مثال ۴ صفحه ۳

مثال ۴: با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n(n+1))^2}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi^2}{3}-3$ ۲) $\frac{\pi^2}{3}+1$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}-2$ ۴) $\frac{\pi^2}{3}-1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اولاً توجه کنین که چون قرار نیست ما سؤال رو تشریحی حل کنیم؛ بنابراین به فرض سؤال کاری نداریم و مستقیم سراغ سری عددی خواسته شده می‌ریم! جمله‌ی اول سری به ازای $n=1$ برابر با $\frac{1}{1^2(1+1)^2}=\frac{1}{4}$ به‌دست میاد، چون از $\frac{1}{2}$ کمتره، پس دیگه لازم نیست بقیه جملات رو بنویسیم.

پس حاصل سری از $\frac{1}{4}$ بیشتره؛ اما با توجه به گزینه‌ها این نتیجه به درد ما نمی‌خوره پس باید بریم سراغ تعیین ماکزیمم سری؛ همون‌طور که گفتیم، حاصل سری از $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ کمتره، خُب حالا بگین ببینیم کدوم گزینه می‌تونه صحیح باشه؟! راهنمایی می‌کنم $\frac{\pi^2}{3}\simeq 3/28$ میشه! معلومه فقط گزینه (۱) چنین شرایطی داره

دقت کنین حتی اگه مقدار حدودی $\frac{\pi^2}{3}$ را ندونین (که البته خیلی بعیده!) باز هم اشکالی پیش نمیاد، اگه $\frac{\pi^2}{3}$ رو همان سه و خورده‌ای هم تصور کنین، حداقل غلط بودن سه گزینه‌ی دیگه رو می‌فهمیم! گزینه (۲) بزرگتر از عدد ۴، گزینه (۳) بزرگتر از عدد ۱ و گزینه (۴) بزرگتر از عدد ۲ هستش!

مثال ۷ صفحه ۴

مثال ۷: مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ برابر با چیست؟ (عمران ـ سراسری ۸۷ و سراسری ۸۱)

۱) ۱ ۲) $2e+1$ ۳) $e+1$ ۴) $2e-3$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا جملات سری رو تا جایی که به جمله‌ای کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ برسیم، می‌نویسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\frac{2+1}{2!}+\frac{3+1}{3!}+\frac{4+1}{4!}+\cdots=\frac{3}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{24}+\cdots$$

پس حاصل سری قطعاً از عدد $\frac{57}{24}\simeq 2$ بیشتر و از عدد $\frac{3}{2}+\frac{4}{6}+\frac{5}{24}+2\times\frac{5}{24}$ کمتره، یعنی از عدد $\frac{67}{24}\simeq 3$ باید کمتر باشه، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

دقت کنین لازم نیست حاصل کسرها رو دقیق حساب کنین همون که بدونین نزدیک به هم میشه و از ۳ بیشتر نمیشه کافیه؛ $\frac{3}{2}$ که معلومه برابر با ۱/۵ میشه و $\frac{2}{3}$ از ۱ کمتر و $\frac{15}{24}$ هم از $\frac{1}{2}$ بیشتره و حاصل این دو عدد هم حداکثر ۱/۵ میشه و بنابراین حاصل حدود ۳ میشه و نه بیشتر!

مثال ۲۰ صفحه ۸

مثال ۲۰: مقدار عددی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۴)

۱) $2\ln 2-1$ ۲) $2\ln 2+1$ ۳) $2\ln 2-2$ ۴) $2\ln 2+2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا چند جمله‌ی اول سری رو می‌نویسیم: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{(-1)^0}{(0+1)(0+2)}+\frac{(-1)^1}{(1+1)(1+2)}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\cdots$

حالا خوب دقت کنین؛ حاصل سری قطعاً از $\frac{1}{2}$ کمتره، چون یه عددی $\left(\frac{1}{6}\right)$ داره از $\frac{1}{2}$ کم میشه (حواستون باشه یه وقت نگید جمله‌ی بعد از $-\frac{1}{6}$ مثبته و شاید باعث بشه حاصل از $\frac{1}{2}$ بزنه بالا؟! این تصور غلطه! چون از جمله‌ی بعدی عدد مثبتیه که زورش به $-\frac{1}{6}$ نمی‌رسه و کماکان می‌تونیم مطمئن باشیم از $\frac{1}{2}$ یه چیزی کم میشه!) پس گزینه‌ای جوابه که از $\frac{1}{2}$ کمتره و البته مقدارش مثبته، حالا گزینه‌ها رو بررسی می‌کنیم، فقط باید بدونیم $\ln 2\simeq 0/7$ هستش.

بنابراین گزینه‌ی (۱) جوابه؛ چون $2\times 0/7-1=1/4-1=0/4$. گزینه‌های (۲) و (۴) که خیلی بزرگتر از $\frac{1}{2}$ هستن و گزینه (۳) هم مقدارش منفیه!

مثال ۳۴ صفحه ۱۱

مثال ۳۴: مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^{n+1}}{n!}$ برابر است با: (عمران ـ سراسری ۸۸)

۱) $e^{-x}-xe^{-x}$ ۲) $xe^{-x}-x^2e^{-x}$ ۳) $e^{x}+xe^{x}$ ۴) $xe^{x}+x^2e^{x}$

پاسخ: گزینه «۲» اولاً توجه کنین که اگه در سری به جای x، عدد صفر قرار بدیم، حاصلش صفر میشه، پس گزینه‌ای جوابه که اگه به جـای x هـای اون صفر قرار دادیم، حاصلش صفر بشه. تا اینجا می‌فهمیم یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) جوابن! برای انتخاب از بین یکی از گزینه‌های (۲) یـا (۴) کافیـه بـه جای x، هم در سری داده شده در صورت سؤال و هم در گزینه‌های (۲) و (۴) عدد یک رو قرار بدیم و سؤال رو به صورت زیر بازنویسی کنیم:

حاصل سری $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}$ برابر با کدام‌یک از دو گزینه‌ی زیر میشه:

گزینه ۲) ۰ گزینه ۴) $1\times e^{1}+1^2\times e^{1}$

حالا چندتا جمله‌ی اول رو می‌نویسیم: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n!}=\frac{(-1)^0(0+1)}{0!}+\frac{(-1)^1(1+1)}{1!}+\frac{(-1)^2(2+1)}{2!}+\frac{(-1)^3(3+1)}{3!}+\cdots=1+(-2)+\frac{3}{2}-\frac{4}{6}+\cdots$

به نظر می‌رسه حاصل جمع برابر با صفر بشه، تا اینکه حاصل یه عدد مثبت بِشه (به هیچ‌وجه این حاصل جمع نزدیک به $2e$ نمیشه) پس گزینه‌ی (۲) جوابه

مثال ۴۳ صفحه ۱۵

مثال ۴۳: حاصل عبارت $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2x^2}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۰)

۱) $\frac{1}{x^2}tg^{-1}x$ ۲) $\frac{1}{x}tg^{-1}x$ ۳) $tg^{-1}x$ ۴) $xtg^{-1}x$

پاسخ: گزینه «۲» منظور طراح از این تست، استفاده از انتگرال معین و استفاده از مجموع ریمان است. اما ما می‌تونیم تست رو راحت‌تر حـل کنـیم! اگه به جای x در سری عدد صفر رو قرار دهیم، سری زیر رو داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$$

از خواص سیگما می‌دونیم؛ $\sum_{k=1}^{n}c=nc$، بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=n\times\frac{1}{n}=1$$

پس اگه $x\to 0$، آن‌گاه حاصل سری برابر با **یک** میشه، در گزینه‌ها هر کدوم که بـه ازای $x\to 0$، حاصـلش برابـر بـا **یـک** شـد، جوابـه. واضـحه حاصـل گزینه‌های (۳) و (۴) صفر و حاصل گزینه‌ی (۱)، بی‌نهایت میشه، فقط حاصل گزینه‌ی (۲) است که برابر یک میشه

مثال ۵۲ صفحه ۱۷

مثال ۵۲: بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x+3)^n}{n}$، کدام است؟ (MBA و مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۳)

۱) $[-\frac{19}{4},\frac{13}{4}]$ ۲) $[-1,-\frac{1}{2})$ ۳) $[-1,-\frac{1}{2}]$ ۴) $(-\frac{19}{4},\frac{13}{4})$

پاسخ: گزینه «۲» این سؤال رو میشه تو کمتر از ۳ ثانیه جواب داد! خُب، درجه n در مخرج ۱ و درجه n در صـورت کـسر صـفر داده شـده، یعنـی اختلاف درجه‌ی مخرج و صورت دقیقاً برابر با یک شده، پس بازه‌ی همگرایی قطعاً باید به صورت **نیم‌باز** باشه، فقط گزینه‌ی (۲) چنین شرایطی داره

مثال ۵۳ صفحه ۱۷

مثال ۵۳: فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n+3}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۱)

۱) $[0,2]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2]$ ۴) $(0,2)$

پاسخ: گزینه «۳» خُب اگه سری را به فرم گفته شده بنویسیم، $\frac{1}{n}$ داریم و چون اختلاف درجه‌ی مخرج و صورت کسر دقیقـاً برابـر بـا یـک هـستش، بنابراین بازه همگرایی باید یه طرفش باز باشه، پس فقط گزینه‌ی (۳) می‌تونه جواب باشه

مثال ۵۴ صفحه ۱۸

مثال ۵۴: فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+1}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $(0,1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-1,1]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این که درجه‌ی مخرج بزرگتر از یک هستش، پس بازه همگرایی باید بسته باشه و این یعنی گزینه (۴) جوابه

مثال ۶۷ صفحه ۲۰

مثال ۶۷: بازه همگرایی تابع $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^2}(x-2)^n$ کدام است؟ (نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $[1,3]$ ۴) $(1,3)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اولاً چون مرکز بازه همگرایی $x=2$ هستش، پس یکی از گزینه‌های (۳) و (۴) می‌تونن جواب باشن! از طرفی تو مخرج کسر $n(Lnn)^2$ داریم، پس بازه همگرایی حتماً باید بسته باشه و این یعنی گزینه (۳) جوابه

مثال ۶۸ صفحه ۲۰

مثال ۶۸: بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)3^n}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $[-5,-1)$ ۲) $(-5,-1)$ ۳) $[-5,-1]$ ۴) $(-5,-1]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اولاً چون اختلاف درجه‌ی مخرج و صورت کسر دقیقاً برابر با یک میشه، پس بازه قطعاً باید **نیم‌باز** باشه و این یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) غلطن! حالا برای اینکه از بین گزینه‌های (۱) و (۴) یکی رو حذف کنیم، می‌تونیم $x=-1$ یا $x=-5$ رو در سری قرار بدیم، هر کدوم عبارت جلوی سری رو همواره مثبت کرد، نمی‌تونه جزو بازه همگرایی باشه و یا یه جور دیگه هم می‌تونیم بگیم؛ هر کدوم باعث شد، جلوی سری همواره مثبت **نشه**، جزو بازه همگرایی هستش؛ (فرق نمی‌کنه یکی رو امتحان می‌کنیم)؛ واضحه $x=-1$ سری رو همواره مثبت می‌کنه و این یعنی $x=-1$ نمی‌تونه جزو بازه همگرایی باشه و بنابراین گزینه‌ی (۱) جوابه

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+3)^n}{(n+1)3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} \rightarrow \text{سری واگراست}$$

مثال ۷۴ صفحه ۲۲

مثال ۷۴: کدام بازه، دارای این خاصیت است که برای هر x در آن بازه، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+5)^n}{\sqrt{n}3^{n+1}}$ همگرا است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۲)

۱) $[-2,-\frac{4}{3}]$ ۲) $(-\frac{8}{3},-\frac{2}{3})$ ۳) $(-2,-\frac{4}{3}]$ ۴) $[-\frac{8}{3},-\frac{2}{3})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً توجه کنین که چون درجه‌ی n مخرج برابر با $\frac{1}{2}$ هستش، پس بازه قطعاً **نیم‌بازه**؛ پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) جوابن! حالا برای اینکه ببینیم کدوم گزینه جوابه، مثلاً می‌تونیم عدد $-\frac{8}{3}$ رو به جای x قرار بدیم:

$$x=-\frac{8}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3(-\frac{8}{3})+5]^n}{\sqrt{n}3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{\sqrt{n}3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\sqrt{n}}$$

همون‌طور که می‌بینید سری همواره مثبت نشد. پس $x=-\frac{8}{3}$ می‌تونه جزو بازه همگرایی باشه؛ این یعنی گزینه (۴) جوابه

توجه مهم: اساساً این سؤال دارای اشکالی جزئی است؛ چرا که xهای بازه $[-2,-\frac{4}{3})$ نیز باعث همگرایی سری می‌شوند؛ بهتر بود در صورت سؤال عبارت «بزرگترین بازه همگرایی» قید می‌شد؛ با وجود این، در این گونه سؤالات شما همیشه **بزرگترین بازه همگرایی** رو در نظر بگیرید.

مثال ۱ صفحه ۲۴

مثال ۱: مقدار انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{\text{Ln}(1+x)}{x}dx$ برابر است با: (مکانیک ـ سراسری ۹۱)

(در صورت نیاز از تساوی‌های: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ می‌توانید استفاده کنید.)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$

۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) انتگرال وجود دارد ولیکن قابل محاسبه نمی‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یه راه‌حل بسیار زیبا و منحصر به فرد (بدون دخالت دست و خودکار!) به شکل زیر هستش:

می‌دونیم تو بازه صفر تا یک، $\text{Ln}(1+x)<x$، پس حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{\text{Ln}(1+x)}{x}dx$ از حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}\frac{x}{x}dx$ و یا به عبارت دیگه از حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}dx$ کمتره، چون حاصل انتگرال دوم برابر با ۱ می‌شه، پس باید حاصل انتگرال اصلی هم از عدد ۱ کمتر باشه! تو گزینه‌ها، فقط مقدار داده شده تو گزینه (۱) هست که مقدارش از ۱ کمتره!! این تست، از اون دسته سؤالاتیه که در حین خوردن کیک سازمان سنجش هم می‌تونستین بهش جواب بدین 🙂 وای اگه طراح این سؤال بفهمه من این سؤال رو اینجوری حل کردم، چه آتیشی به پا کُنه!؟ (اگه خانوم باشه که خودِشْ می‌زنه! اگه آقا باشه دنبال من می‌گرده، منو بزنه!)

مثال ۹ صفحه ۲۶

مثال ۹: مقدار انتگرال $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۳)

۱) $\text{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{1-x})+c$ ۲) $\text{Arcsin}(\frac{x-1}{x\sqrt{2}})+c$ ۳) $\text{Arcsin}(\frac{1-x}{x\sqrt{2}})+c$ ۴) $\text{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{x-1})+c$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اولاً دقت کنین که $x=1$ هیچ مشکلی زیر انتگرال ایجاد نمی‌کنه پس گزینه‌های (۱) و (۴) غلطن؛ چون به ازای $x=1$ دچار داستان می‌شن! از طرفی به ازای xهای بزرگتر از ۱ عبارت زیر انتگرال همیشه مثبته؛ پس گزینه‌ای جوابه که به ازای $x>1$ همیشه مثبت باشه!؟ پس گزینه (۳) نمی‌تونه جواب باشه 🙂

مثال ۱۷ صفحه ۲۸

مثال ۱۷: اگر $x>0$ و $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ باشد، مقدار انتگرال $G(x)=\int_{1}^{x}\frac{e^{at}}{t}dt$، بر حسب F برابر کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۸۹)

۱) $F(ax)$ ۲) $F(ax)+F(a)$ ۳) $F(ax)-F(a)$ ۴) $-F(ax)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» به x مقدار ۱ می‌دیم، اونوقت داریم: $G(1)=\int_{1}^{1}\frac{e^{at}}{t}dt \xrightarrow{\text{چون حد بالا و پایین مساوی هستن}} G(1)=0$

حالا تو گزینه‌ها به جای x، عدد ۱ قرار می‌دیم، هر کدوم صفر شد، جواب سؤاله. فقط گزینه (۳) چنین شرایطی رو داره 🙂 (چون $F(a)-F(a)=0$)

مثال ۲۸ صفحه ۳۱

مثال ۲۸: مقدار $I_n=\int_{0}^{1}(\text{Lnx})^n dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $n!$ ۲) $(-1)^n(n-1)!$ ۳) $(n-1)!$ ۴) $(-1)^n n!$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» به جای n تو صورت سؤال و تو گزینه‌ها، ۱ قرار می‌دیم، حالا سؤال اینجوری میشه که حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}\text{Lnx}dx$ برابر با کدوم گزینه میشه؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) -1

پس تا اینجا می‌دونیم یا گزینه (۲) درسته یا گزینه (۴) (چون Lnx تو بازه‌ی ۰ تا ۱ منفیه، بنابراین حاصل انتگرال هم باید منفی باشه؛ اگه $n=0$ قرار بِدیم، حاصل انتگرال $\int_{0}^{1}1\times dx=1$ میشه. حالا تو گزینه‌های (۲) و (۴)، $n=0$ قرار می‌دیم، ببینیم کدوم برابر با ۱ میشه!؟ پس گزینه (۴) جوابه 🙂

مثال ۳۵ صفحه ۳۳

مثال ۳۵: حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^5+\sqrt{1+x^{10}}}$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عدد وسط بازه $\frac{1+(-1)}{2}=0$ میشه؛ بنابراین مقدار تقریبی انتگرال به صورت زیر به دست میاد:

$$I=(1-(-1))\frac{1}{1+(0)^5+\sqrt{1+(0)^{10}}}=2\times\frac{1}{1+\sqrt{1}}=1$$

به نظر شما کدوم گزینه جوابه

مثال ۵۸ صفحه ۳۹

مثال ۵۸: مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\text{Ln}(1+\text{tgx})dx$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۹)

۱) $4\text{Ln}\frac{\pi}{2}$ ۲) $2\text{Ln}\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{8}\text{Ln}2$ ۴) $\frac{\pi}{4}\text{Ln}2$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عدد وسط بازه $x=\frac{\pi}{8}$ هستش؛ اما اگه اینو به جای x قرار بدیم $\text{tg}\frac{\pi}{8}$ رو که بلد نیستم؛ حالا چیکار کنیم می‌تونیم کمی تخمین بزنیم. مثلاً به جای $\frac{\pi}{8}$، $\frac{\pi}{6}$ رو قرار بدیم و یادمون باشه، حاصل انتگرال باید کمی کمتر از چیزی باشه که به‌دست میاریم (چون $\text{tg}\frac{\pi}{8}$ قطعاً از $\text{tg}\frac{\pi}{6}$ کمتره).

مقدار تقریبی انتگرال $=(\frac{\pi}{4}-0)\text{Ln}(1+\text{tg}\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{4}\text{Ln}(1+\frac{\sqrt{3}}{3})\simeq\frac{\pi}{4}\times\text{Ln}(1+0/6)\simeq\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}$

گفته بودم چون به جای $\frac{\pi}{8}$ از $\frac{\pi}{6}$ در تخمین استفاده کردیم، بنابراین مقدار اصلی انتگرال قطعاً چیزی کمتر از مقداری هست که ما به دست خواهیم آورد. یعنی چیزی نزدیک و البته کمتر از $\frac{\pi}{8}$ که در گزینه (۳) داده شده.

مثال ۶۱ صفحه ۳۹

مثال ۶۱: مقدار $\int_{0}^{3}\frac{dx}{x+\sqrt{9-x^2}}$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{9\pi}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عدد وسط بازه برابر با $\frac{3}{2}$ هستش، پس داریم:

مقدار تقریبی انتگرال $=(3-0)\frac{1}{\frac{3}{2}+\sqrt{9-(\frac{3}{2})^2}}=3\times\frac{1}{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{27}{4}}}\simeq3\times\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=3(\frac{1}{8})=\frac{3}{4}$

به نظر شما کدوم گزینه به $\frac{3}{4}$ خیلی نزدیکه

مثال ۶۸ صفحه ۴۱

مثال ۶۸: مقدار $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» سؤال رو به دو روش پاسخ می‌دیم:

روش اول: با توجه به اینکه $f(0)=f(\pi)=1$، بنابراین باید مقدار انتگرال رو در وسط دو نیم‌بازه (یعنی وسط نیم بازه اول و وسط نیم‌بازه دوم) حساب کنیم؛ چون وسط بازه برابر با $\frac{\pi}{2}$ هستش، پس وسط نیم‌بازه اول برابر با $\frac{\pi}{4}$ و وسط نیم‌بازه دوم برابر با $\frac{3\pi}{4}$ میشه و لذا داریم:

مقدار تقریبی انتگرال $=(\pi-0)\frac{1}{2}[f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{3\pi}{4})]=\frac{\pi}{2}\times[\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}]\simeq\frac{\pi}{2}[\sqrt{3/4}+\sqrt{3/4}]=\frac{\pi}{2}\times2/6\simeq4$:

روش دوم و ساده‌تر: دقت کنین تو بازه ۰ تا π هیچ وقت $\sin x$، منفی نمیشه؛ یعنی یه عدد مثبت و یا صفره، پس $\sqrt{1+\sin x}>\sqrt{1}$ و این یعنی حاصل انتگرال از $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1}dx$ بیشتره؛ پس حاصل انتگرال قطعاً از π بزرگتره، فقط گزینه (۴) چنین شرایطی رو داره

مثال ۷۲ صفحه ۴۳

مثال ۷۲: مقدار $I=\int_{0}^{16}\sqrt{\frac{9}{x}(16-x)^2}dx$ برابر با کدام گزینه است؟ (برق ـ آزاد ۸۹)

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۲۵۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اولاً توجه کنین که به ازای $x=0$ حاصل عبارت زیر انتگرال بی‌نهایت میشه و این یعنی به جای عدد وسط بازه، برو یه عدد نزدیک به صفر انتخاب کن تا تقریبش درست‌تر دربیاد! با توجه به وجود رادیکال، به نظر بهتره $x=4$ رو انتخاب کنیم تا راحت‌تر از زیر رادیکال بزنه بیرون! (تازه خوبی این عدد اینه که وسط نیم‌بازه اول هم هست)

$$\text{مقدار تقریبی انتگرال}=(16-0)\sqrt{\frac{9}{4}(16-4)^2}=16\times\frac{3}{2}\times12=8\times3\times12=288$$

خب خوشبختانه فاصله گزینه زیاده و ما با فراغ بال می‌تونیم گزینه (۴) رو انتخاب کنیم

البته اگه مثلاً $x=5$ رو انتخاب می‌کردیم عددی نزدیک‌تر به گزینه (۴) ایجاد می‌شه، اما محاسبات کمی سخت‌تر می‌شد.

مثال ۱ صفحه ۴۶

مثال ۱: اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد، حاصل $\text{Ln}(\frac{x+iy}{x-iy})$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $i\text{tg}^{-1}\frac{x}{y}$ ۲) $\text{tg}(\sqrt{x^2+y^2})$ ۳) $\text{tg}\sqrt{x^2-y^2}$ ۴) $2i\text{tg}^{-1}\frac{y}{x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگه تو صورت سؤال به جای y عدد دلخواه صفر رو قرار بدیم، حاصل عبارت خواسته شده برابر با $\text{Ln}\frac{x}{x}=\text{Ln}1=0$ می‌شه، حالا تو گزینه‌ها به جای yها صفر قرار می‌دیم، هر کدوم صفر شد، جوابه! فقط گزینه (۴) چنین خاصیتی داره

مثال ۲ صفحه ۴۶

مثال ۲: مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\cos(n\theta))$، $0<r<1$، برابر کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{r^2-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۲) $\frac{-r^2+r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۳) $\frac{-1+r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ۴) $\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به ازای $\theta=0$، سری داده شده به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ درمیاد که طبق مطالب سری هندسی که از دبیرستان بلدیم، مجموع اون برابر $\frac{r}{1-r}$ هستش. بین گزینه‌های داده شده، فقط گزینه (۲) هستش که به ازای $\theta=0$ برابر $\frac{r}{1-r}$ می‌شه. پس فقط گزینه (۲) می‌تونه صحیح باشه

مثال ۵ صفحه ۵۳

مثال ۵: دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{2x-x^2}+\text{Arcsin}(1+2x-x^2)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۰)

۱) $(0,1]$ ۲) $(1,2]$ ۳) $\{0,2\}$ ۴) $[0,2]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اول ببینیم که $x=1$ می‌تونه جزو دامنه تابع باشه یا نه؟! $x=1\Rightarrow f(1)=\sqrt{2\times1^2-1^2}+\text{Arcsin}(1+2\times1-1^2)=1+\text{Arcsin}2$ چیزی به نام $\text{Arcsin}2$ نداریم، پس $x=1$ جزو دامنه نیست، پس گزینه‌های (۴) و (۱)، جزو جواب نیستن. از طرفه دیگه گزینه (۲) می‌گه $x=0$ جزو جواب نیست، اما این موضوع غلطه، پس گزینه (۳) جوابه

مثال ۱۶ صفحه ۵۵

مثال ۱۶: خلاصه شده $\sin^{-1}(x^2+x+1)+\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)}$ برابر کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه تو گزینه‌ها فقط یه مقدار داریم، پس هر عددی به جای x که جزو دامنه باشه باید ما رو به گزینه‌ی درست برسونه. به نظر $x=0$ بهترین انتخابه که به ازای اون به گزینه (۲) می‌رسیم

مثال ۱۸ صفحه ۵۵

مثال ۱۸: حاصل $\text{Arcsin}(\cos 2x)$ با شرط $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$، کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{\pi}{2}-2x$ ۲) $\frac{3\pi}{2}-2x$ ۳) $2x-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2x-\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌تونیم به جای x هر عدد دلخواهی متعلق به بازه $[\frac{\pi}{2},\pi]$ رو قرار بدیم؛ به نظر $x=\pi$ انتخاب خوبیه!

$$\text{Arcsin}(\cos 2\pi)=\text{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$$

حالا باید تو گزینه‌ها هم $x=\pi$ قرار بِدیم، هر کدوم $\frac{\pi}{2}$ شد، جوابه؛ تو گزینه‌ها، فقط گزینه (۴) به ازای $x=\pi$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ می‌شه

مثال ۲۷ صفحه ۵۷

مثال ۲۷: بُرد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}$ کدام بازه است؟ (MBA ـ سراسری ۸۹)

۱) $[0,2]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[1,\frac{3}{2}]$ ۴) $[1,2]$

پاسخ: گزینه «۴» خُب دو عدد خیلی واضح که میشه به جای x قرار بدیم و ببینیم f چه مقدار می‌تونه تغییر کنه، اعداد ۰ و ۱ هستن.

اگه $x=0$ قرار بدیم، اونوقت $f=1$ و اگه $x=1$ قرار بدیم، اونوقت $f=2$ میشه، بنابراین f می‌تونه ۱ و ۲ باشه؛ پس گزینه‌های (۱) یا (۴) درست هستن.

از صورت کسر معلومه که f نمی‌تونه صفر بشه، پس گزینه (۱) غلطه و گزینه (۴) جوابه

مثال ۱ صفحه ۶۰

مثال ۱: مشتق مرتبه nام تابع $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) $n!(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})$ ۲) $n!(\frac{(-1)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{(1+x)^{n+1}})$

۳) $n!(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{(1+x)^{n+1}})$ ۴) $n!(\frac{(-1)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به نوع تابع، حتماً باید به ازای $n=0$ به ضابطه‌ی خود تابع $f(x)$ برسیم. فقط گزینه (۱) این شرایط رو داره که وقتی به جای nهای اون، عدد صفر رو قرار می‌دیم، به ضابطه‌ی $f(x)$ می‌رسیم

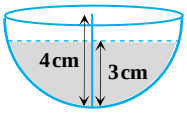
$$\text{گزینه (۱) به ازای } n=0 \Rightarrow 0!(\frac{1}{(1-x)^{0+1}}+\frac{(-1)^{0+1}}{(1+x)^{0+1}})=\frac{1+x+x-1}{1-x^2}=\frac{2x}{1-x^2}$$

مثال ۳ صفحه ۶۰

مثال ۳: ظرفی به شکل نیم‌کره با شعاع ۴ سانتی‌متر را روی زمین قرار داده و درون آن تا ارتفاع ۳ سانتی‌متر از سطح زمین آب ریخته‌ایم. حجم آب داخل ظرف کدام است؟ (MBA ـ سراسری ۹۲)

۱) ۹π ۲) ۱۸π ۳) ۲۷π ۴) ۶۴π

پاسخ: گزینه «۳» می‌دونیم حجم کل نیم‌کره برابر $\frac{۲}{۳}\pi R^۳$ هست و چون $R=۴$، بنابراین حجم نیم‌کره کامل حدوداً برابر با $\frac{۲}{۳}\pi\times ۴^۳=\frac{۱۲۸}{۳}\pi\simeq ۴۳\pi$ می‌شه. اما سؤال گفته؛ تا ارتفاع ۳ سانتی‌متری آب ریخته‌ایم، یعنی فقط یک سانتی‌متر مونده تا حجم کل نیم‌کره پر بشه. پس انتظار داریم ظرف کمتر از $\frac{۳}{۴}$ حجم کل نیم‌کره (و البته نزدیک به اون) پر شده باشه، یعنی $\frac{۳}{۴}\times ۴۳\pi\simeq ۳۳\pi$، کمترین و نزدیکترین عدد به ۳۳π، عدد ۲۷π هست.



توضیح: ممکنه واسه شما این سؤال پیش بیاد: چرا کمتر از $\frac{۳}{۴}$ حجم نیم‌کره رو باید به عنوان حجم آب پر شده تا شعاع ۳ سانتی‌متری در نظر گرفت؟ جواب اینه که اگه شکل کاملاً همگن بود (مثلاً یک مکعب مربع) اونوقت می‌شد گفت دقیقاً به اندازه‌ی $\frac{۳}{۴}$ حجم آب پر شده، ولی در نیم‌کره چون در قسمت فوقانی سطح مقطع بیشتره، بنابراین حجم آب به طور متفاوت قرار می‌گیره و تو یک سانتی‌متر بالایی، بیشتر از یک سانتی‌مترهای دیگه آب جا می‌گیره. در ضمن گزینه‌ای مثل گزینه (۲) اصلاً نمی‌تونه به عنوان جواب در نظر گرفته بِشه، چون حتی حجم نصفِ نیم‌کره هم از ۱۸π بیشتره.

مثال ۱ صفحه ۶۲

مثال ۱: مقدار انتگرال $\iiint_R \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\,dv$ که در آن R ناحیه‌ی بالای مخروط به معادله‌ی $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و محدود شده توسط کره به معادله‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ می‌باشد، کدام است؟ (MBA و مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ۲) $\pi^۲\sqrt{۲}$ ۳) $\pi(۱-\sqrt{۲})$ ۴) $\frac{\pi}{۲}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

پاسخ: گزینه «۴» اولاً توجه کنین که مقدار زیر انتگرال مثبته، پس حاصل انتگرال قطعاً باید مثبت باشه و این یعنی گزینه (۳) غلطه! از طرفی حداکثر **تابع** زیر انتگرال برابر با ۱ میشه و این یعنی حداکثر **مقدار انتگرال** برابر با حجم ناحیه R میشه؛ حالا باید حجم ناحیه R رو حساب کنیم؛ ناحیه R، بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ هستش؛ اما کمی صبر کنین؛ با توجه به اعداد گزینه‌های (۱) و (۲) اصلاً لازم نیست حجم رو حساب کنیم! چون حتی اگه فرض کنیم حجم این ناحیه حجم کامل کره باشه؛ که می‌دونیم عمراً باشه (چون قطعاً کمتر از حجم کره هست)، بازم می‌تونیم بگیم مقدار انتگرال از $\frac{۴}{۳}\pi$ کمتره؛ فقط گزینه (۴) چنین شرایطی داره

مثال ۵ صفحه ۶۴

مثال ۵: مقدار $\iiint_{x^۲+y^۲+z^۲\le ۳}\frac{e^{x^۲}+۳e^{y^۳}}{e^{x^۲}+۶e^{y^۳}+e^{z^۲}}dxdydz$ کدام است؟ (عمران ـ سراسری ۹۴)

۱) $\sqrt{۳}\pi$ ۲) $(۳\sqrt{۳})\pi$ ۳) $(۲\sqrt{۳})\pi$ ۴) $(۴\sqrt{۳})\pi$

پاسخ: گزینه «۳» برای این سؤال می‌تونیم فرض کنیم $(x_۰,y_۰,z_۰)=(۰,۰,۰)$، بنابراین داریم:

مقدار تقریبی انتگرال $=f(x_۰,y_۰,z_۰)\times(\text{حجم کره‌ای به شعاع }\sqrt{۳})=(\frac{e^۰+۳e^۰}{e^۰+۶e^۰+e^۰})\times(\frac{۴}{۳}\pi(\sqrt{۳})^۳)=\frac{۴}{۸}\times\frac{۴}{۳}\pi\times۳\times\sqrt{۳}=(۲\sqrt{۳})\pi$

عجب! یعنی فرمول تقریبی بعضی وقتها می‌تونه تا این حد دقیق باشه