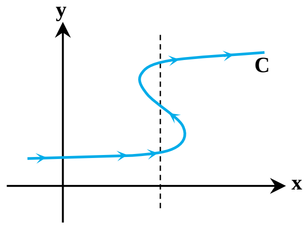
درسنامه۲: منحنی‌های پارامتری و تعریف توابع برداری

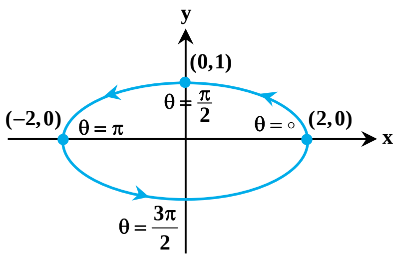
برای بررسی منحنی‌های فضایی از ابزارهایی مانند پارامتری کردن منحنی استفاده می‌کنیم. سرعت حرکت روی منحنی یا مقدار خمیدگی آن را با استفاده از توابعی به نام توابع برداری اندازه‌گیری می‌کنیم. در این بخش با مفهوم منحنی‌های پارامتری و توابع برداری آشنا می‌شویم.

منحنی‌های پارامتری



فرض کنید متحرکی در صفحه‌ی xoy روی منحنی C در حال حرکت باشد. همان‌طور که می‌دانید اگر مطابق شکل یک خط عمودی، بیشتر از یک بار منحنی C را قطع کند، دیگر نمی‌توان آن را به‌صورت تابع $y=f(x)$ بیان کرد. پس برای نوشتن معادله‌ی مسیر حرکت این متحرک، به جای رابطه‌ی دکارتی $y=f(x)$ باید از شیوه‌ی دیگری استفاده کنیم. یکی از روش‌ها استفاده از معادلات پارامتری است. در این روش به جای این که y برحسب x یا x برحسب y نوشته شود، هر دوی آن‌ها به متغیر دیگری مانند t وابسته می‌شوند. این متغیر سوم را **پارامتر** می‌نامیم.

برای مثال در منحنی $y^2=x$ نمی‌توانید y را به صورت تابعی از x بنویسید. اگر هم سعی کنید، به تساوی $y=\pm\sqrt{x}$ می‌رسید که تابع نیست، زیرا به ازای هر $x\ge 0$، دو مقدار y به‌دست می‌آید. اما همین منحنی را می‌توانیم با معادلات پارامتری $\begin{cases}x=t^2\\y=t\end{cases}$ بیان کنیم و حالا به ازای هر مقدار t، فقط یک x و یک y به‌دست می‌آید. پس منحنی $y^2=x$ تابعی برحسب x نیست اما می‌توان آن را به صورت تابعی برحسب متغیر t نوشت. البته معادلات پارامتری می‌توانند توابع $y=f(x)$ را هم نشان دهند. برای مثال تابع $y=2x^3+x$ را می‌توانیم به صورت $\begin{cases}x=t\\y=2t^3+t\end{cases}$ پارامتری کنیم. اگر پارامتر t نشان‌دهنده‌ی زمان باشد، با جایگذاری مقادیر مختلف به جای آن می‌توانیم مشخص کنیم که در هر لحظه، کدام نقطه از منحنی به‌دست می‌آید. بنابراین معادلات پارامتری می‌توانند انواع مختلفی از منحنی‌ها را نشان دهند در حالی که معادله‌ی $y=f(x)$ فقط برای منحنی‌هایی که تابعی از x باشند، قابل استفاده است.



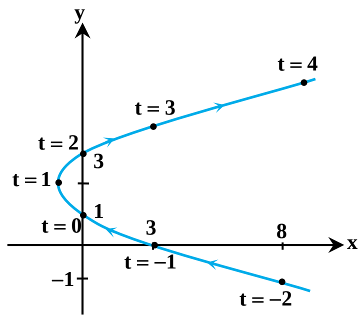
به طور خلاصه یک منحنی پارامتری، منحنی‌ای است که مختصات نقاط آن با جایگذاری یک پارامتر مانند t در فرمول‌های $x=x(t)$ و $y=y(t)$ به‌دست می‌آیند. اگرچه اغلب اوقات از پارامتر t استفاده می‌کنیم اما این کار الزامی نیست. برای مثال در منحنی $C:\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ از پارامتر θ استفاده شده است. به ازای $\theta=0$ داریم $(x,y)=(2,0)$ و به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی $(x,y)=(0,1)$ به‌دست می‌آید و به همین ترتیب می‌توانیم با قرار دادن مقادیر مختلف θ نقاط مختلف C را تعیین کنیم.

تذکر ۱: گاهی اوقات می‌توانیم از معادلات پارامتری $x=x(t)$، $y=y(t)$ متغیر t را حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم x و y را پیدا کنیم. برای مثال اگر $x=t^2-2t$ و $y=t-1$ باشد، با ایجاد مربع کامل در ضابطه‌ی x خواهیم داشت $x=(t^2-2t+1)-1=(t-1)^2-1$ و اکنون از تساوی $y=t-1$ استفاده می‌کنیم و به تساوی $x=y^2-1$ می‌رسیم. یک راه دیگر آن است که از رابطه‌ی $y=t-1$ نتیجه بگیریم $t=y+1$ و این نتیجه را در معادله‌ی پارامتری x قرار بدهیم:

$$x=t^2-2t=(y+1)^2-2(y+1)=y^2-1$$

مثال ۱: منحنی C با معادلات پارامتری $y=t+1$، $x=t^2-2t$ تعریف شده است. این منحنی را رسم کرده و نوع آن را تعیین کنید.

پاسخ: در این منحنی پارامتر t محدود نشده است. بنابراین $-\infty<t<+\infty$ خواهد بود. با قرار دادن برخی از مقادیر t در معادلات پارامتری، چند نقطه از منحنی را مشخص می‌کنیم. سپس با حرکت در جهت افزایش t می‌توانیم این منحنی را رسم کنیم.



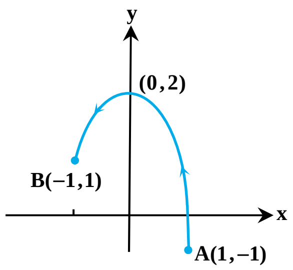
t	x	y
−۲	۸	−۱
−۱	۳	۰
۰	۰	۱
۱	−۱	۲
۲	۰	۳
۳	۳	۴
۴	۸	۵

از نمودار به‌دست آمده معلوم می‌شود که این منحنی یک سهمی است. البته برای اطمینان بیشتر از این موضوع می‌توانیم متغیر t را از معادلات فوق حذف کرده و رابطه‌ی مستقیم بین x و y را پیدا کنیم. از تساویِ $y=t+1$ معلوم می‌شود که $t=y-1$ است. حالا با قرار دادن این نتیجه در معادله‌ی x خواهیم داشت:

$$x=t^2-2t=(y-1)^2-2(y-1)=y^2-4y+3$$

بنابراین منحنی $x=y^2-4y+3$ یک سهمی است.

مثال ۲: منحنی پارامتری $x=\cos t$ ، $y=۲\sin^۲ t-\cos t$ را در فاصله‌ی $۰\le t\le \pi$ رسم کنید.



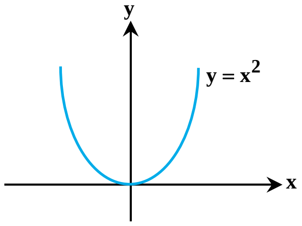
پاسخ: در این مثال پارامتر t در محدوده‌ی $۰\le t\le \pi$ قرار گرفته است. اگر $t=۰$ قرار دهیم نقطه‌ی $A(۱,-۱)$ به‌دست می‌آید که ابتدای این منحنی است. به ازای $t=\frac{\pi}{۲}$ داریم $x=۰$ و $y=۲$ و منحنی از نقطه $(۰,۲)$ عبور می‌کند. در نهایت وقتی $t=\pi$ قرار می‌دهیم، نقطه‌ی $B(-۱,۱)$ به‌دست می‌آید که انتهای منحنی است.

اگر بتوانیم از معادلات پارامتری x و y متغیر t را حذف کرده و معادله‌ی دکارتی x و y را پیدا کنیم، رسم این منحنی ساده‌تر می‌شود. از رابطه‌ی $\sin^۲ t=۱-\cos^۲ t$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب داریم:

$$y=۲(۱-\cos^۲ t)-\cos t=۲(۱-x^۲)-x \Rightarrow y=۲-x-۲x^۲$$

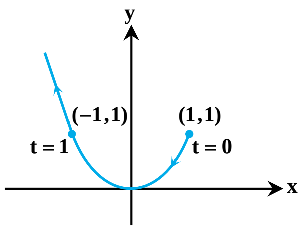
پس این منحنی بخشی از سهمی $y=۲-x-۲x^۲$ است که در بازه‌ی $-۱\le x\le ۱$ قرار دارد.

مزیت معادلات پارامتری



فرض کنید به شما اطلاع دهند که ذره‌ای روی منحنی $y=x^۲$ حرکت کرده است. ببینیم این اطلاع چقدر به شما کمک می‌کند تا نحوه‌ی حرکت آن ذره را بررسی کنید. با کمی دقت متوجه می‌شوید که بسیاری از جزئیات مجهول باقی می‌مانند. مثلاً این که آن ذره از کدام نقطه شروع به حرکت کرده است؟ در کدام جهت حرکت کرده است؟ با چه سرعتی حرکت کرده است؟ شما جواب هیچ‌کدام از این پرسش‌ها را نمی‌دانید!

حالا فرض کنید به شما اطلاع دهند که مسیر حرکت یک ذره دارای معادلات پارامتری $x=۱-۲t$ و $y=(۱-۲t)^۲$ در بازه $۰\le t<\infty$ است. ببینیم این معادله‌ها چگونه مسیر حرکت را مشخص خواهند کرد؟



اولاً با دقت به روابط پارامتری داده شده، متوجه می‌شویم که باز هم $y=(۱-۲t)^۲=x^۲$ است؛ پس ذره‌ی موردنظر روی سهمی $y=x^۲$ حرکت کرده است. با این تفاوت که این بار پاسخ همه‌ی پرسش‌های قبل را می‌دانیم. در لحظه‌ی شروع حرکت یعنی در لحظه‌ی $t=۰$ داریم $x=۱$ و $y=۱$ پس می‌دانیم که این حرکت از نقطه‌ی $(۱,۱)$ آغاز شده است. یک ثانیه‌ی بعد یعنی در لحظه‌ی $t=۱$ داریم $x=-۱$ و $y=۱$ پس با گذشت مدت یک ثانیه، متحرک یاد شده از نقطه‌ی $(۱,۱)$ به نقطه‌ی $(-۱,۱)$ رسیده است. با این حساب می‌توانیم سرعت حرکت را هم تشخیص بدهیم. ضمن آن که جهت حرکت نیز مشخص شده است.

بنابراین معادله‌ی پارامتری یک منحنی نسبت به معادله‌ی دکارتی آن، اطلاعات بیشتری به ما می‌دهد.

تذکر ۲: فرض کنید منحنی C با معادلات پارامتری $x=x(t)$ و $y=y(t)$ مشخص شده باشد. اگر در این معادلات، به جای t از ۲t استفاده کنیم، منحنی $x=x(۲t)$ ، $y=y(۲t)$ همان منحنی قبلی است؛ فقط سرعت حرکت روی آن دو برابر شده است. (البته شیوه‌ی دقیق محاسبه‌ی سرعت را در بخش‌های بعدی خواهیم خواند). در واقع معادله‌ی پارامتری یک منحنی، منحصر به فرد نیست و ممکن است برای یک منحنی بتوانیم معادلات پارامتری متفاوتی را پیدا کنیم.

مثال ۳:

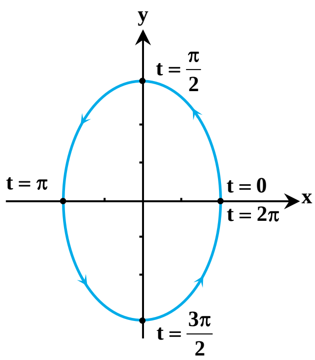
الف) منحنی پارامتری $x=۲\cos t$ ، $y=۳\sin t$ را در فاصله‌ی $۰\le t\le ۲\pi$ رسم کنید.

ب) منحنی پارامتری $x=۲\cos ۲t$ ، $y=۳\sin ۲t$ را در فاصله‌ی $۰\le t\le ۲\pi$ رسم کرده و با منحنی (الف) مقایسه کنید.

پاسخ:

الف) مطابق جدول زیر در برخی از مقادیر مهم t، نقطه‌ی (x,y) را مشخص می‌کنیم. با حرکت در جهت افزایش t و اتصال این نقاط به یکدیگر متوجه می‌شویم که منحنی مورد نظر یک دور کامل از یک بیضی است.

t	x	y
۰	۲	۰
$\frac{\pi}{۲}$	۰	۳
π	-۲	۰
$\frac{۳\pi}{۲}$	۰	-۳
۲π	۲	۰



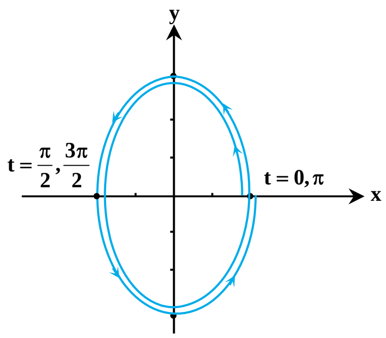
همان‌طور که می‌دانید با حذف t از معادلات و نوشتن معادله‌ی دکارتی می‌توانیم از بیضی بودن منحنی مطمئن شویم:

$$\begin{cases} x = ٢\cos t \\ y = ٣\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{٢} \\ \sin t = \dfrac{y}{٣} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\cos^٢ t + \sin^٢ t = ١$ است پس به معادله‌ی $\dfrac{x^٢}{٤} + \dfrac{y^٢}{٩} = ١$ می‌رسیم که یک بیضی با شعاع افقی ٢ و شعاع عمودی ٣ است.

ب) اکنون به معادلات پارامتری $x = ٢\cos ٢t$ و $y = ٣\sin ٢t$ در فاصله‌ی $٠ \le t \le ٢\pi$ توجه می‌کنیم. با تشکیل جدول در همان مقادیر از t متوجه می‌شویم که همان بیضی قبلی به‌دست می‌آید اما چون به جای t از $٢t$ استفاده شده است، سرعت حرکت روی منحنی دو برابر شده است و به همین دلیل یک بیضی کامل را در فاصله‌ی زمانی $٠ \le t \le \pi$ طی می‌کنیم، سپس در زمان باقی مانده که از $t = \pi$ تا $t = ٢\pi$ ادامه دارد، یک دور دیگر از همین بیضی را طی می‌کنیم.

t	x	y
٠	٢	٠
$\frac{\pi}{٢}$	-٢	٠
π	٢	٠
$\frac{٣\pi}{٢}$	-٢	٠
٢π	٢	٠



دقت کنید که دورهای اول و دوم بر هم منطبق هستند ولی ما عمداً آن‌ها را با کمی فاصله نشان داده‌ایم تا بهتر بتوانید نحوه‌ی حرکت منحنی را مشاهده کنید.

تبدیل منحنی‌های دکارتی به پارامتری

گاهی اوقات ترجیح می‌دهیم یک منحنی دکارتی را به‌صورت پارامتری بنویسیم. برای انجام این کار از دسته‌بندی زیر استفاده می‌کنیم:

١ــ پارامتری کردن تابع $y = f(x)$

اگر ضابطه‌ی y را برحسب x دارید، کافیست فرض کنید $x = t$ و آن‌گاه $y = f(t)$ به‌دست می‌آید. پس معادله‌ی پارامتری منحنی $y = f(x)$ به‌صورت $r(t) = (t, f(t))$ خواهد بود. دقت کنید که حدود t همان حدود x هستند زیرا $x = t$ است.

توجه: بدیهی است که معادله‌ی $x = f(y)$ را می‌توان به‌صورت $y = t$ و $x = f(t)$ پارامتری کرد. در این صورت حدود t، همان حدود y هستند.

٢ــ پارامتری کردن پاره‌خط AB

فرض کنیم $A(x_١, y_١, z_١)$ و $B(x_٢, y_٢, z_٢)$ دو نقطه از فضای سه بعدی باشند. اگر مسیر حرکت یک متحرک، از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B باشد، برای پارامتری کردن این مسیر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{R}(t) = A + (B - A)t \quad , \quad ٠ \le t \le ١$$

به عبارت بهتر، مؤلفه‌های $\vec{R}(t)$ چنین هستند:

$$\vec{R}(t) = (x_١ + (x_٢ - x_١)t, y_١ + (y_٢ - y_١)t, z_١ + (z_٢ - z_١)t)$$

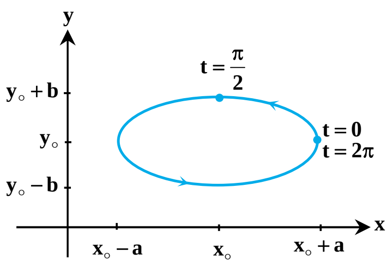
به ازای $t = ٠$ در نقطه‌ی A قرار داریم و در $t = ١$ به نقطه‌ی B می‌رسیم.

٣ــ پارامتری کردن بیضی و دایره

می‌دانید که معادله‌ی یک بیضی در حالت کلی به‌صورت $\dfrac{(x - x_٠)^٢}{a^٢} + \dfrac{(y - y_٠)^٢}{b^٢} = ١$ است. $(x_٠, y_٠)$ مرکز بیضی و a و b شعاع‌های افقی و عمودی آن هستند. از اتحاد مثلثاتی $\cos^٢ t + \sin^٢ t = ١$ برای پارامتری کردن این معادله استفاده می‌کنیم. با این فرض که $\cos t = \dfrac{x - x_٠}{a}$ و $\sin t = \dfrac{y - y_٠}{b}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = x_٠ + a\cos t \\ y = y_٠ + b\sin t \end{cases}$$

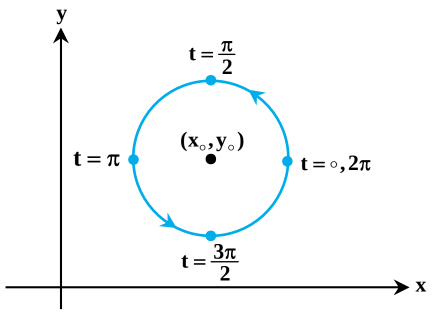
به ازای $t = ٠$ نقطه‌ی $(x_٠ + a, y_٠)$ به‌دست می‌آید که گوشه‌ی سمت راستِ بیضی است.



به ازای $t = \dfrac{\pi}{٢}$ نقطه‌ی $(x_٠, y_٠ + b)$ به‌دست می‌آید که بالاترین نقطه‌ی بیضی است و به همین ترتیب در جهت مثلثاتی روی بیضی حرکت می‌کنیم. در $t = ٢\pi$ دوباره به نقطه‌ی $(x_٠ + a, y_٠)$ می‌رسیم بنابراین، در یک بیضی کامل $٠ \le t \le ٢\pi$ است.

در معادله بیضی اگر $a=b$ باشد، معادله‌ی دایره به‌دست می‌آید. بنابراین دایره‌ی $(x-x_\circ)^۲+(y-y_\circ)^۲=a^۲$ که دایره‌ای به مرکز $(x_\circ,y_\circ)$ و شعاع a است به این صورت پارامتری می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_\circ + a\cos t \\ y = y_\circ + a\sin t \end{cases}$$



برای یک دایره‌ی کامل که در جهت مثلثاتی طی می‌شود، حدود t عبارتند از: $\circ \le t \le ۲\pi$.

خم‌های فضایی: منحنی‌های پارامتری که در صفحه‌ی xoy قرار دارند، دارای دو مؤلفه به‌صورت $\vec{R}(t)=(x(t),y(t))$ هستند. همان‌طور که مشاهده کردید گاهی اوقات می‌توانیم با حذف t از معادلات پارامتری، رابطه‌ی دکارتی بین x و y را پیدا کنیم. اما منحنی‌های فضایی دارای سه مؤلفه به شکل $\vec{R}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ هستند. اگر بخواهیم معادله‌ی پارامتری یک خم فضایی را به معادله‌ی دکارتی تبدیل کنیم، معمولاً دو معادله به‌دست می‌آید که هر کدام رویه‌ای در فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند و منحنی مورد نظر، محل برخورد آنها با یکدیگر است.

برای مثال منحنی فضایی C با معادله‌ی پارامتری $\begin{cases} x=\sqrt{۱-t^۲} \\ y=t \\ z=۲t \end{cases}$ را در نظر بگیرید. با حذف t از این معادلات به دو معادله‌ی دکارتی به شکل $\begin{cases} x^۲+y^۲=۱ \\ z=۲y \end{cases}$ می‌رسیم که نشان می‌دهند منحنی C محل برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۱$ و صفحه‌ی $z=۲y$ است.

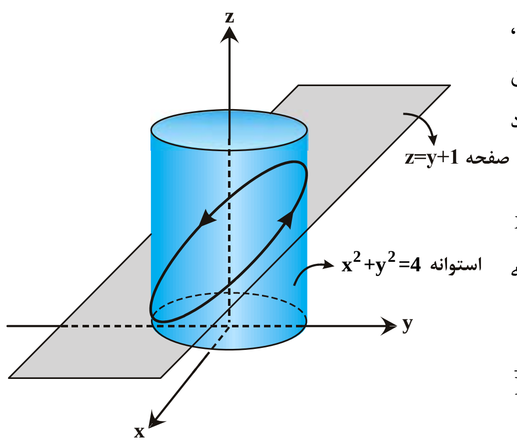
مثال ۴: منحنی پارامتری $\vec{R}(t)=(۲\cos t, ۲\sin t, ۱+۲\sin t)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید.

پاسخ: با توجه به معادله‌ی پارامتری داده شده داریم: $x=۲\cos t$ ، $y=۲\sin t$ ، $z=۲\sin t+۱$. رابطه‌ی بین z و y خیلی واضح است. تساوی $z=y+۱$ برقرار است و نشان می‌دهد که منحنی $\vec{R}(t)$ روی صفحه‌ی $z=y+۱$ قرار گرفته است. از طرف دیگر با کمک اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ t+\sin^۲ t=۱$ می‌توانیم رابطه‌ی x و y را بنویسیم:

$$x^۲+y^۲=۴\cos^۲ t+۴\sin^۲ t=۴$$

معادله‌ی $x^۲+y^۲=۴$ استوانه‌ای در فضای سه بعدی است. از اینجا هم نتیجه می‌گیریم که منحنی $\vec{R}(t)$ روی این استوانه قرار دارد. به طور خلاصه با استفاده از معادلات پارامتری داریم:

$$\vec{R}(t): \begin{cases} x^۲+y^۲=۴ \\ z=y+۱ \end{cases}$$



منحنی $\vec{R}(t)$ محل برخورد استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و صفحه‌ی $z=y+۱$ است.

توابع برداری

به تابع $f(t)=t^۲+۱$ توجه کنید. در این تابع با قرار دادن هر عدد حقیقی به جای t، یک عدد حقیقی دیگر به‌دست می‌آید. مثلاً به ازای $t=۱$ مقدار $f(۱)=۲$ به‌دست می‌آید. این نوع از توابع را **توابع حقیقی** می‌نامند. اما توابعی هم هستند که با قرار دادن هر عدد حقیقی در آن‌ها یک بردار به‌دست می‌آید. برای مثال به تابع $\vec{F}(t)=(۲t+۱)\vec{i}+۳t\vec{j}-t^۲\vec{k}$ دقت کنید. با قرار دادن $t=۱$ در این تابع به بردار $\vec{F}(۱)=۳\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ می‌رسیم. چنین توابعی را **توابع برداری** می‌نامند. در حالت کلی یک تابع برداری به‌صورت $\vec{F}(t)=f_۱(t)\vec{i}+f_۲(t)\vec{j}+f_۳(t)\vec{k}$ یا $\vec{F}(t)=(f_۱(t),f_۲(t),f_۳(t))$ نوشته می‌شود. توابع حقیقی $f_۱(t)$، $f_۲(t)$ و $f_۳(t)$ را مؤلفه‌های $\vec{F}(t)$ می‌نامند. معمولاً توابع برداری را با حروف بزرگ و توابع حقیقی را با حروف کوچک نشان می‌دهیم.

فرض کنید ذره‌ای در فضا در حال حرکت باشد و مکان این ذره در لحظه‌ی t توسط بردار $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ مشخص شده باشد. $\vec{R}(t)$ را بردار مکان می‌نامیم. بردار مکان، حالتِ خاصی از توابع برداری است که در بررسی مسائل فیزیکی مربوط به حرکت، سرعت و شتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد. دقت کنید که هر چه در مورد توابع برداری گفته می‌شود، برای بردار مکان $\vec{R}(t)$ هم قابل استفاده است.

حد توابع برداری: برای محاسبه‌ی حد تابع برداری $\vec{F}(t)$ در نقطه‌ی $t_\circ$ کافیست از مؤلفه‌های آن در این نقطه حد بگیریم. به عبارتی داریم:

$$\lim_{t\to t_\circ}\vec{F}(t)=\lim_{t\to t_\circ}f_۱(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_\circ}f_۲(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_\circ}f_۳(t)\vec{k}$$

پس حد $\vec{F}(t)$ در $t_\circ$ فقط وقتی وجود دارد که همه‌ی مؤلفه‌های آن در این نقطه دارای حد باشند.

مثال۵: تابع $f:R\to R^3$ با ضابطه $\vec{F}(t)=\frac{\cos 2t}{\sin 4t}\vec{i}+\sin t\vec{j}+\frac{\sin t}{2\cos t}\vec{k}$ مفروض است، حد تابع در نقطه $t_0=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) حد موجود نیست. ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ ۳) $\frac{1}{2}(\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k})$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{F}(t)$ باید از همه‌ی مؤلفه‌های $\vec{F}(t)$ حد بگیریم:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{F}(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2t}{\sin 4t}\vec{i}+\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t\vec{j}+\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{2\cos t}\vec{k}$$

در اولین مؤلفه، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود، پس از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2t}{\sin 4t}=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin 2t}{4\cos 4t}=\frac{1}{2}$$

در سایر مؤلفه‌ها حالت مبهم ایجاد نمی‌شود و مقدار حد معلوم است.

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{F}(t)=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k})$$

پیوستگی توابع برداری: یک تابع حقیقی مانند $f(t)$ به شرطی در t_0 پیوسته است که حد آن در این نقطه با مقدارش برابر باشد یعنی $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=f(t_0)$ باشد. حالا به تابع برداریِ $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ توجه کنید. اگر مؤلفه‌های $\vec{F}(t)$ همگی در t_0 پیوسته باشند، می‌گوییم $\vec{F}(t)$ در t_0 پیوسته است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_0)$$

مثال۶: به ازای چه مقادیری از a تابع $\vec{F}(t)=\begin{cases}\sin t\vec{i}+a(t+2)\vec{j}+\frac{tgt}{t}\vec{k} & ;\ t\neq 0\\ \vec{j}+\vec{k} & ;\ t=0\end{cases}$ در نقطه $t=0$ پیوسته است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ : گزینه «۲» از صورت سؤال معلوم است که در $t=0$ داریم $\vec{F}(0)=\vec{j}+\vec{k}$. حالا مقدار $\lim\limits_{t\to 0}\vec{F}(t)$ را حساب می‌کنیم، حاصل این حد باید با $\vec{F}(0)$ برابر باشد.

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{t\to 0}(\sin t)\vec{i}+\lim_{t\to 0}a(t+2)\vec{j}+\lim_{t\to 0}\frac{tgt}{t}\vec{k}=2a\vec{j}+\vec{k}=\vec{F}(0)\Rightarrow 2a\vec{j}+\vec{k}=\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

مشتق‌گیری از توابع برداری: تابع برداری $\vec{F}(t)$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر مؤلفه‌های آن در این نقطه، مشتق‌پذیر باشند. مشتق‌گیری از تابع برداری $\vec{F}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$ با مشتق‌گیری از تک‌تک مؤلفه‌ها انجام می‌شود:

$$\vec{F}'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$$

با مشتق‌گیری دوباره از مؤلفه‌ها می‌توانیم بردار $\vec{F}''(t)$ را بنویسیم:

$$\vec{F}''(t)=(f_1''(t),f_2''(t),f_3''(t))$$

قواعد مشتق‌گیری از توابع برداری: پیش از آغاز بحث، به اعمال جبری متنوعی که روی توابع برداری انجام می‌شوند اشاره می‌کنیم. فرض کنید $\vec{F}(t)$ و $\vec{G}(t)$ توابع برداری و $h(t)$ تابعی حقیقی باشد. انواع اعمال دوتایی که با این توابع ایجاد می‌شوند عبارتند از $\vec{F}oh(t)$، $h(t)\vec{F}(t)$، $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ که مفهوم هر کدام و نحوه‌ی مشتق‌گیری از آن را شرح می‌دهیم. $\vec{F}oh(t)$ تابعی برداری است که از ترکیب $h(t)$ و $\vec{F}(t)$ به‌دست می‌آید. اگر در تابع $\vec{F}(t)$ به جای همه‌ی tها، $h(t)$ را قرار دهید $\vec{F}oh(t)$ به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $\vec{F}(t)=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ و $h(t)=3t$ باشد، ترکیب آن‌ها $\vec{F}oh(t)=\sin 3t\vec{i}+\cos 3t\vec{j}+3t\vec{k}$ است. تابع برداری $h(t)\vec{F}(t)$ حاصل‌ضرب یک تابع حقیقی در یک تابع برداری است. اگر $\vec{F}(t)$ و $h(t)$ همان توابع قبلی باشند داریم: $h(t)\vec{F}(t)=3t(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t\vec{k})=3t\sin t\vec{i}+3t\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}$. علاوه بر این دو تابع برداری $\vec{F}(t)$ و $\vec{G}(t)$ را می‌توان در هم ضرب داخلی و خارجی کرد که آن‌ها را با $\vec{F}(t).\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ نشان می‌دهیم. در اینجا نحوه‌ی مشتق‌گیری از این اعمال دوتایی را مرور می‌کنیم.

۱) $(\vec{F}oh)'(t)=h'(t)\vec{F}'(h(t))$

۲) $(h\vec{F})'(t)=h'(t)\vec{F}(t)+h(t)\vec{F}'(t)$

۳) $(\vec{F}.\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t).\vec{G}(t)+\vec{F}(t).\vec{G}'(t)$

۴) $(\vec{F}\times\vec{G})'(t)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

در مورد حاصل‌ضرب خارجی دقت کنید که نباید توابع برداری را جابجا کنید. برای مثال اگر $\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$ را به‌صورت $\vec{G}'(t)\times\vec{F}(t)$ بنویسید نادرست خواهد بود. اما در مورد حاصل‌ضرب داخلی جابجا کردن توابع اشکالی ایجاد نمی‌کند.