپیتال راحت‌تر از حل به روش هم‌ارزی می‌باشد و در بعضی از سؤالات مانند مثال زیر استفاده از قاعده هوپیتال خیلی جالب نیست!

مثال۱۲: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{tgx^2-Ln(1+x^2)-\frac{x^4}{2}}{x^6}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» مخرج کسر x^6 است لذا در صورت کسر وقتی هم‌ارزی‌های $Ln(1+x^2)$ و tgx^2 را می‌نویسیم، نوشتن x، x^2، ...، x^6 ضروری است. نوشتن جملات با درجه‌ی بالاتر ایرادی ندارد اما لازم نیست.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx^2-Ln(1+x^2)-\frac{x^4}{2}}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^6}{3}-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^4}{2}}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^6}=0$$

توجه مهم: در سؤالاتی مانند سؤال قبل (توابع کسری)، چون مقدار بسط را تا جملهی هم‌درجه مخرج بسط داده‌ایم، لذا حتی با وجود این‌که بعد از استفاده از هم‌ارزی، جمع جبری صفر شد، حاصل حد همان صفر در نظر گرفته می‌شود. در واقع چون مخرج از درجه‌ی ۶ است، نوشتن جملات با درجه‌ی بیشتر از ۶ در صورت کسر، تأثیری بر جواب حد نخواهد داشت. ملاحظه می‌گردد که محاسبه حد فوق حتی با استفاده از هوپیتال کار سختی است (باور نمی‌کنید، امتحان کنید!) به هر حال نصیحت برادرانه این که در استفاده از بسطها اگر شک دارید، چند تا جمله اضافه‌تر هم وارد کرده بعد محاسبه کنید تا خیالتان راحت باشد!

مثال ۱۳: حاصل حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 0}(\frac{x\sin x\sin^{-1}x-x^2}{x^6})$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{tghx-2\sin x+x}{x^5}$ ج) $\lim_{x\to 0}(\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6})$ د) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cosh(x\sqrt{2})}{x^4}$

پاسخ: حدود داده شده در این سؤال شما را بسیار با روند نوشتن جملات مورد نیاز در کسرها آشنا خواهد کرد:

الف) می‌خواهیم از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم. در مخرج x^6 داریم. بنابراین در صورت کسر نوشتن جملات x، x^2، ...، x^6 از هم‌ارزی‌ها الزامی است. نوشتن جملات با درجه‌ی بیشتر هم ایرادی ندارد ولی لازم نیست.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!})(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40})-x^2}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(\frac{1}{6}-\frac{1}{3!})x^4+(\frac{3}{40}-\frac{1}{6\times 3!}+\frac{1}{5!})x^6+(-\frac{3}{3!\times 40}+\frac{1}{6\times 5!})x^8+\frac{3}{5!\times 40}x^{10}-x^2}{x^6}$$

در صورت کسر جملات x^2 و x^4 حذف می‌شوند و جملات x^6 و x^8 و x^{10} باقی می‌مانند. حالا از قانون کمترین درجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{3}{40}-\frac{1}{36}+\frac{1}{5!})x^6}{x^6}=\frac{3}{40}-\frac{1}{36}+\frac{1}{120}=\frac{1}{18}$$

ب) می‌خواهیم از هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم. در مخرج، x^5 حضور دارد، بنابراین در صورت کسر نوشتن جملات تا درجه‌ی پنج (یعنی x^5) الزامی است. نوشتن جملات با درجه‌ی بیشتر هم ایرادی ندارد، ولی لازم نیست:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tghx-2\sin x+x}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-2(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+x}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2+1)x+(\frac{2}{6}-\frac{1}{3})x^3+(\frac{2}{15}-\frac{2}{120})x^5}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{2}{15}-\frac{2}{120})x^5}{x^5}=\frac{2}{15}-\frac{1}{60}=\frac{7}{60}$$

ج) اگر بخواهیم مسأله را به همین صورت حل کنیم، با توجه به آن‌که در مخرج x^6 آمده است، مجبوریم هم‌ارزی $\sin(\sin x)$ را حداقل تا رسیدن به جمله‌ی x^5 ادامه بدهیم. اما این‌کار به محاسبات زیادی نیاز دارد. برای استفاده ساده‌تر از هم‌ارزی‌ها، تغییر متغیر $t=\sin x$ را انجام می‌دهیم. در این صورت $x=\sin^{-1}t$ است و وقتی $x\to 0$، داریم $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^{-1}t\sin t-t^2}{(\sin^{-1}t)^6}$$

در مخرج این کسر، جمله‌ی $(\sin^{-1}t)^6$ به تنهایی آمده است، پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin^{-1}t\simeq t$ استفاده کنیم و در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^{-1}t\sin t-t^2}{t^6}$$

این همان حدی است که در قسمت (الف) داشتیم. بنابراین (ج) و (الف) در واقع یکی هستند و جواب حد برابر با $\frac{1}{18}$ است.

د) در مخرج x^4 داریم، پس در صورت کسر، هم‌ارزی‌ها را با نوشتن جملات تا حداقل درجه‌ی چهار (یعنی x^4) ادامه می‌دهیم. نوشتن جملات با درجه‌ی بیشتر هم ایرادی ندارد اما لازم نیست.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cosh(x\sqrt{2})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x(x-\frac{x^3}{3!})}-(1+\frac{2x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2-\frac{x^4}{3!}}-1-x^2-\frac{1}{6}x^4}{x^4}$$

حالا هم‌ارزیِ $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}$ را استفاده می‌کنیم. ادامه‌ی این هم‌ارزی لازم نیست؛ زیرا در ادامه‌ی آن فقط جملات با درجه‌ی بیشتر از x^4 تولید می‌شوند. مثلاً $u^3=(x^2-\frac{x^4}{3!})^3$ و کمترین درجه‌ی x در آن x^6 است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x^2-\frac{x^4}{3!})+\frac{1}{2!}(x^2-\frac{x^4}{3!})^2-1-x^2-\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-1)+(1-1)x^2+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{6})x^4-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{72}x^8}{x^4}$$

کمترین درجه‌ای که در صورت باقی می‌ماند x^4 است. بنابراین داریم:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{6})x^4}{x^4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

مثال ۱۴: حاصل $\lim_{x\to 0} x^{-2}(e^{ax}-e^{x}-x)$، برابر عدد متناهی L است. مقدار L کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی $e^{u}\simeq ۱+u+\frac{u^{۲}}{۲}$ به تست پاسخ می‌دهیم:

$$L=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+ax+\frac{a^{۲}x^{۲}}{۲})-(۱+x+\frac{x^{۲}}{۲})-x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(a-۲)x+(\frac{a^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲})x^{۲}}{x^{۲}}$$

دقت کنید که چون مخرج $x^{۲}$ است، هم‌ارزی‌ها را تا جمله‌ی $x^{۲}$ ادامه داده‌ایم و نوشتن سایر جملات تأثیری روی جواب حد ندارد. برای این که حاصل حد فوق برابر عددی متناهی شود، باید ضریب x در صورت برابر صفر شود، بنابراین داریم:

$$a-۲=۰\Rightarrow a=۲$$

بنابراین حد به‌صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$L=\lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{a^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲})x^{۲}}{x^{۲}}=\frac{a^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\xrightarrow{a=۲}L=\frac{۲^{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۱۵: حاصل $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{Ln(\cosh x)+Ln(\cos x)}{\cos(\sin x)-\cos x}\right)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» در مخرج کسر از هم‌ارزی‌های سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\sin x)-\cos(x)\simeq\cos(x-\frac{x^{۳}}{۶})-\cos(x)\simeq ۱-\frac{۱}{۲}(x-\frac{x^{۳}}{۶})^{۲}+\frac{۱}{۴!}(x-\frac{x^{۳}}{۶})^{۴}+\cdots-۱+\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۴}}{۴!}+\frac{۱}{۶!}x^{۶}+\cdots=\frac{۱}{۶}x^{۴}+\cdots$$

به این ترتیب کوچک‌ترین درجه‌ای که در مخرج باقی می‌ماند، جمله با درجه ۴ است. بنابراین در صورت کسر هم بسط مک‌لورنِ $\cos x$ و $\cosh x$ را تا جایی که به $x^{۴}$ برسیم ادامه می‌دهیم. نوشتن درجات بالاتر ایرادی ندارد اما بی‌تأثیر است.

$$\text{صورت کسر}\simeq Ln(۱+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!})+Ln(۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!})\simeq(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴})-\frac{۱}{۲}(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴})^{۲}+(-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴})-\frac{۱}{۲}(-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲۴})^{۲}=-\frac{۱}{۶}x^{۴}+\cdots$$

دقت کنید چون $x\to ۰$ فقط ضریب کوچک‌ترین درجه برای ما اهمیت دارد. به همین دلیل از محاسبه ضریب $x^{۶}$ و $x^{۸}$ و ... صرف‌نظر کرده‌ایم. پس مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{۶}x^{۴}}{\frac{۱}{۶}x^{۴}}=-۱$$

مثال ۱۶: اگر $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{a\cot gx}{x}+\frac{b}{x^{۲}}\right)=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه MIT)

۱) ۰ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. در محاسبه‌ی حد، هرگاه مجموع یا تفاضل دو کسر را داشته باشیم، بهتر است مخرج مشترک گرفته و آن‌ها را به یک کسر تبدیل کنیم. با انجام این‌کار، استفاده‌ی صحیح از هم‌ارزی‌ها ممکن می‌شود.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{ax\cot gx+b}{x^{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

ترجیح می‌دهیم که به جای $\cot gx$ از $\frac{۱}{tgx}$ استفاده کنیم. زیرا در این صورت می‌توانیم از هم‌ارزی tgx استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{ax}{tgx}+b}{x^{۲}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{ax+btgx}{x^{۲}tgx}=\frac{۱}{۳}$$

حالا هم‌ارزی tgx را به‌کار می‌گیریم. در مخرج کسر استفاده از هم‌ارزی $tgx\simeq x$ کافی است. با انجام این‌کار، در مخرج $x^{۳}$ به‌وجود می‌آید و این نشان می‌دهد که در صورت کسر باید هم‌ارزی را تا جمله‌ی $x^{۳}$ ادامه بدهیم (نوشتن جملات بیشتر ایرادی ندارد، ولی لازم نیست). برای رعایت قانون، در مخرج هم این هم‌ارزی را به صورت کامل‌تر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{ax+b(x+\frac{x^{۳}}{۳})}{x^{۲}(x+\frac{x^{۳}}{۳})}=\lim_{x\to ۰}\frac{(a+b)x+\frac{b}{۳}x^{۳}}{x^{۳}+\frac{۱}{۳}x^{۵}}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{ساده کردن }x}\lim_{x\to ۰}\frac{a+b+\frac{b}{۳}x^{۲}}{x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۴}}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۳۳: حاصل $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ را تعیین کنید.

پاسخ: با حالت $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم. اما توجه کنید که به ازای تمام x ها، نامساوی $\frac{\sin x}{x}<1$ را داریم، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\left[1^-\right]=0\\ \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\left[1^-\right]=0\end{cases}\Rightarrow$$ حد موجود و برابر با صفر است.

حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

در حالت کلی اگر حدی به شکل $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم که وقتی $x\to a$، آن‌گاه $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\infty$. در این صورت با حالت $\frac{\infty}{\infty}$ روبه‌رو هستیم. ما نمی‌توانیم مقدار دقیق کسر را تعیین کنیم. اگر تابع $f(x)$ حرف خودش را به کرسی بنشاند، حاصل کسر ∞ است و اگر جنگ را مخرج کسر (تابع $g(x)$) ببرد، حاصل کسر صفر است. اما ممکن است این دو با هم توافق کنند که در این حالت پاسخ عددی متناهی خواهد شد (که حالت سوم یعنی صلح و توافق بیشتر از سایر موارد اتفاق می‌افتد). در این حالت از روش‌های زیر برای رفع ابهام استفاده می‌شود:

۱) هم‌ارزی در بی‌نهایت: برای بررسی این حالت ابتدا ذکر نکات زیر ضروری به نظر می‌رسد:

وقتی $x\to\pm\infty$ حد یک چندجمله‌ای برابر (هم ارز) با حد جمله با **بزرگترین درجه** است. اگر $a_0\neq 0$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\sim\lim_{x\to\pm\infty}a_0x^n$$

الف) اگر صورت و مخرج یک کسر چندجمله‌ای باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{bx^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}+\infty \text{ یا } -\infty & ;\ n>m \text{ اگر}\\ \frac{a}{b} & ;\ n=m \text{ اگر}\\ 0 & ;\ n<m \text{ اگر}\end{cases}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+\frac{1}{2}}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{3}{2}$$

۲) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m-x^{m-1}-1}{2x^{m+1}+x^m+2}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m}{2x^{m+1}}=0$$

۳) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^4+x-1}{-x^2-x-1}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(-x^2)=-\infty$$

ب) هم‌ارزی رادیکال‌ها (اگر n فرد باشد، قدر مطلق لازم نیست.)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\lim_{x\to\infty}\left(\left|x+\frac{b}{an}\right|\times\sqrt[n]{a}\right)$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+12x^2+x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+\frac{12}{24})}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=2$$ ،

۲) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+4x^2-25}}{\sqrt[3]{x^3+x^2+25}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|2x|}{x+\frac{1}{3}}=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}=-2\end{cases}$$

مثال ۳۴: حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) $-\sqrt{5}$
۳) صفر
۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+7}}{x+1}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5}\,|x|}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{5}x}{x+1}=-\sqrt{5}$$

مثال ۳۵: حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۱» این حد فرم $\frac{\infty}{\infty}$ نیست؛ اما چون از هم‌ارزی رادیکال‌ها در ∞ استفاده می‌کنیم، در این قسمت آورده‌ایم. ابتدا از فرمول تبدیل حاصل‌جمع به حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\Rightarrow A=\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

در بی‌نهایت از عدد ۱ در مقابل x صرف‌نظر می‌کنیم (می‌توانیم با همان فرمول هم‌ارزی رادیکال‌ها هم به این نتیجه برسیم):

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to+\infty}A=\lim_{x\to+\infty}۲\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{۲}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{۲}=\lim_{x\to+\infty}(۲\cos\sqrt{x})(\sin ۰)=۲\cos\sqrt{+\infty}\times(۰)=۲\times(\text{تابع کران‌دار})\times ۰=۰$$

مثال ۳۶: حد $\lim_{x\to\infty}((x^۵+۷x^۴+۲)^c-x)$، به ازای مقدار معینی از c، متناهی و ناصفر است. مقدار این حد برابر کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $-\frac{۷}{۵}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید مقدار c را تشخیص بدهیم. وقتی $x\to\infty$، طبق قانون بزرگترین درجه داریم $x^۵+۷x^۴+۲\sim x^۵$، پس $(x^۵-۷x^۴+۲)^c\sim x^{۵c}$، بنابراین تفاضلی به شکل $\lim_{x\to\infty}(x^{۵c}-x)$ داریم. اگر $۵c>۱$ باشد، آن‌گاه داریم $x^{۵c}-x\sim x^{۵c}$ و اگر $۵c<۱$ باشد، آن‌گاه هم‌ارزی $x^{۵c}-x\sim -x$ را داریم و مقدار حد در هر دو حالت، $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. تنها حالتی که ممکن است مقدار حد بی‌نهایت نشود، آن است که $۵c=۱$ باشد. از این‌جا متوجه می‌شویم که $c=\frac{۱}{۵}$ است. حالا از هم‌ارزی رادیکال‌ها برای تحلیل دقیق‌تر حد استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[۵]{x^۵+۷x^۴+۲}\sim\lim_{x\to\infty}(x+\frac{۷}{۵})\Rightarrow\lim_{x\to\infty}[(x^۵+۷x^۴+۲)^{\frac{۱}{۵}}-x]\sim\lim_{x\to\infty}[(x+\frac{۷}{۵})-x]=\frac{۷}{۵}$$

نکته۶: هم‌ارزی روبرو ممکن است در برخی تست‌ها مورد توجه قرار بگیرد: $(x\to\infty)$، $\sqrt[n]{(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)}\sim|x-\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}|$

۲) قوانین رشد: فرض کنیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای مانند a، حدی برابر ∞ داشته باشند و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=۰$ شود، آن‌گاه می‌گوییم رشد تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ از تابع $f(x)$ بیشتر است. البته معمولاً بحث رشد در حالت‌هایی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، مطرح می‌شود.

به طور کلی در مورد رشد توابع در $+\infty$ همواره داریم:

$$\log_c x\prec x^{\alpha}\prec a^x\prec b^x\prec x!\prec x^x\quad(\text{که } b>a>۱ \text{ و } \alpha>۰ \text{ است})$$

البته در $x!$ مقدار x باید عدد طبیعی باشد. هرچند در ادامه خواهید دید که فاکتوریل برای اعداد اعشاری هم به نوعی تعریف می‌شود. مفهوم رشد یک تابع در مقایسه با یک تابع دیگر، به این معنی است که کدام تابع در $x\to\infty$ خیلی بزرگتر از تابع دیگر است. مثلاً رشد a^x وقتی $x\to+\infty$ از x^n خیلی بیشتر است. $(a>۱)$

مثال ۳۷: حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^x}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق قانون رشد چون رشد ۲^x در بی‌نهایت از $x^۳$ بیشتر است، لذا حاصل حد برابر بی‌نهایت است.

مثال ۳۸: حدهای روبرو را بیابید.

$$(۱):\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۱۰۰}}{۲^{\frac{n}{۲}}}\qquad(۲):\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^۲}$$

پاسخ: در حد اول، چون رشد $۲^{\frac{n}{۲}}$ از $n^{۱۰۰}$ هنگامی که به ∞ میل می‌کند، بیشتر است، مقدار حد اول برابر صفر خواهد شد و در حد دوم، چون رشد e^n از رشد $n^۲$ هنگامی که n به ∞ میل می‌کند، بیشتر است لذا مقدار حد دوم برابر ∞ می‌شود.

مثال ۳۹: حاصل $\lim_{x\to ۰^+}x^۲e^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۴» فرض می‌کنیم $t=\frac{۱}{x}$، بنابراین وقتی $x\to ۰^+$، آن‌گاه $t\to+\infty$ در نتیجه حد $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^۲}$ را داریم و چون رشد صورت بیشتر از رشد مخرج است، لذا حاصل حد ∞ می‌شود.

مثال ۴۰: حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{۲+۲x+\sin ۲x}{(۲x+\sin ۲x)e^{\sin ۲x}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) ۱ ۴) حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲+۲x+\sin ۲x}{(۲x+\sin ۲x)e^{\sin ۲x}}\overset{\text{رشد}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{۲xe^{\sin ۲x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{e^{\sin ۲x}}=\frac{۱}{e^{\sin\infty}}=\text{وجود ندارد}$$

توضیح: توجه کنید که $\sin ۲x$ تابعی کراندار است و بنابراین رشد کمتری نسبت به $۲x$ دارد.

روش دوم: حدهایی که در آنها فرم $\sin(\infty)$ یا $\cos(\infty)$ به وجود می‌آید، می‌توانند بسیار متنوع و گمراه‌کننده باشند. برای این که دچار خطا نشوید، راهکار زیر را استفاده کنید.

به جای $\sin(\infty)$ و $\cos(\infty)$ هرجا که این دو عبارت ظاهر شده‌اند، اعداد ثابتی مانند A و B قرار دهید. این اعداد ثابت همگی در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار دارند، اما از مقدار دقیق آنها اطلاعی نداریم. اکنون حد را محاسبه کنید. اگر جواب به‌دست آمده به یکی یا چند تا از این ثابت‌ها بستگی داشته باشد، حد وجود ندارد.

در این مثال به جای $\sin\infty$ مقدار A را قرار می‌دهیم که $-1 \le A \le 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+A}{(2x+A)e^A} = \frac{2}{2e^A} = \frac{1}{e^A}$$

جواب حد به A بستگی دارد پس حد وجود ندارد.

مثال ۴۱: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۴» به جای $\sin 2x$ و $\sin x$ اعداد A و B را قرار می‌دهیم که هر دوی آن‌ها در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار دارند:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+A+1}{(2x+A)(B+3)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+A+1}{2(B+3)^2x+A(B+3)^2} \overset{\text{بزرگترین درجه}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2(B+3)^2x} = \frac{1}{(B+3)^2}$$

بنابراین حد وجود ندارد، زیرا جواب به B وابسته است.

نکته ۷: قواعد زیر نیز با فرض $|c|>|b|>|a|$، در حل مسائل کاربرد دارد:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} (a^x+b^x+c^x) \simeq \lim_{x\to+\infty} c^x \quad \text{و} \quad 2)\ \lim_{x\to-\infty} (a^x+b^x+c^x) \simeq \lim_{x\to-\infty} a^x$$

در واقع، هرگاه مجموعی از توابع نمایی داشته باشیم و توان آن‌ها به سمت $+\infty$ میل کند، جمله‌ی با پایه‌ی بزرگتر مقدار حد را تعیین می‌کند. اگر توان آن‌ها به سمت $-\infty$ میل کند، جمله‌ی با پایه‌ی کوچکتر تعیین‌کننده است. البته در تشخیص پایه‌ی جملات باید دقت کنید. مثلاً 3^{2x+1} را ابتدا به این صورت می‌نویسیم $3^{2x+1} = 3^1 \times 3^{2x} = 3\times 9^x$، حالا معلوم می‌شود که تابعی نمایی با پایه‌ی ۹ داریم.

مثال ۴۲: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{2^{3x}+3^{2x}+4^{x+1}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{2^{3x}+3^{2x}+4^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{8^x+9^x+4\times 4^x} \sim \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{9^x} = 9$$

مثال ۴۳: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از هم‌ارزیِ پایه‌ی بزرگتر داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{3\times 3^n}{3^n} = 3$$

مثال ۴۴: فرض کنید n عددی طبیعی باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\cdots(x^n+1)}{(nx+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۰ ۳) n^{n+1} ۴) $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$

پاسخ: گزینه «۴» حد مورد نظر به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد. طبق قانون رشد در هر پرانتز جمله با رشد بیشتر را نگه می‌داریم.

$$\text{حد} = \lim_{x\to\infty} \frac{x.x^2.x^3\dots x^n}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1+2+3+\dots+n}}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}.x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}.x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال ۵۹: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}\frac{x}{x+1})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۱» اگر $x\to\infty$، آن‌گاه حالت ابهام $\infty\times 0$ را داریم:

$$\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}\frac{x}{x+1})=\infty\times(\frac{\pi}{4}-\underbrace{\text{Arctg}1}_{\frac{\pi}{4}})=\infty\times 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}\frac{x}{x+1}=u$ داریم:

$$\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}(\frac{x}{x+1})=u\xrightarrow{\text{از طرفین tg می‌گیریم}}\text{tg}(\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}\frac{x}{x+1})=\text{tg}u\Rightarrow\frac{\text{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{x+1}}{1+\text{tg}(\frac{\pi}{4})(\frac{x}{x+1})}=\text{tg}u\Rightarrow\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{x+1}}=\text{tg}u\Rightarrow\text{tg}u=\frac{1}{2x+1}$$

از طرفی وقتی $x\to\infty$، آن‌گاه $u\to 0$، پس $\text{tg}u\sim u$ و لذا $u\sim\frac{1}{2x+1}$ به‌دست می‌آید. حال با قراردادن این مقدار در حد اصلی داریم:

$$\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{4}-\text{Arctg}\frac{x}{x+1})=\lim_{x\to\infty} x.u\sim\lim_{x\to\infty} x.(\frac{1}{2x+1})=\frac{1}{2}$$

مثال ۶۰: حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} x(\text{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\text{arctg}\frac{x}{x+2})$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه صنعتی شریف)

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که با حالت ابهام $0\times\infty$ روبه‌رو هستیم. برای حل این سؤال از رابطه $\text{Arctg}\alpha-\text{Arctg}\beta=\text{Arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\infty} x(\text{Arctg}\frac{\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x+2}}{1+\frac{x+1}{x+2}.\frac{x}{x+2}})=\lim_{x\to\infty} x\,\text{Arctg}\frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{2x^2+5x+4}{(x+2)^2}}=x\lim_{x\to\infty}\text{Arctg}\frac{x+2}{2x^2+5x+4}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+2)}{2x^2+5x+4}=\frac{1}{2}$$

توضیح: در بالا از هم‌ارزی $\text{Arctg}\,u\sim u$ وقتی $u\to 0$ استفاده کرده‌ایم (چون وقتی $x\to\infty$، آن‌گاه $\frac{x+2}{2x^2+5x+4}$ به سمت صفر میل می‌کند).

حالت مبهم $\infty-\infty$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ آن‌گاه معلوم نیست مقدار $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ (اگر وجود داشته باشد) چقدر است. در واقـع میـان f و g یـک مبـارزه وجود دارد. اگر f ببرد، پاسخ حد ∞ و اگر g ببرد، پاسخ $-\infty$ است. اما ممکن است حالت سومی هم پیش بیاید و آن این است که ایـن توابـع بـر سـر یـک عـدد متناهی به توافق برسند (که اتفاقاً این حالت سوم بیش از دو حالت اول در سؤالات به‌وجود می‌آید).

برای رفع ابهام این‌گونه حدود، چنانچه دو عبارت به‌صورت کسر باشند، مخرج مشترک گرفته و حاصل را ساده کرده و معمولاً عبارت ساده شده بـه‌صـورت $\frac{0}{0}$ و در بعضی موارد به شکل $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل خواهد شد و اگر دو عبارت یا یکی از آنها اصم باشد، معمولاً از روش هم‌ارزی رادیکال‌ها استفاده خواهیم کرد و در بعضی مسـائل بـا ضرب عبارت در مزدوج خودش عامل مبهم‌کننده را حذف می‌کنیم.

مثال ۶۱: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» حالت مبهم $\infty-\infty$ است:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\sim\lim_{x\to+\infty}(|x+\frac{1}{2}|-x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2}-x)=\frac{1}{2}$$

مثال ۶۲: اگر $A=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ باشد، آن‌گاه $3a+2b$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۵-

پاسخ: گزینه «۲»

$$A=\lim_{x\to-\infty}(\left|x-\frac{1}{2}\right|-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2}-x-ax-b)=\lim_{x\to-\infty}\left[(\frac{1}{2}-b)-(a+1)x\right]=0\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\a=-1\end{cases}\Rightarrow 3a+2b=3(-1)+2(\frac{1}{2})=-2$$

$$\text{حد} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\cosh x\sin x-\cos x\sinh x}{\sinh x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x^2}{2!})(x-\frac{x^3}{3!})-(1-\frac{x^2}{2!})(x+\frac{x^3}{3!})}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{3!2!}-x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{3!2!}}{x^3} = \frac{(1-\frac{1}{3})x^3}{x^3}=\frac{2}{3}$$

مثال ۶۹ (سخت): حاصل $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\mathrm{Ln}(1+x)}\right)$ کدام است؟ (از سؤالات پایان ترم دانشگاه علم و صنعت)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» حد داده شده فرم مبهم $\infty-\infty$ را دارد، پس ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. سپس با استفاده از بسط‌های مک‌لورن حد را ساده‌تر می‌کنیم.

وقتی $x \to 0$ داریم: $\sqrt{1+x^2}\simeq 1+\frac{x^2}{2}$. پس: $\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\simeq \mathrm{Ln}(1+x+\frac{x^2}{2})$. در ادامه از هم‌ارزی $\mathrm{Ln}(1+u)\simeq u-\frac{u^2}{2}$ استفاده کرده‌ایم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})}{\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{Ln}(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-\mathrm{Ln}(1+x+\frac{x^2}{2})}{\mathrm{Ln}(1+x+\frac{x^2}{2})\mathrm{Ln}(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^2}{2})-[(x+\frac{x^2}{2})-\frac{1}{2}(x+\frac{x^2}{2})^2]}{[(x+\frac{x^2}{2})-\frac{1}{2}(x+\frac{x^2}{2})^2](x-\frac{x^2}{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(x)(x)}=-\frac{1}{2}$$

توجه کنید که در پایان کار، از آنجا که $x\to 0$ فقط جملات با کمترین درجه را از صورت و مخرج در نظر گرفته‌ایم. در صورت کسر جملات با درجه یک حذف شدند و به همین دلیل کوچک‌ترین درجه باقی مانده مربوط به $-\frac{1}{2}x^2$ است. در مخرج نیز دو چندجمله‌ای درهم ضرب شده‌اند که از هرکدام کمترین درجه را استفاده کردیم.

مثال ۷۰ (سخت): حاصل $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin(\sinh^{-1}\mathrm{Ln}(t+1))}-\frac{1}{t}\right)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» فرض می‌کنیم $x=\sinh^{-1}\mathrm{Ln}(t+1)$ باشد. در این صورت $\sinh x=\mathrm{Ln}(t+1)$، پس $t+1=e^{\sinh x}$ به عبارتی $t=e^{\sinh x}-1$ است. در ضمن وقتی $t\to 0$ آن‌گاه $x\to \sinh^{-1}\mathrm{Ln}(0+1)=\sinh^{-1}(0)=0$ است. با این تغییر متغیر داریم:

$$\text{مقدار حد} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^{\sinh x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sinh x}-1-\sin x}{\sin x(e^{\sinh x}-1)}$$

در صورت و مخرج از هم‌ارزی‌های $\sin x\simeq x$ و $\sinh x\simeq x$ استفاده می‌کنیم. در ادامه داریم:

$$\text{جواب حد} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

حالا در مخرج کسر از هم‌ارزی $e^x\simeq 1+x$ استفاده می‌کنیم:

$$x(e^x-1)\simeq x(1+x-1)=x^2$$

حالا که در مخرج x^2 داریم، در صورت کسر نیز هم‌ارزی e^x را تا جمله‌ی x^2 می‌نویسیم:

$$\text{جواب حد} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

حالت مبهم 0^0

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آن‌گاه حالت مبهم 0^0 پیش می‌آید. در این حالت از عبارت مبهم $f(x)^{g(x)}$، Ln می‌گیریم و داریم:

$$A=\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \mathrm{Ln}A=\lim_{x\to a}\mathrm{Ln}f(x)^{g(x)} \Rightarrow \mathrm{Ln}A=\lim_{x\to a} g(x)\mathrm{Ln}f(x) \Rightarrow A=e^{\lim_{x\to a} g(x)\mathrm{Ln}f(x)}$$

حالا کافی است حاصل $L=\lim_{x\to a} g(x)\mathrm{Ln}f(x)$ را حساب کنیم که حالت مبهم $0\times\infty$ است که روش رفع ابهام آن را می‌دانیم.

مثال ۷۱: مقدار $C=\lim_{x\to 0} x^x$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) 1 ۴) حد موجود نیست.

پاسخ: گزینه «۳»

$$C=e^{\lim_{x\to 0} x\mathrm{Ln}x} \Rightarrow L=\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{Ln}x=0 \Rightarrow C=e^0=1$$

توضیح: روش به‌دست آوردن مقدار L، به عنوان مثال در قسمت رفع ابهام $0\times\infty$ آورده شده است.

مثال ۷۲: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{Lnx}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به این‌که $Ln\,0^+=-\infty$ می‌باشد، لذا $\frac{1}{Lnx}$ به سمت صفر میل می‌کند:

$$C=\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{Lnx}}=0^0\Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{Lnx}(Ln\sin x)}\quad,\quad L=\lim_{x\to 0^+}\frac{Ln\sin x}{Lnx}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1\Rightarrow C=e^1=e$$

مثال ۷۳: اگر $A=\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)^{\frac{1}{Ln(1-x)}}$ و $B=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\sinh^{-1}x}{\cosh^{-1}x}}$ آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه Harvard)

۱) $A=B$ ۲) $A=-B$ ۳) $A=2B$ ۴) $B=2A$

پاسخ: گزینه «۱» در مورد A، فرم مبهم 0^0 رخ می‌دهد، پس با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$LnA=\lim_{x\to 1}\frac{1}{Ln(1-x)}Ln(1-x^2)=\lim_{x\to 1}\frac{Ln(1-x^2)}{Ln(1-x)}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-2x}{(1-x^2)}}{\frac{-1}{(1-x)}}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x}=1$$

$LnA=1$، بنابراین $A=e^1$ است. برای محاسبه‌ی B، کافی است $LnB=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{\cosh^{-1}x}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از تعریف توابع معکوسِ هیپربولیک داریم:

$$LnB=\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{\cosh^{-1}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x+\sqrt{x^2+1})}{Ln(x+\sqrt{x^2-1})}$$

با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت، داریم: $\sqrt{x^2+1}\simeq|x|$ و $\sqrt{x^2-1}\simeq|x|$ و چون $x\to\infty$، لذا داریم: $|x|=x$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$LnB=\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x+x)}{Ln(x+x)}=1$$

پس $B=e^1$ است. به این ترتیب دیدیم که $A=B=e$

حالت مبهم ∞^0

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ آن‌گاه حالت مبهم ∞^0 پیش می‌آید. همانند حالت 0^0 در این حالت حاصل حد به‌صورت $e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)Lnf(x)}$ است که باید حد داده شده در توان e حساب شود.

مثال ۷۴: مقدار $C=\lim\limits_{x\to 0^+}(cotgx)^{\sin x}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) 1 ۳) 0 ۴) e^{-1}

پاسخ: گزینه «۲»

$$C=\lim_{x\to 0}(cotgx)^{\sin x}=(\infty)^0\Rightarrow C=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\,Ln\cot gx}$$

برای محاسبه‌ی حد L از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-(1+\cot g^2x)}{cotgx}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2x)(\frac{1}{\sin^2x})}{\cos x\,cotgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0\Rightarrow C=e^0=1$$

حالت مبهم 1^∞

فرض کنید می‌خواهیم حاصل $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ را حساب کنیم. اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ آن‌گاه حالت مبهم 1^∞ پیش می‌آید.

قبل از یاد گرفتن روش رفع ابهام این‌گونه حدود، ابتدا توجه کنید که در این حالت در واقع «**یک حدی**» به توان «**بی‌نهایت**» رسیده است و بعضی دانشجویان تصور می‌کنند، عددِ یک را وقتی بی‌نهایت بار در خودش ضرب کنیم، حاصل برابر یک می‌شود و برای همین بعضاً در این‌گونه تست‌ها، طراحان سؤال، عددِ یک را به عنوان دام برای دانشجویان در نظر می‌گیرند. تصور این دانشجویان وقتی درست است که عدد یک، **حدی** نباشد و **یک مطلق** باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\lfloor 1+x\rfloor^{\frac{1}{x}}=\lfloor 1^+\rfloor^{+\infty}=$ (یک مطلق)$^{\text{بی‌نهایت}}=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ (یکِ حدی)$^{\text{بی‌نهایت}}=$ مبهم

مثال ۷۸: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} x[Ln(x+a)-Lnx]$ کدام است؟

۱) a ۲) -1 ۳) $-a$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۱»

$$A=\lim_{x\to+\infty} x[Ln(x+a)-Lnx]=\lim_{x\to+\infty} xLn(\frac{x+a}{x})=\lim_{x\to+\infty} Ln(\frac{x+a}{x})^x$$

$$=Ln\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+a}{x})^x}_{L}\ ,\ L=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+a}{x})^x=(1)^\infty \Rightarrow L=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a}{x})x}=e^a \Rightarrow A=Lne^a=a$$

همان‌طور که می‌بینید، پس از نوشتن حد به‌صورت گفته شده در توان e، باید حدودی را با قاعده‌های گفته شده قبلی محاسبه کنیم.

مثال ۷۹: حاصل $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟

۱) e^{-12} ۲) $e^{-\frac{1}{6}}$ ۳) $e^{\frac{1}{6}}$ ۴) $e^{\frac{1}{12}}$

پاسخ: گزینه «۴» در اولین نگاه متوجه می‌شویم با حدی به فرم $(\frac{0}{0})^\infty$ روبرو هستیم. برای تشخیص بهتر نوع این ابهام، بهتر است کمی به کسر داده شده توجه کنیم. با توجه به هم‌ارزی $\cosh x\simeq1+\frac{x^2}{2}$ متوجه می‌شویم که کسر $\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}$ به سمت یک میل می‌کند، بنابراین ما در واقع با حالت مبهم 1^∞ روبه‌رو هستیم:

$$\lim_{x\to0}[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}]^{\frac{1}{x^2}}\simeq\lim_{x\to0}[\frac{2(1+\frac{x^2}{2}-1)}{x^2}]^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$$

اما برای آن‌که بتوانیم حاصل حد را به‌دست آوریم، لازم است هم‌ارزی $\cosh x$ را با تعداد جملات بیشتری به‌کار بگیریم. در ضمن از این قاعده‌ی حدی که مخصوص حالت مبهم 1^∞ است استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}[\frac{2(\cosh x-1)}{x^2}-1]}=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}[\frac{2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-1)}{x^2}-1]}=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}[\frac{x^2+\frac{1}{12}x^4}{x^2}-1]}=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}[1+\frac{1}{12}x^2-1]}=\lim_{x\to0} e^{\frac{x^2}{12x^2}}=e^{\frac{1}{12}}$$

مثال ۸۰: حاصل $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sinh x})^{\frac{1}{x^4}}$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{1}{8}}$ ۲) $e^{-\frac{1}{8}}$ ۳) $e^{-\frac{1}{15}}$ ۴) $e^{\frac{1}{15}}$

پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت متوجه می‌شویم که حد داده شده فرم 1^∞ دارد. بنابراین به صورت زیر حل آن را آغاز می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}(\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sinh x})^{\frac{1}{x^4}}\sim\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x^4}(\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sinh x}-1)}$$

حالا به محاسبه‌ی حد $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}(\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sinh x}-1)$ می‌پردازیم. ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و سپس در مخرج کسر هم‌ارزی $\sinh x\simeq x$ را می‌نویسیم:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arcsin} x-\sinh x}{x^4\sinh x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arcsin} x-\sinh x}{x^5}$$

حالا چون در مخرج x^5 داریم، در صورت هم‌ارزی‌ها را تا جمله‌ی x^5 ادامه می‌دهیم:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5-x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{8}{120}x^5}{x^5}=\frac{1}{15}\Rightarrow \text{حاصل حد خواسته شده}=e^{\frac{1}{15}}$$

مثال ۸۱: تابع f همه جا مشتق سوم پیوسته داشته و در رابطه‌ی $A=\lim\limits_{x\to0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$ صدق می‌کند، حاصل $B=\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) e ۲) e^2 ۳) $\sqrt{e}$ ۴) e^3-e

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا به حدی که مقدارش را داریم، توجه کنید:

$$\lim_{x\to0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$$

اگر $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ هر عددی به جز صفر باشد، مقدار این حد نمی‌تواند برابر با e^3 شود. زیرا توان این پرانتز، $\pm\infty$ می‌شود.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 & \text{از ضابطه اول تابع استفاده کردیم:}\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0 & \text{از ضابطه دوم تابع استفاده کردیم:}\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1 & \text{از ضابطه دوم تابع استفاده کردیم:}\\ \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=1 & \text{از ضابطه اول تابع استفاده کردیم:}\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع در $x=-1$ ناپیوسته است.

مثال ۱۹ (سخت): مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}|x-\lfloor x\rfloor| & ; \lfloor x\rfloor \text{ زوج}\\ |x-\lfloor x+1\rfloor| & ; \lfloor x\rfloor \text{ فرد}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}$

پاسخ: گزینه «۱» پیش از شروع، توجه کنید که ضابطه‌ی پایینی را می‌توان به‌صورت $|x-\lfloor x\rfloor-1|$ نوشت. عدد زوج $x=2k$ را در نظر بگیرید.

اگر $x\to(2k)^+$ باشد، آن‌گاه $\lfloor (2k)^+\rfloor=2k$ عددی زوج است، بنابراین ضابطه‌ی بالایی f را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to(2k)^+}|x-\lfloor x\rfloor|=|(2k)^+-\lfloor(2k)^+\rfloor|=|2k-2k|=0$$

اگر $x\to(2k)^-$، آن‌گاه $\lfloor(2k)^-\rfloor=2k-1$ و چون $2k-1$ عددی فرد است، پس باید ضابطه‌ی پایینی f را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to(2k)^-}|x-\lfloor x+1\rfloor|=|2k-\lfloor(2k)^-\rfloor-1|=|2k-(2k-1)-1|=|0|=0$$

در ضمن $f(2k)=|2k-\lfloor 2k\rfloor|=0$ پس تابع $f(x)$ در $x=2k$ پیوسته است. اگر $x\to(2k+1)^+$، آن‌گاه $\lfloor(2k+1)^+\rfloor=2k+1$ بنابراین ضابطه‌ی پایینی f را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to(2k+1)^+}|x-\lfloor x\rfloor-1|=|2k+1-\lfloor(2k+1)^+\rfloor-1|=|2k+1-2k-1-1|=1$$

اگر $x\to(2k+1)^-$، آن‌گاه: $\lfloor(2k+1)^-\rfloor=2k+1-1=2k$ عددی زوج است. پس ضابطه‌ی بالایی را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to(2k+1)^-}|x-\lfloor x\rfloor|=|2k+1-\lfloor(2k+1)^-\rfloor|=|2k+1-2k|=1$$

در ضمن $f(2k+1)=|2k+1-\lfloor 2x+1+1\rfloor|=1$ پس تابع $f(x)$ در $x=2k+1$ پیوسته است. پس $f(x)$ در هیچ نقطه‌ای ناپیوسته نیست.

تذکر ۳: در توابعی که به‌صورت مجموع یا تفاضل یا حاصل‌ضرب باشند، باید پس از به‌دست آوردن نقاط انفصال هرکدام از توابع، مجموع نقاط انفصال دو تابع را به عنوان نقاط انفصال کل تابع در نظر بگیریم، اما در بعضی موارد (که معمولاً به‌صورت تفاضل و یا حاصل‌ضرب دو تابع ناپیوسته می‌باشند) باید احتیاط کنیم؛ چون ممکن است نقاطی در این حالت جزء نقاط پیوستگی محسوب گردند.

مثال ۲۰: تابع $f(x)=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor$ در بازه $(-4,4)$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۳» تابع $y_1=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$ در نقاط $-2,0,2$ ناپیوسته و تابع $y_2=\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor$ در نقاط $-3,0,3$ ناپیوسته است، اما در نقطه $x=2$ تابع $f(x)=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor.\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor$ پیوسته می‌باشد، لذا مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $\{-3,-2,0,3\}$ می‌باشد.

نکته ۵: توابعی به‌صورت $f(x)=\begin{cases}h(x) ; & x \text{ گنگ}\\ g(x) ; & x \text{ گویا}\end{cases}$ به ازای ریشه‌های معادله $h(x)=g(x)$ پیوسته می‌باشند.

مثال ۲۱: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2 ; & x \text{ گنگ}\\ 2x ; & x \text{ گویا}\end{cases}$ در کدام نقطه پیوسته است؟

۱) ۰ و ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» $x^2=2x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=2$

نکته ۶: توابعی به فرم $y=\begin{cases}f(x) ; & x\in\mathbb{Z}\\ g(x) ; & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ در نقاط غیرصحیح پیوسته و همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، حد آن‌ها برابر با حد $g(x)$ می‌باشد. این‌گونه توابع در نقاط صحیح **ناپیوسته** هستند، اما حد دارند و حد آن‌ها با حد $g(x)$ برابر می‌باشد. لازم به ذکر است که در نقاط صحیح این‌گونه توابع می‌توانند پیوسته باشند، به شرطی که این نقاط ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ باشند.

نکته ۷: فرض کنیم f و g پیوسته باشند توابعی به فرم کلی $y=\begin{cases} f(x)\sin\frac{1}{g(x)} & ; x\neq a \\ 0 & ; x=a \end{cases}$ به شرطی که $x=a$ هم ریشه‌ی $f(x)$ و هم ریشه‌ی $g(x)$ باشد، پیوسته هستند. اگر نقطه‌ی $x=a$ فقط ریشه‌ی $g(x)$ باشد، این تابع پیوسته نیست.

معادلات تابعی

در این قسمت می‌خواهیم معادلات تابعی را با هم بررسی کنیم. شاید مطالب بیشتر به فصل تابع ربط داشته باشد، ولی چون بحث «پیوستگی» نیز برای این مطلب ضروری است، مطلب را در این درسنامه آورده‌ایم.

برخی از توابع حقیقی ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از سایر توابع متمایز می‌کند. برای مثال تابع $f(x)=\log x$ دارای این ویژگی است که ضرب را به جمع تبدیل می‌کند، یعنی $f(xy)=\log(xy)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$ اما تابع نمایی $f(x)=e^x$، جمع را به ضرب تبدیل می‌کند یعنی: $f(x+y)=e^{x+y}=e^xe^y=f(x)f(y)$. حالا سؤال این است که دقیقاً کدام دسته از توابع دارای ویژگی‌هایی مانند این‌ها هستند؟ موارد معروف و شناخته شده‌ی معادلات تابعی را با هم مرور می‌کنیم. چهار مورد اول از اهمیت بیشتری برخوردارند و لازم است به خاطر سپرده شوند.

۱ـ هرگاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر جفت از اعداد حقیقی x و y داشته باشیم $f(x+y)=f(x)+f(y)$ آنگاه $f(x)$ خطی است که از مبدأ می‌گذرد، یعنی $f(x)=ax$ که a عددی ثابت است.

۲ـ هرگاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و غیرصفر باشد به طوری که برای هر جفت از اعداد حقیقی x و y داشته باشیم $f(x+y)=f(x)f(y)$ آنگاه $f(x)$ تابعی نمایی با ضابطه‌ی $f(x)=e^{ax}$ است. $(a\in\mathbb{R})$

۳ـ اگر $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر جفت از اعداد حقیقی مثبت x و y داشته باشیم $f(xy)=f(x)+f(y)$ آنگاه $f(x)$ تابعی لگاریتمی به صورت $f(x)=a\mathrm{Ln}x$ است که در آن $a\in\mathbb{R}$. در این نوع از معادلات تابعی اگر دامنه‌ی f به صورت $\mathbb{R}-\{0\}$ باشد، جواب معادله $f(x)=a\mathrm{Ln}|x|$ است.

۴ـ اگر $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و غیرصفر باشد و برای هر جفت از اعداد حقیقی مثبت x و y داشته باشیم $f(xy)=f(x)f(y)$ آنگاه $f(x)=x^a$ که $a\in\mathbb{R}$. در این نوع از معادلات تابعی به ازای $a=0$ تابع ثابت $f(x)=1$ به دست می‌آید. در ضمن اگر a عددی مناسب باشد دامنه‌ی $f(x)$ می‌تواند $\mathbb{R}$ باشد. مثلاً $f(x)=x^2$ بر $\mathbb{R}$ تعریف شده است و دارای این ویژگی است که $f(xy)=f(x)f(y)$.

۵ـ هرگاه $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر جفت از اعضای دامنه‌اش مانند x و y داشته باشیم $f(\frac{x+y}{1+xy})=f(x)+f(y)$ آنگاه $f(x)=a\mathrm{Ln}(\frac{1+x}{1-x})$ که $a\in\mathbb{R}$ است.

۶ـ هرگاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر جفت از اعداد حقیقی x و y داشته باشیم: $f(y+x)+f(y-x)=2f(x)f(y)$. آنگاه $f(x)=\cos ax$ یا $f(x)=\cosh ax$ که $a\in\mathbb{R}$ است. اگر $a=0$ باشد تابع ثابت یک به دست می‌آید. اگر شرط غیرثابت بودن f را هم داشته باشیم باید $a\neq 0$ باشد.

توضیح: اثبات کامل این احکام نیاز به استفاده از ویژگی‌های توابع پیوسته دارد. با این حال خلاصه‌ای از اثبات دو معادله‌ی اول را بیان می‌کنیم. فرض کنیم $f(x+y)=f(x)+f(y)$. در ابتدا به ازای $x=y=0$ داریم $f(0)=f(0)+f(0)$ پس $f(0)=0$ در ادامه با نوشتن عدد یک به صورت $1=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ بار}}$ داریم:

$$f(1)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ بار}})=f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{1}{n})\Rightarrow nf(\frac{1}{n})\Rightarrow f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}f(1)$$

اگر فرض کنیم $a=f(1)$ داریم $f(\frac{1}{n})=a(\frac{1}{n})$. حالا برای هر عدد گویای $x=\frac{m}{n}$ می‌نویسیم:

$$x=\frac{m}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{ بار}}\Rightarrow f(x)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{ بار}})=mf(\frac{1}{n})\Rightarrow f(x)=m(\frac{1}{n})a=a\frac{m}{n}\Rightarrow f(x)=ax$$

در ادامه با استفاده از پیوستگی f ثابت می‌شود که $f(x)=ax$ برای هر $x\in\mathbb{R}$. به این ترتیب اولین حکم ثابت می‌شود. اکنون فرض کنید تابع f دارای این ویژگی است که $f(x+y)=f(x)f(y)$ در این صورت داریم:

$$\mathrm{Ln}f(x+y)=\mathrm{Ln}f(x)+\mathrm{Ln}f(y)$$

اگر فرض کنیم $g(x)=\mathrm{Ln}f(x)$ آنگاه داریم:

$$g(x+y)=g(x)+g(y)\xrightarrow{\text{از قسمت (۱)}}g(x)=ax\Rightarrow \mathrm{Ln}f(x)=ax\Rightarrow f(x)=e^{ax}$$

پس دومین حکم هم ثابت می‌شود. اثبات سایر موارد نیز به صورت مشابه انجام می‌شود.

تذکر ۴: تابع $f(x)=e^{ax}$ را می‌توان به صورت $f(x)=A^x$ نوشت. کافی است $A=e^a$ باشد. همچنین تابع $f(x)=a\mathrm{Ln}x$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=\log_A x$ نوشت. زیرا: $f(x)=\log_A x=\frac{1}{\mathrm{Ln}A}\mathrm{Ln}x\xrightarrow{a=\frac{1}{\mathrm{Ln}A}}f(x)=a\mathrm{Ln}x$.

مثال ۲۲: اگر تابع $f(x)$ در تساوی $f(\frac{x+y}{1+xy})=f(x)+f(y)$ صدق کند و $f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}$ آن‌گاه مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $Ln\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}Ln۷$ ۳) $Ln\frac{۷}{۳}$ ۴) $Ln۳$

پاسخ: گزینه «۱» طبق مطالب گفته شده، تابعی که در معادله‌ی تابعی داده شده صدق می‌کند، ضابطه‌ای به این صورت دارد: $f(x)=cLn\frac{۱+x}{۱-x}$

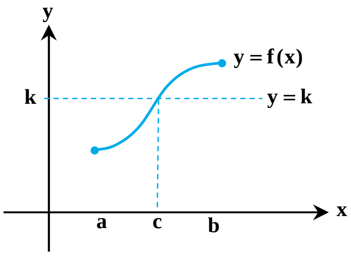
که $c\in\mathbb{R}$ عددی حقیقی است. طبق صورت سؤال $f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}$ بنابراین داریم:

$$f(\frac{۳}{۴})=Ln\sqrt{۷}\Rightarrow cLn(\frac{۱+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۴}})=Ln\sqrt{۷}\Rightarrow cLn(\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۱}{۴}})=\frac{۱}{۲}Ln۷\Rightarrow cLn۷=\frac{۱}{۲}Ln۷\Rightarrow c=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{۲}Ln\frac{۱+x}{۱-x}$ است. حالا $f(\frac{۱}{۲})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۲}Ln(\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۲}Ln(۳)=Ln\sqrt{۳}$$

قضیه مقدار میانی (بولتزانو)

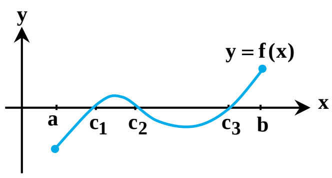


فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و k مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این‌صورت نقطه‌ای مانند c در این بازه قرار دارد که $f(c)=k$ شود. تعبیر هندسی این قضیه بسیار ساده است. اگر $f(a)<k$ و $f(b)>k$ باشد به این معنا است که نمودار $f(x)$ از زیر خط $y=k$ به بالای آن آمده است. بنابراین باید در نقطه‌ای مانند c با این خط برخورد کرده باشد یعنی $f(c)=k$. توضیح مختصری در مورد این‌که $c\in(a,b)$ است یا $c\in[a,b]$ لازم است. اگر بدانیم که $f(a)\le k\le f(b)$ آن‌گاه $c\in[a,b]$ است، یعنی ممکن است $c=a$ یا $c=b$ باشد. اما اگر نامساوی اول اکید باشد، نتیجه می‌شود که $c\in(a,b)$ است. این قضیه یک نتیجه‌ی مهم دارد که از خودش معروف‌تر است:

نتیجه: هرگاه تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آن‌گاه تابع $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی (a,b) دارد.

در توضیح این نتیجه باید گفت که وقتی $f(a)f(b)<0$ می‌شود، یعنی $f(a)$ و $f(b)$ اعدادی غیرصفر و مختلف‌العلامه هستند و این یعنی یا $f(a)<0<f(b)$ و یا $f(b)>0>f(a)$، در هر صورت عدد حقیقی $k=0$ بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، پس یک c در این بازه وجود دارد که $f(c)=0$ باشد.

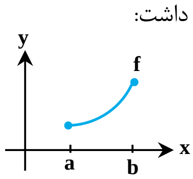
در اینجا هم اگر $f(a)f(b)\le 0$ باشد، نتیجه می‌شود $c\in[a,b]$ است. اما اگر نامساوی اکید $f(a)f(b)<0$ را داشته باشیم نتیجه می‌گیریم $c\in(a,b)$ است.



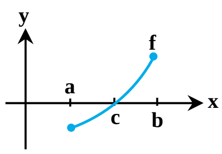
نکته ۸: قضیه‌ی مقدار میانی در مورد تعداد دقیق ریشه‌های $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ نظری نمی‌دهد. فقط می‌گوید اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند، حداقل یک ریشه در این بازه وجود دارد. ممکن است نمودار $f(x)$ طوری باشد که چند بار محور x ها را قطع کند. در این صورت دارای چند ریشه در این بازه خواهد بود.

با این حال اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی یا تابعی اکیداً نزولی باشد؛ به‌صورت دقیق‌تری می‌توانیم در مورد تعداد ریشه‌های آن بحث کنیم:

نکته ۹: هرگاه $f(x)$ تابعی پیوسته و اکیداً صعودی (یا پیوسته و اکیداً نزولی) در بازه‌ی $[a,b]$ باشد، دو حالت زیر را خواهیم داشت:



الف) اگر $f(a)$ و $f(b)$ هم‌علامت باشند $(f(a)f(b)>0)$، آن‌گاه $f(x)$ در این بازه **هیچ** ریشه‌ای ندارد.



ب) اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند $(f(a)f(b)<0)$، آن‌گاه $f(x)$ در این بازه **دقیقاً یک** ریشه دارد.

مثال ۲۳: معادله $x۲^x=۱$ در بازه $[\frac{۱}{۴},۱]$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد. ۲) حداقل یک ریشه دارد. ۳) حداقل دو ریشه دارد. ۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به قضیه مقدار میانی داریم:

$$f(x)=x.۲^x-۱\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{۱}{۴})\simeq -۲/۸۱\\ f(۱)=۱\end{cases}\Rightarrow f(\frac{۱}{۴})f(۱)<۰$$

۲۵ـ فرض کنید $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$ و $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^۲e^{nx}+x}{e^{nx}+۱}$ باشد. در مورد پیوستگی توابع f و g کدام گزینه درست است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جزء $x=۰$ پیوسته و g در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.
۲) f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جزء $x=۰$ پیوسته و g در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز $x=۰$ پیوسته است.
۳) f و g هر دو روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.
۴) f در دو نقطه ناپیوسته و g در یک نقطه ناپیوسته است.

۲۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to۰}(\cos x+\frac{x^۲}{۲})^{\frac{۱}{x(\sin x-x)}}$ به‌صورت e^A می‌باشد، مقدار A کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

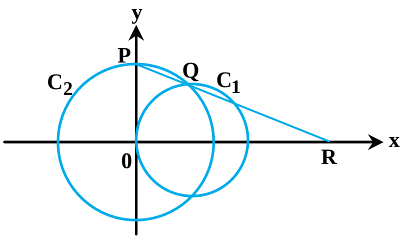
۲۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\left(\frac{(\frac{x}{tgh^{-۱}x})^{\frac{۳}{۲}}-\cos(tgx)}{x^۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۳}{۶۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

۲۸ـ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\lfloor\cos\pi x\rfloor & , x\le ۱\\ |۲x-۳|\lfloor x-۲\rfloor & , x>۱\end{cases}$ در بازه $[۰,۲]$ کدام است؟

۱) $\{۰,\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\{۰,\frac{۱}{۲},۱\}$ ۳) $\{۰,۲\}$ ۴) $\{۰,\frac{۱}{۲},۲\}$

۲۹ـ در شکل زیر، دایره ثابت $C_۱$ به معادله‌ی $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ و دایره متغیر (جمع‌شو) $C_۲$ به شعاع r و مرکز مبدأ نشان داده شده است. P نقطه $(۰,r)$ و Q نقطه بالایی برخورد این دو دایره است، همچنین R نقطه تلاقی امتداد پاره‌خط PQ و محور xها است. وقتی که $C_۲$ در مبدأ منقبض شود؛ یعنی وقتی $r\to۰^+$، آن‌گاه مختصات نقطه حدی R کدام گزینه می‌شود؟



۱) $(۱,۰)$
۲) $(۳,۰)$
۳) $(۴,۰)$
۴) $(۵,۰)$

۳۰ـ اگر $x\in[a,b]$ و $y=f(x)$ تابعی یک به یک و پیوسته و همچنین $f(a)<f(b)$ باشد، آن‌گاه برای هر $x\in(a,b)$:

۱) $f(a)<f(x)<f(b)$ ۲) $f(x)>f(b)$ ۳) $f(x)<f(a)$ ۴) $f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{۲}$

۳۱ـ اگر $\lim\limits_{x\to۰}\frac{x(a+b\cos x)-c\sin x}{x^۵}=۱$، آنگاه مقدار $a+b-۲c$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۱۸۰− ۴) ۳۶۰

۳۲ـ حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\left[\frac{Ln_{\sec x}\cos\frac{x}{۲}}{Ln_{\sec\frac{x}{۲}}\cos x}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۳ـ اگر $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\lfloor x\rfloor}{x})^x$ و $B=\lim\limits_{x\to۰}|x|^{\frac{x}{\lfloor x\rfloor}}$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) مقدار A وجود ندارد و مقدار B از چپ برابر با ۱ است.
۲) مقدار A و B وجود ندارد.
۳) مقدار A برابر با صفر و مقدار B از چپ برابر با ۱ است.
۴) مقدار A برابر با صفر و مقدار B از راست برابر با ۱ است.

۳۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\left(\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[۳]{۱-x^۲}}{x^۵}\right)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱۷}{۹۰}$ ۲) $\frac{۱۹}{۹۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۹۰}$ ۴) $\frac{۲۳}{۹۰}$

۳۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to۰^+}\left[\frac{Lnx}{(۱+x)^۲}-Ln(\frac{x}{۱+x})\right]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$