درسنامه۲: توابعی که تحلیلی هستند یا فقط در چند نقطه غیر تحلیلی هستند

در این درسنامه سراغ انتگرال‌هایی می‌رویم که یا تابع زیر انتگرال تحلیلی است و یا در تعداد محدودی نقطه که درون مرز C قرار دارند، غیر تحلیلی است. برای ورود به بحث، ابتدا قضایای کوشی ـ گورسا را تعریف می‌کنیم.

قضیه کوشی ـ گورسا

اگر $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی منحنی ساده و بسته C تحلیلی باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = ۰}$$

توجه شود، انتگرال‌گیری در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) می‌باشد.

مثال۱: حاصل انتگرال $\oint_C \frac{z+۱}{z^۳ - ۲z^۲}dz$ در صورتی که C دایره‌ای با معادله $|z-۱-۲i| = ۲$ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}\pi i$ ۲) صفر ۳) $+\frac{۳}{۲}\pi i$ ۴) πi

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(z)$ در نقاط $z=۰$ و $z=۲$ تحلیلی نیست که این نقاط نیز درون دایره C نیستند. برای این‌که بدانیم نقاط $z=۰$ و $z=۲$ (ریشه‌های مخرج) درون ناحیه موردنظر قرار دارند یا نه، کافیست در معادله $|z-۱-۲i| = ۲$ به جای z، مقادیر $z=۰$ و $z=۲$ را قرار دهیم. اگر حاصل عبارت سمت چپ از عدد ۲ بیشتر شد، نقطه درون ناحیه قرار ندارد و اگر مقدار عبارت مساوی و یا کوچکتر از ۲ شد، نقطه موردنظر درون یا روی ناحیه قرار دارد.

$$z=۰ \Rightarrow |۰-۱-۲i| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۵} > ۲ \quad و \quad z=۲ \Rightarrow |۲-۱-۲i| = \sqrt{(۱)^۲+(-۲)^۲} = \sqrt{۵} > ۲$$

پس هر دو نقطه خارج ناحیه قرار دارند و تابع $f(z)$ در ناحیه C تحلیلی است و لذا حاصل انتگرال برابر صفر خواهد شد.

فرمول انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته C در حوزه ساده D تحلیلی باشد و $z_۰$ یک نقطه درون C باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_۰}dz = ۲\pi i f(z_۰)$$

این انتگرال‌گیری در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) می‌باشد. اگر z در مخرج دارای ضریب بود ابتدا از ضریب آن فاکتور بگیرید و سپس از فرمول کوشی استفاده کنید، برای مثال: $\int_{|z|=۳} \frac{e^z}{۲z-۴} = \frac{۱}{۲}\int_{|z|=۳}\frac{e^z}{z-۲}dz = \frac{۱}{۲}۲\pi i e^۲$.

مثال۲: حاصل $I = \oint_C \frac{۳z^۲+۷z+۱}{z+۱}dz$ در صورتی که C دایره $|z+i| = ۲$ باشد، کدام است؟

۱) $-۴\pi i$ ۲) $۴\pi i$ ۳) $-۶\pi i$ ۴) $۶\pi i$

پاسخ : گزینه «۳» چون در صورت سؤال صحبتی از جهت طی شدن منحنی نشده است، منظور همان جهت مثبت است. دقت کنید نقطه‌ی غیر تحلیلی تابع فقط $z_۰ = -۱$ است و در این سؤال $f(z) = ۳z^۲+۷z+۱$ است و لذا داریم:

$$I = ۲\pi i f(z_۰) = ۲\pi i[۳(-۱)^۲ + ۷(-۱)+۱] = ۲\pi i(-۳) = -۶\pi i$$

مثال۳: حاصل $I = \oint_C \frac{dz}{z}$ روی منحنی بسته C که شامل مبدأ مختصات است، کدام است؟

۱) صفر ۲) $۲\pi i$ ۳) $۳\pi i$ ۴) πi

پاسخ : گزینه «۲» منحنی بسته را دایره $|z|=۱$ انتخاب می‌کنیم و طبق فرمول انتگرال کوشی با توجه به اینکه $f(z) = ۱$ است، داریم:

$$I = \oint_{|z|=۱}\frac{dz}{z} = ۲\pi i f(۰) \xrightarrow{f(z)=۱} I = ۲\pi i$$

مثال۴: حاصل انتگرال مختلط $I = \oint_{|z|=۲}\frac{\cosh iz}{z^۲+۴z+۳}dz$ کدام است؟

۱) πi ۲) $\pi i\cos ۱$ ۳) $\pi\cos ۱$ ۴) $i\cos ۱$

پاسخ : گزینه «۲» اگر $f(z) = \frac{\cosh iz}{z+۳}$ فرض شود، داریم:

$$I = \oint_{|z|=۲}\frac{\cosh iz}{(z+۱)(z+۳)}dz = \oint_{|z|=۲}\frac{f(z)}{z+۱}dz = \oint_{|z|=۲}\frac{f(z)}{z-(-۱)}dz$$

تابع $f(z) = \frac{\cosh iz}{z+۳}$ در ناحیه $|z| \le ۲$ تحلیلی است و چون (۱-) در ناحیه فوق قرار دارد، داریم:

$$I = \oint_{|z|=۲}\frac{f(z)}{z-(-۱)}dz = ۲\pi i f(-۱) = ۲\pi i \times \frac{\cosh(-i)}{۲} = \pi i\cosh i \xrightarrow{\cosh iz = \cos z} I = \pi i\cos ۱$$

مثال ۵: حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta$، در صورتی که k یک ثابت حقیقی باشد، کدام است؟

۱) ۰ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که تابع $f(z)=e^{kz}$ همه جا تحلیلی است. بنابراین از فرمول انتگرال کوشی برای نقطه‌ی $z_{۰}=۰$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=۱}\frac{e^{kz}}{z}dz=۲\pi i f(۰)=۲\pi i$$

از طرفی با تغییر متغیر $(-\pi<\theta\le\pi)z=e^{i\theta}$ روی دایره‌ی $|z|=۱$ خواهیم داشت:

$$I=\int_{|z|=۱}\frac{e^{kz}}{z}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ke^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}e^{ik\sin\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}(\cos(k\sin\theta)+i\sin(k\sin\theta))d\theta$$

$$=-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta}_{I_۱}+i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta}_{I_۲}$$

بنابراین تساوی $I=-I_۱+iI_۲=۲\pi i$ را داریم.

قسمت‌های موهومی و حقیقی در دو سمت تساوی با هم برابرند بنابراین داریم:

$$I_۲=\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta=۲\pi$$

و همچنین داریم:

$$I_۱=\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)d\theta=۰$$

از طرفی در $I_۲$ انتگرالده زوج است، زیرا ترکیب یک تابع زوج با تابع فرد، زوج خواهد بود. پس داریم:

$$\int_{۰}^{\pi}e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}I_۲=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

مثال ۶: هر گاه D ناحیه‌ای شامل مبدأ و $f:D\to C$ تحلیلی باشد و $f'(۰)=۰$، شرط لازم برای تحلیلی بودن تابع g کدام است؟

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z+f(z)}{z} & ;\ z\in D-\{۰\}\\ b & ;\ z=۰\end{cases}$$

۱) $f(۰)=b=-۱$ ۲) $f(۰)=b=۱$ ۳) $f(۰)=-b=۱$ ۴) $f(۰)=-b=-۱$

پاسخ: گزینه «۴» هر گاه g بر D تحلیلی باشد، طبق قضیه‌ی کوشی ـ گورسا برای هر مرز بسته‌ی C در D داریم: $\oint_C g(z)dz=۰$

دایره‌ی $|z|=r$ را درون D در نظر می‌گیریم. طبق فرمولِ انتگرال کوشی داریم: $\int_{|z|=r}g(z)dz=\int_{|z|=r}\frac{f(z)+e^z}{z}dz=۲\pi i(f(۰)+e^{۰})=۲\pi i(f(۰)+۱)$

بنابراین باید $f(۰)+۱=۰$ باشد یعنی $f(۰)=-۱$. اکنون توجه کنید برای تحلیلی بودن g لازم است g در $z=۰$ پیوسته هم باشد، یعنی داریم:

$$b=\lim_{z\to۰}\frac{e^z+f(z)}{z}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{z\to۰}\frac{e^z+f'(z)}{۱}=f'(۰)+۱=۱$$

بنابراین $f(۰)=-۱$ و $b=۱$ است.

مثال ۷: حاصل $I=\oint_C\frac{z^۲}{z-i}Ln(\frac{z+۱}{z-۱})dz$، در صورتی که C منحنی $|z-i|=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟ (Ln شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.)

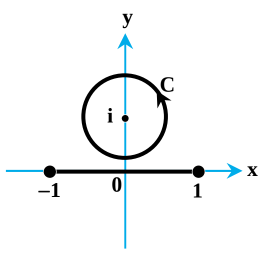
۱) $\pi^۲$ ۲) $i\pi^۲$ ۳) $-i\pi^۲$ ۴) $-\pi^۲$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید ببینیم تابع $Ln(\frac{z+۱}{z-۱})$، داخل و روی منحنی C تحلیلی می‌باشد یا نه!؟ می‌دانیم تابع Ln فقط روی مجموعه $\{z\,|\,Re\,z\le۰\ ,\ Im\,z=۰\}$ تحلیلی نیست، لذا داریم:

$$\frac{z+۱}{z-۱}=\frac{x+۱+iy}{x-۱+iy}=\frac{(x+۱+iy)[(x-۱)-iy]}{(x-۱)^۲+y^۲}=\frac{x^۲+y^۲-۱}{(x-۱)^۲+y^۲}+i\frac{-۲y}{(x-۱)^۲+y^۲}$$

پس تابع $Ln(\frac{z+۱}{z-۱})$ روی مجموعه‌ی مقابل تحلیلی نیست:

$$\begin{cases}x^۲+y^۲-۱\le۰\\-۲y=۰\end{cases}\xrightarrow{y=۰}x^۲-۱\le۰\Rightarrow x^۲\le۱$$



همان‌طور که در ناحیه نشان داده شده مشخص است، نقاط غیر تحلیلی تابع داخل و روی منحنی C (دایره $|z-i|=\frac{۱}{۲}$) نیستند. دقت کنید که چون در گزینه‌ها مقدار داریم، نیاز به بررسی نقاط غیرتحلیلی تابع Ln نبود، چون اگر این نقاط درون ناحیه بودند، انتگرال قابل محاسبه نبود. اما ما برای تمرین این نقاط را هم حساب کردیم. پس فقط $z=i$ نقطه‌ی غیرتحلیلی درون دایره است. اگر فرض کنیم $f(z)=z^۲Ln(\frac{z+۱}{z-۱})$، آن‌گاه انتگرال زیر را داریم که بر اساس قضیه‌ی کوشی به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$I=\oint_C\frac{f(z)}{z-i}dz=۲\pi i f(i)=۲\pi i(i)^۲Ln(\frac{i+۱}{i-۱})=-۲\pi i Ln[\frac{(i+۱)(i+۱)}{(i-۱)(i+۱)}]=-۲\pi i Ln(\frac{۲i}{-۲})=-۲\pi i Ln(-i)$$

اما مقدار $\mathrm{Ln}(-i)$ برابر است با:

$$\mathrm{Ln}(-i)=\mathrm{Ln}\,|-i|+i\mathrm{Arctg}(-i)=\mathrm{Ln}1-i\frac{\pi}{2}=-i(\frac{\pi}{2})$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار زیر است:

$$\mathbf{I=-2\pi i(-i\frac{\pi}{2})=-\pi^2}$$

نکته جالب در مورد این سؤال: این سؤال عیناً حتی بدون تغییر در چهار گزینه در آزمون کارشناسی ارشد بهمن ۹۳ در رشته‌ی برق مطرح شده بود!! (البته سؤالات شبیه و عین بسیار از این کتاب در آزمون‌ها مطرح می‌شود، اما این که هر چهار گزینه هم یکسان باشد و سؤال تألیفی باشد و از کنکورهای سال‌های گذشته هم نباشد، برای اولین بار بود!!)

مثال ۸: حاصل $\mathbf{I=\oint_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{Ln(1-z^2)}{z(z^3-i)(tgz-i)}dz}$، در صورتی که مسیر انتگرال‌گیری در جهت مثلثاتی پیموده شده باشد، کدام است؟ (**Ln** شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.)

۱) 0 ۲) $2\pi i\mathrm{Ln}i$ ۳) $2\pi i$ ۴) انتگرال قابل محاسبه نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در این سؤال، چون در گزینه (۴) جمله‌ی «انتگرال قابل محاسبه نیست» را داریم، باید بررسی کنیم تابع Ln در کجا تحلیلی نیست. می‌دانیم برای تابع $\mathrm{Ln}z$، مجموعه $\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z\le 0,\mathrm{Im}\,z=0\}$ نقاط غیرتحلیلی را مشخص می‌کند. برای این منظور لازم است قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت جلوی Ln را تفکیک کنیم:

$$1-z^2=1-(x+iy)^2=1-x^2+y^2-2ixy$$

بنابراین ناحیه‌ای که تابع $\mathrm{Ln}(1-z^2)$ غیر تحلیلی است، به شکل مقابل می‌باشد:

$$\begin{cases}1-x^2+y^2\le 0\\ 2xy=0\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم می‌دانیم $x=0$ یا $y=0$. اگر $x=0$، آن‌گاه از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $1+y^2\le 0$ که امکان ندارد. پس $y=0$ و بنابراین از معادله‌ی اول داریم: $1-x^2\le 0$، یا $|x|\ge 1$، پس $\mathrm{Ln}(1-z^2)$ فقط روی مجموعه زیر تحلیلی نیست.

$$\{z\,|\,z=x+iy\ ,\ y=0\ ,\ |x|\ge 1\}\ \Rightarrow\ \text{درون مسیر انتگرال‌گیری قرار ندارد}$$

اما سراغ دیگر نقاط غیر تحلیلی تابع تحت انتگرال می‌رویم:

$$z^3-i=0\ \Rightarrow |z^3|=|i|\ \Rightarrow |z^3|=1\ \Rightarrow |z|=1$$

واضح است ریشه‌های $z^3-i=0$، داخل دایره $|z|=\frac{1}{3}$ نیستند $(1>\frac{1}{3})$. در این مرحله سراغ پرانتز دیگر مخرج می‌رویم:

$$tgz-i=0\ \Rightarrow \frac{\sin z}{\cos z}-i=0\ \Rightarrow \sin z-i\cos z=0\ \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در }2i} e^{iz}-e^{-iz}+e^{iz}+e^{-iz}=0\Rightarrow 2e^{iz}=0\Rightarrow e^{iz}=0\rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

از طرفی تابع $tgz=\frac{\sin z}{\cos z}$ نیز در نقاطی که $\cos z=0$ باشد، یعنی $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\cdots$ تحلیلی نیست، اما هیچ‌کدام از آن‌ها درون دایره‌ی $|z|=\frac{1}{3}$ قرار ندارند.

با فرض $f(z)=\frac{\mathrm{Ln}(1-z^2)}{(z^3-i)(tgz-i)}$ و با استفاده از قضیه انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{f(z)}{z}=2\pi i\,f(0)=0$$

قضیه (تعمیم قضیه کوشی برای نواحی همبند چندگانه)

فرض کنید C و C_kها $(k=1,2,\cdots n)$ مسیرهای ساده و بسته با جهت مثبت باشند، که تمام C_kها درون C باشند، به‌طوری که در هیچ نقطه‌ای از ناحیه با هم دارای نقطه‌ی مشترک نباشد. در این صورت داریم:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz}$$

در واقع این قضیه را می‌توان به این شکل بیان کرد که اگر چند نقطه‌ی غیر تحلیلی درون C داشتیم، می‌توانیم برای هر یک از نقاط باز هم از قضیه کوشی استفاده کنیم و در نهایت این مقادیر را با هم جمع بزنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۹: حاصل $\mathbf{\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz}$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** دو نقطه $z=1$ و $z=2$ در داخل دایره $|z|=3$ قرار دارند، پس بنا بر تعمیم قضیه کوشی برای نواحی چندگانه داریم:

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z-2}dz=2\pi i(\frac{e}{1-2})+2\pi i(\frac{e^2}{2-1})=2\pi i(e^2-e)$$

مثال ۱۰: حاصل انتگرال $I=\oint_{|z|=۲}\frac{dz}{z^۴-۱}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{\pi i}{۲}$
۳) $-\frac{\pi i}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

پاسخ : گزینه «۱» ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم: $z^۴-۱=۰ \Rightarrow z_۱=i\ ,\ z_۲=۱\ ,\ z_۳=-۱\ ,\ z_۴=-i$

توجه شود نقاط i، ۱، ۱- و $-i$ در داخل دایره $|z|=۲$ قرار دارند و هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$I_۱=\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{۱}{(z^۲-۱)(z+i)}}{z-i}dz=۲\pi i f(i)=۲\pi i\times(\frac{-۱}{۴i})=-\frac{\pi}{۲}$$

$$I_۲=\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{۱}{(z^۲+۱)(z+۱)}}{z-۱}dz=۲\pi i f(۱)=۲\pi i\times\frac{۱}{۴}=\frac{\pi i}{۲}$$

$$I_۳=\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{۱}{(z^۲+۱)(z-۱)}}{z+۱}dz=۲\pi i f(-۱)=۲\pi i\times(-\frac{۱}{۴})=-\frac{\pi i}{۲}$$

$$I_۴=\oint_{|z|=۲}\frac{\frac{۱}{(z^۲-۱)(z-i)}}{z+i}dz=۲\pi i f(-i)=۲\pi i\times(\frac{۱}{۴i})=+\frac{\pi}{۲}$$

$$I=I_۱+I_۲+I_۳+I_۴=-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi i}{۲}-\frac{\pi i}{۲}+\frac{\pi}{۲}=۰$$

نکته۱: حالت کلی‌تر فرمول انتگرال کوشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_۰)^{n+۱}}dz=۲\pi i\frac{f^{(n)}(z_۰)}{n!}\qquad(n=۰,۱,۲,۳,...)$$

رابطه فوق جهت محاسبه مشتق مرتبه nام تابع تحلیلی $f(z)$ نیز کاربرد دارد.

مثال ۱۱: حاصل $\oint_C\frac{e^z}{z^۴}dz$ در صورتی که C مربعی با رئوس $\pm۴i$ و ±۴ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi i}{۳}$
۲) $\frac{\pi i}{۳}$
۳) $\frac{۴\pi i}{۳!}$
۴) $-\frac{۴\pi i}{۳!}$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(z)=e^z$ در کل صفحه مختلط تحلیلی است و واضح است که $z_۰=۰$ داخل مربع فوق می‌باشد، پس داریم:

$$\oint_C\frac{e^z}{z^۴}dz=\frac{۲\pi i}{۳!}\times f^{(۳)}(۰)=\frac{۲\pi i}{۳!}\times e^۰=\frac{\pi i}{۳}$$

مثال ۱۲: حاصل انتگرال $I=\oint_C\frac{e^z}{(z+۱)^۴}dz$ درصورتی که C مرز دایره $|z|=۲$ در جهت مثبت باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi i}{e}$
۲) $\frac{۲\pi e}{۳}$
۳) $\frac{\pi i}{۳e}$
۴) $۲\pi ei$

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به فرمول فوق، در این سؤال $z_۰=-۱$ و $n=۳$ می‌باشد، لذا داریم: $I=\oint\frac{e^z}{(z+۱)^۴}dz=۲\pi i\times\frac{f'''(-۱)}{۳!}$

$$f(z)=e^z\Rightarrow f'''(z)=e^z\Rightarrow f'''(-۱)=e^{-۱}=\frac{۱}{e}\Rightarrow I=\frac{۲\pi i}{e\times۳!}=\frac{\pi i}{۳e}$$

مثال ۱۳: حاصل $I=\oint_{|z-۱|=۱}\frac{\sin\pi z}{(z^۲-۱)^۲}dz$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۲}$
۲) $-\frac{\pi^۲}{۲}$
۳) $\frac{\pi^۲}{۲}i$
۴) $-\frac{\pi^۲}{۲}i$

پاسخ : گزینه «۴» با توجه به مرز انتگرال‌گیری تابع زیر انتگرال فقط در نقطه‌ی $z=۱$ غیر تحلیلی است.

$$I=\oint\frac{\sin\pi z}{(z^۲-۱)^۲}dz=\oint\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+۱)^۲}}{(z-۱)^۲}dz$$

همان‌طور که گفتیم تابع $f(z)=\frac{\sin\pi z}{(z+۱)^۲}$ در ناحیه $|z-۱|\le۱$ تحلیلی است، لذا داریم:

$$I=\oint\frac{f(z)}{(z-۱)^۲}dz=۲\pi i f'(۱)=۲\pi i\times(\frac{-\pi}{۴})=-\frac{\pi^۲}{۲}i$$

مثال ۱۴: حاصل انتگرال $I=\int_C\frac{e^z}{(z-۱)^{۱۳۹۵}}dz$ که در آن دایره‌ی $|z|=۲$ می‌باشد چه مضربی از $۲\pi i$ است؟

۱) $\frac{e}{۱۳۹۵!}$
۲) $\frac{e}{۱۳۹۴!}$
۳) $\frac{۱}{۱۳۹۶!}$
۴) $\frac{۱}{۱۳۹۴!}$

پاسخ : گزینه «۲» در این مثال $f(z)=e^z$، $z_۰=۱$ و $n+۱=۱۳۹۵$ است. بنابراین $n=۱۳۹۴$ و جواب انتگرال برابر است با:

$$I=۲\pi i\frac{f^{(۱۳۹۴)}(۱)}{۱۳۹۴!}=۲\pi i\frac{e}{۱۳۹۴!}$$

مثال ۱۵: فرض کنید C دایره ۳ $= |z|$ باشد. به ازای $|w| < 3$، تابع $g(w)$ به صورت $g(w) = \oint_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz$ تعریف می‌شود. مقدار $\frac{g(2i)}{g''(1-i)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{i-5}{2}$ ۲) $-\frac{i+5}{2}$ ۳) $-\frac{-i+5}{2}$ ۴) $\frac{i+5}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» فرض کنیم $|w| < 3$ باشد. تابع $f(z) = 2z^2 - z - 2$ همه‌جا تحلیلی است. با توجه به فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$g(w) = \oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w) \Rightarrow g(w) = 2\pi i(2w^2 - w - 2)$$

با مشتق‌گیری از $g(w)$، خواهیم داشت:

$$g'(w) = 2\pi i(4w - 1) \Rightarrow g''(w) = 8\pi i$$

بنابراین با محاسبه‌ی عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{g(2i)}{g''(1-i)} = \frac{2\pi i(-8 - 2i - 2)}{8\pi i} = \frac{-10 - 2i}{4} = -\frac{i+5}{2}$$

مثال ۱۶: اگر $f(z) = \oint_{|\alpha|=3} \frac{3\alpha^2 + 7\alpha + 1}{\alpha - z} d\alpha$، آن‌گاه مقدار $f'(1+i)$ کدام است؟

۱) $12\pi + 26\pi i$ ۲) $12\pi - 26\pi i$ ۳) $-12\pi - 26\pi i$ ۴) $-12\pi + 26\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با مشتق‌گیری نسبت به z از طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$f'(z) = \oint_{|\alpha|=3} \frac{3\alpha^2 + 7\alpha + 1}{(\alpha - z)^2} d\alpha$$

اکنون به ازای $z = 1 + i$ خواهیم داشت:

$$f'(1+i) = \int_{|\alpha|=3} \frac{3\alpha^2 + 7\alpha + 1}{(\alpha - 1 - i)^2} d\alpha$$

تابع $g(\alpha) = 3\alpha^2 + 7\alpha + 1$ در این ناحیه تحلیلی است. با استفاده از فرمول کوشی داریم:

$$f'(1+i) = 2\pi i g'(1+i) = 2\pi i(6\alpha + 7)\Big|_{\alpha = 1+i} = 2\pi i(6i + 13) = -12\pi + 26\pi i$$

مثال ۱۷: اگر $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ $(z \neq 0)$ و $f(0) = 1$، آن‌گاه حاصل $I = \oint_{|z|=1} \frac{e^{f(z)}}{z^2} dz$ کدام است؟

۱) $2\pi i f''(0)e$ ۲) $2\pi i f'(0)e$ ۳) $\pi i f'(0)e$ ۴) $\pi i f''(0)e$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که f در $z = 0$ تحلیلی است، زیرا:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=} \lim_{z \to 0} \frac{z}{z} = 1 = f(0)$$

پس f در $z = 0$ پیوسته است و چون در هر $z \neq 0$ تحلیلی است بنابراین در $z = 0$ نیز مشتق‌پذیر خواهد بود.

(**یادآوری:** تابع دو ضابطه‌ای $f(z) = \begin{cases} g(z) & z \neq z_0 \\ a & z = z_0 \end{cases}$ در z_0 تحلیلی است اگر g تابعی تحلیلی باشد و $\lim_{z \to z_0} g(z) = a$)

بنابراین $f(z)$ درون و روی دایره‌ی $|z| = 1$ تحلیلی است و به این ترتیب $g(z) = e^{f(z)}$ نیز در این ناحیه تحلیلی خواهد بود.

اکنون از فرمول انتگرال کوشی خواهیم داشت:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{e^{f(z)}}{z^2} dz = 2\pi i g'(0) = 2\pi i f'(0) e^{f(0)} = 2\pi i f'(0) e^1$$

مثال ۱۸: حاصل کدام‌یک از انتگرال‌های زیر با بقیه فرق می‌کند؟ $(n > 1)$

۱) $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta} \cos(\sin n\theta - \theta) d\theta$ ۲) $\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta} \sin(\sin n\theta - \theta) d\theta$

۳) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) d\theta$ ۴) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که:

$$e^{i(\sin n\theta - \theta)} = \cos(\sin n\theta - \theta) + i\sin(\sin n\theta - \theta)$$

در ضمن $e^{\cos n\theta}$ نیز عبارتی حقیقی است. در نتیجه داریم:

$$e^{\cos n\theta} \cos(\sin n\theta - \theta) = \mathrm{Re}\{e^{\cos n\theta} e^{i(\sin n\theta - \theta)}\} \quad , \quad e^{\cos n\theta} \sin(\sin n\theta - \theta) = \mathrm{Im}\{e^{\cos n\theta} e^{i(\sin n\theta - \theta)}\}$$

اکنون تمام گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. طبق توضیح فوق برای گزینه‌ی (۱) داریم:

$$I_1 = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{\cos n\theta} e^{i(\sin n\theta - \theta)} d\theta = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{e^{in\theta}} . e^{-i\theta} d\theta$$

با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ و $\frac{dz}{iz} = d\theta$ داریم:

$$I_1 = \mathrm{Re}\int_{|z|=1} e^{z^n} \frac{1}{z} \frac{dz}{iz} = \mathrm{Re}\int_{|z|=1} \frac{1}{i} \frac{e^{z^n}}{z^2} dz$$

اگر فرض کنیم $g(z)=e^{z^n}$ آن‌گاه طبق قضیه کوشی $I_1=\mathrm{Re}(\frac{1}{i}2\pi\frac{g'(0)}{1!})$ است. اما $g'(z)=nz^{n-1}e^{z^n}$ پس $g'(0)=0$ است، یعنی $I_1=0$ می‌باشد.

بررسی گزینه (۲): طبق توضیحات اولیه، این انتگرال قسمت موهومیِ همان انتگرالی است که در گزینه‌ی (۱) داشتیم. بنابراین با توجه به آنچه در بررسی گزینه (۱) گفتیم، حاصل این انتگرال هم صفر می‌شود.

بررسی گزینه (۳): $I_3=\mathrm{Im}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}.e^{i(\theta+\sin\theta)}d\theta=\mathrm{Im}\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}e^{i\theta}d\theta=\mathrm{Im}(\frac{1}{i}\int_{|z|=1}ze^z\frac{dz}{z})=\mathrm{Im}\frac{1}{i}\int_{|z|=1}e^zdz=0$

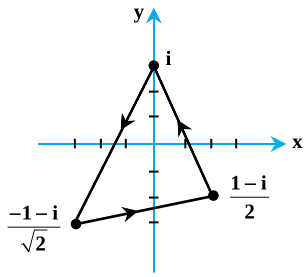
تابع e^z همه جا تحلیلی است. انتگرال آن روی مرز بسته می‌شود.

پس حاصل انتگرال‌های داده شده در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) با هم یکسان هستند. اکنون نشان می‌دهیم I_4 مخالف صفر است.

بررسی گزینه (۴): $I_4=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}.e^{i\sin\theta}d\theta=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}d\theta=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\times\underset{\text{قضیه کوشی گورسا}}{\underbrace{2\pi i e^0}}=2\pi$

مثال ۱۹: اگر C منحنی بسته‌ای به شکل مثلث با رئوس i، $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1-i}{2}$ باشد که در جهت خلاف حرکت ساعت پیموده شده است، از تساوی $\int_C[\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{(a-2)^2}{z}+4]dz=4\pi$ مقدار a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۱) $1+i$ ۲) $2+i$ ۳) $3+i$ ۴) $4+i$



پاسخ: گزینه «۳» منحنی C را که مرز مثلث رسم شده است، در شکل مقابل نشان داده‌ایم.

فرض کنیم $f(z)=\frac{1}{(z-2)^4}+4$ و $g(z)=\frac{(a-2)^2}{z}$ باشند.

نقطه‌ی غیر تحلیلی تابع f، $z=2$ است که درون مرز C قرار ندارد. بنابراین f درون و روی مرز بسته‌ی C تحلیلی است و طبق قضیه‌ی کوشی ـ گورسا خواهیم داشت: $\oint_C f(z)dz=0$

نقطه‌ی $z=0$ که قطب ساده‌ی g است، درون منحنی C قرار دارد بنابراین طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C g(z)dz=\oint_C\frac{(a-2)^2}{z}dz=2\pi i(a-2)^2$$

در نتیجه، انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\oint_C[\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{(a-2)^2}{z}+4]dz=\oint_C f(z)dz-\oint_C g(z)dz=-2\pi i(a-2)^2$$

بنابر صورت سؤال داریم: $-2\pi i(a-2)^2=4\pi$ پس $(a-2)^2=\frac{4}{-2i}=2i$. با نوشتن فرم قطبی $2i$، ریشه‌ی دوم آن را بدست می‌آوریم:

$$(a-2)^2=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Rightarrow(a-2)=\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}\Rightarrow a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}\qquad k=0,1$$

$\xrightarrow{k=0}a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2+(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i)=\mathbf{3+i}\Rightarrow$ گزینه‌ی (۳) صحیح است.

البته به ازای $k=1$ نیز مقدار دیگری برای a بدست خواهد آمد: $\xrightarrow{k=1}a=2+\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=2+\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=1-i$

مثال ۲۰: اگر تساوی $f(z)=\sum_{n=0}^{15}z^n$، برای هر عدد مختلط z برقرار باشد و C دایره $|z-i|=2$ باشد، مقدار انتگرال $I=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-i)^{15}}$ کدام است؟

۱) $2\pi i(1+15i)$ ۲) $2\pi i(1+14i)$ ۳) $4\pi i(1+15i)$ ۴) $4\pi i(1+14i)$

پاسخ: گزینه «۱» تابع $f(z)$ یک چند جمله‌ای (از درجه‌ی ۱۵) است، بنابراین تام است، یعنی همه‌جا تحلیلی است. بنابراین روی دایره‌ی $C:|z-i|=2$ با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$I=\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-i)^{15}}=2\pi i\frac{f^{(14)}(i)}{14!}$$

اکنون به مشتقِ چهاردهم تابع $f(z)=1+z+z^2+\cdots+z^{14}+z^{15}$ توجه کنید. اگر از این تابع چهارده بار مشتق بگیریم جملات با درجه‌ی کمتر از ۱۴ به صفر خواهند رسید و با کمی دقت خواهیم دید: که $f^{(14)}(z)=14!+15!z$. بنابراین داریم:

$$I=2\pi i\frac{f^{(14)}(i)}{14!}=2\pi i(\frac{14!+15!\,i}{14!})=\mathbf{2\pi i(1+15i)}$$

مثال۲۱: اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی درون و روی دایره $|z|=1$ باشد و $f(0)=1$، آن‌گاه حاصل انتگرال $I=\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\frac{\theta}{2})d\theta$، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $2+f'(0)$ ۲) $\pi(2+f'(0))$ ۳) $\frac{\pi(2+f'(0))}{2}$ ۴) $\frac{\pi(2+f'(0))}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا با استفاده از اتحاد طلایی، توانِ کسینوس را از بین می‌بریم:

$$I=\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(\frac{1+\cos\theta}{2})d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})[1+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}]d\theta$$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ خواهیم داشت $dz=ie^{i\theta}d\theta$ یعنی $dz=izd\theta$. پس $d\theta=\frac{dz}{iz}$. به جای انتگرال معین $\int_0^{2\pi}$ نیز انتگرال روی مرز بسته‌ی $|z|=1$ را خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{2}\oint_C f(z)[1+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}]\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2i}\oint_C f(z)(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2})dz=\frac{1}{2i}[\frac{1}{2}\oint_C f(z)dz+\oint_C\frac{f(z)}{z}dz+\frac{1}{2}\oint_C\frac{f(z)}{z^2}dz]$$

اولین انتگرال به‌خاطر تحلیلی بودنِ f مساوی است با صفر است (یعنی $\oint_C f(z)dz=0$)

دومین و سومین انتگرال با استفاده از قضیه‌ی کوشی ـ گورسا به صورت مقابل به‌دست می‌آیند:

$$\oint\frac{f(z)}{z}dz=2\pi i f(0)\ ,\ \oint\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i f'(0)$$

بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2i}[0+2\pi i f(0)+\pi i f'(0)]=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)=\frac{\pi}{2}(2f(0)+f'(0))$$

حالا چون $f(0)=1$ است، بنابراین جواب برابر با مقدار مقابل است:

$$I=\frac{\pi}{2}(2+f'(0))$$

مثال۲۲: اگر D ناحیه $D:\{z=x+iy\in C\ ;\ x^2+y^2\le 1\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $I=\iint_D \cos z\,dxdy$ کدام است؟

(از سؤالات پایان ترم دانشگاه‌های روسیه)

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ناحیه‌ی D را در مختصات قطبی به صورت $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ نشان می‌دهیم.

$$I=\iint_D\cos(z)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\cos(re^{i\theta})rdrd\theta$$

اولین انتگرال به روش جزء به جزء حل می‌شود.

r	$\cos(e^{i\theta}r)$
1	$e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta}r)$
0	$-e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta}r)$

$$\Rightarrow\int_0^1\cos(re^{i\theta})rdr=[re^{-i\theta}\sin(e^{i\theta}r)+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta}r)]\Big|_0^1=e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta})+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta})-e^{-2i\theta}$$

$$I=\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}\sin(e^{i\theta})+e^{-2i\theta}\cos(e^{i\theta})-e^{-2i\theta})d\theta$$

برای حل انتگرال دوم با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ این انتگرال معین را به انتگرال روی منحنی $|z|=1$ تبدیل می‌کنیم:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{dz}{ie^{i\theta}}=\frac{dz}{iz}$$

$$I=\int_{|z|=1}(\frac{\sin(z)}{z}+\frac{\cos(z)}{z^2}-\frac{1}{z^2})\frac{dz}{iz}=(-i)\int_{|z|=1}\frac{z\sin(z)+\cos(z)-1}{z^3}dz$$

اگر صورت کسر را $g(z)=z\sin(z)+\cos(z)-1$ بنامیم، تابعی تحلیلی است. پس، از فرمول انتگرال کوشی خواهیم داشت:

$$I=(-i)(2\pi i)\frac{1}{2!}g''(0)=(-i)(2\pi i)\frac{1}{2}=\pi$$