بسط‌های نیم‌دامنه‌ای (سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی)

معمولاً در کاربردهای عملی به مسائلی بر می‌خوریم که مقدار یک تابع در بازه $[0,L]$ مشخص است و در عین حال بسط مثلثاتی تابع در این بازه مدنظر ما می‌باشد. برای همین لازم است تابع را در فواصل دیگر طوری تعریف کرد که اولاً متناوب باشد و در ضمن در بازه $[0,L]$ همان مقدار داده شده را داشته باشد. یعنی می‌توان تابع را در فاصله‌ی $[-L,L]$ به روش‌های مختلف گسترش داد و تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ را بدست آورد.

در واقع این توابع به علت این که متناوب نیستند، دارای سری فوریه نیز نمی‌باشند. ولی با سری فوریه یک تابع که معمولاً ازگسترش زوج و یا فرد توابع فوق حاصل شده‌اند، می‌توانند متناظر قرار گیرند. برای این منظور از توابع کمکی استفاده می‌کنیم: اگر $f_1(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

(یعنی قسمت دیگر f در بازه $(-L,0)$ را طوری تعریف می‌کنیم که f زوج شود)

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad 0\le x\le L \\ f(-x) & , \quad -L\le x\le 0 \end{cases} \quad , \quad T=2L$$

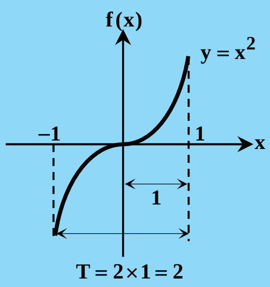
آنگاه $f_1(x)$ یک گسترش زوج برای تابع $f(x)$ است و اگر $f_2(x)$ به صورت زیر تعریف شود:

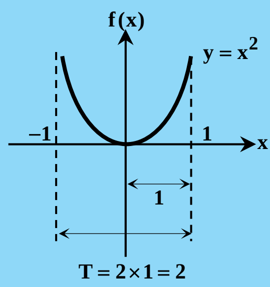
(یعنی قسمت دیگر f در بازه $(-L,0)$ را طوری تعریف می‌کنیم که f فرد شود)

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad 0\le x< L \\ -f(-x) & , \quad -L\le x\le 0 \end{cases}$$

آنگاه $f_2(x)$ گسترش فرد تابع $f(x)$ نامیده می‌شود.

برای درک بهتر موضوع، به تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2$ که در بازه‌ی $0\le x<1$ تعریف شده، توجه کنید که آن را می‌توان به دو صورت فرد یا زوج گسترش داد.





بنابراین بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)$، $0\le x\le L$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \quad , \quad a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \quad , \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

و بسط نیم‌دامنه سینوسی تابع f به صورت مقابل بیان می‌گردد:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x \quad , \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

بدیهی است در توابعی که به صورت زوج گسترش می‌یابند، ضرایب b_n و در توابعی که به صورت فرد گسترش می‌یابند، ضرایب a_n و a_0 برابر صفر می‌باشند.

مثال ۱۷: برای تابع $f(x)=\begin{cases}1 \ ; & 0\le x\le \pi \\ 0 \ ; & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$**، بسط‌های نیم‌دامنه کسینوسی و سینوسی را بنویسید.**

☑ **پاسخ :** ابتدا مقدار L را حساب می‌کنیم:

$$0<x<2\pi \Rightarrow L=2\pi$$

الف) بسط فوریه **کسینوسی** به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{nx}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}1\times dx=\frac{1}{2\pi}[x]_0^{\pi}=\frac{1}{2}$$

پس بسط فوریه کسینوسی به صورت مقابل خواهد بود:

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})\cos\frac{nx}{2}}$$

ب) ضریب b_n بسط فوریه **سینوسی** به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\frac{nx}{2})dx=-\frac{2}{n\pi}[\cos(\frac{n\pi}{2})-1]$$

پس بسط فوریه سینوسی به صورت مقابل خواهد بود:

$$\mathbf{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n\pi}[\cos(\frac{n\pi}{2})-1]\sin\frac{nx}{2}}$$

مثال ۱۸: **جملهی دوم سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=e^x$، $\circ<x<\pi$ برابر کدام گزینه است؟**

۱) $[\frac{۴(-e^\pi+۱)}{۵\pi}]\sin ۲x$ ۲) $\frac{۲(e^\pi-۱)}{۵\pi}\sin ۲x$ ۳) $[\frac{۲(-e^\pi+۱)}{۵\pi}]\sin ۲x$ ۴) $\frac{۴(e^\pi-۱)}{۵\pi}\sin ۲x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به این که سری فوریه سینوسی است، لذا داریم:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi e^x\sin(nx)dx \xrightarrow{\text{انتگرال } e^{ax}\sin bx}$$

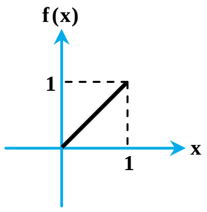
$$b_n=\frac{۲}{\pi}[\frac{e^x}{۱+n^۲}(\sin nx-n\cos nx)]_\circ^\pi=\frac{۲}{\pi(۱+n^۲)}[e^\pi(\sin n\pi-n\cos n\pi)-e^\circ(\sin(\circ)-n\cos(\circ))]$$

$$\xrightarrow{\cos(n\pi)=(-۱)^n} b_n=\frac{۲}{\pi(۱+n^۲)}[-e^\pi n(-۱)^n+n]$$

جملهی دوم به ازای $n=۲$، حاصل میشود:

$$\frac{۲}{\pi}(\frac{۱}{۱+۲^۲})(-۲e^\pi+۲)\sin ۲x=\mathbf{\frac{۴(-e^\pi+۱)}{۵\pi}\sin ۲x}$$

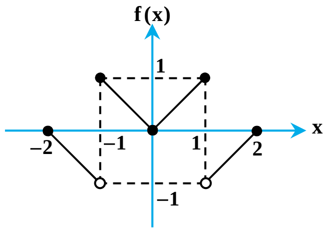
مثال ۱۹: **برای تابع $f(x)$ وقتی که $\circ\le x\le ۱$ است، سری فوریهای به شکل زیر نوشته شده است. مقدار ضریب $a_۳$ کدام است؟**



$$\mathbf{f(x)=\sum_{n=۱,۳,۵,\dots}^{\infty}a_n\cos(\frac{n}{۲}\pi x)}$$

۱) $-\frac{۱۲\pi+۸}{۹\pi^۲}$ ۲) $-\frac{۸}{۹\pi^۲}$ ۳) $-\frac{۶\pi+۴}{۹\pi^۲}$ ۴) $-\frac{۴}{۹\pi^۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» سری فوریهی نوشته شده، کسینوسی است. بنابراین $f(x)$ به صورت زوج گسترش داده شده است. با دقت به سری میبینیم که در آن $\frac{n\pi}{۲}=\frac{n\pi}{L}$ است. پس $L=۲$ و $T=۲L=۴$ یعنی دورهی تناوب تابع f، $T=۴$ است. لازم است ضابطهی f را روی نیمدامنهی آن یعنی در بازهی $[\circ,۲]$ تعیین کنیم. اکنون دقت کنید که سری فوریهی خواسته شده فقط شامل هارمونیکهای فرد است. بنابراین f نسبت به خط $x=\frac{L}{۲}=\frac{۱}{۲}$ باید فرد باشد. در واقع f را باید طوری بسط دهیم که انتگرال f روی یک دورهی تناوب آن صفر شود. بنابراین $f(x)$ مطابق شکل زیر خواهد بود:
با کمی دقت میبینیم که ضابطهی $f(x)$ در نیم دامنهی آن چنین است:



$$f(x)=\begin{cases}x & \circ\le x\le ۱\\ x-۲ & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

اکنون ضریب $a_۳$ را محاسبه میکنیم:

$$a_۳=\frac{۲}{L}\int_\circ^L f(x)\cos(\frac{۳}{۲}\pi x)dx=\frac{۲}{۲}\int_\circ^۲ f(x)\cos(\frac{۳}{۲}\pi x)dx=\int_\circ^۱ x\cos(\frac{۳}{۲}\pi x)dx+\int_۱^۲(x-۲)\cos(\frac{۳}{۲}\pi x)dx$$

هر دو انتگرال با استفاده از جدول جزء به جزء حل میشوند:

x	$\cos(\lambda x)$
۱	$\frac{۱}{\lambda}\sin(\lambda x)$
$\circ$	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\cos(\lambda x)$

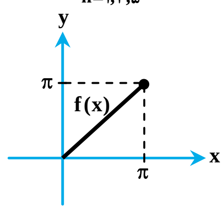
$x-۲$	$\cos(\lambda x)$
۱	$\frac{۱}{\lambda}\sin(\lambda x)$
$\circ$	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\cos(\lambda x)$

در این جداول $\lambda=\frac{۳}{۲}\pi$ است. با نوشتن جوابها و جایگذاری کرانها داریم:

$$a_۳=[\frac{۲}{۳\pi}x\sin(\frac{۳\pi}{۲}x)+\frac{۴}{۹\pi^۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}x)]\Big|_\circ^۱+[\frac{۲}{۳\pi}(x-۲)\sin(\frac{۳\pi}{۲}x)+\frac{۴}{۹\pi^۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}x)]\Big|_۱^۲=-\frac{۲}{۳\pi}-\frac{۴}{۹\pi^۲}-\frac{۴}{۹\pi^۲}-\frac{۲}{۳\pi}=-\frac{۱۲\pi+۸}{۹\pi^۲}$$

مثال۲۰: **برای تابع $f(x)$ در بازه‌ی $۰ \le x \le \pi$ سری فوریه‌ای به شکل زیر نوشته شده است. مقدار ضریب $b_۳$ کدام است؟**

$$f(x) = \sum_{n=۱,۳,۵} b_n \sin(\frac{n}{۲}x)$$



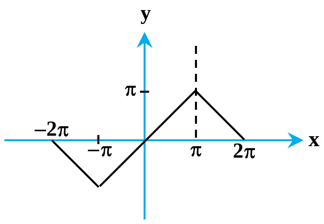
۱) $-\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{۸}{۹}$

۳) $-\frac{۸}{۹\pi}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینه «۳» سری نوشته شده، سینوسی است. پس $f(x)$ را باید گسترش فرد بدهیم. دقت کنید که $(\frac{n\pi}{L} = \frac{n}{۲} \Rightarrow L = ۲\pi)$ پس دوره‌ی تناوب تابع f، $T = ۴\pi$ است. لازم است ضابطه‌ی f را روی نیم دامنه‌ی آن یعنی بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ پیدا کنیم. با دقت به این نکته که فقط هارمونیک‌های فرد در سری فوریه آمده‌اند، معلوم می‌شود $f(x)$ با آن که تابعی فرد است اما نسبت به $x = \pi$ که وسط نیم‌دامنه است، زوج می‌باشد. یعنی نمودار f در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ باید نسبت به خط $x = \frac{L}{۲} = \pi$ متقارن باشد.

به این ترتیب ضابطه‌ی f در نیم دامنه‌ی آن چنین است:

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < \pi \\ ۲\pi - x & \pi < x < ۲\pi \end{cases}$$



اکنون ضریب $b_۳$ را بدست می‌آوریم:

$$b_n = \frac{۲}{L}\int_۰^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \Rightarrow b_۳ = \frac{۲}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} f(x)\sin(\frac{۳}{۲}x)dx = \frac{۱}{\pi}[\int_۰^{\pi} x\sin(\frac{۳}{۲}x)dx + \int_{\pi}^{۲\pi}(۲\pi - x)\sin(\frac{۳}{۲}x)dx]$$

هر دو انتگرال با استفاده از جدول جزء به جزء زیر حل می‌شوند:

x	$\sin\lambda x$
۱	$-\frac{۱}{\lambda}\cos\lambda x$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\sin\lambda x$

$۲\pi - x$	$\sin\lambda x$
-۱	$-\frac{۱}{\lambda}\cos\lambda x$
۰	$-\frac{۱}{\lambda^۲}\sin\lambda x$

در این جداول $\lambda = \frac{۳}{۲}$ است.

$$b_۳ = \frac{۱}{\pi}[-\frac{۲x}{۳}\cos(\frac{۳}{۲}x) + \frac{۴}{۹}\sin(\frac{۳}{۲}x)]\Big|_۰^{\pi} + \frac{۱}{\pi}[\frac{-۲(۲\pi - x)}{۳}\cos(\frac{۳}{۲}x) - \frac{۴}{۹}\sin(\frac{۳}{۲}x)]\Big|_{\pi}^{۲\pi} = \frac{۱}{\pi}[-\frac{۴}{۹} - \frac{۴}{۹}] = -\frac{۸}{۹\pi}$$

نکته۲: سری فوریه توابع $A\sin ax$ و $B\cos ax$ در دوره تناوب این توابع برابر خود آنها می‌باشد. بنابراین هرگاه به توابعی برخورد کنیم که قسمتی از آن شامل عبارات فوق باشد، می‌توانیم سری فوریه بقیه تابع را محاسبه کنیم و نتیجه را با آن قسمت از تابع که سری فوریه‌اش خودش است، جمع کنیم. برای مثال سری فوریه تابعی که با شرایط مقابل تعریف می‌شود:

$$f(x) = x + \sin ۶x + \cos x \quad , \quad -\pi < x < \pi \ , \ T = ۲\pi$$

برابر است با:

$$f(x) = \sin ۶x + \cos x + ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx$$

مثال۲۱: **هرگاه $f(x) = x + \sin x$ و $-\pi < x < \pi$، در بسط فوریه مثلثاتی f، ضریب جمله $\sin x$ برابر است با :**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم سری فوریه تابع $\sin x$ برابر خود $\sin x$ است، لذا کافی است سری فوریه تابع فرد $g(x) = x$ را به دست آوریم. چون ضریب $\sin x$ خواسته شده، لذا $b_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$b_۱ = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} x\sin x dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء}} b_۱ = \frac{۲}{\pi}[-x\cos x + \sin x]_۰^{\pi} = ۲$$

ضریب $\sin x$ در بسط تابع $g(x) = x$ برابر ۲ به دست آمد و چون $f(x) = x + \sin x$ تعریف شده است، لذا ضریب $\sin x$ برابر۳=۲+۱ می‌باشد.

تذکر۲: در بعضی از سؤالات، استفاده از روابط ساده مثلثاتی منجر به ساده‌تر حل شدن مسئله می‌گردد و دیگر نیازی به محاسبه ضرایب فوریه به روش انتگرال‌گیری نیست.

مثال ۲۲: در نمایش سری فوریه تابع $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$ (که با دوره تناوب $T=2\pi$ متناوب است) به شکل $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$ کدام مقادیر صحیح هستند؟

۱) $a_4=-\frac{1}{4}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_0=-\frac{1}{4}$

۲) $a_0=8$ و $a_2=2$ و $a_4=4$

۳) $a_4=4$ و $a_2=2$ و $a_0=4$

۴) $a_4=-\frac{1}{4}$ و $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_0=-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۴»

$$f(t)=\sin^2 t\cos 2t=(\frac{1-\cos 2t}{2})(\cos 2t)=\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos^2 2t=\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}[\frac{1+\cos 4t}{2}]=\underset{\underset{\frac{a_0}{2}}{\downarrow}}{\boxed{-\frac{1}{4}}}+\underset{\underset{a_2}{\downarrow}}{\boxed{\frac{1}{2}}}\cos 2t\underset{\underset{a_4}{\downarrow}}{\boxed{-\frac{1}{4}}}\cos 4t$$

مثال ۲۳: اگر $0\le t\le 2\pi$ ، $f(t)=\sin^5 t$، آنگاه مقدار b_5 کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$

۲) $\frac{1}{16}$

۳) $-\frac{5}{16}$

۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است از فرمول‌های مثلثاتی کمک بگیریم:

$$\sin^5 t=(\sin^2 t)(\sin^3 t)=\sin^2 t[\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t]=\frac{3}{4}\sin^3 t+(\frac{1-\cos 2t}{2})(-\frac{1}{4}\sin 3t)$$

$$=\frac{3}{4}[\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t]-\frac{1}{8}\sin 3t+\frac{1}{8}\sin 3t\cos 2t=\frac{9}{16}\sin t-\frac{3}{16}\sin 3t-\frac{1}{8}\sin 3t+\frac{1}{8}[\frac{1}{2}(\sin t+\sin 5t)]$$

$$\Rightarrow \sin^5 t=\frac{10}{16}\sin t-\frac{5}{16}\sin 3t+\frac{1}{16}\sin 5t$$

تذکر۳: توابع مثلثاتی دارای یک دوره‌ی تناوب ذاتی هستند. اما در برخی سؤالات، یک بازه برای این‌گونه توابع توسط طراح سؤال داده می‌شود. برای مثال می‌دانیم که $\sin^3 t$ دوره‌ی تناوب ذاتی $T=2\pi$ را دارد. حالا ممکن است بخواهیم سری فوریه‌ی این تابع را با همین دوره‌ی تناوب یا با یک دوره‌ی تناوب دیگر بنویسیم. اگر دوره‌ی تناوب داده شده، همان دوره‌ی تناوب ذاتی یا مضرب صحیحی از دوره تناوب ذاتی آن تابع باشد، می‌توانیم از فرمول‌های مثلثاتی برای یافتن سری فوریه استفاده کنیم. معمولاً در این حالت سری فوریه از چند جمله‌ی متناهی تشکیل می‌شود و اغلب ضرایب به جز چند ضریب ابتدایی، صفر می‌شوند. برای مثال برای تابع $f(t)=\sin^3 t$ در بازه $0\le t\le 2\pi$، می‌توان از رابطه‌ی $\sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ استفاده کرد. (چون دوره تناوب تابع $\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ هم برابر با 2π است.) اما برای همین تابع (یعنی $f(t)=\sin^3 t$) در بازه‌ی $0\le t\le \pi$، نمی‌توان از رابطه‌ی یاد شده استفاده کرد. (چون دوره تناوب تابع $\sin^3 t$ طبق تعریفی که انجام شده برابر با π است، اما دوره تناوب $\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ برابر با 2π است. و یا به عبارت دیگر دوره تناوب در این حالت مضرب صحیحی از 2π نیست: $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$)

شرایط وجود سری فوریه

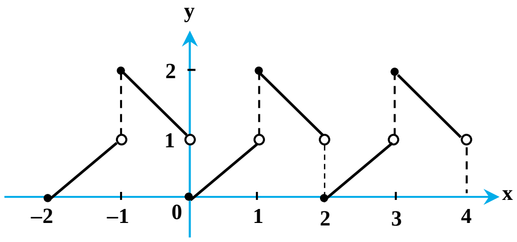
حقیقت آن است که هیچ شرط **لازم و کافی** برای آن که دقیقاً چه توابعی سری فوریه دارند، تاکنون پیدا نشده است! در عمل دسته‌ی بزرگی از توابع دارای سری فوریه هستند که به آن‌ها توابع انتگرال‌پذیر لبگ می‌گویند.

اما در درس ریاضیات مهندسی، ما خود را به توابعی محدود می‌کنیم که در محاسبات مهندسی ظاهر می‌شوند. این توابع اغلب خوش رفتار هستند. به این معنی که ناپیوستگی‌های آن‌ها تحت کنترل قرار دارند. برای آنکه دقیق‌تر وارد بحث شویم به قضیه‌ی زیر دقت کنید:

قضیه: هرگاه تابع حقیقی $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ با دوره‌ی تناوب $T=2L$ فقط در تعدادی متناهی از نقاط ناپیوسته باشد و در هر نقطه x حد راست و چپ آن موجود باشد، (البته ممکن است، برابر نباشند) می‌گوییم f تابعی تکه‌ای پیوسته است، که هر تابع با این شرایط دارای سری فوریه است.

مثال ۲۴: تابع زیر را با دوره تناوب $T = 2$ در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3 - x & 1 \le x < 2 \end{cases}$$



این تابع در همه‌ی نقاط بازه‌ی $[0,2]$ به جز نقاط $x = 0,1,2$ پیوسته است. اما در ایــن نقاط هم حدود چپ و راست آن موجود و متناهی است.

$f(1^-) = 1 \; , \; f(1^+) = 2 \; , \; f(2^-) = 1 \; , \; f(2^+) = 0 \; , \; f(0^+) = 0 \; , \; f(0^-) = 1$

بنابراین این تابع، تکه‌ای پیوسته است و سری فوریه دارد.

مثال ۲۵: توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ را بر بازه‌ی $(0,1)$ در نظر بگیرید. این توابع با آن که فقط در یک نقطــه $(x = 0)$ ناپیوســتگی دارنــد، امـا تکه‌ای پیوسته محسوب نمی‌شوند. زیرا $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$ و $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \sin(\frac{1}{0^+}) = \sin\infty$ یعنی حد راست $f(x)$ در صفر، بی‌کران مــی‌شــود و حــد راست $g(x)$ در صفر وجود ندارد.

اگر تابع $f(x)$ دارای شرایط قضیه‌ی فوق باشد، به طور ذاتی ویژگی‌هایی پیدا می‌کند که به صورت زیر خلاصه می‌شود:

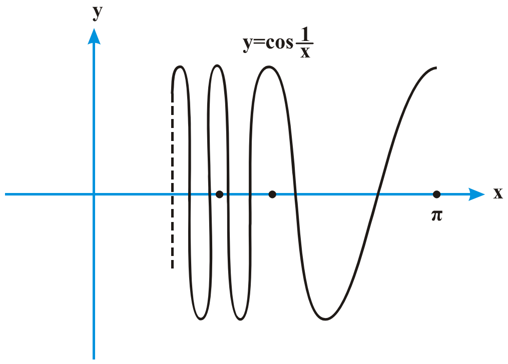
الف) عددی مانند $M > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)| < M$، به عبارتی تابع f کران‌دار خواهد بود.

ب) تعداد نقاط بیشینه و کمینه‌ی مطلق f در هر بازه‌ی کران‌دار، متناهی است.

ج) تعداد ناپیوستگی‌های f در هر بازه‌ی کران‌دار، متناهی است.

توجه: همه موارد فوق، شرط کافی برای وجود سری فوریه هستند نـه شـرط لازم. بـه ایـن معنـی کـه اگـر تـابعی ایـن شـرایط را داشـته باشـد، وجـود سـری فوریه‌ی آن تضمین شده است. اما اگر در این شرایط صدق نکند، ممکن است سری فوریه داشته یا نداشته باشد. شرایط بالا را شرایط دیریکله می‌نامند.

نکته ۳: توابع متناوبی که در بازه‌ی $(0,L)$ به صورت $\sin\frac{c}{x^b}$ یا $\cos\frac{c}{x^b}$ برای اعداد ثابت $c \neq 0$ و $b > 0$ تعریف شـوند، دارای بـی‌شـمار نقطـه‌ی بیشینه و کمینه بوده و تکه‌ای پیوسته نیستند.



مثال ۲۶: برای نمونه تابع $y = \cos\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $0 < x < \pi$ بررســی مــی‌کنــیم. نقــاط بیشینه و کمینه‌ی این تابع عبارتند از؛ ریشه‌های مشتق آن:

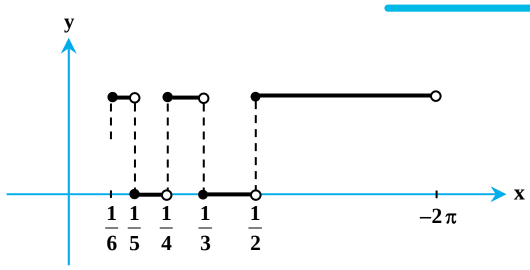
$$y' = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = n\pi \Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}$$

در هر نقطه از دنباله‌ی $x_n = \frac{1}{n\pi}$ یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق داریم. تعداد این نقاط، نامتناهی است. این تابع در فاصله‌ی $(0,\pi)$ بی‌شمار نوسان دارد. نمودار آن مانند فنری است که لحظـه به لحظه فشرده‌تر می‌شود. بنابراین این تابع ویژگی (ب) را ندارد.

مثال ۲۷: تابع ضربه $\delta(t)$ به این صورت تعریف می‌شود که $\delta(0) = \infty$ و در سایر نقاط $\delta(t) = 0$ است. این تابع در $t = 0$ بی‌کران است. بنابراین نمی‌توان عددی مانند M پیدا کرد که برای هر t داشته باشیم $|\delta(t)| < M$. این تابع ویژگی (الف) را ندارد. تابع ضربه از آن دسته توابعی است کــه بــا آن کــه شرایط دیریکله را ندارد، اما دارای سری فوریه است.

مثال ۲۸: به تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی زیر بر بازه‌ی $(0,1)$ دقت کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2n+1} \le x < \frac{1}{2n} \\ 1 & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{2n-1} \end{cases}$$



این تابع در هر نقطه‌ی $x = \frac{1}{n}$ که $n \ge 2$ باشد ناپیوسته است. تعداد ناپیوســتگی‌هــای f، نامتناهی است. بنابراین ویژگی (ج) را ندارد.

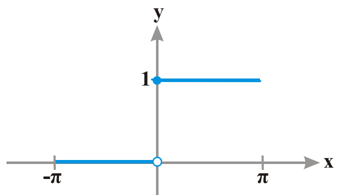
نکته ۴: توابع به فرم $f(x) = x^a \sin\frac{c}{x^b}$ و $f(x) = x^a \cos\frac{c}{x^b}$ به ازای هر $a > 0$ تکه‌ای پیوسته‌اند و در فاصله‌ی $(-L,L)$ سـری فوریـه دارنـد. اما اگر $b > 0$ و $a \le 0$ باشد؛ ضمن آن‌که حد چپ و راست آن‌ها در $x = 0$ وجود ندارد، سری فوریه هم ندارند.

همگرایی سری فوریه به تابع f

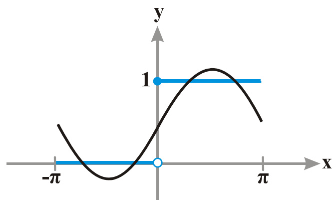
فرض کنید $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$ سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ با دوره‌ی تناوب $T=2L$ باشد. سؤال مهمی که ممکن است پیش آید این است که آیا واقعاً مقدار سری فوریه در نقطه‌ای مانند x_0 با مقدار تابع f در همین نقطه برابر است یا خیر؟

برای بررسی این موضوع، فرض کنید $S_N(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$ مجموعِ جمله ثابت و N جمله‌ی اول سری فوریه باشد. در شکل‌های زیر می‌بینید که چگونه $S_N(x)$ گام به گام به نمودار $f(x)$ نزدیک می‌شود. به عنوان نمونه تابع $f(x)=\begin{cases}1 \ ; & 0\le x<\pi\\ 0 \ ; & -\pi\le x<0\end{cases}$ را با دوره‌ی تناوب $T=2\pi$ در نظر گرفته‌ایم. سری فوریه‌ی $f(x)$ برابر است با: $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$

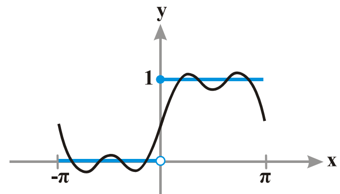
فرض کنیم $S_N(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)$ مجموع جمله‌ی ثابت و N جمله‌ی اول از سری فوریه باشد. برای مثال $S_1(x)$ فقط شامل جملات تا $N=1$ است: $S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x$ اما $S_5(x)$ تا $N=5$ ادامه دارد: $S_5(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}[\sin x+0+\sin 3x+0+\sin 5x]$ به نمودارها دقت کنید:



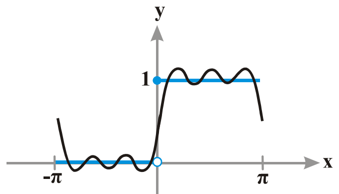
$y=f(x)$



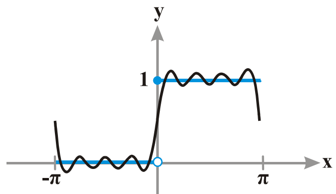
$S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x$



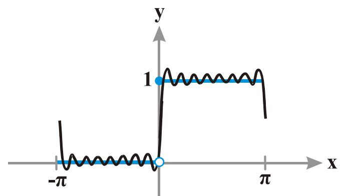
$S_3(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\sin 3x)$



$S_5(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\cdots+\sin 5x)$



$S_{11}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\cdots+\sin 11x)$



$S_{15}(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\cdots+\sin 15x)$

هر چه تعداد بیشتری از جملات سری فوریه را لحاظ می‌کنیم، نمودار $S_N(x)$ بیشتر به نمودار $f(x)$ نزدیک می‌شود. در این میان اما یک استثناء وجود دارد. در $x=0$ داریم $f(0)=1$ اما اگر با دقت به نمودارهای $S_1(x)$ تا $S_{15}(x)$ نگاه کنید، می‌بینید که مقدار سری فوریه در $x=0$ برابر $\frac{1}{2}$ است. در واقع چون f در $x=0$ ناپیوسته است، سری فوریه نمی‌تواند در این نقطه به مقدار f میل کند و به جای آن به میانگین حد چپ و راست f میل کرده است.

این بررسی را می‌توانیم در قالب قضیه‌ی زیر جمع‌بندی کنیم:

قضیه دیریکله

اگر تابع متناوب f بر بازه $[-L$ و $L]$ تکه‌ای هموار باشد، یعنی f و f' هر دو تکه‌ای پیوسته باشند، آنگاه مقدار سری فوریه تابع در هر نقطه‌ی x_0، برابر میانگین حد چپ $[f(x_0^-)]$ و حد راست $[(f(x_0^+)]$ در آن نقطه خواهد بود:

$$\text{مقدار سری فوریه در نقطه‌ی } x_0 = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

واضح است که اگر x_0 نقطه‌ی **پیوستگی** تابع باشد، آن‌گاه داریم $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x)$ و در نتیجه داریم:

$$\text{مقدار سری فوریه تابع در نقطه } x_0 = f(x_0)$$

مثال۲۹: مقدار سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & , 0<x<\frac{L}{2}\\ 1 & , \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$، در نقطه $x=\frac{L}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ : گزینه «۳» تابع در نقطه $x=\frac{L}{2}$ انفصال دارد بنابراین مقدار سری فوریه برابر است با:

$$f(\frac{L}{2})=\frac{f(\frac{L}{2}^-)+f(\frac{L}{2}^+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

نکته۵: توابع به فرم $f(x)=x^a\sin\frac{c}{x^b}$ و $f(x)=x^a\cos\frac{c}{x^b}$ در حالتی که $b\ge a>0$ باشد، تکه‌ای پیوسته هستند اما تکه‌ای هموار نیستند. این توابع دارای سری فوریه‌اند اما سری فوریه‌ی آن‌ها به $f(x)$ همگرا نیست. در حالتی که $a>b>0$ باشد، تابع $f(x)$ تکه‌ای هموار است و سری فوریه‌ای دارد که به $f(x)$ همگراست. به عنوان مثال، تابع $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ سری فوریه دارد اما سری فوریه‌اش به $f(x)$ همگرا نیست. تابع $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ سری فوریه‌ای دارد که به $f(x)$ همگراست.

سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه

در این قسمت می‌خواهیم ارتباط سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه با ناپیوستگی تابع و مشتقات تابع را بررسی کنیم.

اگر **خودِ تابع $f(x)$**، حداقل یک نقطه‌ی **ناپیوستگی** داشته باشد، حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعتی نظیر $\frac{C}{n}$ (C عددی حقیقی است) به صفر همگرا می‌شود و آن یکی ضریب هم **نمی‌تواند** با سرعت کمتر از $\frac{C}{n}$ به صفر همگرا شود.

به همین ترتیب اگر **$f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته باشد،** آن‌وقت حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعتی نظیر $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شود و آن یکی ضریب هم **نمی‌تواند** با سرعت کمتر از $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا شود. به طور کلی اگر $f(x)$ تا $f^{k-1}(x)$ (یعنی مشتق مرتبه «$k-1$ام») پیوسته باشد و **$f^{(k)}(x)$ ناپیوسته** باشد، آن‌وقت حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعت $\frac{C}{n^{k+1}}$ به صفر همگرا می‌شود و ضریب دیگر هم نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{C}{n^{k+1}}$ به صفر همگرا شود.

برای مثال؛ در تابع $f(x)=|\sin x|$، چون $f(x)$ در بازه $0<x<2\pi$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته است، سرعت همگرایی یکی از ضرایب حداقل $\frac{C}{n^2}$ می‌شود، و یا مثلاً برای تابع $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & ; 0\le x<1\\ 3-x & ; 1\le x\le 2\end{cases}$، چون خودِ تابع پیوسته، ولی مشتق آن ناپیوسته است، پس ضرایب سری فوریه حداقل با سرعت $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شوند. به ضابطه‌ی مشتق این تابع دقت کنید:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & ; 0\le x\le 1\\ -1 & ; 1\le x\le 2\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید در $x=1$ مشتق تابع ناپیوستگی دارد.

تذکر۴: سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه در صورتی قابل بررسی است که تابع $f(x)$، کران‌دار و قطعه‌ای پیوسته باشد. برای مثال تابع ضربه $\delta(x)$، در $x=0$ بی‌کران است و قطعه‌ای پیوسته نخواهد بود. از طرفی ضرایب فوریه‌ی این تابع، ثابت $\frac{1}{\pi}$ هستند و اصلاً به صفر همگرا نمی‌شوند بنابراین مطالب فوق برای تابع ضربه صدق نمی‌کند.

مثال۳۰: می‌دانیم یک تابع متناوب دارای ضرایب فوریه به صورت $b_n=\frac{2}{\sqrt{(n^2-1)^2+4n^2}}$, $a_n=\frac{2n}{\sqrt{(n^2-1)^2+4n^2}}$ است، در مورد پیوستگی تابع و مشتقات این تابع چه می‌توان گفت؟

پاسخ: ضریب a_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n}$ و b_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^2}$ کاهش می‌یابد. بنابراین حداقل سرعت یعنی $\frac{C}{n}$ را در نظر می‌گیریم و طبق توضیحات، واضح است این تابع دارای ناپیوستگی است و در ناپیوستگی‌هایش به وضوح مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال۳۱: می‌دانیم یک تابع متناوب دارای ضرایب سری فوریه به صورت $b_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n^2+1}}$, $a_n=\frac{1}{(2n-1)\sqrt{n^2+1}}$ است، در مورد پیوستگی تابع و مشتقات این تابع چه می‌توان گفت؟

۱) خودِ تابع ناپیوسته است و طبیعتاً مشتق‌های آن موجود نیستند.
۲) خودِ تابع پیوسته است ولی مشتق اول آن ناپیوسته است.
۳) خودِ تابع و مشتق اول آن پیوسته هستند، ولی مشتقات مرتبه‌ی دو و بالاتر از آن، وجود ندارند.
۴) خودِ تابع و مشتق‌های اول و دوم آن پیوسته هستند، ولی مشتقات مرتبه‌ی سه و بالاتر از آن، وجود ندارند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضریب a_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^2}$ و ضریب b_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^3}$ کاهش پیدا می‌کند، بنابراین ضریب $\frac{C}{n^2}$ را در نظر می‌گیریم (یعنی حداقل سرعت را در نظر می‌گیریم) پس خودِ تابع پیوسته است، ولی مشتق اول آن پیوسته نیست.

مثال ۳۲: در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط $(n \neq 0)$ $\ b_n = \frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi n^2}$ ، $a_n = \frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}$ به دست آمده‌اند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع $f(x)$ و مشتقات مرتبه اول و دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مرتبه بالاتر آن ناپیوسته‌اند.

۲) عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشد.

۳) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.

۴) ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه یکی از ضرایب فوریه (یعنی b_n) با سرعتی مانند $\frac{c}{n}$ به صفر میل می‌کند، لذا طبق مطالب بیان شده تابع باید دارای حداقل یک نقطه ناپیوستگی باشد.

وجود تقارن مخفی

بعضی توابع تقارن مخفی دارند، به این معنی که اگر یک عدد ثابت مانند k به ضابطه تابع اضافه شود، آنگاه تابع دارای تقارن فرد می‌شود. مثلاً اگر تابع $f(x)$ تابعی نه زوج و نه فرد باشد، و تابع $f(x)-k$ تابعی فرد شود، آنگاه سری فوریه تابع جدید به شکل زیر است:

$$f(x)-k=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \xrightarrow{\text{با انتقال } k \text{ به سمت راست داریم}} f(x)=k+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

در واقع در این حالت مقدار k همان a_0 در بسط فوریه $f(x)$ می‌باشد. دقت کنید اگر از این نکته استفاده نکنیم، باید تمام ضرایب را جداگانه حساب کنیم.

مثال ۳۳: اگر تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x)=\frac{L}{2}-x$ ، $-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}$ ، با دوره تناوب $T=L$ ، تعریف شده باشد، آنگاه سری فوریه آن کدام است؟

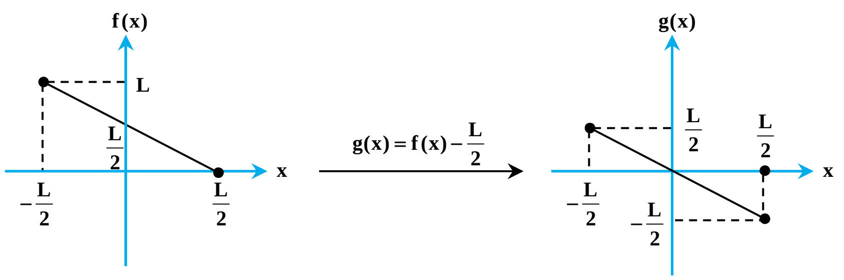
۱) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۲) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۳) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

۴) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» تابع $f(x)$ دارای تقارن مخفی است، زیرا اگر تابع $f(x)$ را به اندازه $\frac{L}{2}$ به سمت پایین انتقال دهیم، دارای تقارن فرد می‌شود که در شکل زیر نشان داده شده است:



و

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{L}{2}-x\\ g(x)&=f(x)-\frac{L}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(x)=-x$$

برای به دست آوردن سری فوریه $f(x)$، باید تمام ضرایب سری فوریه را به دست آوریم، ولی با استفاده از $g(x)$ که تقارن فرد دارد می‌توانیم به روش ساده‌تر به سری فوریه $f(x)$ برسیم. به این صورت که ابتدا سری فوریه $g(x)$را به دست می‌آوریم سپس مقدار $\frac{L}{2}$ را به آن اضافه می‌کنیم که سری فوریه $f(x)$ حاصل می‌شود. چون $g(x)$ فرد است، بنابراین فقط باید ضرایب b_nرا به دست آوریم:

$$b_n=\frac{2}{\frac{L}{2}}\int_0^{\frac{L}{2}}(-x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx=\frac{4}{L}\left[\left(\frac{xL}{2n\pi}\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)-\frac{L^2}{(2n\pi)^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} \Rightarrow b_n=\frac{4}{L}\left[\frac{L^2}{4n\pi}\cos n\pi\right]=\frac{L}{n\pi}(-1)^n$$

بنابراین داریم:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{2n\pi}{L}x$$

می‌توانیم با استفاده از سری فوریه $g(x)$، سری فوریه $f(x)$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$g(x)=f(x)-\frac{L}{2} \Rightarrow f(x)=g(x)+\frac{L}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$$