مزدوج همساز و روش‌های به دست آوردن آن

هرگاه $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه v را مزدوج همساز u می‌نامند و همچنین هرگاه v یک مزدوج همساز u باشد، می‌توان نتیجه گرفت تابع $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی است. از جمله سؤالاتی که مورد توجه طراحان قرار دارد، به دست آوردن مزدوج همساز می‌باشد. در این‌گونه سؤالات معمولاً برای تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یکی از قسمت‌های حقیقی (u) و یا موهومی (v) را می‌دهند و قسمت دیگر (یا همان مزدوج همسازش) را سؤال می‌کنند. این مسائل را باید با استفاده از روابط کوشی ریمان حل کنیم.

روش اولِ به دست آوردن مزدوج همساز

قبل از حل مثال روش حل را به صورت مرحله‌ای توضیح می‌دهیم، فرض می‌کنیم برای تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، ضابطه u داده شده است.

مرحله اول: ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم.

مرحله دوم: چون تابع f تحلیلی است رابطه $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ برقرار می‌باشد، پس عبارت به دست آمده از مرحله اول را مساوی $\frac{\partial v}{\partial y}$ قرار می‌دهیم و از طرفین این تساوی نسبت به y انتگرال می‌گیریم. دقت کنید، پس از انتگرال‌گیری تساوی به صورت زیر خواهد بود:

$$v=\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{یا همان}\right)\ \text{عبارت به دست آمده از مرحله اول}\right] dy + (x\ \text{تابعی بر حسب})$$

مرحله سوم: پس از به دست آوردن حاصل انتگرال سمت راست تساوی فوق، از طرفین رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم ($\frac{\partial v}{\partial x}$ را محاسبه می‌کنیم)

چون تابع تحلیلی است، باید $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$، پس $\frac{\partial v}{\partial x}$ را مساوی $-\frac{\partial u}{\partial y}$ قرار می‌دهیم. (بدیهی است، محاسبه $-\frac{\partial u}{\partial y}$ از روی ضابطه u کار سختی نیست!)

مرحله چهارم: پس از مساوی قرار دادن $\frac{\partial v}{\partial x}$ با $-\frac{\partial u}{\partial y}$، مشتق آن تابع بر حسب x (مثلاً $h'(x)$) که در مرحله دوم به دست آمده بود، برابر یک عبارت می‌شود و با انتگرال‌گیری از $h'(x)$ نسبت به x، ضابطه $h(x)$ معلوم و در نتیجه ضابطه v مشخص می‌شود.

تذکر ۲: اگر مسئله v را به ما داده بود و u را سؤال کرده بود، باز هم روش حل تقریباً مانند مطالب گفته شده می‌باشد.

مثال ۳: اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تحلیلی باشد و $u(x,y)=y^3-3x^2y$، آنگاه مزدوج همساز u کدام گزینه است؟

۱) $v(x,y)=x^3-2y^2x+c$
۲) $v(x,y)=x^3+2y^2x+c$
۳) $v(x,y)=x^3-3y^2x+c$
۴) $v(x,y)=x^3+3y^2x+c$

پاسخ: گزینه «۳»

مرحله اول: همان‌طور که گفتیم، اول $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$u(x,y)=y^3-3x^2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-6xy$$

مرحله دوم: چون $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}} v=\int(-6xy)dy+h(x)=-3xy^2+h(x) \quad (*)$$

مرحله سوم: حالا باید از طرفین تساوی فوق نسبت به x مشتق بگیریم و آن را مساوی $-\frac{\partial u}{\partial y}$ قرار دهیم.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+h'(x)$$

مرحله چهارم: دقت کنید u را از اول داشتیم پس به راحتی $-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$، لذا خواهیم داشت:

$$-3y^2+h'(x)=-3y^2+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2$$

اگر از طرفین تساوی فوق نسبت به x انتگرال بگیریم، ضابطه $h(x)$ تعیین می‌شود:

$$h(x)=\int 3x^2dx+c \Rightarrow h(x)=x^3+c$$

با قرار دادن عبارت به دست آمده به جای $h(x)$ در تساوی (*)، ضابطه $v(x,y)$ به راحتی تعیین می‌شود:

$$\boxed{v(x,y)=-3xy^2+x^3+c}$$

توضیح: این تست را مرحله‌ای حل کردیم که به طور کامل بر حل این‌گونه مسائل مسلط شوید. طبیعی است سرعت حل در روز امتحان بسیار بالا است!

مثال ۴: اگر $f(z)=u+iv$، تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ باشد، آن‌گاه با شرط $f(\circ)=\circ$، مقدار $f(-i)$ کدام است؟

۱) $-e^{i}$ ۲) e^{i} ۳) e^{-i} ۴) $-e^{-i}$

پاسخ: گزینه «۲» اگر تابع $f(z)$ تحلیلی باشد، v را می‌توان از شرایط کوشی ریمان بدست آورد:

$$u=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$$
$$u_x=v_y\to u_x=-e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+e^{-x}(\sin y)$$
$$=e^{-x}(-x\sin y+y\cos y+\sin y)\Rightarrow v_y=e^{-x}y\cos y+e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y$$
$$v=e^{-x}(y\sin y+\cos y-\cos y+x\cos y)+g(x)=e^{-x}(y\sin y+x\cos y)+g(x)$$
$$v_x=-u_y\Rightarrow -e^{-x}(y\sin y+x\cos y)+e^{-x}(\cos y)+g'(x)=-e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)$$
$$\Rightarrow g'(x)=\circ\to g(x)=c$$
$$\Rightarrow f(\circ)=\circ\to\begin{cases}u(\circ,\circ)=\circ\\ v(\circ,\circ)=c\end{cases}\to c=\circ\quad\Rightarrow f(-i)\to\begin{cases}u(\circ,-1)=\cos 1\\ v(\circ,-1)=\sin 1\end{cases}\to f(-i)=\cos 1+i\sin 1=e^{i}$$

روش دوم محاسبه‌ی مزدوج همساز

این روش بیان ساده‌تر و خلاصه‌تر روش اول است. اگر در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ هر کدام از $u(x,y)$ و یا $v(x,y)$ داده شده باشند، آنگاه به کمک دو فرمول زیر می‌توان دیگری را نیز پیدا کرد:

اگر $u(x,y)$ داده شده باشد $\Rightarrow v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int[$ **عبارتی که از حذف توابع شامل y در ضابطه $\frac{\partial u}{\partial y}$ حاصل می‌شود** $]dx$

اگر $v(x,y)$ داده شده باشد $\Rightarrow u=\int\frac{\partial v}{\partial y}dx-\int($ **عبارتی که از حذف توابع شامل x از ضابطه‌ی $\frac{\partial v}{\partial x}$ حاصل می‌شود** $)dy$

حفظ کردن دو رابطه‌ی بالا چندان کار سختی نیست وقتی طراح سؤال مثلاً به شما ضابطه‌ی u را داده است، پس معلوم است شما دنبال v هستید و چیزی جز u در اختیار ندارید، پس در زیر انتگرال باید مشتقات u نسبت به x و y را داشته باشیم، $(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$ وقتی از u نسبت به x مشتق می‌گیریم باید در dy ضرب شود و وقتی از u نسبت به y مشتق می‌گیریم باید در dx ضرب شود. (البته از $\frac{\partial u}{\partial y}$ باید جملات شامل y را حذف کنید) و به همین ترتیب برای وقتی که v را داده‌اند برای ضابطه‌ی u می‌توانید برای خودتان قانون بسازید!

مثال ۵: اگر تابع $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^2-y^2+1)^2-4x^2y^2$ باشد، آنگاه با شرط $v(\circ,\circ)=\circ$ مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۰

پاسخ: گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4x(x^2-y^2+1)-8xy^2\xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } y \text{ انتگرال می‌گیریم}}v=\int[4x(x^2-y^2+1)-8xy^2]dy+h(x)$$
$$=4x^3y-4xy^3+4xy+h(x)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=12x^2y-4y^3+4y+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\Rightarrow 12x^2y-4y^3+4y+h'(x)=12x^2y-4y^3+4y$$
$$\Rightarrow h'(x)=\circ\Rightarrow h(x)=k\Rightarrow v(x,y)=4x^3y-4xy^3+4xy+k\xrightarrow{v(\circ,\circ)=\circ}k=\circ\Rightarrow v(1,1)=4$$

روش دوم: چون u را داده‌اند و دنبال v هستیم، رابطه به شکل زیر است:

$$v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy-\int(\text{عبارتی که از حذف } y \text{ از ضابطه‌ی } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود})dx=\int[2(2x)(x^2-y^2+1)-8xy^2]dy-\int(\circ)dy$$

دقت کنید اگر جملات شامل y را از $\frac{\partial u}{\partial y}$ حذف کنیم، هیچ چیزی باقی نمی‌ماند!

$$v=4x^3y-\frac{4xy^3}{3}+4xy-\frac{8xy^3}{3}+c\Rightarrow v=4x^3y-4xy^3+4xy+c\xrightarrow{v(\circ,\circ)}\circ=\circ-\circ+\circ+c\Rightarrow c=\circ\Rightarrow v(1,1)=4$$

مثال ۶: اگر قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی در صفحه مختلط z به صورت $u(x,y)=y^3+Ay-Bx^2y$ و B, A مقادیر ثابت باشند آنگاه:

۱) A دلخواه و $B=3$ ۲) $A=B=3$ ۳) B دلخواه و $A=3$ ۴) B, A هر دو دلخواه

پاسخ: گزینه «۱» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: هرگاه $f(z)=u+vi$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه v, u توابع همساز یکدیگرند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow -2By+6y=0 \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow u=y^3+Ay-3x^2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-6xy=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v=\int -6xydy=-3xy^2+h(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+h'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2+A-3x^2)$$

$$\Rightarrow -3y^2+h'(x)=-3y^2-A+3x^2 \Rightarrow h'(x)=-A+3x^2 \Rightarrow h(x)=-Ax+x^3+c \Rightarrow v=-3xy^2-Ax+x^3+c$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Rightarrow 6x-6x=0 \Rightarrow$ همواره برقرار است و به A وابسته نمی‌باشد.

روش دوم: به عنوان تمرین، $v(x,y)$ را با استفاده از روش دوم نیز به دست می‌آوریم:

$$v=\int(-2Bxy)\,dy-\int(A-Bx^2)\,dx=-2Bx[\frac{y^2}{2}]-Ax-\frac{Bx^3}{3}+c$$

مثال ۷: در صورتی که تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $v=-\sin x.\sinh y$ آنگاه داریم:

۱) $u=-\cos x.\cosh y+c$ ۲) $u=\cos x.\cos y+c$ ۳) $u=\cos x.\cosh y+c$ ۴) مقدار تابع u مشخص نیست.

پاسخ: گزینه «۳» چون v داده شده است، لذا داریم:

$$u=\int(\frac{\partial v}{\partial y})dx-\int(\text{تابعی که از حذف } x \text{ از ضابطه‌ی } \frac{\partial v}{\partial x} \text{ حاصل می‌شود})dy=\int(-\sin x)\cosh y dx-\int(0)dy=\cos x\cosh y+c$$

نکته ۲: اگر u و v در مختصات قطبی داده شده باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

اگر u را داده باشند $\Rightarrow v=\int r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta-\int(\text{عبارتی که از حذف عبارات شامل } \theta \text{ از تابع } \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \text{ حاصل می‌شود})dr$

اگر v را داده باشند $\Rightarrow u=\int\frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial \theta})dr-\int(\text{عبارتی که از حذف عبارات شامل } r \text{ از تابع } r\frac{\partial v}{\partial r} \text{ حاصل می‌شود})d\theta$

مثال ۸: اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تابعی تحلیلی باشد و $v=r^2\cos 2\theta+r\sin\theta$ ، آنگاه $u(r,\theta)$ کدام است؟

۱) $u(r,\theta)=-r^2\sin\theta+r\cos 2\theta+c$ ۲) $u(r,\theta)=r^2\cos\theta+r\sin 2\theta+c$

۳) $u(r,\theta)=r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$ ۴) $u(r,\theta)=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$

پاسخ: گزینه «۴» این سؤال را نیز به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: ابتدا $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta$$

چون تابع تحلیلی است باید $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ برقرار باشد.

$$\frac{1}{r}(-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta)=\frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=-2r\sin 2\theta+\cos\theta$$

حال از طرفین تساوی فوق نسبت به r انتگرال می‌گیریم:

$$u=\int(-2r\sin 2\theta+\cos\theta)dr+f(\theta) \Rightarrow \mathbf{u=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+f(\theta)}$$

مجدداً از طرفین این رابطه نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را نیز مساوی $-r(\frac{\partial v}{\partial r})$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=2r\cos 2\theta+\sin\theta \Rightarrow -r\frac{\partial v}{\partial r}=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta$$

$$-r\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow -2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta=-2r^2\cos 2\theta-r\sin\theta+f'(\theta)$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=0 \Rightarrow f(\theta)=c \Rightarrow u(r,\theta)=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$$

روش دوم: چون ضابطه‌ی v داده شده است، لذا داریم:

$$u=\int\frac{1}{r}(\frac{\partial v}{\partial \theta})dr-\int(\text{عبارتی که از حذف عبارات شامل } r \text{ از تابع } r\frac{\partial v}{\partial r} \text{ حاصل می‌شود})d\theta$$

$$\Rightarrow u=\int\frac{1}{r}(-2r^2\sin 2\theta+r\cos\theta)dr-\int(0)d\theta=\int(-2r\sin 2\theta+\cos\theta)\,dr=-r^2\sin 2\theta+r\cos\theta+c$$

روش به دست آوردن ضابطه تابع تحلیلی $f(z)$

هر گاه تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، برای یافتن f بر حسب z، کافی است پس از مشتق‌گیری x را به z تبدیل کرده و y را مساوی صفر قرار دهیم. به همین شکل اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تحلیلی باشد با تبدیل‌های $r\to z$ و $\theta\to 0$ تابع منحصراً برحسب z به دست می‌آید. این روش به ویژه برای مسائلی بهتر است که مثلاً u یا v را می‌دهند و ضابطه تابع $f(z)$ را می‌خواهند. با مثال‌های زیر مطلب را بهتر متوجه خواهید شد.

مثال ۹: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد و $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$، ضابطه $f(z)$ کدام است؟

۱) $2e^{z^2}+c$ ۲) $e^{z^2}+c$ ۳) $e^{-z^2}+ic$ ۴) $e^{z^2}+\sin(z)$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy+(-2y\sin 2xy)e^{x^2-y^2}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy+(-2x\sin 2xy)e^{x^2-y^2}$$

حالا به جای تمام xها، z و به جای تمام yها، صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=2ze^{z^2}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(z,0)=0$$

چون تابع $f(z)$ تابعی تحلیلی است، پس $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$، لذا داریم:

$$f'(z)=2ze^{z^2}-i\times 0\ \Rightarrow f'(z)=2ze^{z^2}$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به z انتگرال بگیریم، به راحتی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$f(z)=\int 2ze^{z^2}dz=e^{z^2}+c$$

توضیح: شاید لازم باشد، نظر شما عزیزان را به این موضوع جلب کنم که اگر می‌خواستیم از روش‌های قبلی ضابطه $f(z)$ را تعیین کنیم، باید v را حساب می‌کردیم و این یعنی پس از محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}$، از آن نسبت به y انتگرال می‌گرفتیم. دوست دارید، امتحان کنید!!

مثال ۱۰: اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، یک تابع تحلیلی باشد و $u(r,\theta)=r^{-4}\cos 4\theta$، ضابطه $f(z)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) z^2+k ۲) $z^{-2}+k$ ۳) $z^{-4}+k$ ۴) z^4+k

پاسخ: گزینه «۳»

$$u=r^{-4}\cos 4\theta\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=-4r^{-5}\cos 4\theta\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-4r^{-4}\sin 4\theta$$

حالا به جای r، z و به جای θ، صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z,0)=-4z^{-5}\cos(0)=-4z^{-5}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-4z^{-4}\sin(0)=0$$

$$f'(z)=[\frac{\partial u}{\partial r}+i(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta})]e^{-i\theta}=[-4z^{-5}+i\times 0]e^{-i(0)}=-4z^{-5}$$

اگر از طرفین رابطه فوق انتگرال بگیریم به راحتی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$f(z)=\int(-4z^{-5})dz=-4(\frac{z^{-5+1}}{-5+1})+k=z^{-4}+k$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در بیشتر اوقات وقتی در گزینه‌ها $f(z)$ بر حسب z داده شده استفاده از روش دوم مناسب‌تر است.

مثال ۱۱: اگر تابع $f(z)$ همساز باشد و $\operatorname{Re}[f'(z)]=3x^2-4y-3y^2$ با شرط $f(1+i)=0$، $f'(0)=0$ مقدار $f(i)$ کدام است؟

۱) $6-i$ ۲) $6+i$ ۳) $6-5i$ ۴) $6-2i$

پاسخ: گزینه «۳» برای تابع $f(z)=u+iv$، می‌دانیم $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$، یعنی قسمت حقیقی $f'(z)$ که در صورت سؤال داده شده برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ است:

$$\operatorname{Re}[f'(z)]=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$$

حالا به جای x، z و به جای y، عدد صفر را قرار می‌دهیم: $\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=3z^2$

$$u=\int(3x^2-4y-3y^2)dx=x^3-4xy-3xy^2+f(y)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از تابع u نسبت به y داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x-6xy+f'(y)$$

دوباره اگر به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم، $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با: $\frac{\partial u}{\partial y} = -4z + f'(0) = -4z$

بنابراین $f'(z)$ برابر است با:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 3z^2 - i[(-4z)] = 3z^2 + i4z \xrightarrow{\text{z با انتگرال‌گیری نسبت به}} f(z) = z^3 + 2iz^2 + C$$

با استفاده از شرط داده شده برای مسئله $(f(1+i) = 0)$ مقدار C را حساب می‌کنیم:

$$f(1+i) = (1+i)^3 + 2i(1+i)^2 + C = 0$$

$$\Rightarrow 1 + i^3 + 3i^2 + 3i + 2i(\underbrace{1+i^2}_{0} + 2i) + C = 0 \Rightarrow 1 - i - 3 + 3i + 4i^2 + C = 0 \Rightarrow C = 6 - 2i$$

$$\Rightarrow f(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i$$

حالا به راحتی $f(i)$ به دست می‌آید:

$$f(i) = i^3 + 2i(i)^2 + 6 - 2i = -i - 2i + 6 - 2i = 6 - 5i$$

مثال ۱۲: اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی $f(z)$ به صورت $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$ تعریف شده باشد، مقدار $f'(i)$ کدام است؟

۱) ie^{-i} ۲) $e^{-i}(1-i)$ ۳) $e^{-i}(i-1)$ ۴) $-ie^{-i}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به مقدار u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\cos y) + e^{-x}\cos y - e^{-x} y\sin y \xrightarrow[y=0]{x=z} \frac{\partial u}{\partial x}(z,0) = -ze^{-z}\cos(0) + e^{-z}\cos(0) - 0 = -ze^{-z} + e^{-z}$$

از طرفی با محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial y}$ و قرار دادن صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x} y\cos y = 0$$

با توجه به فرمول $f'(z)$ بر حسب مشتقات جزئی u، داریم:

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -ze^{-z} + e^{-z}$$

بنابراین مقدار $f'(i)$ برابر است با:

$$f'(i) = -ie^{-i} + e^{-i} = e^{-i}(1-i)$$

مثال ۱۳: اگر تابع $f(z) = u + iv$، تحلیلی باشد و قسمت حقیقی آن $u = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$ باشد، آنگاه ضابطه‌ی $f(z)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $f(z) = \cot gz + C$ ۲) $f(z) = \cot gz + +i(2tgz) + C$

۳) $f(z) = tgz + i\cot gz + C$ ۴) $f(z) = 2tgz + i\cot gz + C$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$u = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{[4\cos 2x(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)] - [(4\sin 2x)(2\sin 2x)]}{(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^2}$$

با توجه به عبارت به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$، واضح است که استفاده از روش اصلی، اوضاع را خیلی وخیم! خواهد کرد و باید از روش دیگری که گفتیم استفاده شود؛ پس لازم است به جای x، z و به جای y عدد صفر را قرار دهیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0) = \frac{[4\cos 2z(e^0 + e^0 - 2\cos 2z)] - [(4\sin 2z)(2\sin 2z)]}{(e^0 + e^0 - 2\cos 2z)^2} = \frac{8\cos 2z - 8\cos^2 2z - 8\sin^2 2z}{(2 - 2\cos 2z)^2}$$

$$= \frac{8\cos 2z - 8(\cos^2 2z + \sin^2 2z)}{(2 - 2\cos 2z)^2} = \frac{8\cos 2z - 8}{4(1-\cos 2z)^2} = \frac{8(\cos 2z - 1)}{4(1-\cos 2z)^2} = -\frac{2}{1-\cos 2z}$$

از طرفی با محاسبه $\frac{\partial u}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(2e^{2y} - 2e^{-2y})2\sin 2x}{(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^2}$$

با قرار دادن $y = 0$ مقدار $\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر صفر می‌شود، اما می‌دانیم $\boldsymbol{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$ و چون $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ پس $\boldsymbol{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}}$ و با توجه به مقدار به دست آمده برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم:

$$f'(z) = -\frac{2}{1-\cos 2z} \xrightarrow{2\sin^2 z = 1-\cos 2z} f'(z) = -\frac{2}{2\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق به راحتی ضابطه‌ی $f(z)$ به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{f(z) = \int -(\frac{dz}{\sin^2 z}) = \cot gz + C}$$

مثال ۱۴: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $u+v=\dfrac{\sinh 2x+\sin 2y}{\cosh 2x+\cos 2y}$، ضابطه‌ی تابع $f(z)$ کدام گزینه است؟

۱) $\text{tgh}2z+C$ ۲) $(1+i)\text{tgh}z$ ۳) $\text{tgh}z+C$ ۴) $(1+i)\text{tgh}2z+C$

پاسخ: گزینه «۳» این تست بسیار جالب و البته کمی هم سخت می‌باشد و راه‌حل ابتکاری دارد. دقت کنید با توجه به این که سؤال به ما $u+v$ را داده، لازم است « $u+v$ » را به عنوان قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع جدید تعریف کنیم:

$$\begin{cases} f(z)=u+iv \\ if(z)=iu-v \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} if(z)+f(z)=u-v+i(u+v) \Rightarrow (1+i)f(z)=u-v+i(u+v)$$

با فرض $F(z)=(1+i)f(z)$ و $U=u-v$ و $V=u+v$، تابع تحلیلی $F(z)=U+iV$ را داریم که قسمت موهومی آن (یعنی $V=u+v$) داده شده است.

حالا مانند بقیه مثال‌های حل شده به این تست نیز پاسخ می‌دهیم.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2\cosh 2x(\cosh 2x+\cos 2y)-2\sinh 2x(\sinh 2x+\sin 2y)]}{(\cosh 2x+\cos 2y)^2}$$

با قرار دادن z به جای x و عدد صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(z,0)=\frac{2\cosh 2z(\cosh 2z+1)-2\sinh^2 2z}{(\cosh 2z+1)^2}=\frac{2(\cosh^2 2z-\sinh^2 2z+\cosh 2z)}{(\cosh 2z+1)^2}=\frac{2}{1+\cosh 2z}$$

از طرفی با محاسبه $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{[2\cos 2y(\cosh 2x+\cos 2y)]-[-2\sin 2y(\sinh 2x+\sin 2y)]}{(\cosh 2x+\cos 2y)^2}$$

مجدداً با قرار دادن z به جای x و صفر به جای y داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{2}{\cosh 2z+1}$$

با توجه به این که $F'(z)=\dfrac{\partial V}{\partial y}+i\dfrac{\partial V}{\partial x}$، لذا داریم:

$$F'(z)=\frac{2}{\cosh 2z+1}+i(\frac{2}{\cosh 2z+1})=\frac{2(1+i)}{\cosh 2z+1}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق داریم:

$$F(z)=2(1+i)\int\frac{dz}{1+\cosh 2z}=2(1+i)\int\frac{dz}{2\cos h^2 z}=(1+i)\text{tgh}z+C_1$$

اما در ابتدا $F(z)=(1+i)f(z)$ می‌باشد و لذا ضابطه‌ی $f(z)$ برابر است با:

$$f(z)=\frac{F(z)}{1+i}=\mathbf{tghz+C}$$

روش دیگر به دست آوردن ضابطه‌ی تابع تحلیلی $f(z)$

یکی دیگر از روش‌های به دست آوردن ضابطه‌ی $f(z)$ استفاده از فرمول‌های زیر است:

$$f(z)=2iv(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i})+c_0 \quad \text{و} \quad f(z)=2u(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i})-c_0$$

یعنی باید در ضابطه u (یا v) به جای تمام x ها، $\dfrac{z+\bar{z}_0}{2}$ و به جای تمام y ها، $\dfrac{z-\bar{z}_0}{2i}$ قرار دهیم. همچنین در رابطه فوق $c_0=f(z_0)$ و $\bar{z}_0$ مزدوج عدد مختلط z_0 است. مثلاً اگر در صورت سؤال شرط $f(i)=2$ را داشته باشیم $z_0=i$ و $c_0=2$ است. اما اگر شرط اولیه نداریم $z_0=0$ انتخاب بهتری است.

مثال ۱۵: در تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، اگر قسمت حقیقی برابر $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$ باشد، ضابطه‌ی $f(z)$ کدام است؟

۱) $f(z)=1/6z^4+C$ ۲) $f(z)=z^4+C$ ۳) $f(z)=0/5z^4+C$ ۴) $f(z)=4z^4+C$

پاسخ: گزینه «۲» شرط اولیه نداریم، پس $z_0=0$ را انتخاب می‌کنیم و داریم: $f(z)=2u(\frac{z}{2},\frac{-iz}{2})+C$، یعنی با قرار دادن $\frac{z}{2}$ به جای x و $-\frac{iz}{2}$ به جای y در ضابطه u داریم:

$$f(z)=2[(\frac{z}{2})^4-6(\frac{z}{2})^2(\frac{-iz}{2})^2+(\frac{-iz}{2})^4+C]=2[\frac{z^4}{16}+\frac{6z^4}{16}+\frac{z^4}{16}]+C=\mathbf{z^4+C}$$

مثال ۱۶: اگر $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، و $u(x,y)=2e^x\cos y$، آن‌گاه ضابطه $f(z)$ با فرض $f(0)=2$ کدام است؟

۱) $f(z)=2e^z$ ۲) $f(z)=2e^{z^2}$ ۳) $f(z)=2e^{2z}$ ۴) $f(z)=2e^{\frac{z}{2}}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر $z_0=0$ و $c_0=2$ در نظر گرفته شود، آنگاه $\bar{z}_0=0$ و داریم:

$$f(z)=2u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})-2=2\times 2e^{\frac{z}{2}}\cos(\frac{z}{2i})-2$$

از طرفی می‌دانیم $\cosh iz=\cos z$، لذا داریم:

$$\cos(\frac{z}{2i})=\cos(\frac{-iz}{2})=\cosh(\frac{z}{2})$$

و چون $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$، لذا خواهیم داشت:

$$f(z)=4e^{\frac{z}{2}}[\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{\frac{-z}{2}}}{2}]-2=2e^z+2-2=2e^z$$