مدرسان شریف

فصل اول

«مبانی و قضایای اولیه مدارهای الکتریکی و قضایای تونن و نورتن»

جریان

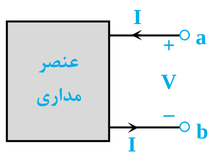
حرکت الکترون‌ها در یک مسیر مشخص، باعث ایجاد جریان الکتریکی می‌شود. به طور خلاصه مقدار بار جابجا شده در واحد زمان را جریان می‌نامند. در صورتی که dq مقدار بار مشخصی باشد که در زمان dt از سطح مقطع فرضی یک رسانا عبور می‌کند، جریان الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

حال اگر زمان حرکت بارها از t_1 تا t_2 در نظر گرفته شود، مقدار بار جابجا شده در این بازه زمانی برابر $q = \int_{t_1}^{t_2} I.dt$ خواهد بود. یکای جریان در سیستم SI، آمپر (A) است و یک آمپر جریان، طبق تعریف، معادل با جابجایی باری به اندازه یک کولن در هر ثانیه می‌باشد. در صورتی که جهت و اندازه جریان با زمان تغییر نکند، جریان فوق را جریان مستقیم (DC) می‌نامند و مقدار آن را با $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ نمایش می‌دهند.

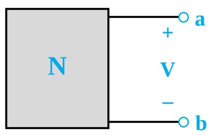
ولتاژ

قبل از تعریف ولتاژ، عنصر مداری را به صورت یک جسم که دارای دو پایانه است، تعریف می‌کنیم. مطابق شکل مقابل فرض می‌کنیم جریان I به پایانه a عنصر مداری وارد شود و پس از گذشتن از آن، از پایانه b خارج شود. جهت برقرار ساختن چنین جریانی باید مقداری انرژی مصرف کنیم (کار انجام دهیم). طبق تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر مداری، انرژی مورد نیاز برای جابه‌جایی بار مثبت ۱ کولن از یک پایانه تا پایانه دیگر (a تا b) می‌باشد. یکای ولتاژ، ولت (V) است.



تذکر۱: در تعریف ولتاژ، پلاریته آن بسیار مهم است. اگر یک شبکه با پایانه‌های a و b موجود باشد، برای بدست آوردن ولتاژ بین پایانه‌ها، ولتاژ پایانه مثبت منهای ولتاژ پایانه منفی می‌شود، لذا داریم:

$$\boxed{V = V_a - V_b = V_{ab} = -V_{ba}}$$



تذکر۲: رابطه ولتاژ برحسب انرژی به صورت $V = \frac{W}{q}$ می‌باشد که W انرژی مورد نیاز برای جابجایی بار q در دو سر عنصر مداری است.

توان

توان در واقع آهنگ مصرف انرژی است. تعریف توان جذب شده و یا تولید شده توسط هر عنصر مداری برحسب ولتاژ و جریان آن، حتماً باید با مشخص شدن جهت جریان و پلاریته ولتاژ دو سر آن صورت گیرد. رابطه توان در هر عنصر که ولتاژ دو سر آن V و جریان عبوری از آن I است، به صورت P = V.I تعریف می‌گردد. واحد توان **ژول بر ثانیه** و یا همان **وات** (w) است. بعضی عناصر مداری توان مصرف می‌کنند که به آنها **عناصر غیرفعال یا پسیو** می‌گوییم (مانند مقاومت) و بعضی عناصر، توان تولید می‌کنند که به آنها **عناصر فعال یا اکتیو** می‌گوییم (مانند منابع ولتاژ و جریان مستقل، البته گاهی اوقات این عناصر هم به صورت مصرف کننده عمل می‌کنند). اگر مقدار توان در محاسبات عددی منفی شود، می‌گوییم آن عنصر توان تولید می‌کند و اگر مقدار توان مثبت بدست آید، می‌گوییم آن عنصر توان جذب (تلف) می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید:

«د»　«ج»　«ب»　«الف»

در شکل‌های «الف» و «ب» عناصر توان تولید می‌کنند $(P=-4\times 3=-12\,W)$ و در شکل‌های «ج» و «د» عناصر توان تلف می‌کنند $(P=+4\times 3=+12\,W)$.

نکته۱: هرگاه جریان به ترمینال مثبت (منظور ترمینال ولتاژ عنصر است) المان مداری وارد و یا از ترمینال منفی آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P=+V.I$ در نظر گرفته می‌شود و هرگاه جریان به ترمینال منفی المان مداری وارد و یا از ترمینال مثبت آن خارج شود، رابطه توان به صورت $P=-V.I$ بیان می‌گردد.

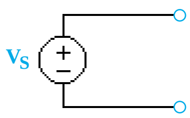
تذکر۳: توان هر عنصر مداری برحسب انرژی به صورت $P=\dfrac{\Delta w}{\Delta t}$ نیز تعریف می‌شود.

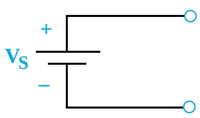
قضیه پایستگی توان

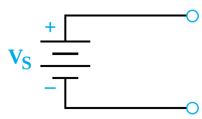
طبق قضیه پایستگی توان، مجموع توان مصرفی عناصر مختلف مدار، برابر صفر است. به عبارت دیگر مجموع توان تولیدی عناصر اکتیو مدار برابر مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار است. دقت داشته باشید اگر توان مصرفی مداری مورد سؤال باشد بطور پیش فرض باید مجموع توان مصرفی عناصر پسیو مدار را محاسبه و به عنوان پاسخ در نظر گرفت.

منبع ولتاژ مستقل (نابسته)

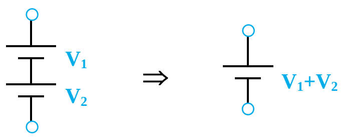
منبع ولتاژ مستقل یا نابسته اولین عنصر مداری است که بررسی می‌کنیم و معمولاً تولیدکننده توان می‌باشد. در تحلیل مدارهای الکتریکی منابع ولتاژ مستقل اغلب بصورت ایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند. مقدار ولتاژ یک منبع ولتاژ مستقل ایده‌آل، صرف‌نظر از جریان آن عددی ثابت است و توان تولیدی آن محدودیتی ندارد. منابع ولتاژ مستقل DC را به یکی از سه صورت زیر نمایش می‌دهیم و باید توجه شود که چون منبع ولتاژ معمولاً تأمین‌کننده توان مصرفی مدار است، معمولاً جریان از پایانه مثبت آن خارج می‌شود تا طبق تعریف توان، مقدار توان منبع ولتاژ عددی منفی بدست آید.

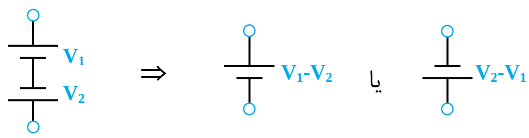




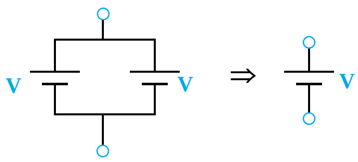


تذکر۴: در صورت سری شدن دو منبع ولتاژ مستقل در صورتی که پلاریته‌های غیرهمنام در کنار هم باشند، دو منبع با یکدیگر جمع و در غیر این صورت دو منبع از یکدیگر کم می‌شوند.



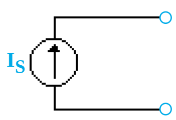


تذکر۵: موازی شدن دو منبع ولتاژ مستقل با مقادیر مختلف از نظر تئوری مدارهای الکتریکی غیرمجاز و غلط است و این مورد فقط در صورت یکی بودن مقادیر و پلاریته آنها امکان‌پذیر است و معادل آنها به صورت مقابل بدست می‌آید:

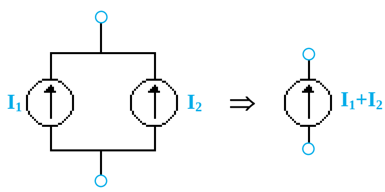


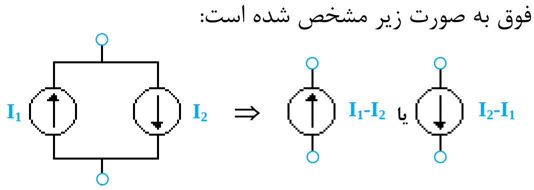
منبع جریان مستقل (نابسته)

دومین عنصر مداری که تعریف می‌کنیم، منبع جریان مستقل یا نابسته است. این منبع نیز مستقل از ولتاژ دو سر خود، جریان ثابتی دارد. معمولاً منبع جریان مستقل هم مثل منبع ولتاژ مستقل در تحلیل مدارهای الکتریکی، ایده‌آل در نظر گرفته می‌شود و از لحاظ تئوری، می‌تواند توان نامحدودی تولید کند. منبع جریان مستقل DC را به شکل مقابل نمایش می‌دهیم:

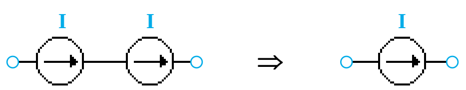


تذکر۶: در صورت موازی شدن دو یا چند منبع جریان مستقل، اگر منابع جریان هم‌جهت باشند، با هم جمع می‌شوند و در غیر این صورت از هم کم خواهند شد. موارد فوق به صورت زیر مشخص شده است:





تذکر۷: لازم به ذکر است که برآیند دو منبع جریان سری با مقادیر و جهت‌های یکسان، برابر با یکی از آنها بوده و در صورت مساوی نبودن مقادیر یا جهت آنها، سری کردن آنها غلط است.

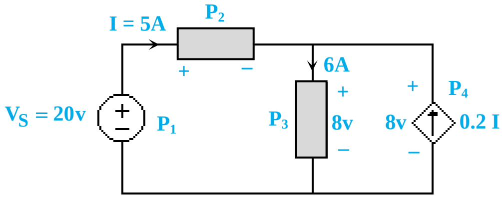


منابع جریان و ولتاژ وابسته (کنترل شونده)

دو منبع تأمین‌کننده انرژی که قبلاً بررسی شد، منابع مستقل بودند و جریان و یا ولتاژ آنها به هیچ نقطه‌ای از مدار بستگی نداشت. اما منابع ولتاژ و جریان وابسته نیز در ترکیب مدارها کاربرد دارند و مقادیر ولتاژ یا جریان این منابع، به جریان یا ولتاژ یک عنصر دیگر از مدار بستگی دارد. منابع وابسته برای این‌که با منابع مستقل اشتباه نشوند، به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

(منبع جریان وابسته به جریان)　(منبع جریان وابسته به ولتاژ)　(منبع ولتاژ وابسته به جریان)　(منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ)

مثال ۱: در مدار شکل زیر توان هر یک از عناصر را پیدا کنید.



☑ پاسخ:

$$\begin{cases} P_1 = -20\times 5 = -100\,w & , \quad P_2 = 12\times 5 = 60\,w \\ P_3 = 8\times 6 = 48\,w & , \quad P_4 = (-8)(0/2\,I) = -8\times 0/2\times 5 = -8\,w \end{cases}$$

منبع ولتاژ مستقل و منبع جریان وابسته هر کدام به ترتیب ۱۰۰ و ۸ وات توان تولید و دو عنصر مداری دیگر هر دو توان مصرف می‌کنند. توجه شود که اندازه مجموع توان تولید شده با اندازه مجموع توان مصرفی برابر است. بنابراین جمع توان‌ها در یک شبکه صفر است.

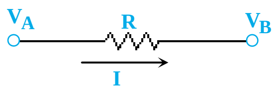
مقاومت و قانون اهم

طبق قانون اهم هرگاه دمای یک رسانای فلزی ثابت باشد، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر رسانا به شدت جریانی که از آن عبور می‌کند، مقدار ثابتی است که این نسبت را مقاومت الکتریکی رسانا می‌نامیم. مقاومت از جمله عناصر غیرفعال (پسیو) مدار است.

یکای مقاومت الکتریکی در SI، ولت بر آمپر است که اهم نامیده شده و با Ω نشان داده می‌شود.

$$\boxed{R = \frac{V}{I}} \Rightarrow \text{قانون اهم}$$

با توجه به قانون اهم، جریان یک مقاومت و توان مصرفی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\boxed{V = V_A - V_B \;,\; I = \frac{V}{R} \;,\; P = V.I = RI^2 = \frac{V^2}{R}}$$

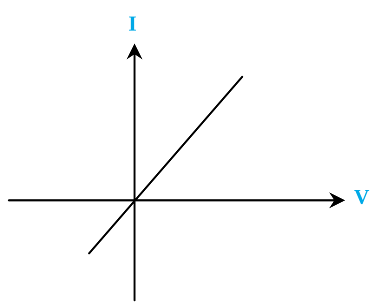
توجه کنید در صورتی که $R > 0$ باشد، توان مقاومت همواره مثبت خواهد بود که با مفهوم مصرف‌کننده بودن مقاومت هم‌خوانی دارد.

انواع مقاومت‌ها

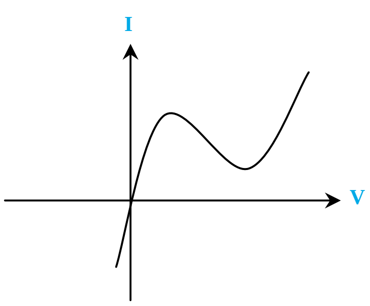
رابطه‌ای که در قسمت قبل تحت عنوان قانون اهم برای ولتاژ و جریان یک مقاومت بیان شد، مختص مقاومت‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان است. اما مقاومت‌ها انواع دیگری نیز دارند که در آنها صورت کلی رابطه ولتاژ ـ جریان ممکن است متفاوت باشد.

مقاومت‌های خطی و غیرخطی

مقاومت‌ها را بسته به این که رابطه لحظه‌ای ولتاژ- جریان آنها خطی (به شکل کلی $V(t) = R(t)\,I(t)$) و یا غیرخطی (به شکل کلی $V(t) = F(I, t)$) باشد، می‌توان به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم نمود. در واقع اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان مقاومت را ترسیم کنیم، مقاومتی که شیب مشخصه در آن ثابت است، مقاومتی خطی بوده و مقاومتی که شیب مشخصه در آن متغیر است، مقاومت غیرخطی نامیده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان یک مقاومت معمولی و یک دیود تونلی را با مشخصه‌های ولتاژ ـ جریان روبرو در نظر گرفت:



مشخصه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت معمولی



مشخصه ولتاژ ـ جریان یک دیود تونلی

شیب مشخصه ولتاژ ـ جریان در مقاومت معمولی ثابت و در دیود تونلی متغیر است؛ پس مقاومت معمولی یک مقاومت خطی و دیود تونلی یک مقاومت غیرخطی است.

مقاومت‌های تغییرپذیر با زمان و تغییرناپذیر با زمان

اگر مشخصه ولتاژـ جریان مقاومت با زمان تغییر کند، آن را مقاومت تغییرپذیر با زمان (یا متغیر با زمان) و در غیر این صورت آن را مقاومت تغییرناپذیر با زمان (یا نامتغیر با زمان) می‌نامند. رابطه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به شکل $V(t) = R(t)\,I(t)$ می‌باشد و این یعنی مشخصه ولتاژ ـ جریان به شکل یک خط راست بوده که شیب آن با زمان تغییر می‌کند.

مقاومت‌های پسیو و اکتیو

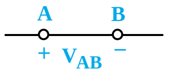
اگر مشخصه ولتاژـ جریان یک مقاومت در ربع اول و سوم باشد، مقاومت پسیو و مصرف‌کننده‌ی توان است و اگر مشخصه ولتاژ ـ جریان یک مقاومت در ربع دوم و چهارم باشد، مقاومت اکتیو و تولیدکننده‌ی توان است. در مقاومت‌های خطی، پسیو بودن معادل با مثبت بودن R و اکتیو بودن معادل با منفی بودن R می‌باشد.

بحث کامل‌تر در مورد انواع مقاومت‌ها در فصل دوازدهم از کتاب مدار (۲) ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است که در سؤالات کنکور، تمام مقاومت‌ها بطور پیش‌فرض مقاومت‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان و پسیو می‌باشند.

مفاهیم اتصال کوتاه، مدار باز و کلید

در اینجا به معرفی چند مفهوم بسیار مصطلح در بحث مدارهای الکتریکی می‌پردازیم:

اتصال کوتاه: اگر دو نقطه در یک مدار الکتریکی توسط مقاومتی با مقدار صفر اهم (یا در اصطلاح فیزیکی با سیم) به هم متصل شده باشند، اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه اتصال کوتاه هستند. اختلاف ولتاژ دو نقطه اتصال کوتاه همواره برابر صفر است.

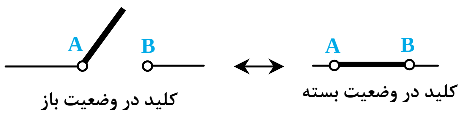


$V_{AB} = ۰$

مدار باز: اگر بین دو نقطه از یک مدار الکتریکی هیچ مسیری برای برقراری جریان وجود نداشته باشد (یا به بیان دیگر دو نقطه صرفاً از طریق یک مقاومت با مقدار بی‌نهایت اهم به هم متصل باشند) اصطلاحاً می‌گویند این دو نقطه مدار باز هستند. جریان الکتریکی میان دو نقطه مدار باز همواره برابر صفر است.

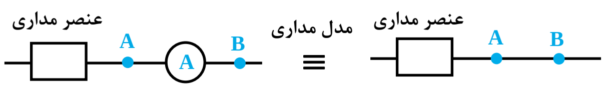
$I_{AB} = ۰$

کلید: کلید یک ابزار الکتریکی است که وضعیت اتصال میان دو نقطه را از حالت مدار باز به حالت اتصال کوتاه تغییر می‌دهد و بالعکس. در بحث مدارهای الکتریکی معمولاً کلیدها را ایده‌آل در نظر می‌گیرند. یک کلید ایده‌آل می‌تواند در زمان صفر ثانیه و به صورت آنی تغییر وضعیت دهد و مقاومت معادل آن در حالت اتصال کوتاه برابر صفر و در حالت مدار باز برابر بی‌نهایت است.

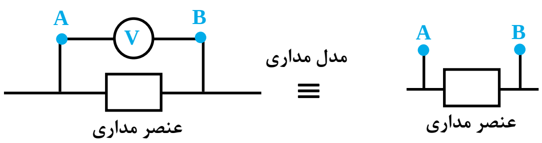


آمپرمتر و ولت‌متر

آمپرمتر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری جریان در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. آمپرمتر را در مدار به صورت سری با عنصری که می‌خواهند جریان آن را مشخص کنند، قرار می‌دهند. لازم به ذکر است که آمپرمترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی صفر هستند. (مانند اتصال کوتاه)



ولت‌متر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری ولتاژ در مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولت‌متر را به صورت موازی با عنصری که می‌خواهند ولتاژ دو سر آن را بسنجند، قرار می‌دهند. ولت‌مترهای ایده‌آل دارای مقاومت درونی بینهایت هستند. (مانند مدار باز)



مدارهای خطی و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)

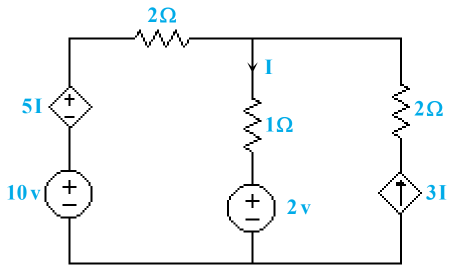
مدارهای خطی، مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی است و مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مدارهایی هستند که تمام عناصر آنها خطی و تغییرناپذیر با زمان می‌باشد؛ در این راستا باید نکات مهم زیر را در نظر داشت:

۱ـ خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن عناصر در حالت کلی با توجه به مشخصه ولتاژ ـ جریان آنها تعریف می‌شود (مشابه بحثی که برای مقاومت‌ها انجام گرفت). در مورد منابع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن با توجه به رابطه توصیف‌کننده متغیر خروجی منبع تعریف می‌شود. مثلاً در مورد یک منبع ولتاژ وابسته به جریان، اگر ولتاژ دو سر منبع به صورت $V = \alpha I_X$ باشد (که در آن α مقداری ثابت است)، در این صورت منبع وابسته، خطی و تغییرناپذیر با زمان خواهد بود.

۲ـ در سنجش خطی و یا LTI بودن یک مدار الکتریکی، منابع تغذیه مستقل به طور کامل نادیده گرفته می‌شوند؛ علت این است که منابع تغذیه مستقل ماهیتاً مشابه یک متغیر ورودی برای یک سیستم یا یک تابع هستند. کاملاً مشخص است که خصوصیات ذاتی سیستم یا تابع مستقل از ورودی آن است و این یعنی نوع منبع تغذیه مستقل نباید در خصوصیات ذاتی مدار از جمله خطی و LTI بودن آن دخیل باشد.

دقت کنید از آنجایی که بسیاری از مباحث مدارهای الکتریکی تنها در مدارهای خطی و یا LTI کاربرد دارد، بنابراین تشخیص خطی یا LTI بودن یک مدار الکتریکی بسیار مهم می‌باشد.

مثال ۳۳: در مدار زیر مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



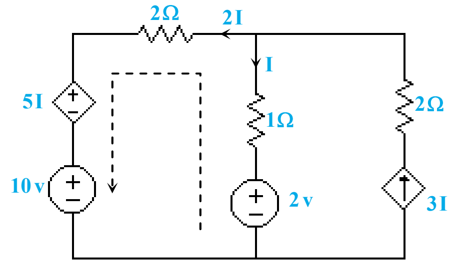
۱) ۱-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۲-

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به وجود منبع جریان وابسته در حلقه سمت راست، فقط حلقه سمت چپ برای KVL مناسب است. بنابراین با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

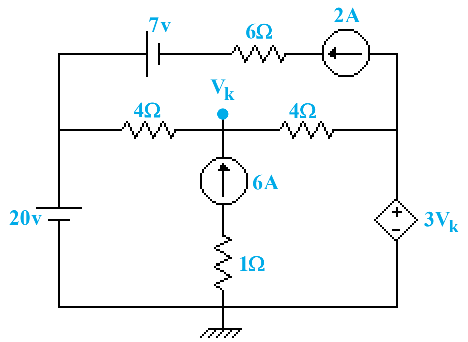


$$-۲ - I + ۲I \times ۲ + ۵I + ۱۰ = ۰ \Rightarrow \mathbf{I = -۱A}$$

تشخیص روش مناسب برای تحلیل مدار

سؤال مهمی که دانشجویان معمولاً می‌پرسند، این است که کدام یک از دو روش «تحلیل گره» یا روش «تحلیل مش» مناسب‌تر است. واضح است انتخاب روش مناسب به شکل مدار و منابع موجود در آن مدار بستگی دارد. برای انتخاب بهترین و ساده‌ترین راه حل برای یک مسأله با حداقل عملیات، باید ابتدا تعداد حلقه‌ها و گره‌های مدار را شمارش کنیم. حال در مدار به تعداد گره‌ها، معادله KCL و به تعداد حلقه‌ها، معادله KVL موجود است. لازم به ذکر است که گره‌ای برای KCL مناسب است که محل تقاطع بیش از دو المان بوده و دارای ولتاژ معین نسبت به زمین نباشد. همچنین حلقه‌ای که شامل منبع جریان وابسته یا مستقل باشد، برای KVL مناسب نیست. با شمارش تعداد حلقه‌ها و گره‌های مفید مدار، اگر تعداد حلقه‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KVL و اگر تعداد گره‌ها کمتر بود، راه‌حل مناسب KCL است. در صورتی که تعداد مجهولات ناشی از حلقه‌ها و گره‌ها و یا به عبارتی تعداد حلقه‌ها و گره‌ها برابر باشد، یک توصیه غیررسمی این است که ببینید مجهول مسأله کدام است؛ اگر جریان مجهول باشد، از روش تحلیل مش و اگر ولتاژ مجهول بود از روش تحلیل گره برای حل مدار استفاده می‌شود.

مثال ۳۴: در مدار زیر مقدار V_k برحسب ولت کدام است؟



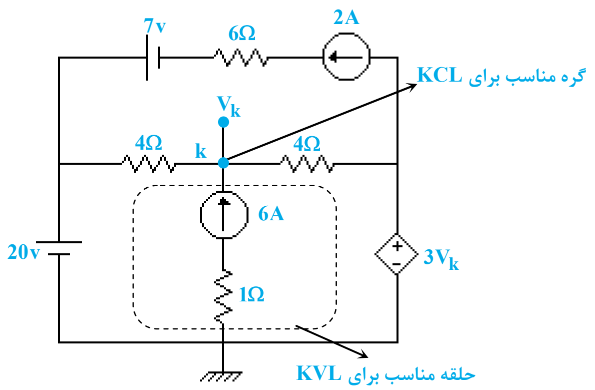
۱) ۲۲ -

۲) ۴۴ -

۳) ۲۲

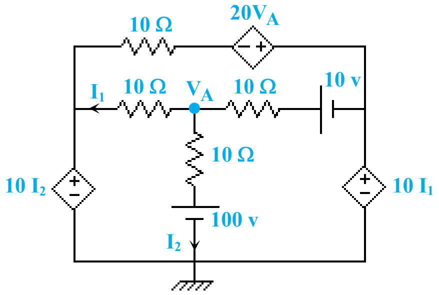
۴) ۴۴

پاسخ: گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۳ گره است. با توجه به این‌که ولتاژ گره‌های سمت راست و چپ به ترتیب $۳V_k$ و ۲۰v است، لذا در گره‌های فوق اعمال KCL مناسب نمی‌باشد و برای حل مدار از روش گره فقط باید در گره وسط مدار اعمال KCL شود. با توجه به وجود منبع جریان در شاخه وسطی در مدار، حلقه‌های سمت راست و چپ در پایین مدار برای KVL مناسب نیست. همچنین به علت وجود یک منبع جریان در شاخه بالای مدار، حلقه بالای مدار برای اعمال KVL مناسب نیست. بنابراین مدار دارای فقط یک حلقه به صورت نشان داده شده در شکل روبرو است. با توجه به این‌که مدار دارای یک حلقه و یک گره است، باید به مجهول مدار توجه شود و با توجه به مجهول بودن V_k از روش KCL استفاده می‌شود. با نوشتن KCL در گره k داریم:



$$\frac{V_k - ۲۰}{۴} + \frac{V_k - ۳V_k}{۴} = ۶ \Rightarrow V_k - ۲۰ + V_k - ۳V_k = ۲۴ \Rightarrow \mathbf{V_k = -۴۴v}$$

مثال ۳۵: در مدار زیر مقدار جریان I_1 کدام است؟



۱) ۰/۲A
۲) ۱/۲A
۳) ۲/۲A
۴) ۱۰A

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» باید دقت شود که مدار فوق دارای سه حلقه است و با نوشتن سه KVL در حلقه‌ها می‌توان مدار را حل کرد. اما این روش بسیار وقت‌گیر می‌باشد. همچنین با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای سه گره می‌باشد و گره‌های سمت راست و سمت چپ مدار دارای ولتاژ معین نسبت به زمین هستند و برای KCL مناسب نیستند. بنابراین فقط گره A برای KCL مناسب است. حال با نوشتن KCL در مدار، با یک معادله و یا با نوشتن KVL در سه حلقه مدار، با سه معادله، مدار قابل حل است و روش ساده‌تر همان KCL در گره A می‌باشد.

حال با نوشتن معادله KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A-10I_2}{10}+\frac{V_A-100}{10}+\frac{V_A-10I_1-10}{10}=0$$

با نوشتن قانون اهم، جریان‌های I_1 و I_2 را می‌نویسیم:

$$I_1=\frac{V_A-10I_2}{10} \quad , \quad I_2=\frac{V_A-100}{10}$$

با جایگذاری معادلات I_1 و I_2 در معادله KCL داریم:

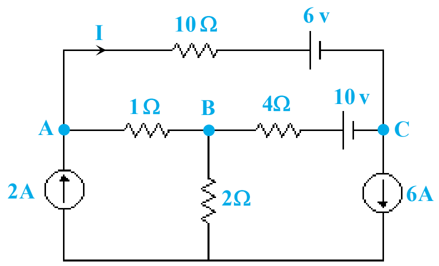
$$\frac{V_A-10[\frac{V_A-100}{10}]}{10}+\frac{V_A-100}{10}+\frac{V_A-10[\frac{V_A-10[\frac{V_A-100}{10}]}{10}]-10}{10}=0$$

$$V_A=55v \Rightarrow I_2=\frac{55-100}{10}=-4/5\,A \Rightarrow I_1=\frac{55-10\times(-4/5)}{10} \Rightarrow \mathbf{I_1=10\,A}$$

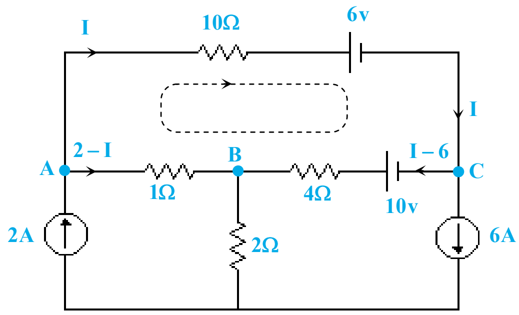
حل مسائل مدار با روش ترکیبی حلقه (مش) و گره

در برخی مسائل مدار اگر بخواهیم فقط از روش حلقه و یا فقط از روش گره استفاده کنیم، ممکن است روند حل مدار طولانی شده و یا معادلات بدست آمده برای رسیدن به جواب کافی نباشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که علاوه بر استفاده از انتخاب روش مناسب برای حل مدار که در قبل بیان شد، از روش حلقه و گره به صورت همزمان نیز استفاده شود. به عنوان مثال اگر یک حلقه را برای نوشتن KVL در مدار، مناسب تشخیص دهیم، بر روی المان‌های موجود در حلقه موردنظر حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در حلقه را بر حسب مجهول اصلی سؤال می‌نویسیم و ولتاژ یا جریان شاخه‌ای را به عنوان مجهول جدید در نظر نمی‌گیریم. حال با نوشتن KVL در حلقه انتخاب شده، معادله‌ای بدست می‌آید که فقط شامل مجهول اصلی سؤال بوده و به سادگی قابل حل می‌باشد. علاوه بر این گاهی دیده می‌شود که فقط یک گره مناسب برای KCL در مدار وجود دارد، ولی معادله بدست آمده از KCL در آن گره، برای حل مدار کافی نیست و در آن معادله، چند مجهول وجود دارد. در این حالت لازم است که حلقه‌های مناسب برای KVL نیز بررسی شوند و با انتخاب مناسب آنها و نوشتن KVL در آنها، معادلات دیگری نیز بدست آید، که با حل معادلات بدست آمده از KVL ها و KCL، مجهول اصلی سؤال محاسبه می‌شود. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۳۶: در مدار زیر مقدار جریان I برحسب آمپر کدام است؟



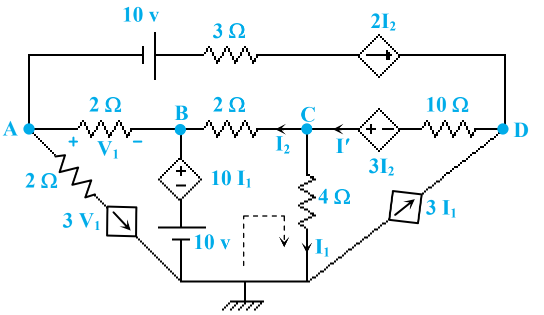
۱) ۸
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با دقت در مدار دیده می‌شود که حلقه‌های پایین مدار در سمت چپ و راست دارای منبع جریان بوده و برای KVL مناسب نیستند. لذا مدار فقط دارای یک حلقه مناسب برای KVL است و حلقه فوق در بالای مدار موجود است. همچنین مدار دارای ۳ گره با نام‌های C و B و A بوده و لذا دارای ۳ معادله KCL است. حال با توجه به تعداد حلقه‌ها و گره‌ها دیده می‌شود که روش KVL مناسب‌تر خواهد بود. برای اعمال KVL در حلقه بالای مدار باید جریان یا ولتاژ تمام المان‌های موجود در حلقه مشخص شود. لذا با نوشتن KCL در نقاط A و C جریان مقاومت‌های ۱Ω و ۴Ω مشخص می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه (بالای مدار) داریم:

$$10I+6-10+4(I-6)-1\times(2-I)=0 \Rightarrow \mathbf{I=\frac{30}{15}=2\,A}$$

مثال ۳۷: در مدار زیر مقدار جریان $I_۲$ کدام است؟



۱) $۱۰A$
۲) $۱۵A$
۳) $۵A$
۴) $۲۰A$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل مدار ابتدا تعداد حلقه‌ها و گره‌ها شمارش می‌شود. با دقت در مدار دیده می‌شود که چهار حلقه به صورت ظاهری موجود است؛ اما با توجه به وجود منابع وابسته جریان در حلقه‌های سمت چپ و سمت راست و حلقه بالای مدار، نوشتن KVL در آنها مناسب نبوده و کمکی به حل مسأله نخواهد کرد. بنابراین نوشتن KVL فقط در حلقه وسط مدار مفید می‌باشد.
همچنین با دقت در مدار دیده می‌شود که چهار گره به اسامی A، B، C و D موجود است. با توجه به مشخص بودن ولتاژ گره B نسبت به زمین، این گره برای KCL مناسب نمی‌باشد. بنابراین گره‌های A و C و D برای اعمال KCL مناسب هستند. با توجه به وجود سه گره در مدار، می‌توان مدار را با نوشتن سه معادله KCL در گره‌های مذکور با ۳ معادله و ۳ مجهول حل کرد و یا می‌توان با نوشتن یک KVL در حلقه وسط و با یک معادله و یک مجهول مدار را حل کرد. با توجه به نکات ذکر شده، روش KVL در این مدار ساده‌تر خواهد بود. بنابراین در حلقه وسطی مدار KVL زده می‌شود.
در نقطه D جریان‌های $۳I_۱$ و $۲I_۲$ جمع شده و جریان I' به صورت $I' = ۲I_۲ + ۳I_۱$ بدست می‌آید. در نقطه C از جریان I' جریان $I_۲$ کم می‌شود و جریان $I_۱$ در مقاومت ۴Ω بدست می‌آید.

با نوشتن معادله KCL در گره‌های C و D داریم:

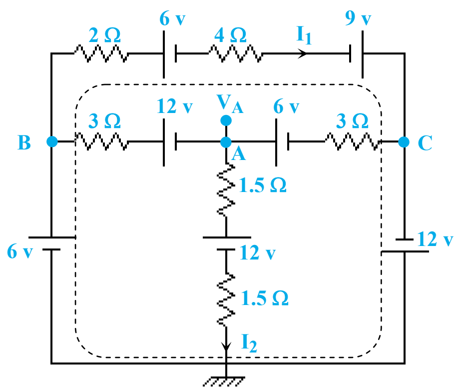
$$I_۲ + I_۱ = I' \quad \text{و} \quad I' = ۲I_۲ + ۳I_۱ \Rightarrow I_۲ = -۲I_۱ \Rightarrow I_۱ = -\frac{۱}{۲}I_۲ \qquad (۱)$$

با نوشتن معادله KVL در حلقه وسطی داریم:

$$-۱۰ - ۱۰I_۱ - ۲I_۲ + ۴I_۱ = ۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} -۱۰ - ۱۰(-\frac{۱}{۲}I_۲) - ۲I_۲ + ۴(-\frac{۱}{۲}I_۲) = ۰ \Rightarrow \mathbf{I_۲ = ۱۰\,A}$$

مثال ۳۸: در مدار زیر مقادیر جریان‌های $I_۲$ و $I_۱$ کدام است؟



۱) $I_۱ = ۳A \quad , \quad I_۲ = -۴A$
۲) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = ۳A$
۳) $I_۱ = -۴A \quad , \quad I_۲ = ۳/۵A$
۴) $I_۱ = ۳/۵A \quad , \quad I_۲ = -۴A$

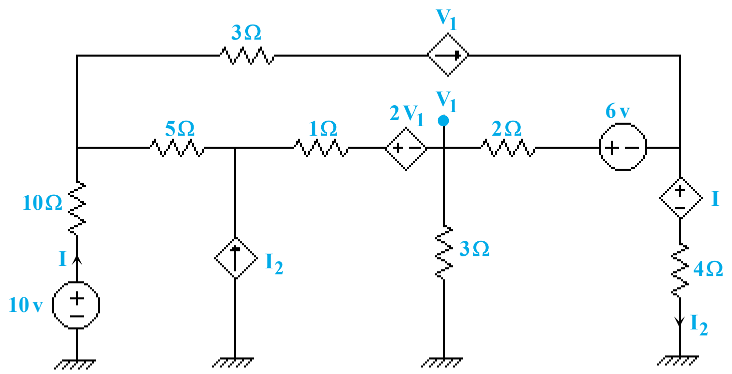
پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ نقاط C و B نسبت به زمین مشخص است و فقط گره A با ولتاژ نامعین موجود است، بنابراین مدار با یک KCL در نقطه A حل شده و به KVL در سه حلقه مدار نیاز نیست. با نوشتن KCL در گره A داریم:

$$\frac{V_A+۱۲-۶}{۳}+\frac{V_A-۶+۱۲}{۳}+\frac{V_A-۱۲}{۱/۵+۱/۵}=۰ \Rightarrow V_A=۰ \Rightarrow I_۲=\frac{V_A-۱۲}{۱/۵+۱/۵}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴A$$

با نوشتن KVL در حلقه مشخص شده در مدار داریم:

$$-۶+۲I_۱+۶+۴I_۱-۹-۱۲=۰ \Rightarrow \mathbf{I_۱=۳/۵A}$$

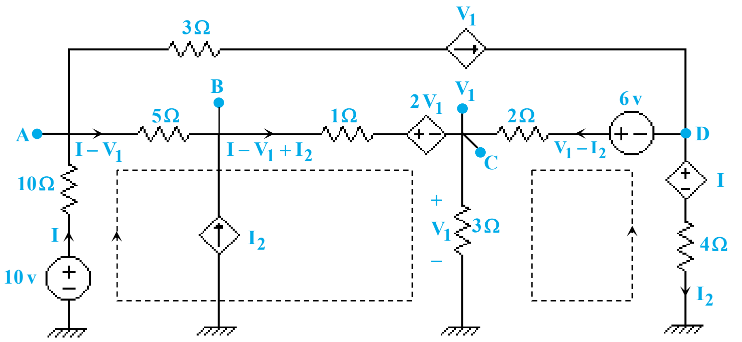
مثال ۳۹: در مدار زیر مقدار جریان I بر حسب آمپر کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۳۳}$
۲) $\frac{۳۳}{۲۵}$
۳) $\frac{۱۹}{۲۵}$
۴) $\frac{۲۵}{۱۹}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با دقت در مدار دیده می‌شود که مدار دارای ۴ گره مناسب برای KCL و دو حلقه مناسب برای KVL است. با توجه به اینکه تعداد حلقه‌ها، از تعداد گره‌ها کمتر است، از روش KVL استفاده می‌کنیم. (دقت کنید حلقه‌ای را برای KVL انتخاب می‌کنیم که شامل منبع جریان نباشد) حال قبل از نوشتن KVL در حلقه‌های مدار، در مسیر حلقه‌های مدار حرکت می‌کنیم و با رسیدن به هر گره و با نوشتن KCL در آن، جریان مقاومت‌های موجود در هر حلقه را بر حسب مجهول اصلی مدار و بقیه پارامترهای مدار بدست می‌آوریم. حال ابتدا در مسیر حلقه سمت چپ مدار به صورت ساعتگرد حرکت می‌کنیم. با توجه به مشخص بودن جریان مقاومت ۱۰ اهمی، با نوشتن KCL در گره A، جریان مقاومت ۵ اهمی برابر با $(I-V_1)$ می‌شود. در ادامه حرکت در حلقه سمت چپ به مقاومت ۱ اهمی می‌رسیم که با نوشتن KCL در گره B، جریان آن را به اندازه $(I-V_1+I_2)$ بدست می‌آوریم. آخرین مقاومت موجود در حلقه سمت چپ، مقاومت ۳ اهمی است که ولتاژ آن برابر با V_1 است و نیازی به مشخص کردن جریان آن نمی‌باشد.

در ادامه حل، در مسیر حلقه سمت راست مدار به صورت پادساعتگرد حرکت می‌کنیم. جریان مقاومت ۴ اهمی برابر با I_2 بوده و نیازی به محاسبه ندارد. ولی با نوشتن KCL در گره D، جریان مقاومت ۲ اهمی را به اندازه (V_1-I_2) بدست می‌آوریم. حال با مشخص شدن جریان مقاومت‌های موجود در حلقه‌های مدار بر حسب مجهولات موجود، در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$-۱۰+۱۰I+۵\times(I-V_1)+۱\times(I-V_1+I_2)+۲V_1+V_1=۰ \Rightarrow ۱۶I-۳V_1+I_2=۱۰ \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-۴I_2-I-۶+۲\times(V_1-I_2)+V_1=۰ \Rightarrow -۶I_2+۳V_1-I=۶ \qquad (۲)$$

دقت کنید که معادلات (۱) و (۲) هر کدام شامل سه مجهول است و برای حل این معادلات به یک معادله دیگر نیز نیاز است.

با نوشتن KCL در گره C این معادله را بصورت مقابل بدست می‌آوریم:

$$I-V_1+I_2+V_1-I_2=\frac{V_1}{۳} \Rightarrow V_1=۳I \qquad (۳)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۳) داریم:

$$۱۶I-۳\times۳I+I_2=۱۰ \Rightarrow ۷I+I_2=۱۰ \qquad (۴)$$

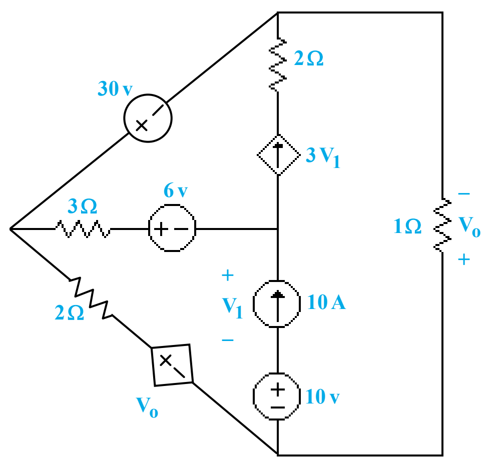
با ترکیب روابط (۳) و (۲) داریم:

$$-۶I_2+۳\times۳I-I=۶ \Rightarrow -۶I_2+۸I=۶ \qquad (۵)$$

با حل دستگاه تشکیل شده از معادلات (۴) و (۵)، مقدار جریان I به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}۷I+I_2=۱۰\\ -۶I_2+۸I=۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I=\frac{۳۳}{۲۵}A\\ I_2=\frac{۱۹}{۲۵}A\end{cases}$$

مثال ۴۰: در مدار زیر مقدار ولتاژ دو سر منبع جریان ۱۰ آمپر بر حسب ولت کدام است؟

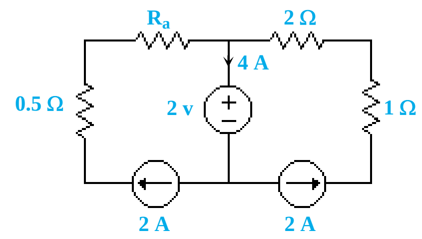


۱) ۴/۱۵

۲) ۳/۱۵

۳) ۲/۵

۴) ۵/۵

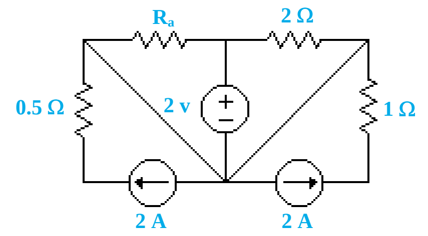


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توان‌های مصرفی مدار قبل و بعد از اتصال کلیدها باید با هم برابر باشند، لذا در هر یک از دو حالت توان مصرفی را حساب می‌کنیم. در صورتی که کلیدها باز باشند، داریم:

$$P_۱ = (۰/۵)\times ۲^۲ + R_a \times ۲^۲ + ۱\times ۲^۲ + ۲\times ۲^۲ + ۴(۲) = ۲۲ + ۴R_a$$

دقت کنید در این حالت چون جریان‌ها از سر مثبت به منبع ولتاژ وارد می‌شوند، توان این منبع را بصورت توان‌های مصرفی حساب کردیم.

در حالت بسته بودن کلیدها، جریان منبع سمت چپ فقط از مقاومت ۰/۵ اهم و جریان منبع سمت راست فقط از مقاومت ۱ اهم عبور می‌کند. ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهم و R_a برابر ۲ ولت است که توان مصرفی آنها با توجه به این ولتاژ محاسبه می‌شود. در این حالت با توجه به این که منابع مدار هر یک به شکل مجزا در حال تأمین توان مصرفی مقاومت‌های خاصی از مدار هستند، لذا هر سه آنها در حال تولید توان می‌باشند. بنابراین می‌توان نوشت:



$$P_۲ = ۰/۵\times ۲^۲ + \frac{۲^۲}{R_a} + \frac{۲^۲}{۲} + ۱\times ۲^۲ = ۸ + \frac{۴}{R_a}$$

$$P_۱ = P_۲ \Rightarrow ۲۲ + ۴R_a = ۸ + \frac{۴}{R_a} \Rightarrow ۴R_a + ۱۴ = \frac{۴}{R_a}$$

$$\Rightarrow ۴R_a^۲ + ۱۴R_a - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲R_a^۲ + ۷R_a - ۲ = ۰ \Rightarrow \mathbf{R_a} = \frac{-۷ \pm \sqrt{۶۵}}{۴}$$

چند نکته مهم در ساده‌سازی مدار

۱) کلیه المان‌های سری با منبع جریان چه مستقل و چه وابسته، با برقراری چهار شرط زیر می‌توانند از مدار حذف شوند:

الف) جریان، ولتاژ یا توان المان یا شاخه قابل حذف مورد سؤال نباشد.

ب) جریان، ولتاژ یا توان منبع مذکور مورد سؤال نباشد.

ج) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ یا جریان المان قابل حذف مرتبط باشد.

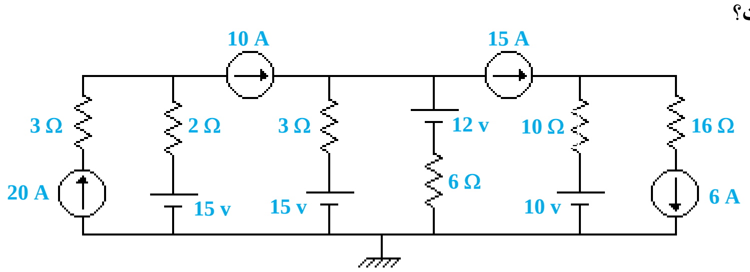
د) در مدار نباید منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد که مقدار آن به ولتاژ دو سر منبع جریان مرتبط باشد.

۲) کلیه المان‌ها و شاخه‌های موازی منبع ولتاژ (چه مستقل و چه وابسته) از مدار قابل حذف هستند، در صورتی که شرایط (الف)، (ب) و (ج) در فوق عیناً صادق بوده و در مدار هیچ منبع وابسته‌ای وجود نداشته باشد که مقدار آن به جریان منبع ولتاژ موردنظر مرتبط باشد.

۳) کلیه المان‌های مقاومتی موازی اتصال کوتاه، حاوی جریان صفر بوده و از مدار حذف می‌شوند. ($I = \frac{V}{R}$ و $V = ۰$ در نتیجه $I = ۰$)

۴) در صورتی که شاخه‌ای بین دو گره با ولتاژ مشخص نسبت به زمین وجود داشته باشد و در صورتی که مجهول به آن شاخه مرتبط نبوده و یا منبع وابسته به آن شاخه ارتباط نداشته باشد، شاخه مذکور قابل حذف است.

مثال ۶۹: در مدار زیر مقدار توان مصرفی مقاومت ۶ اهمی کدام است؟



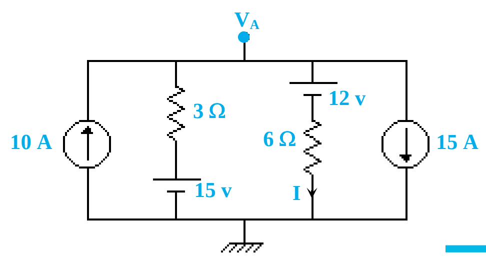
۱) ۹/۳w

۲) ۲/۴w

۳) ۱۰/۶w

۴) ۱۱/۵w

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۰A در سمت چپ مدار حذف می‌شود و همچنین شاخه‌های سری با منبع جریان ۱۵A در سمت راست مدار هم حذف می‌شود و مدار ساده شده به صورت زیر است. حال با نوشتن KCL، ولتاژ V_A را محاسبه و سپس مقدار جریان I را بدست می‌آوریم.

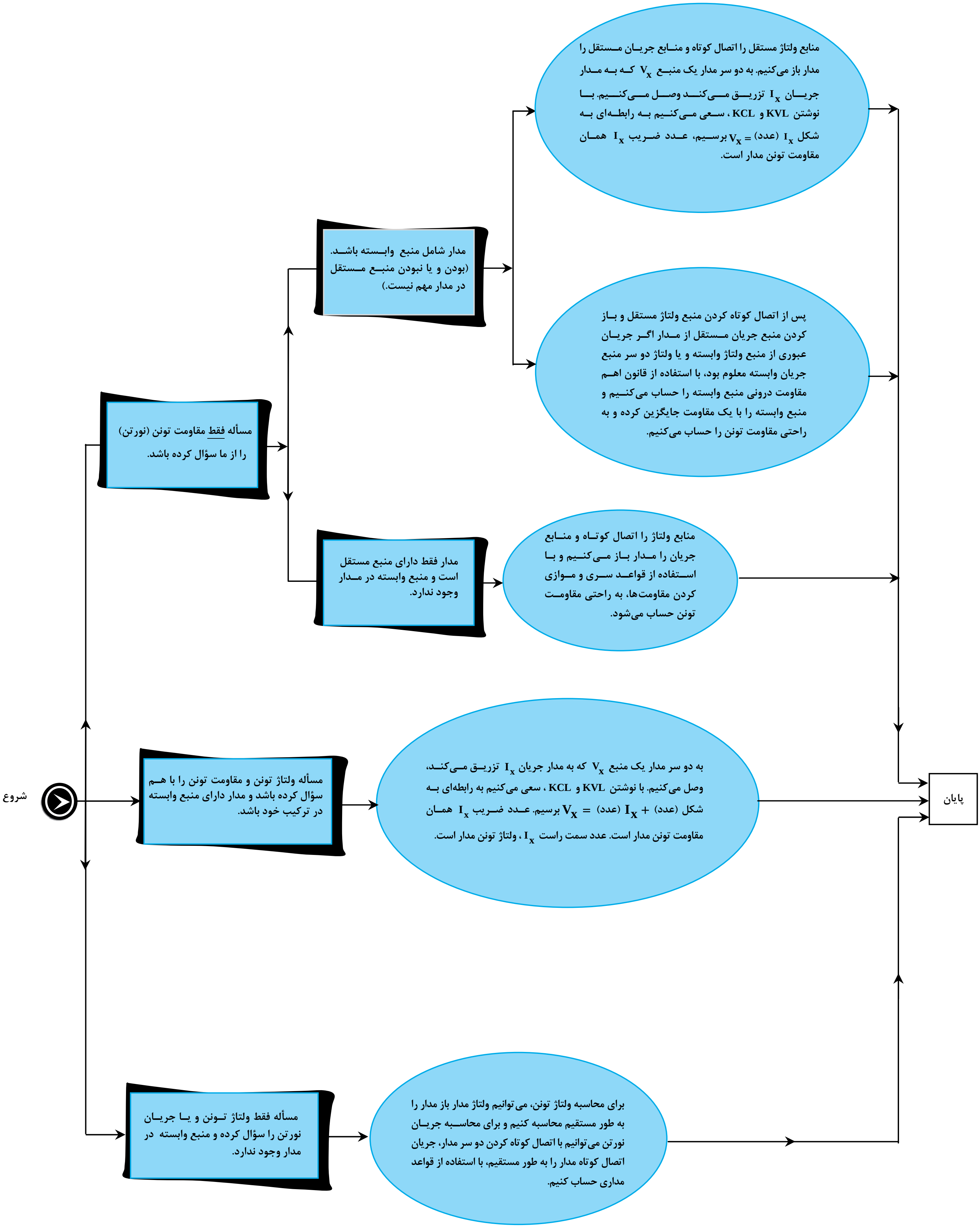


$$\frac{V_A - ۱۵}{۳} + \frac{V_A - ۱۲}{۶} + ۱۵ = ۱۰ \Rightarrow V_A = ۴v$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_A - ۱۲}{۶} = \frac{۴ - ۱۲}{۶} = \frac{-۸}{۶} = \frac{-۴}{۳} A$$

$$\mathbf{P_{۶\Omega} = |I|^۲ \times ۶ = (\frac{۴}{۳})^۲ \times ۶ = ۱۰/۶w}$$

در زیر، دستورالعمل محاسبه مدار معادل تونن و نورتن به صورت الگوریتم آورده شده است:



در رابطه فوق اندیس rms نشان‌دهنده مقدار مؤثر تابع است که برای تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

مقدار مؤثر توابع $A\sin(at+\theta)$ و $A\cos(at+\theta)$ برابر $\frac{A}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

دقت کنید روش‌هایی که در اینجا برای محاسبه توان بیان شد، در تمام مدارهای الکتریکی و برای تمام عناصر مداری قابل استفاده می‌باشد.

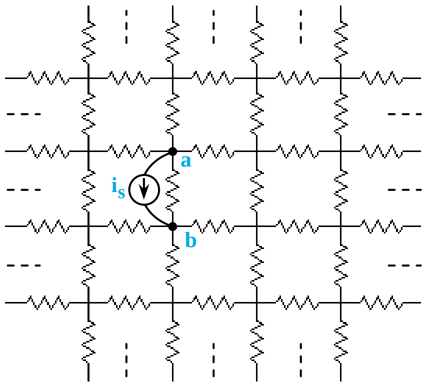
مثال ۱۲۲: در شکل زیر تمام مقاومت‌ها ۱Ω بوده و تا بینهایت ادامه دارند. اگر به پایانه‌های a و b منبع جریان i_s وصل شود، چه توانی در این مدار تلف می‌شود؟ (بر حسب وات)

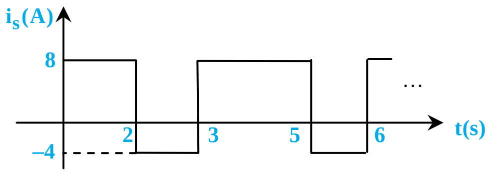
۱) ۳۲

۲) ۸

۳) ۱۲

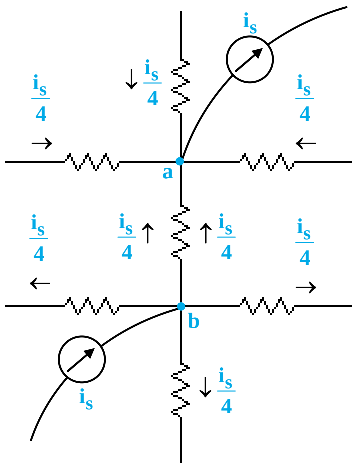
۴) ۲۴





پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید مقاومت معادل دو سر منبع جریان i_s را محاسبه کنیم.

چون مدار از دو سمت به ∞ می‌رود، می‌توان منبع i_s را با دو منبع i_s که یکی از ∞ به b وارد می‌شود و دیگری از a به سمت ∞ می‌رود، جایگزین کرد. پس داریم:



$$V_{ba} = (\frac{i_s}{4} + \frac{i_s}{4}) \times 1$$

$$V_{ba} = 0/5 i_s \Rightarrow R_{eq} = 0/5\Omega$$

حال با توجه به رابطه $P = R_{eq} i_{rms}^2$ باید مقدار i_{rms}^2 را محاسبه کنیم:

$$i_{rms}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{1}{3}[\int_0^2 8^2 dt + \int_2^3 (-4)^2 dt] = \frac{1}{3}[64\times 2 + 16\times 1] = \frac{144}{3} = 48\ (A^2)$$

$$\Rightarrow P = R_{eq} i_{rms}^2 = \frac{1}{2}\times 48 = 24(w)$$

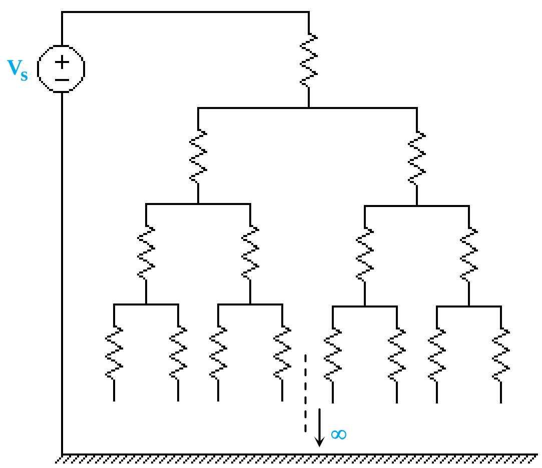
مثال ۱۲۳: در مدار شکل زیر مقاومت‌ها ۲ اهمی هستند و تا بینهایت ادامه دارند. توان تلف شده در این مدار بر حسب وات کدام است؟

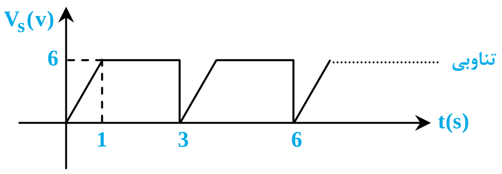
۱) ۴

۲) ۸

۳) ۷

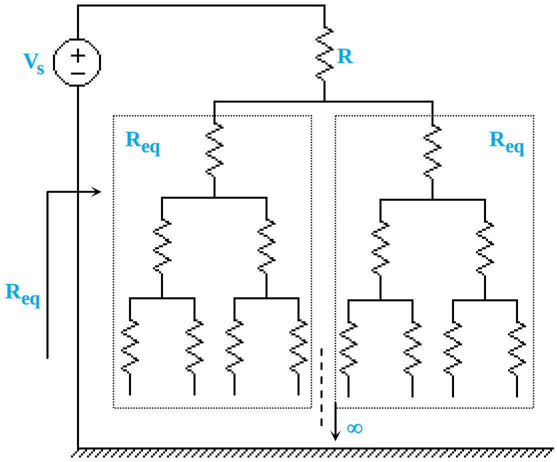
۴) ۶





پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مدار که تا ∞ ادامه دارد:

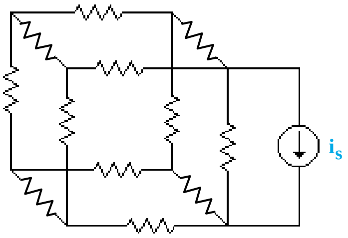
$$R_{eq} = R + R_{eq} \| R_{eq} \Rightarrow R_{eq} = R + \frac{R_{eq}}{۲} \Rightarrow R_{eq} = ۲R \xrightarrow{R=۲} R_{eq} = ۴\Omega$$

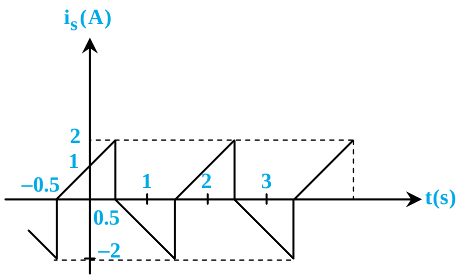


حال با توجه به این که $P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}}$ می‌باشد، باید $V_{rms}^۲$ را محاسبه کنیم:

$$V_{rms}^۲ = \frac{۱}{T}\int_۰^T V^۲(t)dt = \frac{۱}{۳}[\int_۰^۱ (۶t)^۲ dt + \int_۱^۳ (۶)^۲ dt] = \frac{۱}{۳}[\frac{۳۶}{۳}t^۳\Big|_۰^۱ + ۳۶t\Big|_۱^۳] = \frac{۸۴}{۳} = ۲۸(v^۲) \Rightarrow P = \frac{V_{rms}^۲}{R_{eq}} = \frac{۲۸}{۴} = ۷(w)$$

مثال ۱۲۴: در مدار شکل زیر مقاومت‌های یک اهم اضلاع یک مکعب را تشکیل می‌دهند. توان تلف شده در این مدار در صورتی که سیگنال منبع جریان به صورت زیر باشد، کدام است؟





۱) $\frac{۱}{۳}$ وات

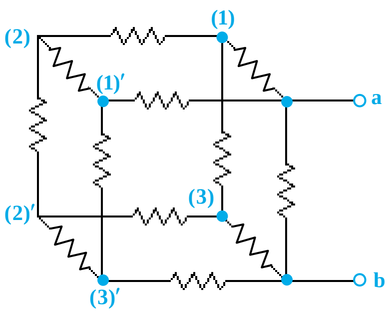
۲) ۱ وات

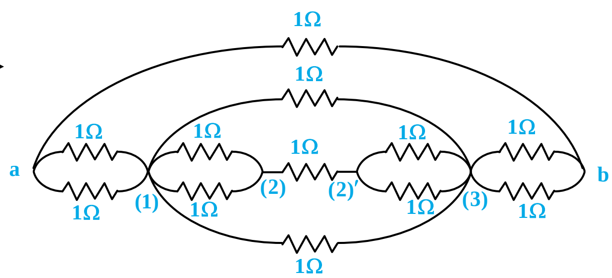
۳) $\frac{۱}{۹}$ وات

۴) $\frac{۷}{۹}$ وات

پاسخ: گزینه «۴»

باید ابتدا مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان را محاسبه کنیم. با توجه به تقارن مدار نقاط (۱) و $(۱)'$ و نقاط (۳) و $(۳)'$ هم پتانسیل بوده و می‌توان آن‌ها را به یکدیگر متصل کرد.





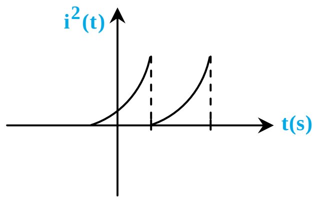
با محاسبه‌ی مقاومت‌های معادل داریم:

$$R_{ab} = \frac{۷}{۱۲}\Omega$$

حال مقدار توان را از رابطه روبرو محاسبه می‌کنیم:

$$P = Ri_{rms}^۲$$

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{۱}{T}\int_۰^T i^۲(t)dt}$$

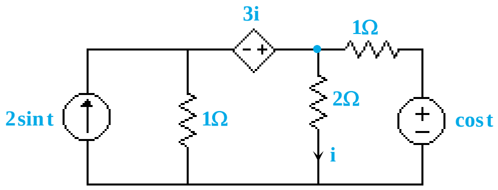


با توجه به سیگنال جریان داریم:

$$i_{rms}^{2}=\frac{1}{1}\int_{0}^{1}4t^{2}dt=\frac{4}{3}\ (A^{2})\qquad (T=1sec)$$

$$P=\frac{7}{12}\times\frac{4}{3}=\frac{7}{9}(w)$$

مثال۱۲۵: **در مدار زیر اندازه توان متوسط منبع وابسته چند برابر اندازه توان مصرفی مقاومت ۲ اهم می‌باشد؟**



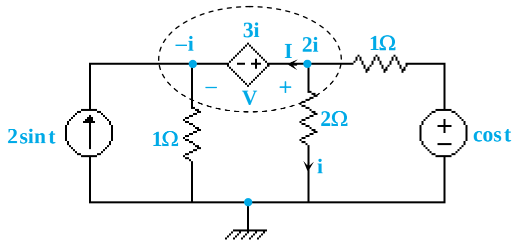
۱) ۷/۸

۲) ۶/۶

۳) ۳/۹

۴) ۳/۳

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا سعی می‌کنیم با تحلیل مدار جریان مقاومت ۲ اهمی و جریان منبع وابسته را محاسبه کنیم. مطابق شکل روبرو می‌توان ولتاژ گره‌های مدار را برحسب جریان i مشخص نمود:



حال در ابرگره بالای مدار KCL می‌زنیم:

$$2\sin t+\frac{i}{1}=i+\frac{2i-\cos t}{1}\ \Rightarrow\ i=\sin t+\frac{\cos t}{2}\ (A)$$

با بدست آمدن مقدار i مقدار جریان منبع وابسته و ولتاژ آن نیز به سادگی بدست می‌آید:

$$V=3\times i=3\sin t+\frac{3\cos t}{2}\ (v)\quad ,\quad I=-2\sin t-i=-2\sin t-\sin t-\frac{\cos t}{2}=-3\sin t-\frac{\cos t}{2}\ (A)$$

اکنون می‌خواهیم توان مقاومت ۲ اهم را محاسبه کنیم. بدین منظور می‌توان ابتدا توان لحظه‌ای این مقاومت را محاسبه کرد:

$$P_{2\Omega}(t)=2\times i^{2}(t)=2\times(\sin t+\frac{\cos t}{2})^{2}=2\sin^{2}t+2\sin t\times\cos t+\frac{1}{2}\cos^{2}t$$

با توجه به این نکته که مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin^2\omega t$ و $\cos^2\omega t$ برابر ۰/۵ و مقدار متوسط سیگنال‌های $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ برابر صفر است، داریم:

$$P_{2\Omega}=\text{متوسط}[2\sin^{2}t+\sin 2t+\frac{1}{2}\cos^{2}t]=2\times\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}\ w$$

مقدار توان متوسط مقاومت ۲ اهم را به روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$i(t)=\sin t+\frac{\cos t}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(t+26.5^{\circ})\ \Rightarrow\ i_{rms}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{\frac{5}{8}}\ A$$

$$P_{2\Omega}=2\times i_{rms}^{2}=2\times\frac{5}{8}=\frac{5}{4}\ w$$

اکنون توان متوسط منبع ولتاژ وابسته را محاسبه می‌کنیم. در این جا نیز مانند قبل ابتدا توان لحظه‌ای را محاسبه کرده و سپس از آن متوسط‌گیری می‌کنیم:

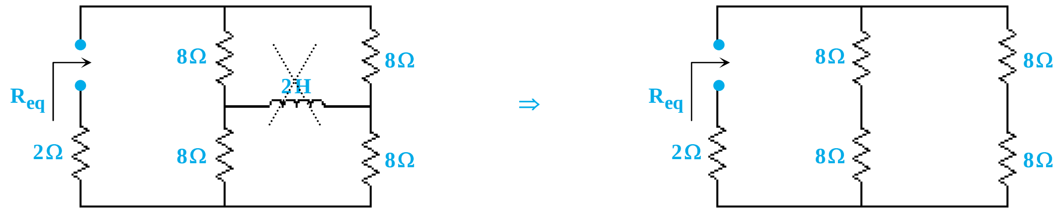
$$P_{3i}(t)=V(t)\times I(t)=(3\sin t+\frac{3\cos t}{2})\times(-3\sin t-\frac{\cos t}{2})=-9\sin^{2}t-6\sin t\times\cos t-\frac{3}{4}\cos^{2}t$$

$$P_{3i}=\text{متوسط}[-9\sin^{2}t-3\sin 2t-\frac{3}{4}\cos^{2}t]=-9\times\frac{1}{2}+-3\times 0-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{39}{8}\ w$$

بنابراین می‌توان نوشت:

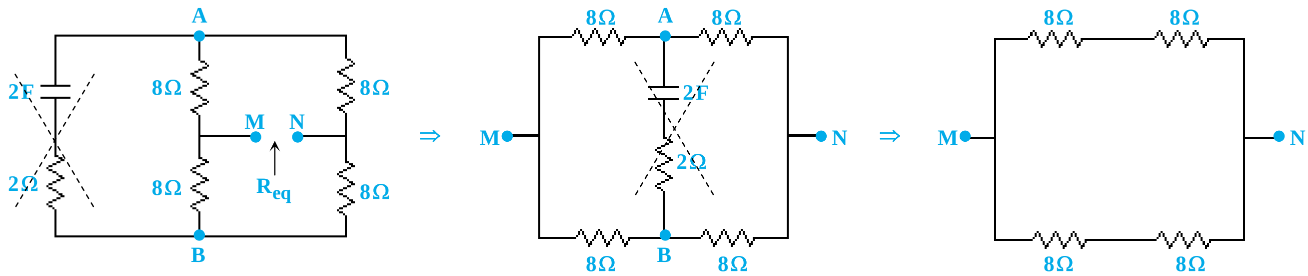
$$\frac{|P_{3i}|}{|P_{2\Omega}|}=\frac{\frac{39}{8}}{\frac{5}{4}}=3.9$$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» برای حل مدار ابتدا لازم است مشخص شود که بیشترین ثابت زمانی در اثر سلف است یا خازن. دقت کنید در نگاه اول شاید این استنباط شود که مدار مرتبه دوم است و ثابت زمانی برای آن تعریف نمی‌شود، ولی در ادامه حل خواهیم دید که مدار را می‌توان به صورت دو مدار مرتبه اول در نظر گرفت. ابتدا ثابت زمانی را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. در این حالت از دو سر خازن مقاومت معادل را حساب می‌کنیم. با توجه به حضور پل وتستون در مدار، از سلف جریانی عبور نمی‌کند و از دیدگاه خازن، سلف در مدار وجود ندارد. حال داریم:



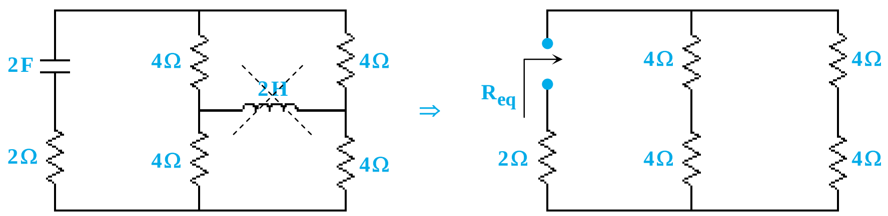
$$R_{eq} = ۲ + (۸+۸) \,||\, (۸+۸) = ۱۰\Omega \quad \Rightarrow \quad \tau_۱ = R_{eq}.C = ۱۰ \times ۲F = ۲۰(sec)$$

در ادامه ثابت زمانی را در اثر سلف محاسبه می‌کنیم. در این حالت با توجه به تقارن مدار از دیدگاه سلف، نقاط A و B هم‌پتانسیل هستند و از خازن مدار جریان عبور نمی‌کند و شاخه RC قابل حذف می‌باشد. لازم به ذکر است که با ترسیم دوباره مدار، علت حذف شاخه RC را وجود پل وتستون از دیدگاه سلف نیز می‌توان در نظر گرفت.



$$R_{eq} = (۸+۸) \,||\, (۸+۸) = ۸\Omega \Rightarrow \tau_۲ = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}(sec)$$

با توجه به این که ثابت زمانی در اثر خازن، بزرگتر از ثابت زمانی در اثر سلف است، لذا با تعویض مقاومت‌های ۸ اهمی با مقاومت‌های ۴ اهمی، ثابت زمانی جدید مدار را در اثر خازن محاسبه می‌کنیم. حال داریم:



$$R_{eq} = ۲ + (۴+۴) \,||\, (۴+۴) = ۶\Omega$$

$$\tau_۳ = R_{eq}.C = ۶ \times ۲ = ۱۲(sec) \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau = \tau_۳ - \tau_۱ = ۱۲ - ۲۰ = -۸(sec)$$

بنابراین بیشترین ثابت زمانی مدار، به اندازه ۸ ثانیه کم می‌شود.

روش تستی برای محاسبه مجهولات در مدار مرتبه اول

با توجه به اینکه مدارهای مرتبه اول دارای معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند و فرم پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه اول ثابت است، لذا برای بدست آوردن ولتاژ یا جریان هر المان مداری در مدارهای مرتبه اولی که به صورت خطی و با ورودی DC هستند، می‌توان از فرم پاسخ زمانی نمایی استفاده کرد. بر این اساس در صورتی که کلیدزنی در زمان صفر انجام شود، پاسخ کامل یک مدار مرتبه اول برای هر مجهول به صورت زیر است:

$$\boxed{f(t) = [f(\infty) + [f(۰^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}]u(t)}$$

با توجه به فرمول ذکر شده در صفحه قبل، می‌توان پاسخ‌های حالت ماندگار و حالت گذرا، همچنین پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر در یک مدار مرتبه اول را به طور کلی به صورت زیر نوشت:

پاسخ حالت صفر $= f_2(t) = f(\infty)[1-e^{-\frac{t}{\tau}}]$ ، پاسخ ورودی صفر $= f_1(t) = f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$

(چون ورودی صفر است، لذا حتماً $f(\infty)$ صفر می‌شود.)

پاسخ حالت ماندگار $= f_4(t) = f(\infty)$ ، پاسخ حالت گذرا $= f_3(t) = [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

دقت کنید اگر کلیدزنی در زمان $t = t_1$ باشد، با شیفت $t = 0$ به $t = t_1$ برای پاسخ کامل داریم:

$$f(t) = [f(\infty) + [f(t_1^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}]u(t-t_1)$$

لازم به ذکر است که مقدار $f(0^+)$، مقدار اولیه ولتاژ یا جریان مجهول، اندکی بعد از کلیدزنی است و $f(t = t_1)$ مقدار مجهول در $t = t_1$ و $f(\infty)$ مقدار مجهول در $t = \infty$ است. حال به بررسی قوانین تحلیل مدار در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ و $t = \infty$ می‌پردازیم.

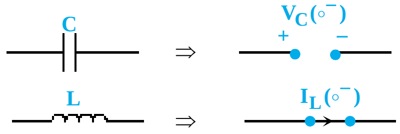
قوانین تحلیل مدار در زمان‌های 0^+ و 0^- و ∞

الف) تحلیل مدار در $t = 0^-$:

زمان $t = 0^-$ اندکی قبل از کلیدزنی است و نوع تحلیل آن به صورت تحلیل DC می‌باشد. مدار در این وضعیت به حالت پایدار رسیده است و در این زمان سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. بنابراین داریم:

V_C = ثابت $\Rightarrow i_C = 0 \Rightarrow$ مدار باز

i_L = ثابت $\Rightarrow V_L = 0 \Rightarrow$ اتصال کوتاه

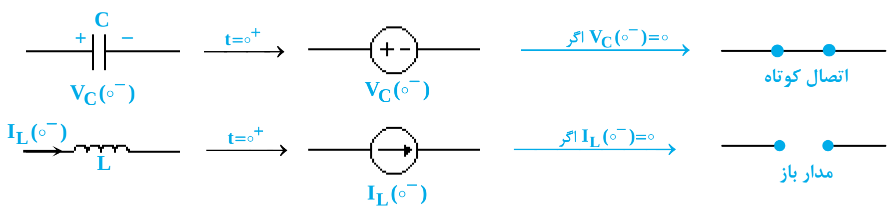


$V_C(0^-) = V_{th}$ (از دو سر خازن)

$I_L(0^-) = I_N$ (از دو سر سلف)

ب) تحلیل مدار در $t = 0^+$:

زمان $t = 0^+$ کمی بعد از عمل کلیدزنی در مدار است. در این حالت باید به جای خازن، یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار دهیم. واضح است در صورتی که $V_C(0^-) = 0$ باشد، باید به جای خازن در $t = 0^+$ اتصال کوتاه قرار دهیم و اگر $I_L(0^-) = 0$ باشد، باید به جای سلف مدار باز قرار دهیم.



تذکر۱: با توجه به مطالب گفته شده به این نتیجه می‌رسیم که ولتاژ خازن در دو زمان $t = 0^-$ و $t = 0^+$ برابر بوده و تغییرات لحظه‌ای ندارد و همچنین در این دو زمان جریان سلف نیز برابر بوده و تغییری ندارد، یعنی داریم:

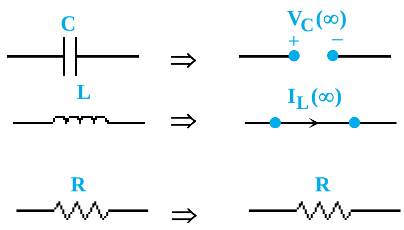
$$V_C(0^+) = V_C(0^-) \quad , \quad I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

نکته۸: دیده می‌شود که جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات لحظه‌ای ندارند و مقادیر عددی آنها در 0^+ و 0^- برابر است. اما برابری $V_C(0^-)$ با $V_C(0^+)$ به معنی برابری $I_C(0^-)$ با $I_C(0^+)$ نمی‌باشد و در مورد جریان خازن فقط با تحلیل مدار می‌توان نظر داد. بحث مشابهی نیز در مورد ولتاژ سلف قابل ذکر است. **علاوه بر این ولتاژ خازن و جریان سلف در مواردی خاص تغییرات لحظه‌ای دارند که در قسمت‌های آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.**

نکته۹: با توجه به اینکه در اکثر تست‌ها کلیدزنی در $t = 0$ اتفاق می‌افتد، لذا ما نیز مبنای لحظه کلیدزنی را $t = 0$ قرار دادیم. توجه کنید اگر مثلاً در لحظه $t = 2$ کلیدزنی انجام شود، تمامی تحلیل‌های فوق صحیح است، فقط پارامترها به شکل $V_C(2^+)$ و $V_C(2^-)$ و همچنین $I_L(2^+)$ و $I_L(2^-)$ تغییر می‌کند.

ج) تحلیل مدار در $t = \infty$:

این تحلیل مختص منابع از نوع DC است و مربوط به زمانی است که مدار به حالت پایدار خود رسیده است. در این حالت سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز می‌باشند.

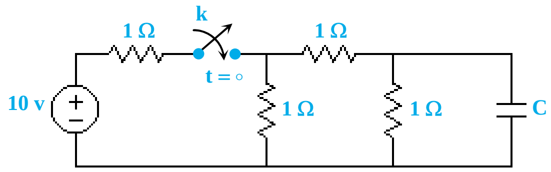


$V_C(\infty) = V_{th}$ (از دو سر خازن)

$I_L(\infty) = I_N$ (از دو سر سلف)

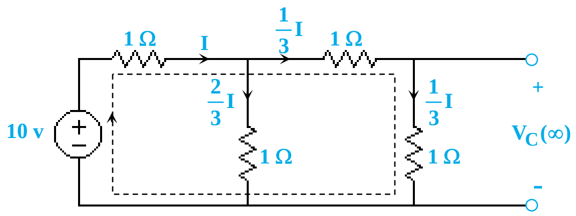
نکته۱۰: نوع تحلیل در $t=\infty$ و $t=0^-$ کاملاً یکسان است، اما این امر دلیلی بر تساوی مجهولات در این دو زمان نمی‌باشد، زیرا بـه علـت اعمـال کلیدزنی و تغییر منابع تغذیه، مدار به لحاظ ساختاری در لحظات $t=0^-$ و $t=\infty$ متفاوت است.

مثال ۱۶: در مدار شکل مقابل اگر کلید k در $t=0$ بسته شود، خازن تا چه ولتاژی برحسب ولت شارژ می‌شود؟



۱) ۲/۵
۲) ۱۰
۳) ۲
۴) صفر

پاسخ: گزینه «۳» تست از ما ولتاژ نهایی خازن یا $V_C(\infty)$ را می‌خواهد. برای ترسیم مدار در $t=\infty$، بعد از کلیدزنی به جای خازن در مدار، مدار باز قرار می‌دهیم. برای بدست آوردن ولتاژ دو سر خازن که همان ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی سمت راست می‌باشد، فرض مـی‌کنـیم جریـان منبـع برابـر I باشد، طبق قانون تقسیم جریان، جریان شاخه سمت راست برابر $\frac{۱}{۳}I$ می‌شود. حالا با نوشتن قانون KVL در حلقه بزرگ مدار داریم:



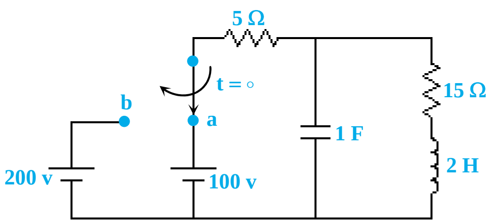
$$۱\times I+\frac{۱}{۳}I\times۱+\frac{۱}{۳}I\times۱=۱۰\ \Rightarrow\ \frac{۵}{۳}I=۱۰\ \Rightarrow\ I=۶A$$

$$I=\frac{۱۰\,v}{R_{eq}}=\frac{۱۰\,v}{۱+(۱\|۲)}=\frac{۱۰}{۱+\frac{۲}{۳}}=۶A$$ یا

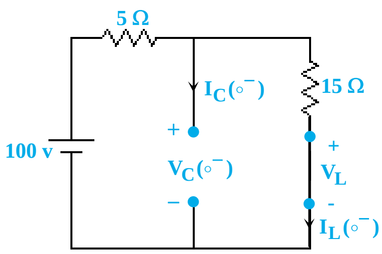
با توجه به اینکه ولتاژ خازن، همان ولتاژ مقاومت ۱ اهم در سمت راست است، داریم:

$$V_C(\infty)=V_{1\Omega}=(\frac{۱}{۳}I)\times۱=\frac{۱}{۳}(۶)\times۱=\mathbf{۲v}$$

مثال ۱۷: در مدار زیر مقادیر جریان سلف و خازن و ولتاژ سلف و خازن را در زمان‌های $t=0^-$ و $t=0^+$ و $t=\infty$، بدست آوریـد. (کلیـد در $t=0$ از وضعیت a به b می‌رود.)

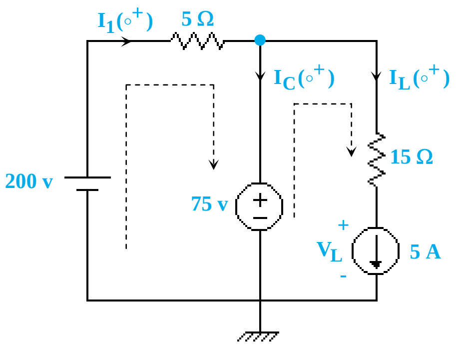


پاسخ: ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید در وضعیت a بوده و مدار در حالـت ماندگار کار می‌کرده است، پس سلف با اتصال کوتاه و خازن با مدار باز مدل می‌شوند. حال داریم:



$$I_L(0^-)=\frac{۱۰۰}{۵+۱۵}=۵A$$ و $V_L(0^-)=0$ (به علت اتصال کوتاه شدن سلف)

$$V_C(0^-)=(\frac{۱۵}{۵+۱۵})\times۱۰۰=۷۵\,v$$ و $I_C(0^-)=0$ (به علت مدار باز شدن خازن)



حال با اطلاعات بدست آمده در $t=0^-$، مدار معادل را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم. در این حالـت به جای خازن یک منبع ولتاژ با مقدار $V_C(0^-)=۷۵\,v$ و به جای سلف یک منبع جریان با اندازه $I_L(0^-)=۵A$ قرار می‌دهیم. جریان سلف و ولتاژ خـازن در $t=0^+$ بـا مقـادیر آنهـا در $t=0^-$ برابر است، یعنی $I_L(0^+)=I_L(0^-)=۵A$ و مقدار $V_C(0^+)=V_C(0^-)=۷۵\,v$ می‌باشد.

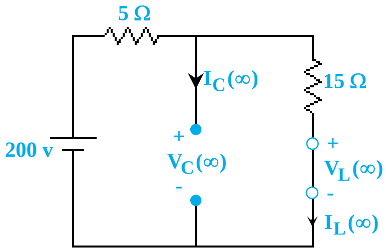
حال مقادیر $V_L(0^+)$ و $I_C(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در حلقه سمت چپ KVL می‌نویسیم:

$$۵\times I_1(0^+)+۷۵=۲۰۰\ \Rightarrow\ I_1(0^+)=۲۵A$$

با نوشتن KCL در گره بالایی مدار داریم:
$$I_۱(۰^+)=I_C(۰^+)+I_L(۰^+)\ \Rightarrow\ ۲۵=I_C(۰^+)+۵\ \Rightarrow\ I_C(۰^+)=۲۰A$$

از طرفی با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:
$$۱۵\times I_L(۰^+)+V_L(۰^+)=۷۵\ \Rightarrow\ ۱۵\times۵+V_L(۰^+)=۷۵\ \Rightarrow\ V_L(۰^+)=۰$$

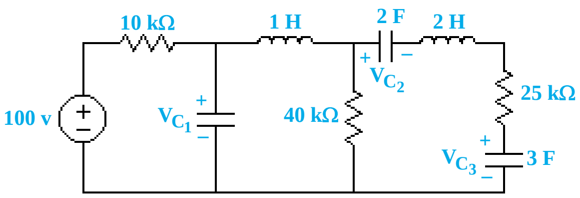
حالا مدار را در $t=\infty$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت کلید به حالت b تغییر وضعیت داده است و خازن با مدار باز و سلف با اتصال کوتاه مدل می‌شود. حال با نوشتن KVL در حلقه مدار به سادگی مقدار I_L محاسبه می‌شود.



$$I_L(\infty)=\frac{۲۰۰}{۵+۱۵}=۱۰A\quad \text{و}\quad V_L(\infty)=۰$$

$$V_C(\infty)=\frac{۲۰۰\times۱۵}{۵+۱۵}=۱۵۰v\quad \text{و}\quad I_C(\infty)=۰$$

مثال ۱۸: در مدار شکل زیر ولتاژهای $V_{C_۱}(۰^-)$، $V_{C_۲}(۰^-)$ و $V_{C_۳}(۰^-)$ به ترتیب از راست به چپ برابر چند ولت می‌باشند؟



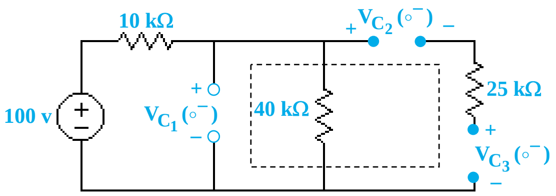
۱) ۸۰ ، ۳۲ ، ۴۸

۲) ۲۰ ، ۸ ، ۱۲

۳) ۸۰ ، ۴۸ ، ۳۲

۴) ۲۰ ، ۱۲ ، ۸

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» در $t=۰^-$ مدار در حالت پایدار بوده است، لذا سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها مدار باز هستند. با نوشتن قانون تقسیم ولتاژ داریم:

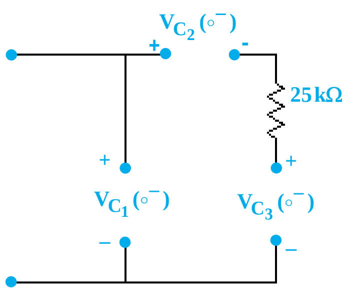


$$V_{C_۱}(۰^-)=\frac{۴۰}{۴۰+۱۰}\times۱۰۰=۸۰v=V_{۴۰k\Omega}$$

از طرفی چون دو خازن $C_۲$ و $C_۳$ با هم سری هستند، بار آنها با هم برابر بوده و ولتاژ آنها به نسبت عکس ظرفیت‌شان تقسیم می‌شود، یعنی: $\frac{V_{C_۲}(۰^-)}{V_{C_۳}(۰^-)}=\frac{C_۳}{C_۲}=\frac{۳}{۲}$ و یا $V_{C_۲}(۰^-)=\frac{۳}{۲}V_{C_۳}(۰^-)$ است. با نوشتن KVL در مش سمت راست داریم:
$$V_{C_۲}(۰^-)+V_{C_۳}(۰^-)=۸۰v$$

$$\frac{۳}{۲}V_{C_۳}(۰^-)+V_{C_۳}(۰^-)=۸۰\ \Rightarrow\ V_{C_۳}(۰^-)=۳۲v\ \Rightarrow\ V_{C_۲}(۰^-)=۸۰-۳۲=۴۸v$$

لازم به ذکر است که در $t=۰^-$ با توجه به مدار باز بودن خازن‌ها، افت ولتاژی روی مقاومت‌ها و سلف‌های سری با خازن‌ها وجود ندارد. لذا ولتاژهای $V_{C_۲}$ و $V_{C_۳}$ را می‌توان از قانون تقسیم ولتاژ از ولتاژ خازن $C_۱$ بدست آورد. بنابراین داریم:

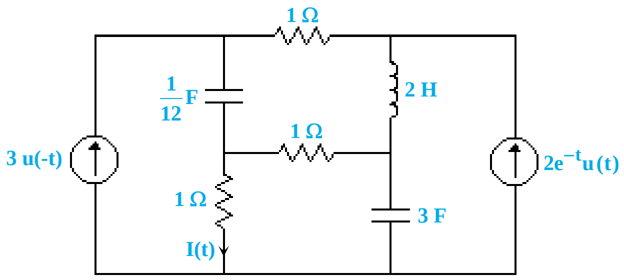


$$V_{C_۱}(۰^-)=V_{۴۰k}=۸۰\,v$$

$$V_{C_۳}(۰^-)=V_{C_۱}(۰^-)\times\frac{C_۲}{C_۲+C_۳}=۸۰\times\frac{۲F}{۲F+۳F}=۳۲v$$

$$V_{C_۲}(۰^-)=V_{C_۱}(۰^-)\times\frac{C_۳}{C_۲+C_۳}=۸۰\times\frac{۳F}{۲F+۳F}=۴۸v$$

مثال ۱۹: در مدار زیر جریان $I(t)$ در لحظه $t=0^+$ برحسب آمپر کدام است؟



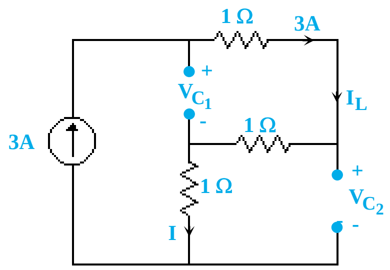
۱) ۳

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۵

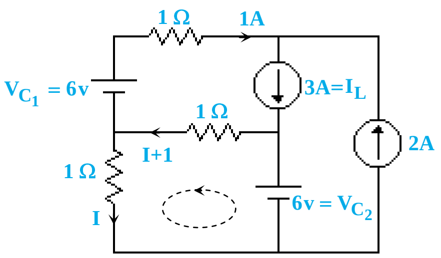
۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ : گزینه «۴» برای محاسبه مقدار I در $t=0^+$، ابتدا مدار باید در $t=0^-$ تحلیل شود و مقدار $V_C(0^-)$ برای خازن‌ها و مقدار $I_L(0^-)$ برای سلف مدار محاسبه شود. در ادامه با توجه به شرایط اولیه، مدار معادل در $t=0^+$ ترسیم شده و مقدار $I(0^+)$ محاسبه می‌شود. برای تحلیل مدار در $t=0^-$ خازن‌ها را با مدار باز و سلف را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم. در $t=0^-$ منبع جریان سمت چپ مدار، برابر ۳A و منبع جریان سمت راست مدار برابر با صفر است.



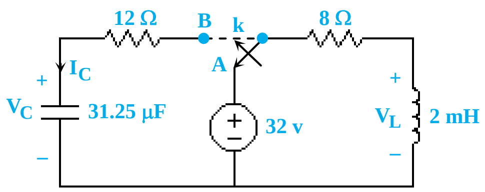
$$\begin{aligned}&I_L(0^-)=۳A\\&V_{C_1}(0^-)=I_L(0^-)\times ۲=۶v\\&V_{C_2}(0^-)=۲\times I=۶v\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}I_L(0^+)=۳A\\V_{C_1}(0^+)=۶v\\V_{C_2}(0^+)=۶v\end{cases}$$

حال مدار را در $t=0^+$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت منبع جریان سمت راست برابر ۲A و منبع جریان در سمت چپ برابر صفر است. با نوشتن KVL در حلقه پایین مدار داریم:



$$۶=۱\times(I+۱)+I\times ۱\quad\Rightarrow\quad I=I(t=0^+)=\mathbf{۲/۵A}$$

مثال ۲۰: در مدار شکل مقابل کلید k مدت زیادی در وضعیت A بوده است و در لحظه $t=0$ به وضعیت B برده می‌شود. مقدار $V_L(0^+)$ بعد از تغییر وضعیت کلید چقدر است؟ $(V_C(0)=0)$



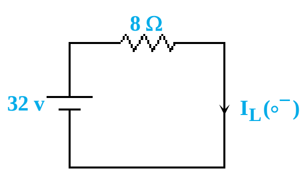
۱) صفر

۲) ۳۲- ولت

۳) ۸۰− ولت

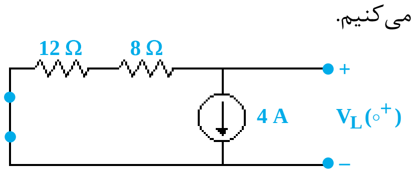
۴) بینهایت

پاسخ : گزینه «۳» برای محاسبه $V_L(0^+)$، ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم و $V_C(0^-)$ و $I_L(0^-)$ را بدست می‌آوریم. در ادامه حل، مدار را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم و مقدار $V_L(0^+)$ را محاسبه می‌کنیم. حال با قرار دادن اتصال کوتاه به جای سلف، مدار را در $t=0^-$ تحلیل می‌کنیم.



$$I_L(0^{\pm})=\frac{۳۲}{۸}=۴A\quad,\quad V_C(0^{\pm})=0$$

حال با قرار دادن منبع جریان ۴A به جای سلف و اتصال کوتاه به جای خازن، مدار را در $t=0^+$ ترسیم می‌کنیم.



$$V_L(0^+)=-۴\times(۸+۱۲)=-۸0v$$

چکیده مطالب کلیدزنی در مدارهای مرتبه اول

به طور کلی معادله ولتاژ یا جریان یک عنصر مداری در مدارهای مرتبه اول در حالت خطی و با ورودی DC به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$ می‌تواند معادله ولتاژ و یا جریان یک عنصر و یا یک شاخه مدار باشد. برای بدست آوردن معادله جریان و ولتاژ مجهول، باید مقادیر آنها را در $t=0^+$ و $t=\infty$ حساب کنیم و با بدست آوردن ثابت زمانی مدار، معادله مورد نظر را بنویسیم. برای بدست آوردن مقدار $f(0^+)$، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و سپس با توجه به خواسته مسأله به دو حالت برخورد می‌کنیم:

۱) معادله جریان یک عنصر غیر از سلف و یا معادله ولتاژ یک عنصر غیر از خازن مورد سؤال باشد:

مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقدار $I_L(0^-)$ و یا $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و با ترسیم مدار در $t=0^+$، به جای خازن یک منبع ولتاژ به اندازه $V_C(0^-)$ و به جای سلف یک منبع جریان به اندازه $I_L(0^-)$ قرار می‌دهیم و مقدار عددی مجهول مسأله را در $t=0^+$ با توجه به مدار رسم شده حساب می‌کنیم. واضح است که اگر $I_L(0^-)=0$ و $V_C(0^-)=0$ باشند، در $t=0^+$ به جای سلف مدار باز و به جای خازن اتصال کوتاه قرار می‌دهیم.

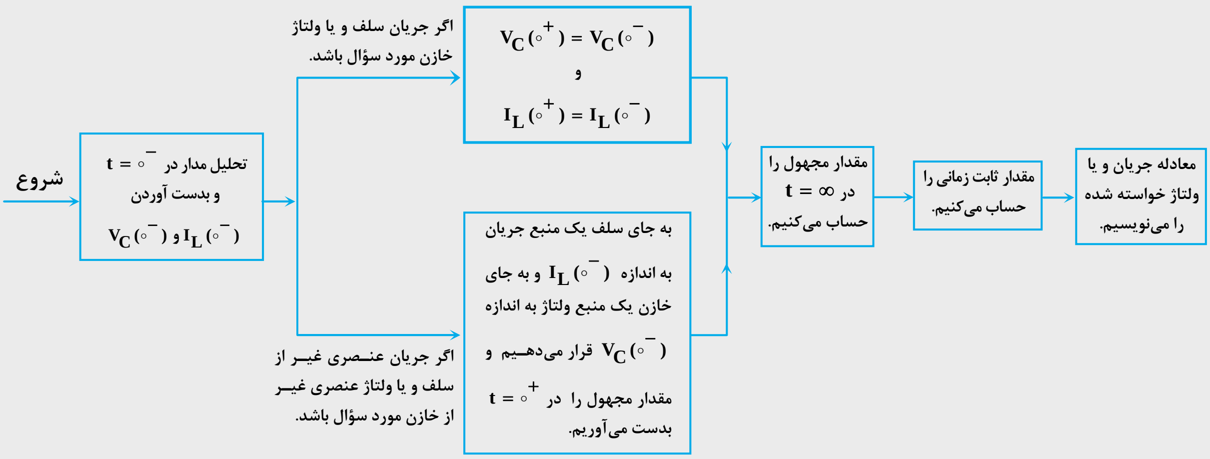
۲) معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن مورد سؤال باشد:

اگر هدف نوشتن معادله جریان سلف و یا ولتاژ خازن باشد، مدار را در $t=0^-$ تحلیل کرده و مقادیر $I_L(0^-)$ و $V_C(0^-)$ را حساب می‌کنیم و دیگر تحلیل مدار در $t=0^+$ لازم نیست، زیرا $I_L(0^-)=I_L(0^+)$ و $V_C(0^-)=V_C(0^+)$ می‌باشد. **دقت کنید تساوی‌های اخیر به این دلیل است که ولتاژ خازن و جریان سلف تغییرات ناگهانی ندارند، غیر از مواردی که در ادامه این فصل بیان شده است.**

پس از بدست آوردن $f(0^+)$، باید به سراغ محاسبه $f(\infty)$ برویم. بعد از عمل کلیدزنی، زمانی که مدار به حالت پایدار رسیده است، به جای سلف اتصال کوتاه و به جای خازن مدار باز قرار می‌دهیم و مقدار $f(\infty)$ را حساب می‌کنیم.

مرحله آخر بدست آوردن ثابت زمانی مدار می‌باشد. اگر مدار دارای سلف و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}$ و اگر مدار دارای خازن و مقاومت باشد، از رابطه $\tau=R_{eq}.C_{eq}$ برای بدست آوردن ثابت زمانی استفاده می‌کنیم.

الگوریتم حل مسائل کلیدزنی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:



تذکر: دقت کنید در تست‌ها ممکن است مقادیر $f(0^+)$، $f(0^-)$ و یا $f(\infty)$ سؤال شود. در این حالت دیگر لازم نیست تمامی مراحل فوق را انجام دهیم و تا همان مرحله‌ای که مقادیر فوق حساب می‌شوند، ادامه می‌دهیم. مثلاً اگر $f(\infty)$ مورد سؤال باشد، تحلیل مدار در $t=0^-$ و یا در $t=0^+$ لازم نیست و اگر $f(0^+)$ را سؤال کرده باشند، باید مدار در دو زمان $t=0^-$ و $t=0^+$ تحلیل شود.

حال باید ببینیم چگونه می‌توانیم $\dot{V}_o$ را در لحظه صفر پیدا کنیم. با توجه به قانون تقسیم ولتاژ روی سلف‌ها داریم $V_C = ۱/۲۵\, V_o$. از طرفی رابطه $\dot{V}_C$ و I_C را بلدیم:

$$\dot{V}_C = \frac{۱}{C} I_C = ۲\times۱۰^{۵}\, I_C$$

اما می‌دانیم در لحظه اول پس از وصل شدن تغذیه، خازن مدار اتصال کوتاه بوده و $V_C = ۰$ می‌باشد و جریان سلف‌ها نیز برابر صفر است. پس طبق شکل مدار داریم:

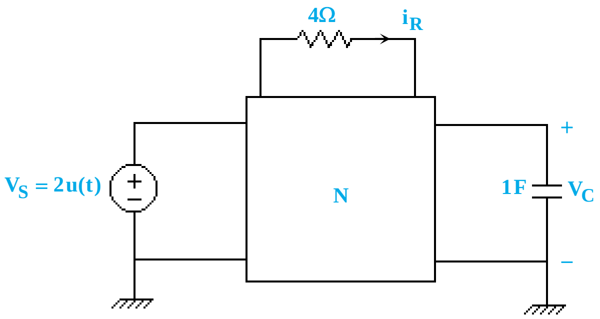
$$I_C(۰^+) = \frac{۶۰}{۲۰۰} = ۰/۳\ A$$

و در نهایت می‌توان $\dot{V}_C$ و $\dot{V}_o$ را محاسبه نمود:

$$\dot{V}_C(۰^+) = ۲\times۱۰^{۵}\, I_C(۰^+) = ۲\times۱۰^{۵}\times ۰/۳ = ۶۰۰۰۰ (\frac{v}{sec})$$

$$\dot{V}_o(۰^+) = \frac{۱}{۱/۲۵}\dot{V}_C(۰^+) = \frac{۱}{۱/۲۵}\times ۶۰۰۰۰ = ۴۸۰۰۰ (\frac{v}{sec})$$

مثال ۵۹: **در مدار زیر شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی می‌باشد. با شروع به کار مدار، مقادیر ولتاژ خازن و جریان مقاومت تا لحظه $t = ۲$ ثانیه به صورت $V_C(t) = ۴ - ۵e^{-\frac{t}{۴}}$ و $i_R(t) = ۱ + ۲e^{-\frac{t}{۴}}$ ثبت شده است. در $t = ۲$ ثانیه منبع ولتاژ پله‌ای و خازن را از مدار جدا ساخته و جای آن دو را در مدار عوض می‌کنیم. در لحظه $t = ۲^+$ مجموعاً چه توانی روی خازن و شبکه N مصرف می‌شود؟**



۱) ۰/۵ وات

۲) ۱ وات

۳) ۱− وات

۴) ۲/۵− وات

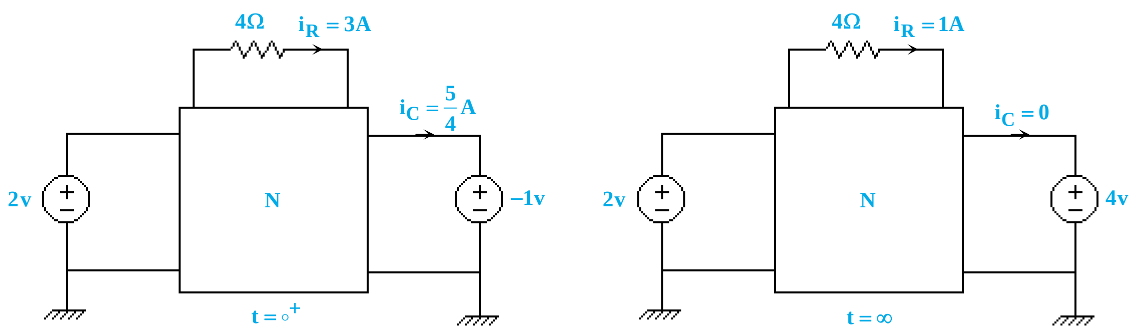
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این تست جریان مقاومت و جریان منبع و متعاقباً توان آنها را در لحظه $t = ۲^+$ محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از قانون پایستگی توان، مجموع توان مصرفی بقیه مدار را بدست می‌آوریم. بدین منظور ابتدا باید با یک تحلیل مداری مقدار جریان مقاومت و مقدار جریان خازن را به ولتاژ منبع و ولتاژ خازن مرتبط سازیم. برای این کار می‌توان از دو روش مختلف استفاده کرد که ما هر دو روش را برای روشن‌تر شدن کلیت راه‌حل تست بیان می‌کنیم. قبل از بیان این دو روش مقادیر اولیه و نهایی جریان و ولتاژ خازن و جریان مقاومت را تعیین می‌کنیم. با توجه به ظرفیت خازن مشخص است که داریم:

$$i_C = ۱\times\frac{dV_C}{dt} = \frac{۵}{۴}e^{-\frac{t}{۴}}\ (A)$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_R(۰) = ۳\,A \\ i_R(\infty) = ۱\,A \end{cases},\quad \begin{cases} V_C(۰) = -۱\,v \\ V_C(\infty) = ۴\,v \end{cases},\quad \begin{cases} i_C(۰) = \frac{۵}{۴}\,A \\ i_C(\infty) = ۰\,A \end{cases}$$

روش اول: با تحلیل مدار در $t = ۰^+$ و $t = \infty$ مطابق با مدارهای معادل زیر می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به صورت ترکیب خطی از ولتاژ منبع و ولتاژ خازن در نظر گرفت. دقت کنید از آنجایی که ولتاژ خازن در $t = \infty$ ثابت بوده و به طور لحظه‌ای نمی‌تواند تغییر کند، می‌توان خازن را در این زمان به صورت یک منبع ولتاژ مدل کرد.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_R(0)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(0) \\ i_R(\infty)=\alpha_R V_S+\beta_R V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=2\alpha_R-\beta_R \\ 1=2\alpha_R+4\beta_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=1/3 \\ \beta_R=-0/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_C(0)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(0) \\ i_C(\infty)=\alpha_C V_S+\beta_C V_C(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}=2\alpha_C-\beta_C \\ 0=2\alpha_C+4\beta_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=0/5 \\ \beta_C=-0/25 \end{cases}$$

حال با بدست آمدن روابط فوق می‌توان جریان مقاومت و جریان خازن را به ازای هر مقدار دلخواه V_S و V_C تعیین کرد.

روش دوم: فرض کنید به جای خازن موجود در مدار، منبع ولتاژی با ولتاژ $V_C(t)=4-5e^{-\frac{t}{4}}$ در مدار قرار گیرد. می‌توان نشان داد که در این حالت جریان و ولتاژ شاخه‌های مدار نسبت به حالت اول هیچ تفاوتی نمی‌کند، چرا که به عنوان مثال اگر روشی مثل روش تحلیل ولتاژ گره در تحلیل مدار مورد استفاده قرار گیرد، با مشخص شدن ولتاژ خازن در هر لحظه، می‌توان ولتاژ سایر گره‌ها و به تبع آن جریان تمام شاخه‌های مدار را تعیین کرد. حال با جایگزین شدن خازن توسط منبع ولتاژ مورد نظر، با توجه به این که مدار دارای دو منبع ولتاژ می‌باشد، طبق قضیه جمع آثار باید بتوان جریان مقاومت و جریان خازن را در هر لحظه از زمان بر حسب ولتاژ این دو منبع بیان نمود:

$$i_R(t)=\alpha_R\times V_S(t)+\beta_R\times V_C(t) \Rightarrow 1+2e^{-\frac{t}{4}}=2\alpha_R+\beta_R\times(4-5e^{-\frac{t}{4}})=2\alpha_R+4\beta_R-5\beta_R e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_R+4\beta_R=1 \\ -5\beta_R=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_R=1/3 \\ \beta_R=-0/4 \end{cases} \Rightarrow i_R(t)=1/3V_S(t)-0/4V_C(t)$$

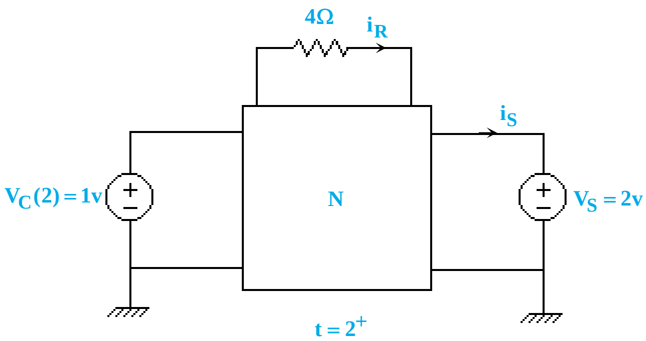
$$i_C(t)=\alpha_C\times V_S(t)+\beta_C\times V_C(t) \Rightarrow \frac{5}{4}e^{-\frac{t}{4}}=2\alpha_C+\beta_C\times(4-5e^{-\frac{t}{4}})=2\alpha_C+4\beta_C-5\beta_C e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_C+4\beta_C=0 \\ -5\beta_C=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_C=0/5 \\ \beta_C=-0/25 \end{cases} \Rightarrow i_C(t)=0/5V_S(t)-0/25V_C(t)$$

در ادامه حل این تست مدار را در $t=2$ ثانیه تحلیل می‌کنیم. در این زمان ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(t=2)=4-5e^{-\frac{2}{4}}\cong 4-5\times 0/6=4-3=1v$$

حال با عوض شدن جای خازن و منبع ولتاژ در $t=2$ ثانیه مدار معادلی به شکل زیر خواهیم داشت:



بنابراین طبق روابطی که قبلاً بدست آوردیم، داریم: (دقت کنید که در اینجا با استفاده از رابطه بدست آمده برای جریان خازن در مرحله قبل، جریان منبع V_S را در شرایط جدید محاسبه می‌کنیم.)

$$i_R(t=2^+)=1/3V_C(t=2^+)-0/4V_S(t=2^+)=1/3\times 1-0/4\times 2=0/5A \Rightarrow P_R(t=2^+)=4\times(0/5)^2=1w$$

$$i_S(t=2^+)=0/5V_C(t=2^+)-0/25V_S(t=2^+)=0/5\times 1-0/25\times 2=0 \Rightarrow P_S(t=2^+)=0$$

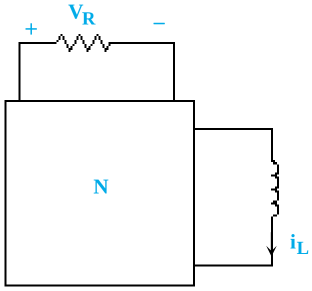
$$\Rightarrow P_S(2^+)+P_R(2^+)=1w \Rightarrow P_C(2^+)+P_N(2^+)=-1w$$

و لذا گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.

مثال ۶۰: در مدار زیر، شبکه N متشکل از تعدادی مقاومت و یک منبع DC می‌باشد. تحت شرایط اولیه $i_L(0)=0$ داریم:

$i_L(t)=3-3e^{-2t}$, $V_R(t)=4-e^{-2t}$

حال در آزمایش دیگری که مقدار $i_L(0)$ و اندازه منبع DC در آن متفاوت است، ولتاژ مقاومت به صورت $V'_R(t)=-2+\frac{3}{2}e^{-2t}$ بدست آمده است. در این حالت معادله جریان سلف کدام است؟



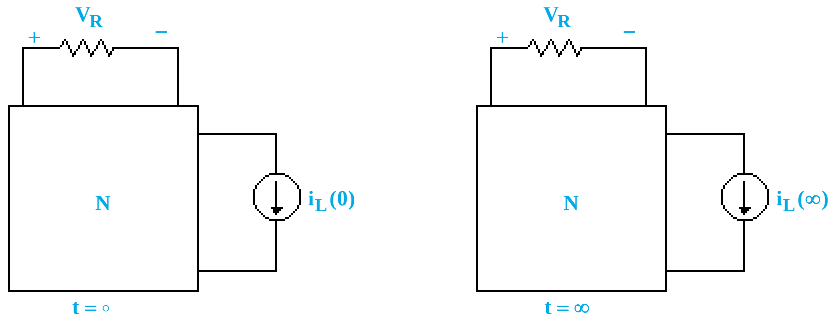
۱) $i'_L(t)=-3+6e^{-2t}$

۲) $i'_L(t)=-3+9e^{-2t}$

۳) $i'_L(t)=-1/5+4/5e^{-2t}$

۴) $i'_L(t)=-1/5+3e^{-2t}$

پاسخ: گزینه «۳» مدار را در زمان‌های $t=0$ و $t=\infty$ مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



در زمان $t=0$ ولتاژ مقاومت متأثر از منبع ولتاژ DC در داخل شبکه N و جریان اولیه سلف می‌باشد. پس با فرض این که اندازه منبع DC برابر A باشد، می‌توان نوشت:

$$V_R(0)=\alpha A+\beta i_L(0)$$

و همچنین در حالت دایمی مطابق با شکل فوق داریم:

$$V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty)$$

حال نتایج بدست آمده از آزمایش اول را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. با توجه به توابع زمانی $i_L(t)$ و $V_R(t)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} i_L(0)=0\,A \\ i_L(\infty)=3\,A \end{cases} , \quad \begin{cases} V_R(0)=3\,v \\ V_R(\infty)=4\,v \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم مقادیر αA و β در روابط فوق را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V_R(0)=\alpha A+\beta i_L(0) \Rightarrow \alpha A=3 \\ V_R(\infty)=\alpha A+\beta i_L(\infty) \Rightarrow 4=3+\beta\times 3 \Rightarrow \beta=\frac{1}{3} \end{cases}$$

حال آزمایش دوم را که در آن مقدار $i_L(0)$ و A تغییر یافته است، در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه داده شده برای $V'_R(t)$ داریم:

$$\begin{cases} V'_R(0)=-\frac{1}{2}A \\ V'_R(\infty)=-2\,A \end{cases}$$

از طرفی با فرض این که منبع DC، k برابر شده باشد، می‌توان جریان نهایی سلف را به صورت زیر نوشت:

$$i'_L(\infty)=k\,i_L(\infty)=3k$$

حال سعی می‌کنیم با مدنظر قرار دادن مقادیر $V'_R(0)$ و $V'_R(\infty)$، مقادیر $i'_L(0)$ و k را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} V'_R(0)=\alpha Ak+\beta i'_L(0) \Rightarrow -\frac{1}{2}=3k+\frac{1}{3}\times i'_L(0) \\ V'_R(\infty)=\alpha Ak+\beta i'_L(\infty) \Rightarrow -2=3k+\frac{1}{3}\times 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \Rightarrow i'_L(\infty)=3k=-\frac{3}{2} \\ i'_L(0)=3\,A \end{cases}$$

در نهایت با توجه به مقادیر بدست آمده برای $i'_L(\infty)$ و $i'_L(0)$ و با توجه به ثابت ماندن مقدار ثابت زمانی مدار در آزمایش دوم داریم:

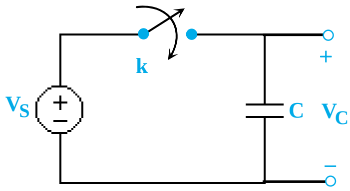
$$i'_L(t)=i'_L(\infty)+(i'_L(0)-i'_L(\infty))e^{-2t}=-\frac{3}{2}+(3-(-\frac{3}{2}))e^{-2t}=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}e^{-2t}\ (A)$$

تغییر ناگهانی ولتاژ خازن و جریان سلف

همان‌طور که در ابتدای مطالب کلیدزنی اشاره شد، معمولاً ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقات $V_C(0^+) = V_C(0^-)$ است و همچنین جریان سلف نیز تغییرات ناگهانی ندارد و در اغلب اوقات $I_L(0^+) = I_L(0^-)$ است. اما در مواردی این روابط صحیح نیستند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

۱ـ اتصال موازی یک منبع ولتاژ با کلید به یک خازن:

در صورتی که یک خازن با کلید، مستقیماً به یک منبع مستقل ولتاژ وصل شود، بعد از کلیدزنی ولتاژ V_C باید مساوی V_S باشد و شارژ خازن ناچاراً به صورت آنی انجام می‌شود. در این حالت جریان خازن شامل تابع ضربه خواهد بود.

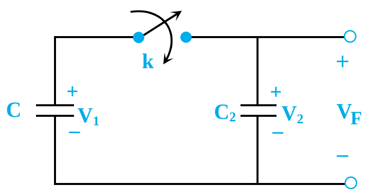


$$V_C(0^-) = 0 \quad , \quad V_C(0^+) = V_S$$

$$V_C(0^-) \neq V_C(0^+)$$

۲ـ اتصال موازی دو خازن با ولتاژهای مختلف:

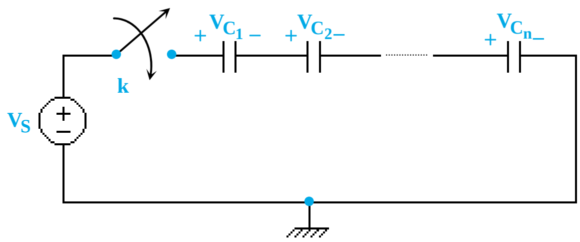
در واقع شبیه حالت اول می‌باشد. در این حالت ولتاژ نهایی پس از اتصال کلید از رابطه زیر محاسبه می‌شود. در این حالت اگر پلاریته ولتاژهای اولیه مطابق با پلاریته V_F باشد، ولتاژهای اولیه با علامت مثبت وارد معادله می‌شوند و در غیر این صورت با علامت منفی در معادله لحاظ می‌شوند.



$$V_F = \frac{\pm C_1 V_1 \pm C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pm q_1 \pm q_2}{C_{eq}}$$

۳ـ تشکیل یک حلقه توسط خازن‌ها و منابع ولتاژ (حلقه خازنی) بعد از کلیدزنی:

اگر کلیدزنی در مدار موجب تشکیل یک حلقه خازنی شود، یعنی حلقه‌ای که شامل یک یا چند خازن و یک یا چند منبع ولتاژ مستقل است، خازن‌های مدار جهش ولتاژ خواهند داشت.



در این حالت ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t = 0^+$ (با پلاریته مشخص شده روی شکل) می‌توان از طریق رابطه کلی زیر محاسبه کرد:

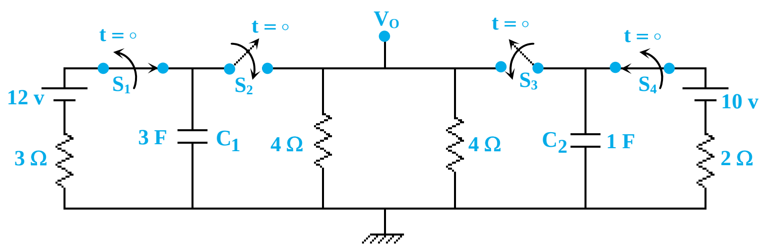
$$V_{C_i}(0^+) = \frac{C_{eq}}{C_i}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-) - \cdots - V_{C_n}(0^-)] + V_{C_i}(0^-) \quad , \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

برای حالت خاصی که تنها دو خازن در حلقه موجود باشد، داریم:

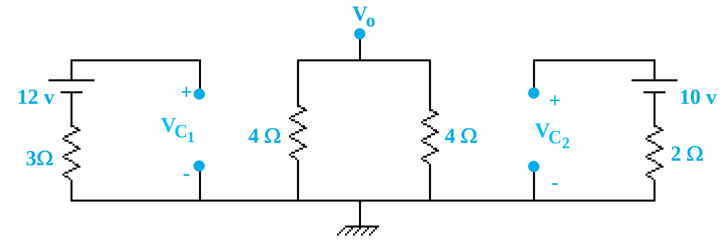
$$\begin{cases} V_{C_1}(0^+) = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)] + V_{C_1}(0^-) \\ V_{C_2}(0^+) = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}[V_S - V_{C_1}(0^-) - V_{C_2}(0^-)] + V_{C_2}(0^-) \end{cases}$$

این روابط را می‌توان با استفاده از قانون بقای بار اثبات نمود.

مثال ۶۱: در مدار زیر معادله تغییرات V_o بر حسب زمان کدام است؟



۱) $11/5e^{-\frac{t}{4}}$
۲) $6/5e^{-\frac{t}{4}}$
۳) $11/5e^{-\frac{t}{8}}$
۴) $6/5e^{-\frac{t}{8}}$



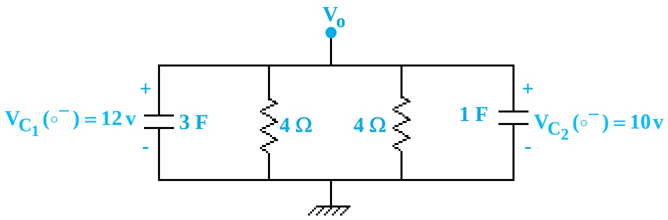
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در $t=\circ^-$ تحلیل می‌کنیم.

در این زمان $S_۱$ و $S_۴$ بسته و $S_۲$ و $S_۳$ باز هستند. با توجه به اینکه خازن‌ها مدار باز شده‌اند، لذا داریم:

$$V_{C_۱}(\circ^-)=۱۲v \;,\; V_{C_۲}(\circ^-)=۱\circ v$$

حالا مدار را در $t>\circ$ تحلیل می‌کنیم. در این زمان کلید $S_۱$ و $S_۴$ باز شده و کلید $S_۲$ و $S_۳$ وصل می‌شوند. با توجه به اینکه دو خازن با ولتاژهای اولیه متفاوت با هم موازی می‌شوند، لذا معادله ولتاژ نهایی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$V_o(\circ^+)=\frac{V_{C_۱}(\circ^-)\times C_۱+V_{C_۲}(\circ^-)\times C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{۳\times۱۲+۱\times۱\circ}{۳+۱}=۱۱/۵\,v$$



حال مقادیر R_{eq} و C_{eq} را محاسبه می‌کنیم:

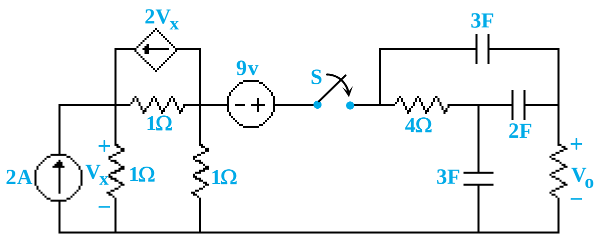
$$R_{eq}=۴\,||\,۴=۲\Omega \;,\; C_{eq}=۳F\,||\,۱F=۴F$$

$$\tau=R_{eq}.C_{eq} \Rightarrow \tau=۲\times۴=۸\sec$$

$$V_o(t)=V_o(\circ^+)e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_o(t)=۱۱/۵e^{-\frac{t}{۸}}$$

توجه کنید که در بینهایت هیچ منبعی به مدار متصل نیست، لذا $V_o(\infty)=\circ$ است.

مثال ۶۲: در مدار شکل زیر، کلید S در $t=\circ$ بسته می‌شود. مقدار $V_o(\circ^+)$ چند ولت است؟ (ولتاژ اولیه خازن‌ها در $t=\circ^-$ صفر است)

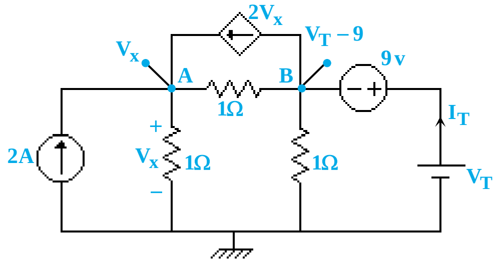


۱) ۲

۲) ۳

۳) صفر

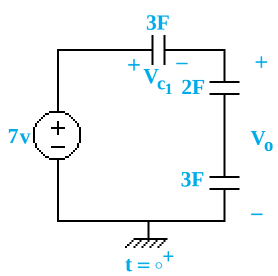
۴) ۵



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که ولتاژ اولیه خازن‌ها برابر صفر است، تنها زمانی $V_o(\circ^+)$ مخالف صفر خواهد بود که مدار سمت چپ کلید S، به صورت یک منبع ولتاژ عمل کرده و پس از بسته شدن کلید حلقه خازنی در مدار ایجاد شود. برای بررسی این مسئله مدار معادل تونن این قسمت را محاسبه می‌کنیم:

$$KCL\;\;(A):\frac{V_x}{۱}-۲+\frac{V_x-V_T+۹}{۱}-۲V_x=\circ \Rightarrow V_T=۷v$$

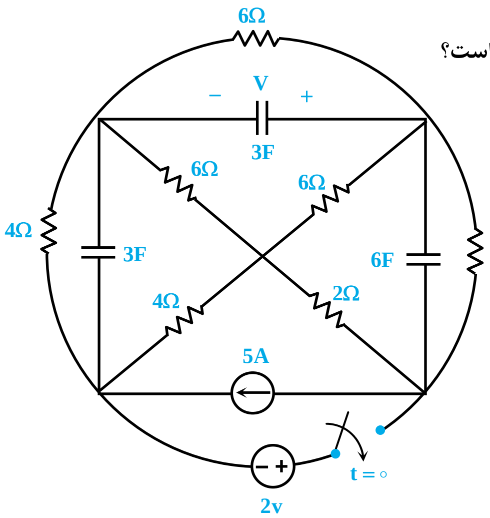
بنابراین، این مدار دقیقاً مشابه یک منبع ولتاژ ۷ ولتی عمل می‌کند. حال با تحلیل مدار در $t=\circ^+$ داریم:



$$V_{C_۱}(\circ^+)=\frac{\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}}{۳}\times۷=۲v$$

$$V_o(\circ^+)=۷-V_{C_۱}(\circ^+)=۷-۲=۵v$$

مثال ۶۳: در مدار زیر کلید در زمان $t=\circ$ بسته می‌شود. مقدار V در لحظه $t=\circ^+$ چند ولت است؟



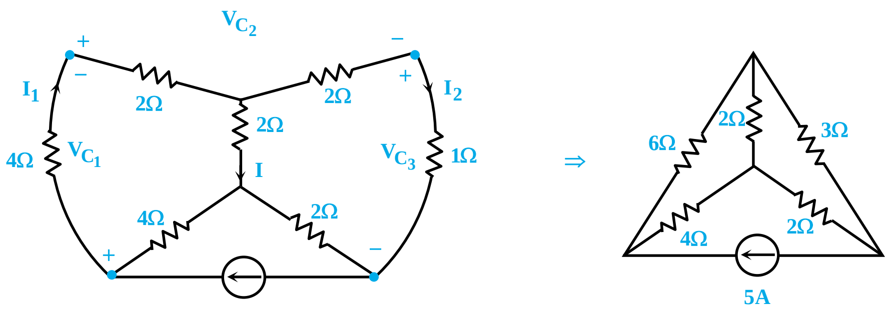
۱) صفر

۲) ۱/۶-

۳) ۴-

۴) ۸-

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مدار را در $t=\circ^-$ تحلیل می‌کنیم. جهت تحلیل ساده‌تر مدار، می‌توانیم اتصال مثلث با مقاومت‌های ۶ اهمی در بالای مدار را به اتصال ستاره تبدیل کنیم:



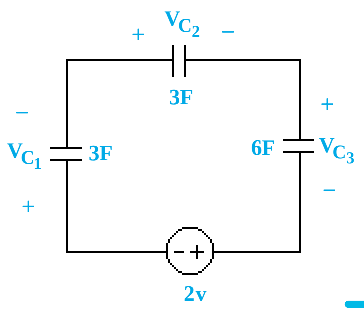
پل وتستون متعادل $\leftarrow 6\times 2 = 4\times 3$

حال با توجه به شکل بالا و برقراری حالت تعادل در پل وتستون موجود در مدار داریم:

$$\begin{cases} V_{C_۱}(\circ^-) = ۲\times ۴ = ۸v \\ V_{C_۲}(\circ^-) = ۲\times(۲+۲) = ۸v \\ V_{C_۳}(\circ^-) = ۲\times ۱ = ۲v \end{cases}$$

$$I=\circ \quad , \quad I_۱ = I_۲ = ۵\times\frac{۶}{۶+۹} = ۲A$$

اکنون مدار را در زمان $t=\circ^+$ تحلیل می‌کنیم. پس از کلیدزنی مشاهده می‌شود که سه خازن موجود در مدار با منبع ولتاژ ۳ ولتی، تشکیل یک حلقه داده و بنابراین لزوماً شاهد تغییرات ناگهانی در ولتاژ خازن‌ها خواهیم بود. حال با استفاده از رابطه بیان شده، ولتاژ خازن‌ها را در لحظه $t=\circ^+$ محاسبه می‌کنیم. (دقت کنید که مدار مقاومتی به همراه منبع جریان، در میزان تغییرات ولتاژ خازن‌ها در لحظه‌ی $t=\circ$ بی‌تأثیر هستند، از این رو در تحلیل مدار در لحظه $t=\circ^+$ نادیده گرفته می‌شوند)



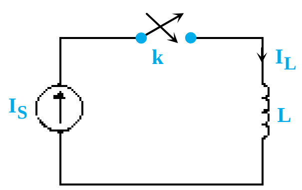
$$V_{C_۲}(\circ^+) = \frac{C_{eq}}{C_۲}[V_S - V_{C_۱}(\circ^-) - V_{C_۲}(\circ^-) - V_{C_۳}(\circ^-)] + V_{C_۲}(\circ^-)$$

$$V_S = -۲v \quad , \quad C_۲ = ۳F \quad , \quad C_{eq} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}} = \frac{۶}{۵}F$$

$$\Rightarrow V_{C_۲}(\circ^+) = \frac{\frac{۶}{۵}}{۳}[-۲-۸-۸-۲] + ۸ = \circ/۴\times(-۲\circ) + ۸ = \circ v \Rightarrow V = -V_{C_۲}(\circ^+) = \circ v$$

۴ـ اتصال سری یک سلف به یک منبع مستقل جریان با یک کلید:

در صورتی که یک سلف با یک منبع جریان توسط یک کلید سری شود، جریان سلف برابر I_S شده و این جریان در همه زمان‌ها ثابت خواهد بود. لذا جریان به صورت آنی از صفر به I_S تغییر می‌کند. در این حالت ولتاژ دو سر سلف شامل تابع ضربه خواهد بود.

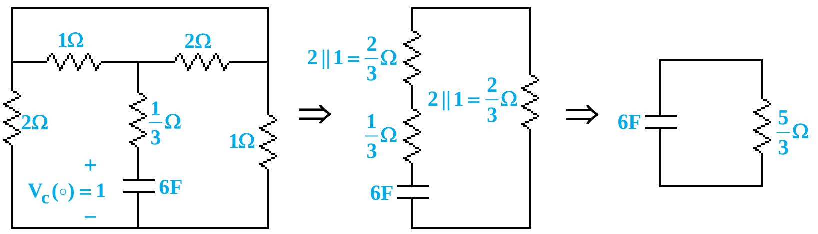


$$I_L(\circ^-) = \circ \quad , \quad I_L(\circ^+) = I_S$$

$$\Rightarrow I_L(\circ^-) \neq I_L(\circ^+)$$

حال در گام اول $V_C(t_\circ^-)$ را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به شکل مقابل داریم:

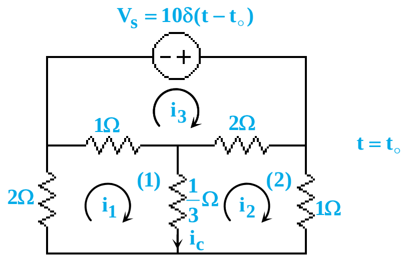


$$\tau = R.C = \frac{۵}{۳}\times ۶ = ۱۰\,sec$$

$$V_C(t) = V_C(\circ)e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{۱۰}}$$

$$V_C(t = t_\circ^-) = e^{-\frac{t_\circ}{۱۰}}$$

اکنون مدار را در $t = t_\circ$ تحلیل کرده و اثر منبع ولتاژ ضربه‌ای را بر روی ولتاژ خازن محاسبه می‌کنیم. در این حالت خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم.



$$KVL(۱): ۲i_۱ + i_۱ - i_۳ + \frac{۱}{۳}\times(i_۱ - i_۲) = \circ \Rightarrow i_۳ = \frac{۱۰}{۳}i_۱ - \frac{۱}{۳}i_۲ \qquad (۱)$$

$$KVL(۲): \frac{۱}{۳}\times(i_۲ - i_۱) + ۲\times(i_۲ - i_۳) + i_۲ = \circ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}i_۱ + \frac{۱۰}{۳}i_۲ - ۲i_۳ = \circ$$

$$\xrightarrow{(۱)} -\frac{۱}{۳}i_۱ + \frac{۱۰}{۳}i_۲ - \frac{۲۰}{۳}i_۱ + \frac{۲}{۳}i_۲ = \circ \Rightarrow i_۲ = \frac{۷}{۴}i_۱ \qquad (۲)$$

$$KVL\ (\text{حلقه بیرونی}): ۲i_۱ - V_S + i_۲ = \circ \xrightarrow{(۲)} ۲i_۱ - V_S + \frac{۷}{۴}i_۱ = \circ \Rightarrow i_۱ = \frac{۴}{۱۵}V_S \Rightarrow i_C = i_۱ - i_۲ = -\frac{۳}{۴}i_۱ = -\frac{V_S}{۵}$$

$$\underbrace{V_C(t = t_\circ^+)}_{\text{ناشی از } V_S} = \frac{۱}{c}\int_{t_\circ^-}^{t_\circ^+} i_C dt = \frac{۱}{۶}\times\int_{t_\circ^-}^{t_\circ^+} -\frac{۱}{۵}\times ۱۰\,\delta(t - t_\circ)dt = -\frac{۱}{۳}v$$

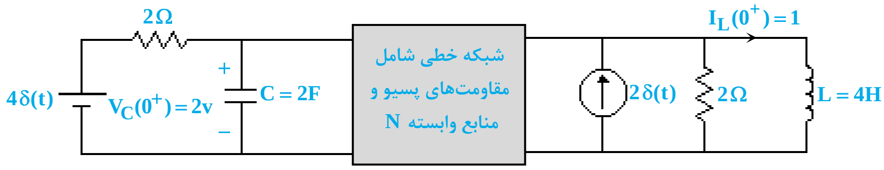
بنابراین ولتاژ خازن در لحظه $t = t_\circ^+$ برابر است با:

$$V_C(t = t_\circ^+) = e^{-\frac{t_\circ}{۱۰}} - \frac{۱}{۳}$$

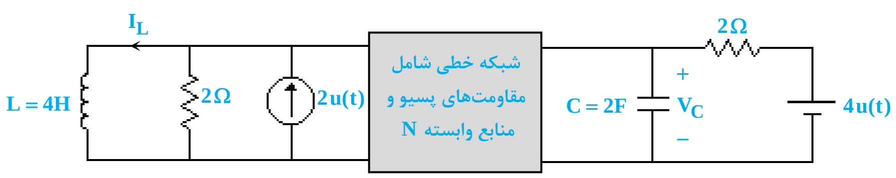
حال باید داشته باشیم:

$$V_C(t = t_\circ^+) = \circ \Rightarrow e^{-\frac{t_\circ}{۱۰}} - \frac{۱}{۳} = \circ \Rightarrow -\frac{t_\circ}{۱۰} = Ln(\frac{۱}{۳}) = -Ln(۳) \Rightarrow t_\circ = ۱۰\,Ln(۳)\,sec$$

مثال ۷۵: در مدار شکل زیر، سلف و خازن بدون انرژی اولیه هستند و جریان سلف و ولتاژ خازن پس از اعمال منابع ضربه روی شکل نشان داده شده است.



اکنون در مدار شکل زیر و در حالت پایدار مدار، جریان سلف و ولتاژ خازن چقدر خواهد بود؟



۱) $\begin{cases} I_L = ۴A \\ V_C = ۴v \end{cases}$
۲) $\begin{cases} I_L = ۲A \\ V_C = ۱v \end{cases}$

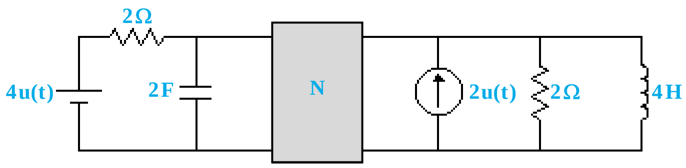
۳) $\begin{cases} I_L = ۱A \\ V_C = ۲v \end{cases}$
۴) $\begin{cases} I_L = ۲A \\ V_C = ۲v \end{cases}$

پاسخ : گزینه «۱» ایده حل این سؤال در رسم مدار در زمان‌های خواسته شده و مقایسه دو مدار است. ابتدا مدار اول را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم جریان خازن و ولتاژ سلف را در بازه زمانی $\circ^- < t < \circ^+$ پیدا کنیم:

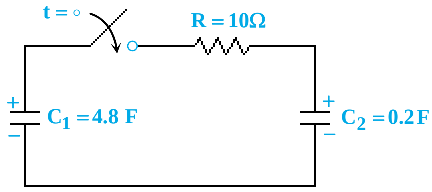
$$I_C(t) = ۲\frac{dV_C}{dt} = ۲\times\frac{d(۲u(t))}{dt} = ۴\delta(t) \qquad \circ^- < t < \circ^+$$

$$V_L(t) = ۴\frac{dI_L}{dt} = ۴\times\frac{d(u(t))}{dt} = ۴\delta(t) \qquad \circ^- < t < \circ^+$$

حال با توجه به خطی بودن مدار، برای یافتن پاسخ پله مدار می‌توانیم از پاسخ ضربه انتگرال‌گیری کنیم. در این حالت با مدار زیر سر و کار داریم:



مثال۷۸: در مدار شکل زیر ولتاژ اولیه خازن C_1 برابر ۱۰ ولت و ولتاژ اولیه خازن C_2 برابر صفر است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی ندارد.

۲) نسبت انرژی نهایی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۲۴ می‌باشد و این نسبت به مقاومت R بستگی دارد.

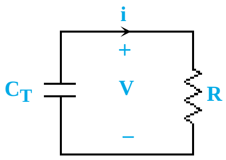
۳) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۹/۶ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی دارد.

۴) انرژی تلف شده در مقاومت برابر با ۴/۸ ژول می‌باشد و به اندازه‌ی مقاومت R بستگی ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» **روش اول:** انرژی اولیه ذخیره شده در مدار برابر است با:

$$\text{انرژی اولیه} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۴/۸\times ۱۰^۲ = ۲۴۰J$$

بعد از بسته شدن کلید، خازن معادل مدار با ولتاژ اولیه ۱۰ ولت از طریق مقاومت دشارژ می‌شود:

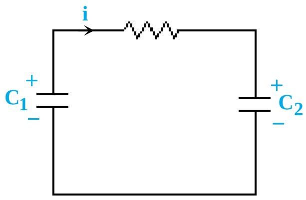


در این حالت انرژی تلف شده در مقاومت برابر انرژی از دست رفته خازن معادل می‌باشد:

$$C_T = \frac{۴/۸\times ۰/۲}{۴/۸+۰/۲} = \frac{۴/۸}{۲۵}F \quad \text{و} \quad V_T = V_{C_۱} - V_{C_۲} = ۱۰-۰ = ۱۰v$$

$$\text{انرژی تلف شده در مقاومت} = \text{انرژی اولیه خازن معادل} = \frac{۱}{۲}\times C_T\times V_T^۲ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴/۸}{۲۵}\times ۱۰^۲ = ۹/۶J$$

$$\Rightarrow \text{انرژی نهایی ذخیره شده} = ۲۴۰-۹/۶ = ۲۳۰/۴J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در مدار}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$



روش دوم: بعد از این که مدار به حالت پایدار رسید، ولتاژ دو خازن باید با هم برابر باشند. به عبارتی پس از این‌که مدار شروع به کار کرد، جریان i در مدار برقرار می‌شود و خازن $C_۲$ شارژ و خازن $C_۱$ دشارژ می‌شود و به عبارتی ولتاژ خازن $C_۱$ کاهش و ولتاژ خازن $C_۲$ افزایش می‌یابد تا زمانی که این دو ولتاژ با هم برابر شوند.

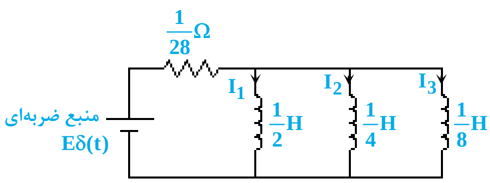
ولتاژ خازن‌ها در حالت پایدار از قانون بقای بار الکتریکی به دست می‌آید:

$$\underbrace{C_۱V_۱ + C_۲V_۲}_{\text{قبل از بسته شدن کلید}} = \underbrace{C_۱V + C_۲V}_{\text{در حالت پایدار}} \Rightarrow ۱۰\times ۴/۸ + ۰/۲\times ۰ = ۵V \Rightarrow V = ۹/۶v$$

$$\text{انرژی اولیه مدار} = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲ = ۲۴۰J \quad \text{و} \quad \text{انرژی نهایی مدار} = \frac{۱}{۲}(C_۱+C_۲)V^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۹/۶^۲ = ۲۳۰/۴J$$

$$\text{انرژی تلف شده} = ۹/۶J \Rightarrow \frac{\text{انرژی نهایی}}{\text{انرژی تلف شده}} = \frac{۲۳۰/۴}{۹/۶} = ۲۴$$

مثال۷۹: سه سلف $\frac{۱}{۲}H$، $\frac{۱}{۴}H$ و $\frac{۱}{۸}H$ با جریان‌های اولیه ۵ آمپر، ۴ آمپر و ۵ آمپر را در لحظه صفر در مدار زیر قرار داده‌ایم. انرژی مدار پس از گذشت ۱۰ ثانیه حدوداً چقدر است؟



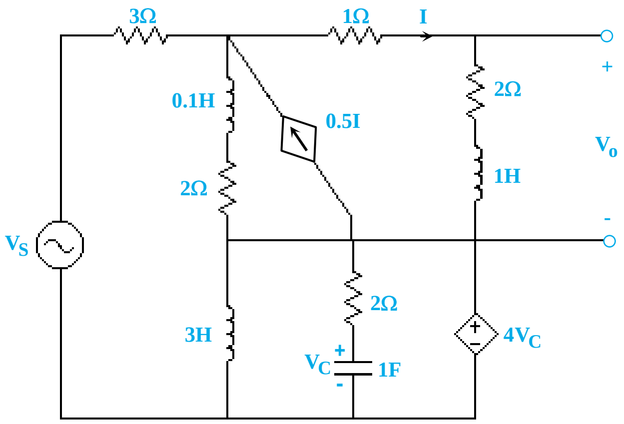
۱) ۲/۸J

۲) ۳J

۳) صفر

۴) $\frac{۱}{۲}\left[\frac{(۵+۲E)^۲}{۲} + \frac{(۴+۴E)^۲}{۴} + \frac{(۵+۸E)^۲}{۸}\right]$

مثال ۲۷: در مدار زیر در صورتی که مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ برابر ۳ ولت باشد، مقدار متوسط سیگنال خروجی کدام است؟



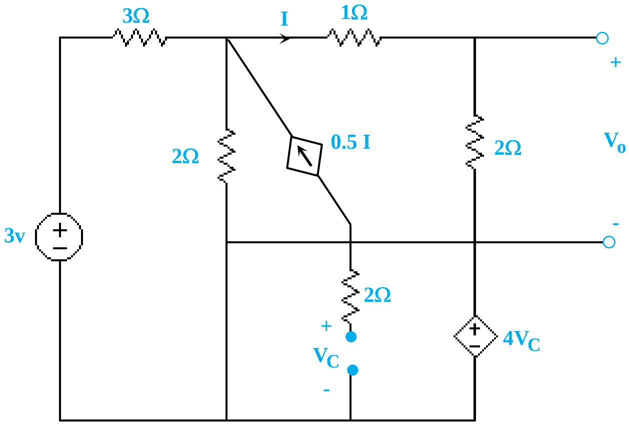
۱) ۱v

۲) ۰/۳۳v

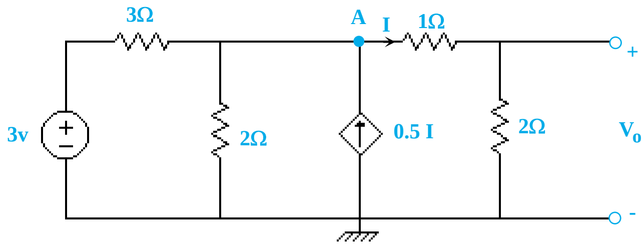
۳) ۰/۶۶v

۴) ۱/۳۳v

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکته گفته شده در قبل، مقدار متوسط سیگنال $V_S(t)$ را به عنوان ورودی به مدار اعمال می‌کنیم و مدار را در حالت DC تحلیل می‌کنیم. در این حالت سلف‌ها با اتصال کوتاه و خازن‌ها با مدار باز مدل می‌شوند. حال با توجه به صفر شدن V_C در پایین مدار، منبع وابسته $۴V_C$ نیز صفر و اتصال کوتاه می‌شود.



$\Rightarrow$



برای حل مدار فوق در گره A، KCL نوشته می‌شود.

$$\frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}I \quad , \quad I=\frac{V_A}{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_A-۳}{۳}+\frac{V_A}{۲}+\frac{V_A}{۳}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{V_A}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ۲V_A-۶+۳V_A+۲V_A=V_A \quad \Rightarrow \quad V_A=۱v$$

با اعمال تقسیم ولتاژ داریم:

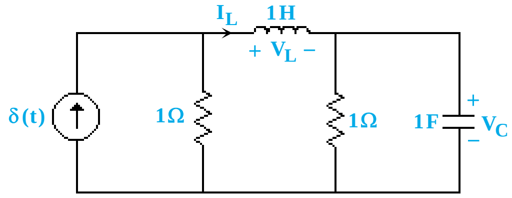
$$V_o=\frac{V_A\times ۲}{۲+۱}=\frac{۱\times ۲}{۳}=۰/۶۶v$$

با توجه به موارد فوق مقدار متوسط ولتاژ خروجی برابر ۰/۶۶v است.

نکته ۴: همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، در صورتی که در مدار منابع شامل تابع ضربه وجود داشته باشد، برای محاسبه $V_C(۰^+)$ و $I_L(۰^+)$ در مدارهای مرتبه دوم نیز می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد. بنابراین توابع ورودی غیرضربه‌ای را غیرفعال کرده و در مدار فقط توابع ضربه‌ای را فعال نگه می‌داریم. در این حالت سلف‌ها را با مدار باز و خازن‌ها را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم و مقادیر $V_C(۰^+)$ و $I_L(۰^+)$ را از فرمول‌های زیر محاسبه می‌کنیم. (در واقع به نحوی داریم جمع آثار استفاده می‌کنیم. وقتی فقط اثر ضربه را می‌خواهیم ببینیم، تمام منابع دیگر صفر می‌شود و لذا جریان سلف و ولتاژ خازن هم صفر در نظر گرفته می‌شود تا ببینیم V_L و I_C چه می‌شوند.)

$$I_L(۰^+)=I_L(۰^-)+\frac{۱}{L}\int_{۰^-}^{۰^+}V_L(t)dt \qquad V_C(۰^+)=V_C(۰^-)+\frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+}I_C(t)dt$$

مثال۲۸: با توجه به مدار شکل زیر، با فرض $V_C(\circ^-)=۱v$ و $I_L(\circ^-)=۱A$ کدام گزینه درست است؟



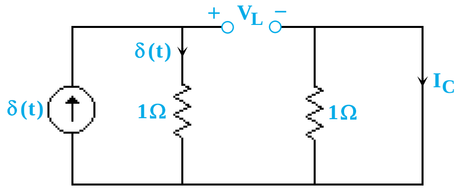
۱) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(\circ^+)=۲A$ می‌شود، ولی روی ولتاژ خازن اثری ندارد و لذا $V_C(\circ^+)=۱v$ باقی می‌ماند.

۲) منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن اثر می‌گذارد و $V_C(\circ^+)=۲v$ می‌شود، ولی روی جریان سلف اثری ندارد و لذا $I_L(\circ^+)=۱A$ باقی می‌ماند.

۳) منبع ضربه در مدار، اثر خود را روی I_L می‌گذارد و $I_L(\circ^+)=۲A$ می‌شود و به همین ترتیب بر روی ولتاژ خازن نیز اثر دارد و $V_C(\circ^+)=۲v$ می‌شود.

۴) با توجه به توپولوژی مدار، منبع ضربه در مدار روی ولتاژ خازن و جریان سلف اثر نمی‌گذارد و $V_C(\circ^+)=۱v$ و $I_L(\circ^+)=۱A$ خواهد بود.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه $V_C(\circ^+)$ و $I_L(\circ^+)$، ابتدا سلف‌ها را مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم. علاوه بر این، منابع مستقل غیرضربه‌ای را نیز غیرفعال می‌کنیم. حال داریم:



$$V_C(\circ^+)=V_C(\circ^-)+\frac{۱}{C}\int_{\circ^-}^{\circ^+} I_C\,dt$$

$$I_L(\circ^+)=I_L(\circ^-)+\frac{۱}{L}\int_{\circ^-}^{\circ^+} V_L\,dt$$

$$I_C=\circ \;\Rightarrow\; V_C(\circ^+)=V_C(\circ^-)+\frac{۱}{C}\int_{\circ^-}^{\circ^+} I_C\,dt=۱+\frac{۱}{C}\int_{\circ^-}^{\circ^+}\circ\,dt=۱v$$

$$V_L=\delta(t) \;\Rightarrow\; I_L(\circ^+)=I_L(\circ^-)+\frac{۱}{L}\int_{\circ^-}^{\circ^+} V_L\,dt \;\Rightarrow\; I_L(\circ^+)=۱+\frac{۱}{۱}\int_{\circ^-}^{\circ^+}\delta(t)dt=۲A$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای $I_L(\circ^+)$ و $V_C(\circ^+)$، دیده می‌شود که مقدار $I_L(\circ^+)$ با تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $۲A$ و $V_C(\circ^+)$ بدون تأثیر تابع ضربه ورودی برابر با $۱v$ است. لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

معادله مشخصه و محاسبه آن

هر مدار الکتریکی از مرتبه n دارای معادله مشخصه‌ای به شکل روبرو می‌باشد: $F(S)=S^n+a_{n-۱}S^{n-۱}+a_{n-۲}S^{n-۲}+\cdots+a_۱S+a_\circ=\circ$
در این حالت $F(S)$ را چندجمله‌ای مشخص مدار می‌نامند. ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص که تعداد آنها برابر n یعنی مرتبه مدار است، فرکانس‌های طبیعی مدار نامیده می‌شوند. فرکانس‌های طبیعی، تعیین‌کننده نوع پایداری مدار و شکل پاسخ گذرای آن بوده و از این لحاظ مقدار آنها بسیار مهم است. در واقع هر فرکانس طبیعی با مقدار $S_\circ$ جمله‌ای به شکل $e^{S_\circ t}$ در پاسخ ورودی صفر و پاسخ عمومی مدار بوجود می‌آورد. پس اگر ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\{S_۱,S_۲,S_۳,\ldots,S_n\}$ باشد، پاسخ ورودی صفر مدار به شکل زیر خواهد بود:

$$h(t)=k_۱e^{S_۱t}+k_۲e^{S_۲t}+\ldots+k_ne^{S_nt}$$

معادله مشخصه مدارهای RLC سری و موازی به راحتی با استفاده از روابط بیان شده در ابتدای فصل قابل محاسبه می‌باشد؛ اما در مورد سایر مدارهای RLC شیوه محاسبه معادله مشخصه متفاوت است. در این مدارها باید معادله مشخصه را با استفاده از روش‌های زیر تعیین کرد:

۱ـ برای بدست آوردن معادله مشخصه در یک مدار می‌توان ابتدا معادلات KCL در گره‌ها و یا معادلات KVL در حلقه‌های مدار را نوشته و سپس با جایگذاری $D=\frac{d}{dt}$ در معادلات بدست آمده، ماتریس امپدانس یا ادمیتانس را محاسبه کرد. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس‌های امپدانس یا ادمیتانس و با جایگزین کردن D با S، معادله مشخصه بدست می‌آید. در حالت خاصی که ماتریس امپدانس حلقه یا ماتریس ادمیتانس گره مدار دارای دترمینان صفر باشد، مدار در یکی از دو حالت خاص زیر قرار داشته و فاقد معادله مشخصه می‌باشد:

۱) اگر بردار منابع ورودی (بردار $[E_S]$ در مورد ماتریس امپدانس حلقه و بردار $[I_S]$ در مورد ماتریس ادمیتانس گره) همراستا با هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس و یا به صورت ترکیبی خطی از آنها باشد، مدار دارای بی‌شمار پاسخ خواهد بود. دقت کنید در این حالت اگر به جای هر یک از بردارهای ستونی ماتریس امپدانس یا ادمیتانس، بردار منابع قرار داده شود، دترمینان ماتریس همچنان صفر باقی خواهد ماند.

۲) در صورت عدم برقراری حالت فوق، مدار بدون پاسخ می‌باشد.

نکته ۳: در روابط اگر قرار شد زاویه فازها برحسب درجه بیان گردد، می‌توانیم از گذاشتن علامت درجه در فرم نمایش برحسب رادیان صرف‌نظر کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

$$\left[\sin(\omega t+\frac{\pi}{۲})=\sin(\omega t+۹۰^\circ)\right]$$

مثال ۲: فرم فازوری توابع زیر که برحسب زمان بیان شده‌اند را بنویسید.

$$۱)\ \mathbf{V(t)=۲\cos۴t}\ \Rightarrow\ \mathbf{V}=۲\angle۰^\circ$$

$$۲)\ \mathbf{V(t)=۳\cos(۲t+۴۵^\circ)}\ \Rightarrow\ \mathbf{V}=۳\angle۴۵^\circ$$

$$۳)\ \mathbf{V(t)=۵\sin۱۰t}=۵\cos(۱۰t-۹۰^\circ)\ \Rightarrow\ \mathbf{V}=۵\angle-۹۰^\circ$$

$$۴)\ \mathbf{V(t)=۵\sin(۳۷۷t+۱۵۰^\circ)}=۵\cos(۳۷۷t+۱۵۰^\circ-۹۰^\circ)=۵\cos(۳۷۷t+۶۰^\circ)\ \Rightarrow\ \mathbf{V}=۵\angle۶۰^\circ$$

جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس

برای جمع چند موج سینوسی هم‌فرکانس می‌توانیم معادلات را به صورت فازوری نمایش داده و سپس فرم دکارتی آنها را نوشته (چون جمع دو عدد مختلط در فرم دکارتی به راحتی صورت می‌گیرد) و جمع را به راحتی انجام دهیم. در نهایت مجدداً با استفاده از تبدیل فرم دکارتی به فرم قطبی و سپس نوشتن آن در حوزه زمان جواب نهایی را بدست آوریم. دقت کنید برای جمع دو فازور، باید فرکانس دو فازور با یکدیگر برابر باشد. (می‌توانیم آن‌ها را در دستگاه مختصات قطبی هم رسم کنیم و سپس بردارها را با هم جمع برداری کنیم.)

مثال ۳: اگر $\mathbf{I_۱(t)=۲۵\sin(\omega t)}$ و $\mathbf{I_۲(t)=۲۵\cos(\omega t-۳۰^\circ)}$ و $\mathbf{I_۳(t)=۲۵\cos(\omega t+۳۰^\circ)}$ باشد، حاصل $\mathbf{I(t)=I_۱(t)+I_۲(t)+I_۳(t)}$ را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** چون یکی از موج‌ها سینوسی می‌باشد، لذا لازم است آن را به فرم کسینوسی تبدیل کنیم:

$$I_۱(t)=۲۵\sin(\omega t)=۲۵\cos(\omega t-۹۰^\circ)\ \Rightarrow\ \vec{I}_۱=۲۵\angle-۹۰^\circ$$

$$\vec{I}_۲=۲۵\angle-۳۰^\circ\quad,\quad\vec{I}_۳=۲۵\angle+۳۰^\circ$$

$$\vec{I}=\vec{I}_۱+\vec{I}_۲+\vec{I}_۳=-j۲۵+۲۵\cos(-۳۰^\circ)+j۲۵\sin(-۳۰^\circ)+۲۵\cos(+۳۰^\circ)+j۲۵\sin(+۳۰^\circ)$$

$$=-j۲۵+۲۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-j۲۵\times\frac{۱}{۲}+۲۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+j۲۵\times\frac{۱}{۲}=-j۲۵+۲۵\sqrt{۳}=۲۵\sqrt{۳}-j۲۵$$

$$I\ \text{اندازه}=\sqrt{(۲۵)^۲+(۲۵\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲۵^۲+۲۵^۲\times۳}=\sqrt{۴\times۲۵^۲}=۲\times۲۵=۵۰A$$

$$I\ \text{زاویه فاز}=\text{Arctg}(\frac{-۲۵}{۲۵\sqrt{۳}})=\text{Arctg}(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})=-۳۰^\circ\ \Rightarrow\ I=۵۰\angle-۳۰^\circ\ \Rightarrow\ I(t)=۵۰\cos(\omega t-۳۰^\circ)$$

نکته ۴: جمع تعدادی تابع سینوسی با فرکانس‌های یکسان و هر تعدادی از مشتق‌های آنها در انتها یک تابع سینوسی با همان فرکانس اولیه خواهد شد. همچنین روابط زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$\mathbf{a\cos\omega t+b\sin\omega t=\sqrt{a^۲+b^۲}\cos(\omega t-\theta)=\sqrt{a^۲+b^۲}\angle-\theta}$$

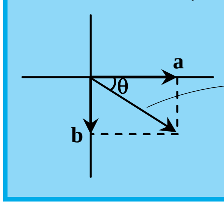
$$\mathbf{tg\theta=\frac{b}{a},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\quad,\quad\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

علت:

$$a\cos\omega t=a\measuredangle۰$$

جمع در مختصات قطبی:

$$b\sin\omega t=b\cos(\omega t-۹۰^\circ)=b\measuredangle-۹۰^\circ$$



بردار برآیند: $\begin{cases}\text{اندازه}=\sqrt{a^۲+b^۲}\\ \text{زاویه}=-\tan^{-۱}(\frac{b}{a})\end{cases}\xrightarrow{\text{در حوزه زمان}}\sqrt{a^۲+b^۲}\cos(\omega t-\theta)$ و $\theta=\tan^{-۱}(\frac{b}{a})$

چکیده مطالب محاسبات فازوری

۱) برای نوشتن فازوری به شکل $k=|k|\angle\varphi$ به فرم مختلط داریم: $k=|k|\angle\varphi=k(\cos\varphi+j\sin\varphi)$

و بر عکس برای نوشتن یک عدد مختلط به صورت $A=a+jb$ به صورت فازور $A=|A|\angle\varphi$ از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\text{A زاویه فاز}=\varphi=\text{Arctg}\frac{b}{a} \qquad \text{و} \qquad \text{A اندازه}=|A|=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

۲) رابطه ضرب دو فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ و $k_۲\angle\varphi_۲$ به صورت مقابل است: $(k_۱\angle\varphi_۱)\times(k_۲\angle\varphi_۲)=k_۱.k_۲\angle(\varphi_۱+\varphi_۲)$

۳) رابطه تقسیم فازور $k_۱\angle\varphi_۱$ بر فازور $k_۲\angle\varphi_۲$، به شکل مقابل است: $\dfrac{k_۱\angle\varphi_۱}{k_۲\angle\varphi_۲}=\dfrac{k_۱}{k_۲}\angle(\varphi_۱-\varphi_۲)$

۴) در محاسبات زاویه فاز، هر زاویه‌ای مثل α را می‌توانیم به صورت $\alpha=\pm ۳۶۰^\circ+\beta$ بنویسیم و در نهایت مقدار β را به جای α در محاسبات قرار دهیم. (با توجه به این که چرخش $۲k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ در دستگاه مثلثاتی تغییری ایجاد نمی‌کند، در محاسبات تأثیری نمی‌گذارد.)

$$\underbrace{-۲۴۰^\circ}=\underbrace{-۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ}=۱۲۰^\circ \qquad , \qquad \underbrace{+۲۴۰^\circ}=\underbrace{۳۶۰^\circ-۱۲۰^\circ}=-۱۲۰^\circ$$

دقت شود که عموماً زاویه را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ بیان می‌کنند.

۵) برای نوشتن معادلات جریان و ولتاژ که به فرم مختلط دکارتی هستند، در حوزه زمان، ابتدا فرم قطبی (فازوری) آنها را نوشته و سپس به راحتی معادله زمانی آنها را می‌نویسیم. برای مثال برای یک ولتاژ مختلط که مرجع آن به **فرم سینوسی** در نظر گرفته شده داریم:

$$V=a+jb\xrightarrow{\text{فازور}}V_m\angle\varphi_V\xrightarrow{\text{معادله زمانی}}V(t)=V_m\sin(\omega t+\varphi_V)$$

یادآوری چند رابطه مفید:

$$\cos(۳۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۸۶۶ \qquad \sin(۳۰^\circ)=\cos(۶۰^\circ)=۰/۵$$

$$\cos(۳۷^\circ)=\sin(۵۳^\circ)=۰/۸ \qquad \sin(۳۷^\circ)=\cos(۵۳^\circ)=۰/۶$$

$$\sin(\omega t+\varphi)=\cos(\omega t+\varphi-۹۰^\circ) \qquad \cos(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+۹۰^\circ)$$

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b \qquad \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

$$\cos a-\cos b=۲\sin(\frac{a+b}{۲})\sin(\frac{b-a}{۲}) \qquad \cos a+\cos b=۲\cos(\frac{a+b}{۲})\cos(\frac{a-b}{۲})$$

$$\sin a\pm\sin b=۲\sin(\frac{a\pm b}{۲})\cos(\frac{a\mp b}{۲})$$

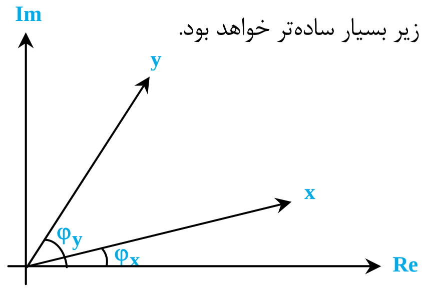
چند نکته برای بالا بردن سرعت در محاسبات:

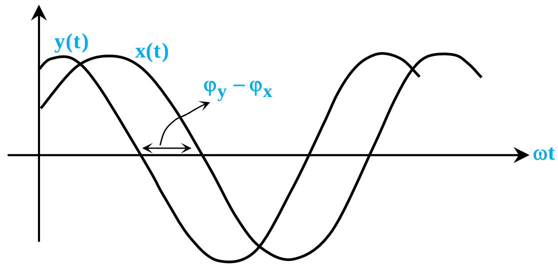
$۱)A=A\angle ۰^\circ$ $\qquad$ $۲)-A=A\angle ۱۸۰^\circ$ $\qquad$ $۳)jA=A\angle ۹۰^\circ$

$۴)-jA=A\angle -۹۰^\circ$ $\qquad$ $۵)A+jA=A\sqrt{۲}\angle ۴۵^\circ$ $\qquad$ $۶)A-jA=A\sqrt{۲}\angle -۴۵^\circ$

مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز

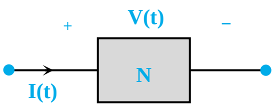
دو سیگنال سینوسی هم‌فرکانس $x(t)=\cos(\omega t+\varphi_x)$ و $y(t)=\cos(\omega t+\varphi_y)$ را با فرض $|\varphi_y-\varphi_x|<\pi$ در نظر بگیرید. اگر $\varphi_y>\varphi_x$ باشد، اصطلاحاً می‌گوییم سیگنال $y(t)$ نسبت به سیگنال $x(t)$ به اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پیش‌فاز است، و یا در بیان دیگر سیگنال $x(t)$ نسبت به سیگنال $y(t)$ به اندازه $\varphi_y-\varphi_x$ رادیان، پس‌فاز است. درک مفاهیم پیش‌فاز و پس‌فاز از طریق نمودارهای فازوری زیر بسیار ساده‌تر خواهد بود.





تعریف امپدانس و ادمیتانس و راکتانس

در صورتی‌که یک شبکه تک‌قطبی با اجزای خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر باشد، آنگاه امپدانس و ادمیتانس شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود.

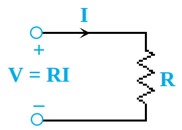


$$\begin{cases}V(t)=V_m\angle\theta_V\\ I(t)=I_m\angle\theta_I\end{cases}\Rightarrow\ Z=\frac{V(t)}{I(t)}=\frac{V_m\angle\theta_V}{I_m\angle\theta_I}=\frac{V_m}{I_m}\angle\theta_V-\theta_I$$

$$Y=\frac{I(t)}{V(t)}=\frac{I_m\angle\theta_I}{V_m\angle\theta_V}=\frac{I_m}{V_m}\angle\theta_I-\theta_V\quad,\quad Y=\frac{۱}{Z}\quad,\quad \cos\theta=\cos(\theta_V-\theta_I)$$

در روابط بالا Z امپدانس و Y ادمیتانس سیستم می‌باشد و $\frac{V_m}{I_m}$ اندازه امپدانس و $\theta=\theta_V-\theta_I$ را زاویه امپدانس می‌نامند و $\cos\theta$ ضریب توان یا ضریب قدرت سیستم است. همچنین لازم به ذکر است که برای اندازه امپدانس ظاهری سلف و خازن یا همان X_L و X_C عبارت راکتانس نیز به کار می‌رود. در واقع راکتانس اندازه قسمت موهومی امپدانس است.

« مقاومت در حالت دائمی سینوسی»

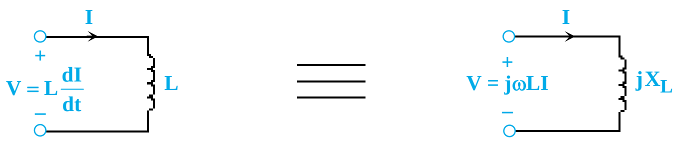


رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حالت فازوری مانند رابطه ولتاژ ـ جریان مقاومت در حوزه زمان است.

لازم به ذکر است که ولتاژ و جریان یک مقاومت همیشه هم‌فاز هستند.

« سلف در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ ـ جریان در سلف، $(V_L=jX_LI_L)$ ملاحظه می‌گردد که ولتاژ به اندازه ۹۰° نسبت به جریان پیش‌فاز است.



$$,\quad X_L=L.\omega$$

اثبات: $I(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ و $V(t)=L\frac{dI}{dt}=-L\omega A\sin(\omega t+\varphi)=L\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{۲})$

$$\Rightarrow I=A\angle\varphi\ \text{و}\ V=L\omega A\angle(\varphi+\frac{\pi}{۲})=j\omega LA\angle\varphi=j\omega LI$$

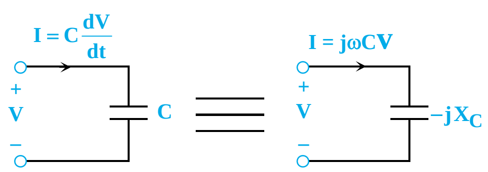
اگر رابطه فازوری جریان به صورت $\mathbf{I}=I_m\angle\varphi$ بیان گردد، چون $j=۱\angle ۹۰^\circ$ است، آنگاه رابطه ولتاژ آن به صورت زیر است:

$$V=jX_LI_m\angle\varphi=۱\angle ۹۰^\circ\times\omega LI_m\angle\varphi=\omega LI_m\angle(\varphi+۹۰^\circ)$$

« خازن در حالت دائمی سینوسی»

با توجه به رابطه ولتاژ ـ جریان در خازن $(V_C=-jX_CI_C)$، ملاحظه می‌گردد که جریان خازن به اندازه ۹۰° نسبت به ولتاژ دو سر خازن پیش‌فاز است.

یعنی اگر فازور ولتاژ خازن به صورت $\mathbf{V}=V_m\angle\varphi$ بیان گردد، آنگاه داریم:



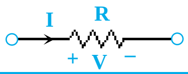
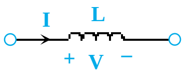
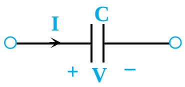
$$I=\frac{V_m\angle\varphi}{-jX_C}=\frac{V_m\angle\varphi}{X_C\angle-۹۰}=\frac{V_m\angle\varphi}{\frac{۱}{C\omega}\angle-۹۰}=V_mC\omega\angle\varphi+۹۰$$

اثبات:

$$V(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \;\; \text{و} \;\; I(t) = C\frac{dV}{dt} = -C\omega A\sin(\omega t + \varphi) = C\omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow V = A\angle\varphi \;\; \text{و} \;\; I = C\omega A\angle(\varphi + \frac{\pi}{۲}) = j\omega CA\angle\varphi = j\omega CV \Rightarrow V = \frac{۱}{j\omega C}I$$

در جدول زیر رابطه بین ولتاژ و جریان سه عنصر در حوزه‌های زمان و فرکانس به طور خلاصه بیان گردیده است:

امپدانس	در حالت فازوری	در حوزه زمان	عنصر
R	$V = RI$	$V = RI$	
$j\omega L$	$V = jX_L.I$	$V = L\frac{dI}{dt}$	
$\frac{۱}{j\omega C}$	$V = -jX_C.I$	$I = C\frac{dV}{dt}$	

نکته ۵: ادمیتانس عناصر C و L و R که عکس امپدانس‌های آنها می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌گردد:

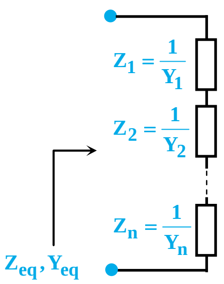
$$Y_R = \frac{۱}{R} \quad , \quad Y_L = \frac{۱}{j\omega L} \quad , \quad Y_C = j\omega C$$

نکته ۶: با توجه به اینکه $\omega = ۲\pi f$ می‌باشد، لذا در فرکانس‌های خیلی زیاد $Z_L = \infty$ و $Z_C = ۰$ می‌باشد، یعنی سلف در فرکانس‌های خیلی زیاد (مثلاً تحریک ضربه‌ای) مدار باز و خازن در فرکانس‌های خیلی زیاد اتصال کوتاه می‌باشد و در فرکانس‌های خیلی پایین (مثلاً تحریک DC)، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

نکته ۷: در مدارهای ترکیبی امپدانس مدار معمولاً خود یک عدد مختلط می‌شود و لذا امپدانس را در اینگونه مدارها به صورت $Z = |Z|\angle\varphi$ و یا $Z = R + jX$ نمایش می‌دهیم که $|Z| = \sqrt{R^۲ + X^۲}$ و $\varphi = tg^{-۱}\frac{X}{R}$ می‌باشد. توجه شود R مقاومت اهمی مدار و X راکتانس مدار می‌باشد (که ممکن است خاصیت القائی و یا خاصیت خازنی داشته باشد). بحث مشابهی نیز در مورد ادمیتانس مدار قابل طرح است، یعنی ادمیتانس مدار در حالت کلی به شکل $Y = G + jB$ یا $Y = |Y|\angle\theta$ نمایش داده می‌شود که البته داریم: $|Y| = \frac{۱}{|Z|} \;,\; \theta = -\varphi$

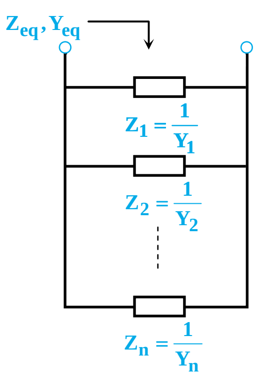
لازم به ذکر است در شکل نمایش دکارتی Y، G یا بخش حقیقی Y، **کندوکتانس** و B در بخش موهومی Y، **سوسپتانس** نامیده می‌شود. واحد اندازه‌گیری ادمیتانس، کندوکتانس و سوسپتانس، مهو (℧) می‌باشد.

نکته ۸: توجه شود وقتی تمامی عناصر در یک مدار برحسب امپدانس‌های خود بیان شده باشند، آنگاه برای محاسبه امپدانس کل می‌توانیم اینگونه فرض کنیم که هر یک از امپدانس‌ها مانند یک مقاومت هستند و با استفاده از روابط سری و موازی بودن مقاومت‌های اهمی، مقدار امپدانس کل را با در نظر گرفتن روابط فازوری بدست آوریم. (در واقع با استفاده از مفهوم فازور، مدار را از حالت پیچیده‌ی سلفی و خازنی به حالت ساده‌ی مقاومتی (شبیه به مقاومتی) تبدیل می‌کنیم.) برای محاسبه ادمیتانس کل نیز می‌توانیم عیناً از روش‌هایی استفاده کنیم که برای محاسبه رسانایی معادل در مدارهای مقاومتی استفاده می‌کردیم.



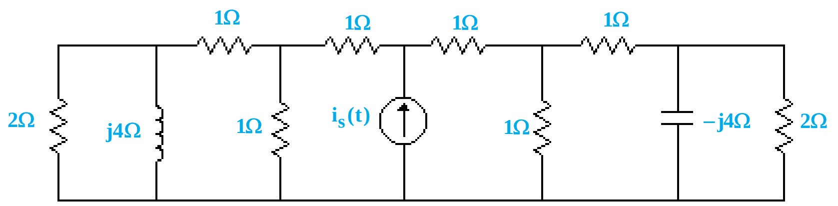
$$Z_{eq} = Z_۱ + Z_۲ + \cdots + Z_n$$

$$Y_{eq} = \frac{۱}{\frac{۱}{Y_۱} + \frac{۱}{Y_۲} + \cdots + \frac{۱}{Y_n}}$$



$$Z_{eq} = \frac{۱}{\frac{۱}{Z_۱} + \frac{۱}{Z_۲} + \cdots + \frac{۱}{Z_n}}$$

$$Y_{eq} = Y_۱ + Y_۲ + \cdots + Y_n$$



محاسبه مقدار RMS

اگر موجی، ترکیبی از چند موج مختلف با فرکانس‌های متفاوت (و یا اشکال مختلف) باشد، آنگاه مقدار مؤثر کل آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{y_{rms}=\sqrt{(y_{rms_۱})^۲+(y_{rms_۲})^۲+(y_{rms_۳})^۲+\cdots}}$$

برای معادله موجی به شکل زیر:

$$f(t)=a_۰+a_۱\cos\omega_۱t+a_۲\cos۲\omega_۱t+\cdots+a_n\cos(n\omega_۱t)+b_۱\sin\omega_۲t+b_۲\sin۲\omega_۲t+\cdots+b_n\sin n\omega_۲t$$

مقدار مؤثر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{f_{rms}=\sqrt{a_۰^۲+(\frac{a_۱}{\sqrt۲})^۲+(\frac{a_۲}{\sqrt۲})^۲+\cdots+(\frac{a_n}{\sqrt۲})^۲+(\frac{b_۱}{\sqrt۲})^۲+(\frac{b_۲}{\sqrt۲})^۲+\cdots+(\frac{b_n}{\sqrt۲})^۲}}$$

توجه شود که $a_۰$ عدد ثابت می‌باشد.

هرگاه دو موج کسینوسی (یا سینوسی) هم‌فرکانس داشته باشیم، ابتدا باید آنها را به صورت یک موج بنویسیم و آنگاه از رابطه فوق استفاده کنیم، که برای این کار ابتدا موجها را به صورت فازوری می‌نویسیم؛ سپس با تبدیل به فرم دکارتی، آنها را با هم جمع کرده و در نهایت با تبدیل مجدد به فرم قطبی و نوشتن معادله در حوزه زمان مقدار مؤثر را حساب می‌کنیم.

نکته۱۴: طبق مطالب بیان شده در این بخش می‌توان نتیجه گرفت که برای محاسبه توان مصرفی یک عنصر مدار اگر فرکانس تمام منابع ورودی مدار متفاوت باشد، می‌توان از قضیه جمع آثار به شکل مقابل استفاده کرد: $P_T=P_۱+P_۲+P_۳+\cdots+P_n$

در این رابطه P_i توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تنها منبع iام فعال باشد و P_T توان مصرفی عنصر موردنظر است زمانی که تمامی n منبع موجود در مدار فعال باشند. لازم به ذکر است که در یک حالت خاص می‌توان در مدارهای با منابع ورودی هم‌فرکانس از قضیه جمع آثار برای محاسبه توان استفاده کرد. اگر مدار تنها دارای دو منبع ورودی هم‌فرکانس باشد و جریان‌های ناشی شده از این دو منبع در عنصر موردنظر، دارای اختلاف فاز ۹۰ درجه باشند، در این صورت خواهیم داشت: $P_T=P_۱+P_۲$

این نکته را می‌توان با بکارگیری رابطه $|a\angle\theta^\circ+b\angle(\theta+۹۰)^\circ|=\sqrt{a^۲+b^۲}$ اثبات نمود.

مثال۵۸: در یک مقاومت، معادله جریان عبوری به صورت زیر است. توان مصرفی توسط مقاومت کدام است؟

$$\mathbf{I(t)=۱۰+۶\sin۲t+۸\cos(۳t+\theta)\quad,\quad R=۱۰\Omega}$$

۱) $۱/۵kW$ ۲) $۱/۲۵kW$ ۳) $۲kW$ ۴) $۱/۶\ kW$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مقدار مؤثر سیگنال جریان را محاسبه می‌کنیم و سپس برای محاسبه توان از آن استفاده می‌کنیم.

$$I(rms)=\sqrt{۱۰^۲+(\frac{۶}{\sqrt۲})^۲+(\frac{۸}{\sqrt۲})^۲}=\sqrt{۱۵۰}A\quad\Rightarrow\quad P_R=[I(rms)]^۲\times R=۱۵۰\times۱۰=۱/۵kW$$

مثال۵۹: دو سر یک مقاومت $(R=۱/۵\Omega)$، ولتاژی به معادله $V(t)$ موجود می‌باشد. توان مصرفی مقاومت مذکور کدام است؟

$$\mathbf{(V(t)=۲\cos۲t-\cos(۲t+۶۰^\circ))}$$

۱) $۱w$ ۲) $۲/۵w$ ۳) $۱/۵w$ ۴) $۳\ w$

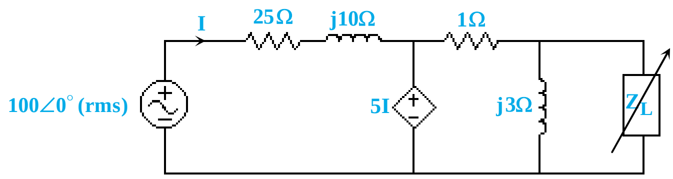
پاسخ: گزینه «۱» به دلیل اینکه دو موج کسینوسی دارای فرکانس $۲(\frac{rad}{sec})$ داریم، لذا باید ابتدا آنها را ترکیب کنیم؛ بدین منظور از فازورها استفاده می‌کنیم:

$$V(t)=۲\cos۲t-\cos(۲t+۶۰^\circ)\quad\Rightarrow\quad V=۲\angle۰^\circ-۱\angle۶۰^\circ\quad\Rightarrow\quad V=۲-(\cos۶۰^\circ+j\sin۶۰^\circ)=۲-۰/۵-\frac{\sqrt۳}{۲}j$$

$$V=۱/۵-j\frac{\sqrt۳}{۲}=\sqrt{۱/۵^۲+(-\frac{\sqrt۳}{۲})^۲}\angle\theta=\sqrt۳\angle\theta\Rightarrow V(t)=\sqrt۳\cos(۲t+\theta)$$

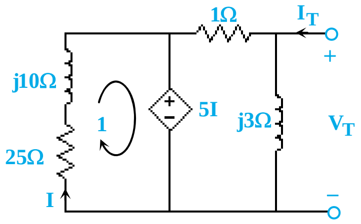
$$V_{rms}=\frac{\sqrt۳}{\sqrt۲}v\Rightarrow P_R=\frac{(V_{rms})^۲}{R}=\frac{۱/۵}{۱/۵}=۱w$$

مثال ۷۲: در مدار شکل زیر Z_L را طوری تنظیم می‌کنیم که حداکثر توان متوسط به آن برسد. در این صورت حدوداً چند درصد از توان تولیدی مدار به Z_L می‌رسد؟



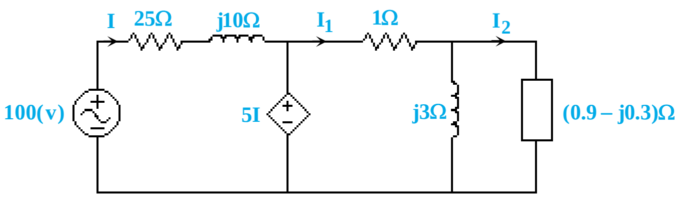
۱) ۳۳/۳
۲) ۱۶/۶
۳) ۲۵/۵
۴) ۱۳/۳

پاسخ: گزینه «۲» حل این تست را با پیدا کردن امپدانس معادل مدار از دید Z_L شروع می‌کنیم تا بتوانیم مقدار بهینه Z_L را پیدا کنیم. بدین منظور مدار معادل روبرو را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده در حلقه (۱) مشخص است که $I = ۰$ خواهد بود. پس امپدانسی که از دید Z_L دیده می‌شود برابر است با: $\frac{۱ \times j۳}{۱ + j۳} = ۰/۹ + j۰/۳$

بنابراین Z_L باید برابر $۰/۹ - j۰/۳$ باشد تا توان حداکثر به آن برسد. اکنون می‌خواهیم ببینیم با فرض $Z_L = ۰/۹ - j۰/۳$، چند درصد از توان متوسط مدار روی Z_L مصرف می‌شود. می‌دانیم که توان متوسط یا توان اکتیو تنها روی مقاومت‌های مدار مصرف می‌شود و مقدار این توان را می‌توان با داشتن مقدار مقاومت و جریان آن محاسبه کرد؛ پس به سراغ محاسبه جریان سه مقاومت موجود در مدار می‌رویم. بار دیگر شکل مدار را با تعریف جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ در نظر بگیرید:



می‌خواهیم جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را بر حسب جریان I بدست آوریم. امپدانسی که منبع $۵I$ در سمت راست خود می‌بینند برابر ۲ اهم است؛ پس داریم:

$$I_۱ = \frac{۵I}{۲} = ۲/۵I$$

و حالا با تکنیک تقسیم جریان می‌توان نوشت:

$$I_۲ = \frac{j۳}{j۳ + ۰/۹ - j۰/۳} \times ۲/۵I = (۲/۵ + j\frac{۵}{۶})I$$

اکنون می‌توان توان مصرفی روی سه مقاومت $R_۱$ (مقاومت ۲۵ اهمی)، $R_۲$ (مقاومت ۱ اهمی) و R_L را بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} W_۱ = ۲۵I^۲ \\ W_۲ = ۱ \times ۲/۵^۲ \times I^۲ = ۶/۲۵I^۲ \\ W_L = ۰/۹ \times \left| ۲/۵ + j\frac{۵}{۶} \right|^۲ \times I^۲ = ۶/۲۵I^۲ \end{cases}$$

در نهایت می‌توان نسبت توان مصرف شده در Z_L را به توان مصرفی کل مدار بدست آورد:

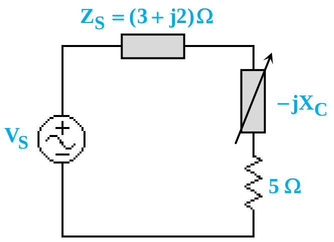
$$\frac{W_L}{W_t} = \frac{۶/۲۵I^۲}{۲۵ \times I^۲ + ۶/۲۵I^۲ + ۶/۲۵I^۲} = \frac{۱}{۶} = ۱۶/۶\%$$

دقت کنید که در عمل نیازی به محاسبه جریان $I_۲$ نیز نداشتیم، چرا که با تطبیق امپدانسی که انجام داده بودیم مشخص بود توانی که مقاومت $R_۲$ مصرف می‌کند برابر توانی است که مقاومت R_L مصرف می‌کند.

نکته ۱۶: برای اینکه حداکثر توان به بار منتقل شود، به طور کلی می‌توان گفت اگر در قسمت بار راکتانس **قابل تغییر** وجود داشته باشد، باید این راکتانس خنثی شود؛ به این شکل که اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود نداشته باشد، باید مقدار راکتانس بار برابر صفر باشد و اگر در امپدانس معادل مدار، راکتانس وجود داشته باشد، باید راکتانس بار از لحاظ عددی با راکتانس مدار برابر ولی از لحاظ علامت مخالف آن باشد.

نکته ۱۷: دقت کنید که تطبیق امپدانس در یک مدار به معنای حداکثر نمودن توان تولیدی منبع ورودی مدار نیست؛ در واقع برای این که توان تولیدی یک منبع ولتاژ در مدار بیشینه گردد، باید راکتانس دیده شده از دو سر منبع کمینه گردد (در صورت ممکن برابر صفر شود)؛ در این حالت مقدار بهینه برای مقاومت مدار از دید منبع برابر اندازه راکتانس دیده شده از دو سر منبع خواهد بود. برای منابع جریان نیز باید سوسپتانس (بخش موهومی ادمیتانس) دیده شده از دو سر منبع کمینه بوده و رسانایی یا کندوکتانس مدار (بخش حقیقی ادمیتانس) از دید منبع برابر اندازه سوسپتانس مدار باشد.

مثال ۷۳: به ازای چه مقدار از X_C برحسب اهم، منبع V_S حداکثر توان را به شبکه تحویل می‌دهد؟



۱) صفر

۲) ۱

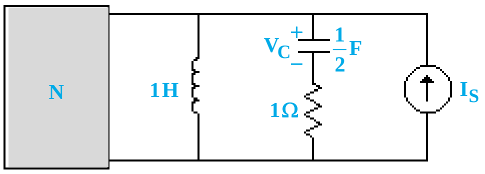
۳) ۲

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این تست عنوان شده منبع حداکثر توان را تحویل شبکه دهد و این در شرایطی اتفاق می‌افتد که اثری از قسمت‌های موهومی نباشد؛ لذا داریم:

$$j۲ - jX_C = ۰ \Rightarrow j(۲ - X_C) = ۰ \Rightarrow X_C = ۲\Omega$$

مثال ۷۴: در مدار شکل زیر N یک مدار LTI و فاقد منابع مستقل است. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس $\omega = ۱(\frac{rad}{sec})$، توان N ماکزیمم می‌شود. اگر مدار در $t = ۰$ بدون شرایط اولیه و $I_S = ۳\delta(t)$ باشد، $V_C(۰^+)$ برابر کدام گزینه است؟



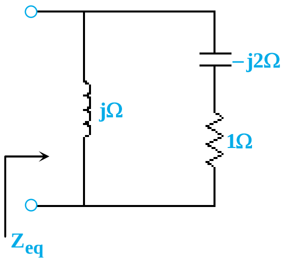
۱) $-۶v$

۲) $۶v$

۳) $-۲v$

۴) $۲v$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر در $\omega = ۱\frac{rad}{sec}$ توان شبکه N حداکثر شود، باید Z_n برابر Z_{eq}^* در مدار سمت راست باشد. حال مقدار Z_{eq} مدار سمت راست را محاسبه می‌کنیم.



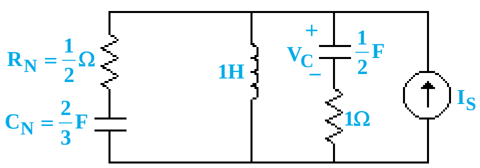
$$Z_{eq} = j \,||\, (۱ - j۲) \Rightarrow Z_{eq} = (\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}j)\Omega$$

$$\Rightarrow Z_n = Z_{eq}^* = (\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲}j)\Omega$$

با توجه به امپدانس Z_n، شبکه N، یک مدار RC سری است که مقادیر R_N و C_N در آن به صورت زیر است:

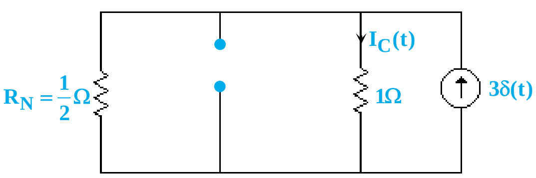
$$R_N = \frac{۱}{۲}\Omega \quad , \quad X_{C_N} = \frac{۳}{۲}\Omega \Rightarrow \frac{۱}{C_N\omega} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{C_N} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow C_N = \frac{۲}{۳}F$$

حال با جایگذاری شبکه N، مدار به صورت روبرو خواهد شد. برای محاسبه مقدار $V_C(۰^+)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. در این حالت با توجه به اعمال ضربه، سلف‌ها را مدار باز و خازن‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم.



$$V_C(۰^+) = V_C(۰^-) + \frac{۱}{C}\int_{۰^-}^{۰^+} I_C(t)dt$$

با نوشتن قانون تقسیم جریان داریم:



$$I_C(t) = ۳\delta(t) \times \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}} = \delta(t) \quad , \quad V_C(۰^-) = ۰$$

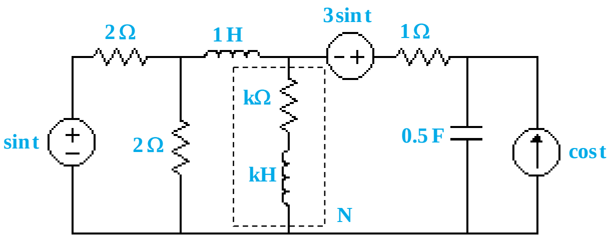
$$\Rightarrow V_C(۰^+) = ۰ + \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)dt \Rightarrow V_C(۰^+) = ۲v$$

نکته ۱۸: زمانی که بار $Z_L = Re^{j\theta}$ با زاویه فاز معین (یعنی مقدار θ_L مشخص باشد) به شبکه‌ای با امپدانس معادل Z_N متصل گردد، شرط آن که حداکثر توان توسط Z_L جذب گردد این است که اندازه Z_L برابر اندازه Z_N باشد:

$$|Z_L| = R = |Z_N|$$

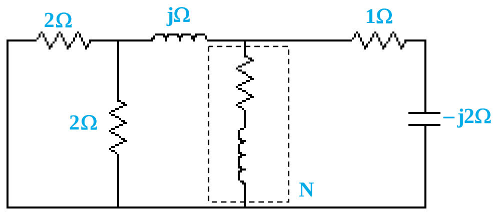
جهت درک بهتر این نکته می‌توانید آن را اثبات کنید.

مثال ۷۵: در مدار شکل زیر مقدار سلف و مقاومت سری شده با آن با هم یکسان و برابر k می‌باشند. هدف تعیین k به نحوی است که توان جذب شده توسط N حداکثر شود. k چقدر است؟



۱) $k=\frac{۷}{۵}$ ۲) $k=\sqrt{۲}$ ۳) $k=\sqrt{۵}$ ۴) $k=۱$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر N ($Z_{\bar{N}}$) را بدست می‌آوریم.



$$Z_N = k + jk$$

$$Z_{\bar{N}} = (۱+j) \parallel (۱-۲j) = \frac{(۱+j)\times(۱-۲j)}{۱+j+۱-۲j} = \frac{۳-j}{۲-j} = \frac{۷+j}{۵}$$

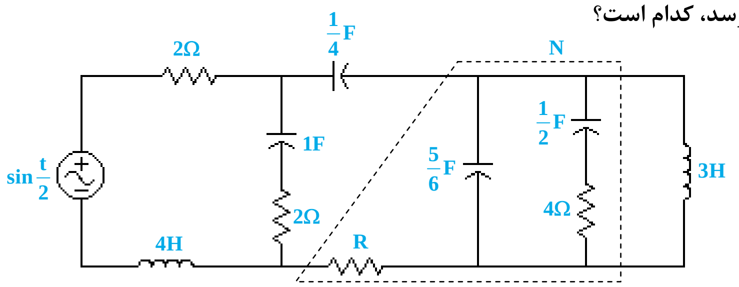
امپدانس دیده شده از دو سر N

در این مسأله امکان تطبیق امپدانس وجود ندارد زیرا بخش حقیقی و موهومی مقاومت بار به هم وابسته هستند. همچنین نمی‌توانیم با بهینه‌سازی مقدار مقاومت بار از طریق رابطه $R_L = |Z_{\bar{N}} + jX_L|$، مقدار توان جذب شده بار را حداکثر کنیم چرا که مقدار راکتانس بار نیز متغیر است.

در این مسأله ما با فاز ثابت امپدانس بار مواجه هستیم و شرط تحقق توان ماکزیمم در صورت ثابت بودن فاز امپدانس بار این است که $|Z_N| = |Z_{\bar{N}}|$.

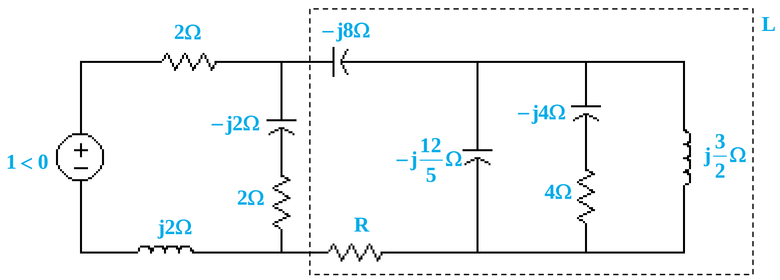
$$\left.\begin{array}{l}|Z_N| = k\sqrt{۲} \\ |Z_{\bar{N}}| = \sqrt{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow k = ۱$$

مثال ۷۶: در مدار زیر مقدار R برای این که حداکثر توان به بار N برسد، کدام است؟

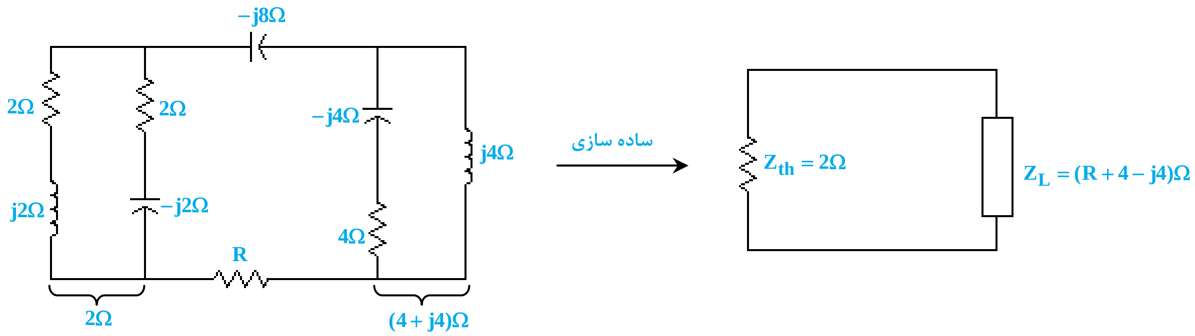


۱) صفر اهم
۲) ۰/۵ اهم
۳) ۴/۵ اهم
۴) ۷/۲ اهم

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا مدار را مطابق شکل زیر با فرض $\omega = ۰/۵$ به حالت فازوری می‌بریم:



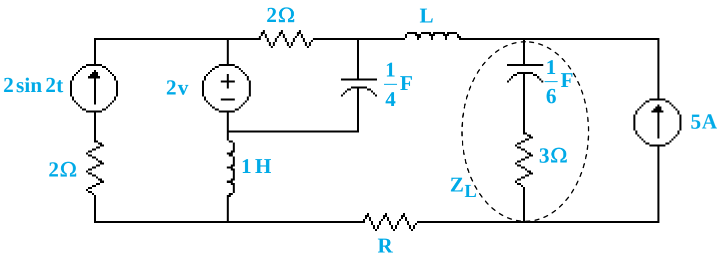
دقت کنید اگر توان بار N ماکزیمم گردد، توان بار L نیز بیشینه خواهد شد، زیرا بار L هیچ مقاومتی افزون بر مقاومت‌های بار N ندارد. پس می‌توان به جای حداکثر نمودن توان بار N، توان بار L را حداکثر نمود. حال مطابق با شکل زیر می‌توان Z_L و Z_{th} را با غیرفعال نمودن منبع تغذیه سینوسی محاسبه نمود: (دقت کنید که در این شکل خازن و سلف موازی در سمت راست مدار، با امپدانس معادلشان که برابر j۴ می‌باشد، جایگزین شده‌اند)



اکنون با توجه به این که تنها مقاومت بار قابل تنظیم است باید داشته باشیم $R_L = |Z_{th} + jX_L|$؛ یعنی:

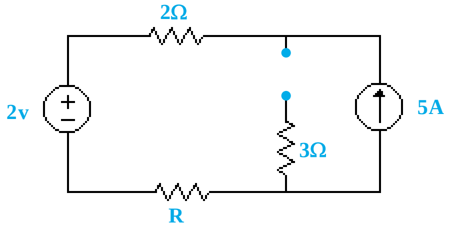
$$R+۴ = |۲-j۴| = \sqrt{۲۰} \cong ۴/۵ \Rightarrow R = ۰/۵\Omega$$

مثال ۷۷: در مدار زیر مقدار R و L به ترتیب چند اهم و چند هانری باشد تا در حالت دائمی حداکثر توان به Z_L برسد؟

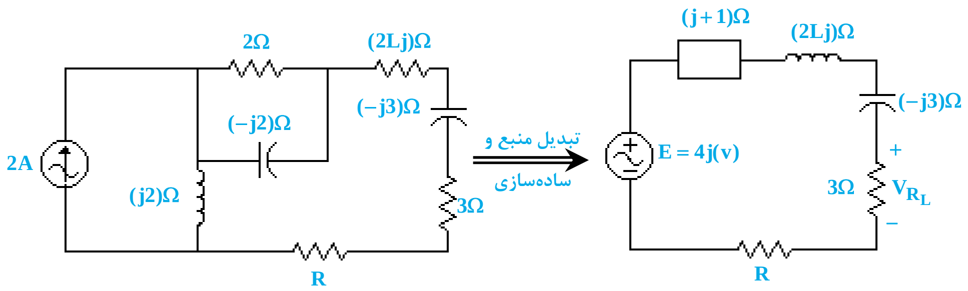


۱) صفر اهم و ۱ هانری
۲) صفر اهم و ۲ هانری
۳) ۲ اهم و ۱ هانری
۴) ۲ اهم و ۲ هانری

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا بیایید تنها منابع DC مدار را در نظر گرفته و ببینیم چه توانی در اثر این منابع به بار Z_L می‌رسد. بدین منظور منبع جریان سینوسی و خازن‌های مدار را مدار باز و سلف‌های موجود در مدار را اتصال کوتاه می‌کنیم:



با توجه به شکل بالا مشخص است که توان اکتیوی که در این حالت به بار می‌رسد فارغ از مقادیر R و L، برابر صفر است.
حال می‌خواهیم اثر منبع جریان سینوسی را در نظر بگیریم. بدین منظور مطابق شکل زیر منابع DC را غیرفعال کرده و مقدار المان‌ها را در حالت فازوری با در نظر گرفتن فرکانس $\omega = ۲$ لحاظ می‌کنیم:



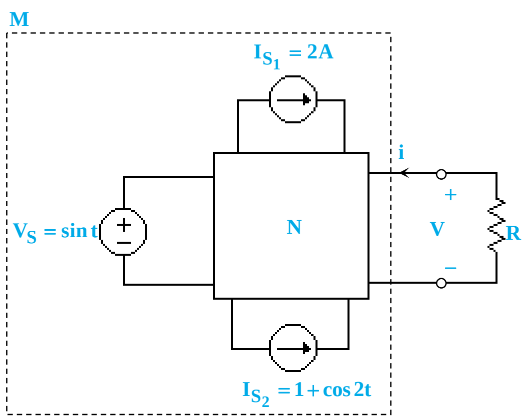
نکته مهمی که در اینجا باید مورد توجه قرار گیرد، این است که ما در این تست نمی‌توانیم از صورت معمول قضیه تطبیق امپدانس استفاده کرده و بگوییم $Z_n = Z_L^*$، چرا که در قضیه تطبیق امپدانس، این امپدانس بار است که تعیین می‌گردد و نه امپدانس شبکه، و در این تست امپدانس بار ثابت بوده و ما به دنبال یافتن امپدانس بهینه شبکه هستیم. بنابراین برای حل این تست بهتر است مستقیماً توان مصرفی بار Z_L را بیشینه کنیم. برای بیشینه ساختن این توان کافی است ولتاژ دو سر مقاومت بار بیشینه گردد (دقت کنید که مقدار مقاومت بار ثابت و مشخص است). حال با توجه به شکل قبلی داریم:

$$V_{R_L} = \frac{۳}{۳ - ۳j + (۲L+۱)j + ۱ + R} \times E = \frac{۳E}{۴ + R + (۲L-۲)j} \Rightarrow \left|V_{R_L}\right| = \frac{۳E}{\sqrt{(۴+R)^۲ + (۲L-۲)^۲}}$$

برای حداکثر نمودن مقدار $\left|V_{R_L}\right|$ باید مخرج کسر فوق مینیمم گردد:

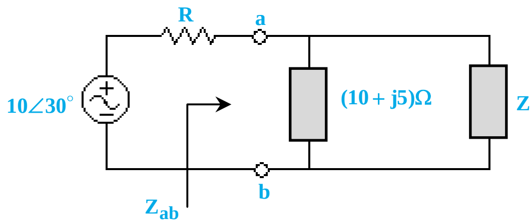
$$\begin{cases} ۲L - ۲ = ۰ \Rightarrow L = ۱H \\ R = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left|V_{R_L}\right| \to \max \Rightarrow P_{Z_L} \to \max$$

مثال ۷۸: در مدار زیر شبکه N متشکل از مقاومت‌های خطی بوده و رابطه ولتاژ ـ جریان برای شبکه M به صورت $۲V - ۶i + ۴\sin t - \cos ۲t - ۵ = ۰$ می‌باشد. اگر جای دو منبع جریان موجود در مدار عوض شده (با حفظ جهت جریان آنها) و اندازه منبع ولتاژ نصف شود، حداکثر توان جذبی ممکن توسط مقاومت R چند وات خواهد بود؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$ وات
۲) $\frac{۵}{۲۴}$ وات
۳) $\frac{۱}{۴}$ وات
۴) $\frac{۱}{۲}$ وات

مثال۸۹: در مدار شکل زیر، حداکثر توان از منبع به سمت راست سرهای a و b منتقل می‌شود. اگر Z فقط شامل یک عنصر مداری (خازن، سلف یا مقاومت) باشد و شبکه‌ی سمت راست دو سر a و b، به ازای فرکانس زاویه‌ای $\omega = ۲(\frac{rad}{s})$ به حالت تشدید برود، مقاومت R باید چند اهم باشد؟



۱) ۲۵

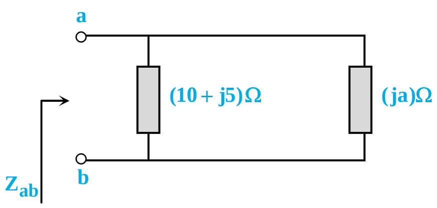
۲) ۲۱

۳) ۱۰/۵

۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه «۴» سؤال اصلاً سخت نیست! کلید حل سؤال این است که بدانیم عنصر Z قطعاً موهومی است. چرا؟ چون Z فقط شامل یک عنصر مداری است؛ پس یا به صورت $Z = ja$ است و یا به صورت $Z = a$ می‌باشد. (یعنی یا موهومی محض یا مقاومتی محض) اگر $Z = a$، آن‌گاه امکان ندارد شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود، (هنوز که حواستان به صورت سؤال هست؟ قرار است شبکه‌ی سمت راست به حالت تشدید برود!) پس $Z = ja$.

برای حل سؤال باید a را حساب کنیم. برای پیدا کردن a لازم است از این موضوع که شبکه‌ی سمت راست در حالت تشدید است، استفاده کنیم:



$$Z_{ab} = \frac{(۱۰+j۵)\times ja}{۱۰+j۵+ja} = \frac{j۱۰a-۵a}{۱۰+j(۵+a)} = \frac{(j۱۰a-۵a)[۱۰-j(۵+a)]}{۱۰^۲-j^۲(۵+a)^۲}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{j۱۰۰a-j^۲۱۰a(۵+a)-۵۰a+j۵a(۵+a)}{۱۰۰+(۵+a)^۲} \qquad (*)$$

باید قسمت موهومی Z_{ab} برابر با صفر باشد؛ لذا داریم:

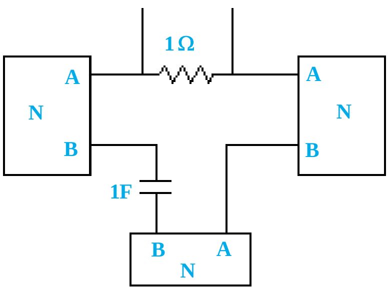
$$j(۱۰۰a+۲۵a+۵a^۲)=۰ \Rightarrow ۵a^۲+۱۲۵a=۰ \Rightarrow ۵a(a+۲۵)=۰ \Rightarrow a=۰\ (\text{غ‌ق‌ق}) \ ، \ a=-۲۵\Omega\ (\text{قابل قبول})$$

پس Z_{ab} برابر با مقدار زیر است: (دقت کنید Z_{ab} دیگر قسمت موهومی ندارد و باید در رابطه‌ی (*) فقط قسمت‌های حقیقی را حساب کنیم.)

$$Z_{ab} = \frac{۱۰(-۲۵)(۵-۲۵)-۵۰\times(-۲۵)}{۱۰۰+(۵-۲۵)^۲} = \frac{-۲۵۰(-۲۰)+۱۲۵۰}{۱۰۰+۴۰۰} = \frac{۶۲۵۰}{۵۰۰} = ۱۲/۵\Omega$$

پس برای این که حداکثر توان به سمت راست سرهای a و b منتقل شود، باید $\mathbf{R = ۱۲/۵\Omega}$ باشد.

مثال۹۰: شبکه N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است که آن را ω_r می‌نامیم. در مورد فرکانس یا فرکانس‌های تشدید مدار روبرو چه می‌توان گفت؟



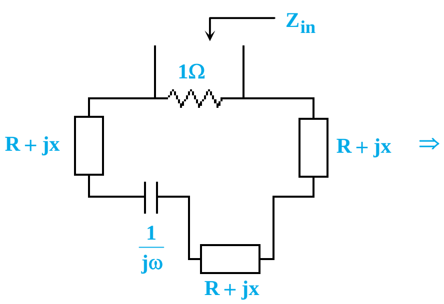
۱) دقیقاً یک فرکانس تشدید دارد.

۲) به علت وجود خازن تعداد فرکانس‌های تشدید آن از یک بیشتر است.

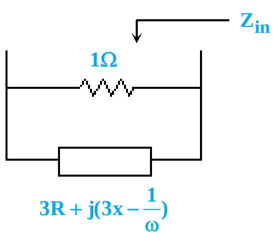
۳) می‌تواند صفر، یک و یا تعداد بیشتری فرکانس تشدید داشته باشد و با هر مقدار دلخواهی بدون توجه به ω_r.

۴) اگر فرکانس تشدیدی کوچکتر از ω_r داشته باشد، نمی‌تواند فرکانس تشدیدی بزرگتر از ω_r داشته باشد.

پاسخ: گزینه «۴» اگر امپدانس دیده شده از دو سر A و B را $Z = R + jx$ در نظر بگیریم، مدار به شکل زیر درمی‌آید:



$\Rightarrow$

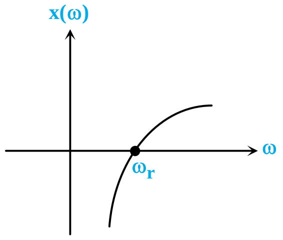


$$Y_{in} = ۱ + \frac{۱}{۳R + j(۳x - \frac{۱}{\omega})} = ۱ + \frac{۳R + j(\frac{۱}{\omega} - ۳x)}{۹R^۲ + (۳x - \frac{۱}{\omega})^۲}$$

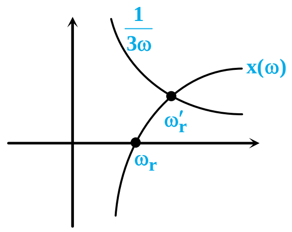
در حالت تشدید $\mathrm{Im}\{Y_{in}\}$ باید مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\frac{1}{\omega} = 3x(\omega) \Rightarrow x(\omega) = \frac{1}{3\omega}$$

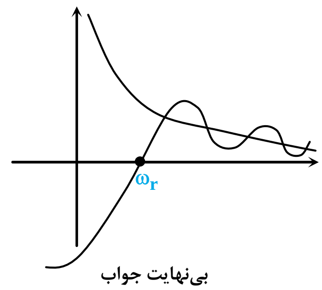
اکنون از اطلاعات داده شده در صورت سؤال استفاده می‌کنیم. از آنجا که N دارای یک و تنها یک فرکانس تشدید است، معادله $x(\omega) = 0$ تنها دارای یک جواب است؛ لذا $x(\omega)$ تنها یک بار محور ω را قطع خواهد کرد. فرض کنید نمودار $x(\omega)$ به صورت شکل روبرو باشد:



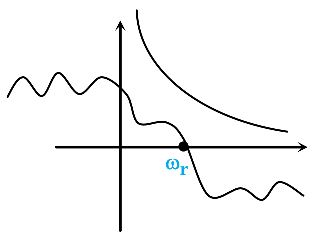
برای اینکه فرکانس تشدید شبکه کلی را بیابیم، باید این نمودار را با نمودار تابع $\frac{1}{3\omega}$ تقاطع دهیم.



اما بسته به اینکه $x(\omega)$ چه نموداری داشته باشد، جواب‌های متفاوتی حاصل خواهد شد:



بی‌نهایت جواب



بدون جواب

لذا به ازای هر $N \in \{0,1,2,...\}$، می‌توان $x(\omega)$ای را یافت که شبکه دارای N فرکانس تشدید باشد. اما در عین حال یک محدودیت روی تمام این فرکانس‌ها خواهد بود و آن اینکه یا همه از ω_r کوچکترند و یا همه از ω_r بزرگتر. در غیر این صورت با موجود بودن تنها یک فرکانس تشدید برای N منافات خواهد داشت.

ضریب کیفیت (Q)

در فصل قبل، تعریف خاصی از ضریب کیفیت که معمولاً در سؤالات کنکور مدنظر است، ارائه گردید و روند ریاضیاتی محاسبه آن نیز بیان شد. در اینجا تعریف دیگری از ضریب کیفیت ارائه می‌گردد که گاهی ممکن است در سؤالات کنکور مورد توجه قرار گیرد. در این تعریف که مشخصاً نمودی از وضعیت میرایی یک مدار الکتریکی نوسانی می‌باشد، بر انرژی ذخیره شده و انرژی تلف شده در دوره نوسانات مدار، در یک مدار در حال رزونانس تمرکز می‌شود:

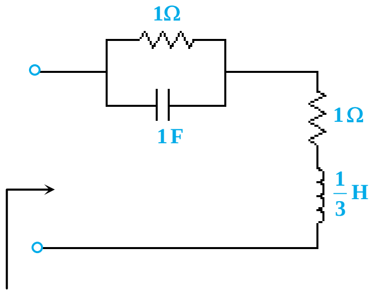
$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در هر سیکل در حال رزونانس}} = \omega_r \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{تلفات توان در حال رزونانس}}$$

ماکزیمم انرژی ذخیره شده در یک مدار مرتبه دوم شامل سلف و خازن مثلاً یک مدار RLC ساده با استفاده از رابطه $E_s = \frac{1}{2}LI_L^2 = \frac{1}{2}CV_C^2$ (پیک انرژی ذخیره شده در خازن یا سلف) و یا $E_s = \frac{1}{4}LI_L^2 + \frac{1}{4}CV_C^2$ (مجموع متوسط انرژی‌های ذخیره شده در سلف و خازن) قابل محاسبه می‌باشد که در این روابط V_C و I_L به ترتیب پیک ولتاژ خازن و پیک جریان سلف هستند. برای توجیه این روابط دقت کنید که در یک مدار RLC در حال رزونانس، پیک جریان سلف زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ خازن برابر صفر است و همینطور پیک ولتاژ خازن زمانی رخ می‌دهد که جریان سلف برابر صفر است و از طرفی پیک انرژی سلف برابر پیک انرژی خازن است. مشخص است که طبق تعریف صورت گرفته، انتظار می‌رود پاسخ ورودی صفر یک سیستم نوسانی با ضریب کیفیت بالاتر نسبت به سیستمی مشابه با ضریب کیفیت پایین‌تر، دوام بیشتری داشته باشد.

طبق این تعریف همچون تعریف اول در فصل قبل، نوسان‌سازهای ایده‌آل (مثلاً مدارهای LC)، دارای ضریب کیفیت بینهایت هستند. دقت کنید که در تعریف ارائه شده برای ضریب کیفیت، فرکانس تحریک مدار تأثیرگذار نیست و مهم فرکانس رزونانس مدار است.

مثال۹۱: ضریب کیفیت مدار روبرو کدام است اگر ضریب کیفیت (Q) به صورت زیر برای مدار در حال رزونانس تعریف شود؟

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}}$$



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) به فرکانس بستگی دارد.

☑ **پاسخ** گزینه «۲» این مدار یک مدار RLC ساده سری یا موازی نیست و استفاده از روابط ضریب کیفیت آن‌ها، در اینجا کاربرد ندارد. طبق صورت سؤال در اینجا ضریب کیفیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = ۲\pi \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{انرژی تلف شده در یک دوره}} = \omega_r \frac{\text{متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

$$Z_{in} = \frac{۱}{۱+j\omega} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} = \frac{۱-j\omega}{۱+\omega^۲} + ۱ + \frac{j\omega}{۳} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{۲} \quad \text{فرکانس تشدید}$$

در مورد متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار، باید دانست که در حالت دائمی، انرژی ذخیره شده در سلف $\frac{۱}{۴}LI_m^۲$ و در خازن $\frac{۱}{۴}CV_m^۲$ است و همچنین باید این نکته را به خاطر داشت که در فرکانس تشدید این دو با هم برابر هستند. به عبارتی متوسط انرژی‌های ذخیره شده در مدار با $۲\varepsilon_M$ یا $۲\varepsilon_E$ برابر است که ε_M و ε_E به ترتیب متوسط انرژی ذخیره شده در المان‌های سلفی و خازنی مدار هستند. لذا $Q = \omega_r \frac{۲\varepsilon_M}{P_{av}}$.

$$P_{av} = \text{توان متوسط اتلافی مقاومت‌ها} = \frac{۱}{۲}RI_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+\omega^۲}+۱\right)\bigg|_{\omega=\sqrt{۲}} I_m^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+۲}+۱\right)I_m^۲ = \frac{۲}{۳}I_m^۲$$

$$\varepsilon_M = \frac{۱}{۴}LI_m^۲ = \frac{۱}{۱۲}I_m^۲ \qquad \text{و} \qquad Q = \sqrt{۲} \times \frac{۲\times\frac{۱}{۱۲}I_m^۲}{\frac{۲}{۳}I_m^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از فازورها

در صورتی که یک مدار توسط یک تابع سینوسی تحریک شود، می‌توان معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از روش فازورها حل کرده و جواب خصوصی معادله را بدست آورد. برای توضیح مطلب فوق، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$b_n \frac{d^n(X)}{dt^n} + b_{n-۱}\frac{d^{n-۱}(X)}{dt^{n-۱}} + \dots + b_۱\frac{d(X)}{dt} + b_\circ X = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

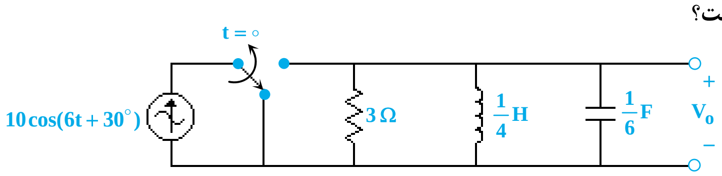
درصورتی که ضرایب b_n و θ اعداد حقیقی باشند، برای حل معادله فوق می‌توان به جای $\frac{d^n}{dt^n}$ عبارت $(j\omega)^n$ را به صورت زیر جایگزین کرد. (چنانچه با فوریه آشنا باشید این نکته را بهتر متوجه خواهید شد.) حال داریم:

$$b_n.(j\omega)^n.X + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱}.X + \cdots + b_۱(j\omega).X + b_\circ.X = V_m\angle\theta$$

$$X.[b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \dots + b_۱(j\omega) + b_\circ] = V_m\angle\theta \Rightarrow \boxed{X = \frac{V_m\angle\theta}{b_n(j\omega)^n + b_{n-۱}(j\omega)^{n-۱} + \cdots + b_۱(j\omega) + b_\circ}}$$

نکته۲۳: در صورت جایگزینی $j\omega$ در معادله دیفرانسیل و صفر شدن معادله به ازای $j\omega$، می‌توان چنین نتیجه گرفت که $j\omega$ فرکانس طبیعی سیستم بوده و پاسخ خصوصی مدار به صورت $X(t) = V_m t\sin(\omega t + \theta)$ یا به صورت $X(t) = V_m t\cos(\omega t + \alpha)$ خواهد بود.

مثال۹۲: در مدار زیر معادله V_o در حالت ماندگار سینوسی کدام است؟



۱) $۴۲/۴\cos(۶t - ۱۵^\circ)$ ۲) $۴۲/۴\cos(۶t + ۷۵^\circ)$

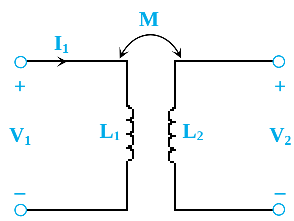
۳) $۲۱/۲\cos(۶t - ۱۵^\circ)$ ۴) $۲۱/۲\cos(۶t + ۷۵^\circ)$

فصل پنجم

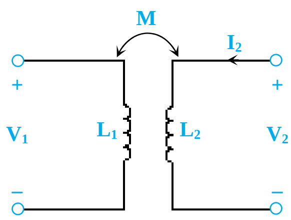
«القاکنایی متقابل»

تعریف ضریب خودالقایی و القاکنایی متقابل

جریانی که از یک سیم‌پیچ عبور می‌کند، میدانی مغناطیسی در اطراف سیم‌پیچ ایجاد می‌کند. حال اگر سیم‌پیچ دیگری در کنار این سیم‌پیچ باشد، شار مغناطیسی ایجاد شده از آن سیم‌پیچ هم می‌گذرد. شار مغناطیسی زمانی که از سیم‌پیچ دوم می‌گذرد، روی پایانه‌های سیم‌پیچ دوم، ولتاژی القا می‌کند که این ولتاژ با آهنگ تغییرات جریانی که از سیم‌پیچ اول می‌گذرد، متناسب است.



«الف»



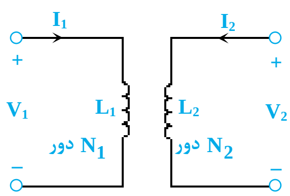
«ب»

مطابق شکل «الف» ملاحظه می‌گردد که جریان I_1 که از سیم‌پیچ L_1 عبور می‌کند، ولتاژ V_2 را روی L_2 ایجاد می‌کند و مطابق شکل «ب» جریان I_2 که از سیم‌پیچ L_2 می‌گذرد، ولتاژ V_1 را روی L_1 ایجاد می‌کند که این ولتاژها با القاکنایی متقابل بین دو سیم‌پیچ و جریان سیم‌پیچ مقابل ارتباط دارند.

القاکنایی متقابل آنها را با M نمایش می‌دهند و واحد القاکنایی متقابل هانری (H) می‌باشد.

M برای دو سیم‌پیچ L_1 و L_2 به صورت $M = \frac{N_2\phi_{12}}{I_1}$ یا $M = \frac{N_1\phi_{21}}{I_2}$ تعریف می‌شود. می‌دانیم ضریب خودالقایی L بر حسب جریان و شار عبوری و تعداد دورهای سیم‌پیچ به صورت $L = \frac{N\phi}{I}$ است. برای دو سلف، روابط زیر را داریم:

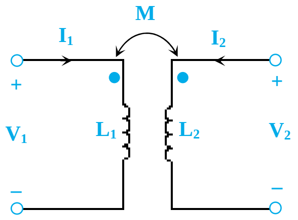
$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{N_1 \cdot \phi_1}{I_1} \\ L_2 = \dfrac{N_2 \cdot \phi_2}{I_2} \end{cases}$$



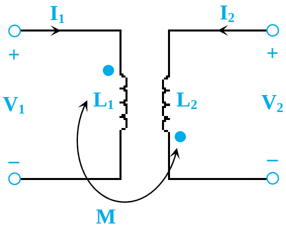
ϕ_1 در واقع شاری است که در اثر جریان I_1 ایجاد می‌شود و ولتاژی برابر $L_1\frac{dI_1}{dt}$ روی سلف L_1 القاء می‌کند و بخشی از این شار که سیم‌پیچ دوم را قطع می‌کند، ϕ_{12} نامیده می‌شود و ولتاژی برابر $M\frac{dI_1}{dt}$ روی سلف L_2 ایجاد می‌کند. به همین ترتیب در اثر جریان I_2، شار ϕ_2 ایجاد می‌شود که ولتاژ $L_2\frac{dI_2}{dt}$ را روی سلف L_2 ایجاد می‌کند و بخشی از این شار که سیم‌پیچ اول را قطع می‌کند، ϕ_{21} است که از سیم‌پیچ L_1 عبور می‌کند و باعث ایجاد ولتاژ $M\frac{dI_2}{dt}$ روی سلف L_1 می‌شود.

نوشتن معادله ولتاژ برای دو سلف تزویج شده

به طور کلی ولتاژ روی هر سلف تزویج شده شامل دو بخش است؛ قسمت اول ولتاژ، ناشی از خودالقاکنایی است. می‌دانیم که هر سلف با توجه به جریانی که از آن عبور می‌کند، ولتاژی به صورت $V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt}$ در دو سرش ایجاد می‌شود. قسمت دوم ولتاژ ناشی از القاکنایی متقابل می‌باشد و مقدار آن برابر $\pm M \frac{dI_2}{dt}$ می‌باشد که علامت پشت M به صورتی که گفته می‌شود، تعیین خواهد شد.



$$\begin{cases} V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

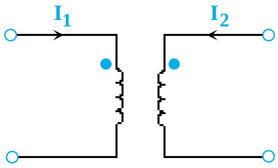


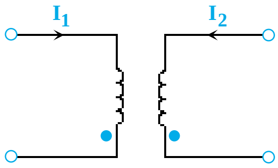
$$\begin{cases} V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

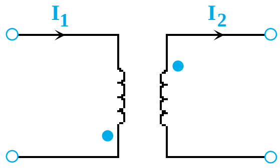
تعیین علامت پشت M

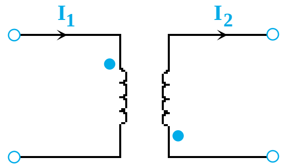
برای تعیین علامت پشت M به **جهت جریان‌ها** و **محل نقطه‌ها** در مدار خوب دقت کنید:

۱) اگر جریان در هر دو سیم‌پیچ، ابتدا به نقطه، بعد به سیم‌پیچ و یا در هر دو سیم‌پیچ، ابتدا به سیم‌پیچ، بعد به نقطه وارد شود، علامت پشت M مثبت است. به شکل‌های زیر برای درک بیشتر دقت کنید:

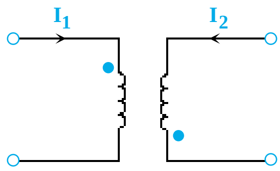


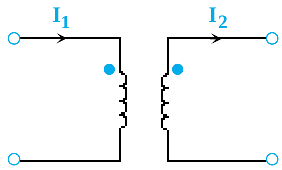


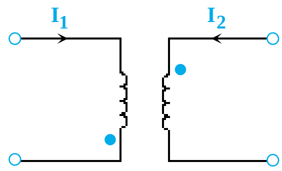


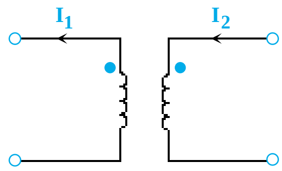


۲) اگر جریان یکی از سیم‌پیچ‌ها، ابتدا به نقطه، بعد به سلف ولی در سیم‌پیچ دیگر ابتدا به سلف، بعد به نقطه وارد شود، آنگاه علامت پشت M منفی در نظر گرفته می‌شود. به شکل‌های زیر برای درک بیشتر دقت کنید:



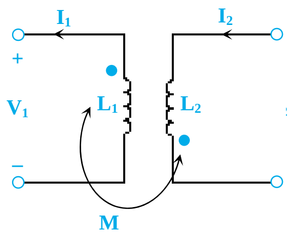






تذکر: همان‌طور که می‌بینید، جهت جریان‌ها و محل قرار گرفتن نقطه‌ها باید هر دو با هم مورد توجه قرار گیرند.

مثال ۱: معادله ولتاژ $V_1(t)$ برای سلف‌های تزویج شده زیر کدام است؟



۱) $V_1(t) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$

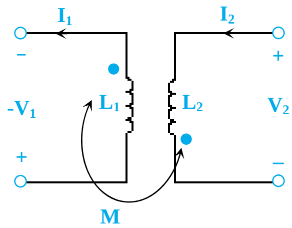
۲) $V_1(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$

۳) $V_1(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$

۴) $V_1(t) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: اولاً با توجه به جهت جریان‌ها علامت پشت M حتماً مثبت است. اما با توجه به جهت جریان و پلاریته ولتاژ در سمت چپ که جریان از سر مثبت خارج نشده باید پلاریته را تغییر داده و ولتاژ را در یک عدد منفی ضرب کنیم. حالا معادله ولتاژ را برای $-V_1$ می‌نویسیم:



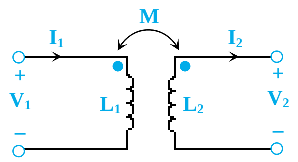
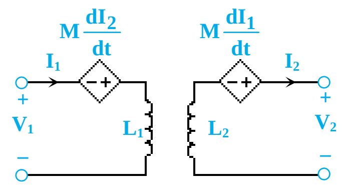
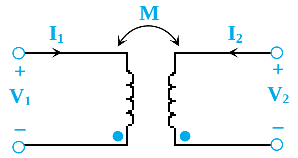
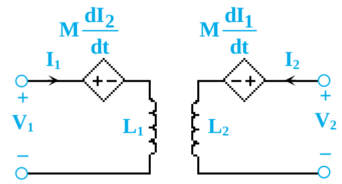
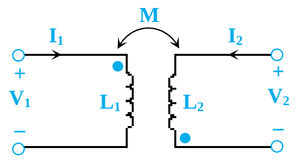
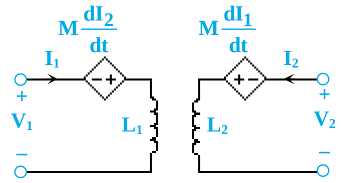
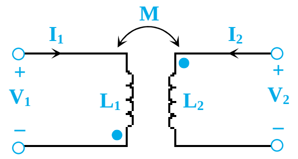
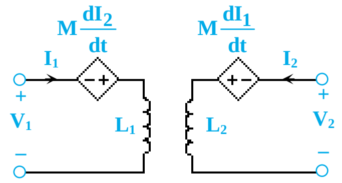
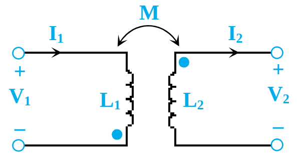
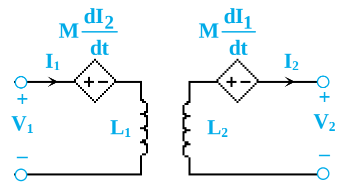
$$-V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow V_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

روش دوم: می‌توانیم فرض کنیم که جریان $-I_1$ از سر مثبت V_1 وارد می‌شود:

$$\Rightarrow V_1 = L_1 \frac{d}{dt}(-I_1) - M \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

لازم به ذکر است که همیشه M را مثبت فرض کرده و علامت پشت M را مطابق با روش ذکر شده در بالا تعیین می‌کنیم.

برای بهتر مشخص شدن موارد فوق چند مثال در جدول زیر آورده شده است. در این جدول دیده می‌شود که می‌توان به جای دو سلف با القای متقابل، از مدارهای معادل آنها که شامل دو سلف بدون القای متقابل و دو منبع وابسته است، استفاده نمود.

	$\Leftrightarrow$		$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$
	$\Leftrightarrow$		$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2\dfrac{dI_2}{dt} + M\dfrac{dI_1}{dt} \end{cases}$
	$\Leftrightarrow$		$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$
	$\Leftrightarrow$		$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = -M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$
	$\Leftrightarrow$		$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = M\dfrac{dI_2}{dt} + L_1\dfrac{dI_1}{dt} \\ V_2 = -M\dfrac{dI_1}{dt} - L_2\dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$

نوشتن روابط فازوری برای سلف‌های تزویج شده

اگر در روابط گفته شده در قبل، به جای $L\dfrac{dI}{dt}$، عبارت $j\omega LI$ و به جای $M\dfrac{dI}{dt}$، عبارت $j\omega MI$ را قرار دهیم، معادلات فازوری ولتاژ به شکل زیر بدست می‌آید: $(\dfrac{d}{dt} \to j\omega)$

$$\begin{cases} V_1(t) = L_1\dfrac{dI_1(t)}{dt} \pm M\dfrac{dI_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = L_2\dfrac{dI_2(t)}{dt} \pm M\dfrac{dI_1(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \end{cases}$$

نوشتن روابط سلف‌های تزویج شده در حوزه فرکانس

اگر در روابط گفته شده در بالا به جای $L\dfrac{dI}{dt}$ عبارت LSI و به جای عبارت $M\dfrac{dI}{dt}$، عبارت MSI را قرار دهیم، معادلات ولتاژ به صورت زیر خواهد بود: $(\dfrac{d}{dt} \to S)$

$$\begin{cases} V_1 = L_1\dfrac{dI_1}{dt} \pm M\dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = L_2\dfrac{dI_2}{dt} \pm M\dfrac{dI_1}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1 S I_1 \pm M S I_2 \\ V_2 = L_2 S I_2 \pm M S I_1 \end{cases}$$

لازم به ذکر است که کاربرد فرمول‌های بالا در فصل لاپلاس و فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش دوم: می‌توان ابتدا مقدار L_{eq} را در مدار محاسبه نموده و سپس مقدار انرژی ذخیره شده در L_{eq} را محاسبه کرد.

$$L_{eq}=L_۱+L_۲+L_۳+۲M=۴+۵+۶+۲\times۳=۲۱H$$

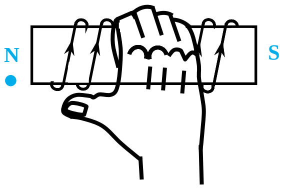
$$W=\frac{۱}{۲}L_{eq}.I_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times۲۱\times(۲\cos۵۰۰t)^۲=۴۲\cos^۲۵۰۰t \quad\Rightarrow\quad \mathbf{W_{(Max)}=۴۲J}$$

روش سوم: از همان اول می‌توانستیم بگوییم با توجه به سری بودن سلف‌ها زمانی انرژی آن‌ها ماکزیمم می‌شود که جریان عبوری از آن‌ها ماکزیمم باشد، یعنی در لحظه‌ی $t=۰$.

$$I_۱=۲A \quad\Rightarrow\quad W=\frac{۱}{۲}L_{eq}I^۲=\frac{۱}{۲}\times۲۱\times۲^۲=۴۲J$$

رسم مدار معادل نقطه‌دار

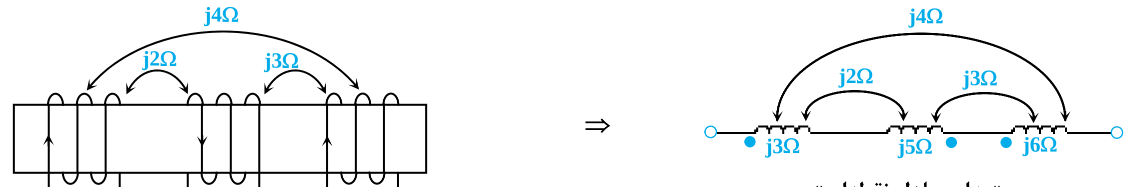
در بعضی مسائل جای نقطه روی شکل‌ها مشخص نیست و ما باید مکان این نقاط را تعیین کنیم. روش تعیین مکان نقاط با استفاده از تعیین قطب N در سیم‌پیچ مشخص می‌شود.



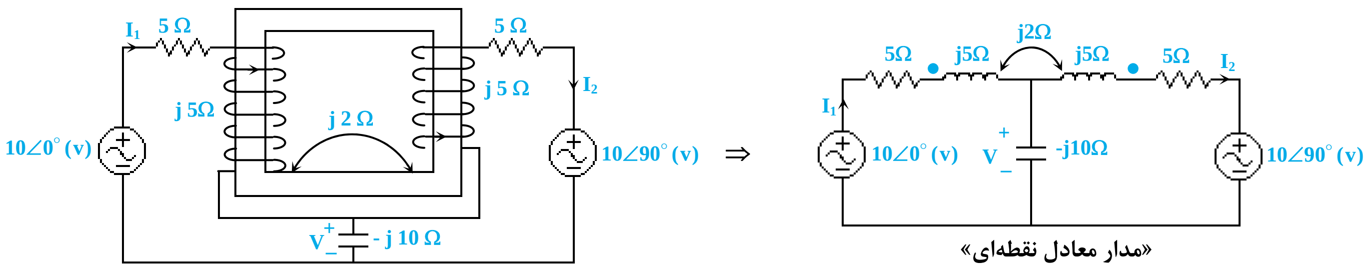
«تعیین قطب‌های N و S و سوی میدان در یک سیم‌لوله»

اگر مطابق شکل، چهار انگشت دست راست را در سوی جریان به دور تیغه (یا استوانه) قرار دهیم، انگشت شست جهت میدان را نشان خواهد داد و چون می‌دانیم میدان مغناطیسی از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود، لذا سوی میدان را می‌توان قطب N دانست و دقیقاً نقطه را باید در جایی که N قرار دارد، گذاشت.

مثال ۳۷: **مدار معادل نقطه‌ای شکل‌های زیر را به دست آورید.**

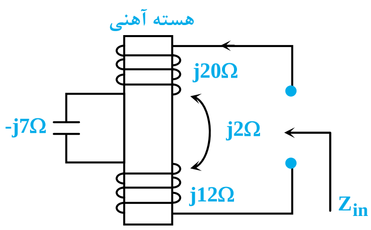


«مدار معادل نقطه‌ای»



«مدار معادل نقطه‌ای»

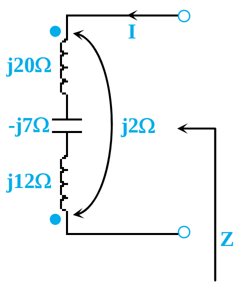
مثال ۳۸: **امپدانس ورودی شکل داده شده بر حسب اهم کدام است؟**



۱) j۲۹
۲) j۲۷
۳) j۲۳
۴) j۲۱

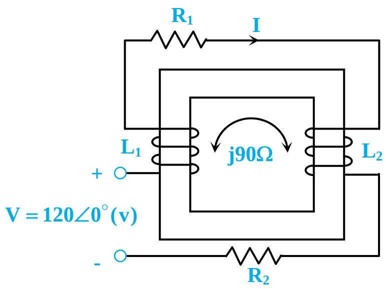
پاسخ: گزینه «۴»

ابتدا باید مدار معادل نقطه‌دار شکل را رسم کنیم. برای این منظور چهار انگشت دست راست را در جهت جریان روی هسته آهنی قرار می‌دهیم. جهت انگشت شست، همان جایی است که باید نقطه را قرار دهیم.



$$Z=jX_{L_۱}+jX_{L_۲}-۲jX_M-jX_C=j۲۰+j۱۲-۲(j۲)-j۷=\ \mathbf{j۲۱\Omega}$$

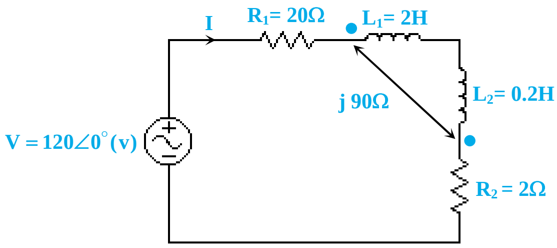
مثال ۳۹: جریان I در مدار شکل مقابل تقریباً چند آمپر است؟



$$\begin{cases} R_1 = 20\Omega \;,\; L_1 = 2H \\ R_2 = 2\Omega \;,\; L_2 = 0.2H \\ \omega = 400(\frac{rad}{sec}) \end{cases}$$

۱) ۰/۱۱
۲) ۰/۱۷
۳) ۱/۷
۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید مدار معادل نقطه‌دار شکل را رسم کنیم. برای این منظور، چهار انگشت دست راست را در جهت جریان روی هسته آهنی قرار می‌دهیم. جهت انگشت شست، همان جایی است که باید نقطه را قرار دهیم.

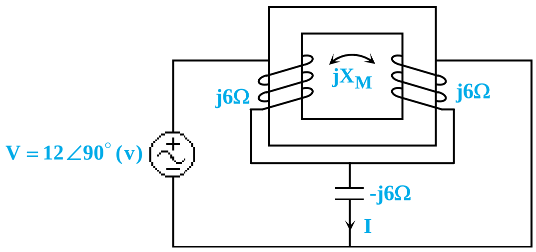


$$\begin{cases} Z_{L_۱} = j\omega L_۱ = j\times ۴۰۰\times ۲ = j۸۰۰\Omega \\ Z_{L_۲} = j\omega L_۲ = j\times ۴۰۰\times ۰/۲ = j۸۰\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = j۸۰۰ + j۸۰ - ۲\times j۹۰ + ۲۲ = ۲۲ + j۷۰۰$$

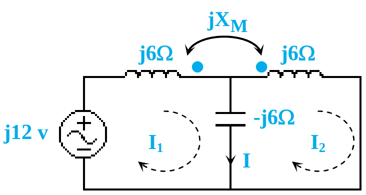
$$\Rightarrow \quad I = \frac{۱۲۰\angle ۰^\circ}{۲۲ + j۷۰۰} \quad \Rightarrow \quad |I| = \frac{۱۲۰}{\sqrt{(۷۰۰)^۲ + (۲۲)^۲}} \cong \frac{۱۲۰}{۷۰۰} = ۰/۱۷\mathbf{A}$$

مثال ۴۰: در مدار مقابل جریان $I = ۴A$ است. اندازه X_M چقدر است؟



۱) ۶
۲) ۹
۳) ۳
۴) جریان I نمی‌تواند برابر با ۴A در مدار باشد.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$ را با جهت دلخواه در شکل در نظر می‌گیریم. در ادامه با توجه به جهت سیم‌پیچی‌ها می‌توانیم مدار معادل نقطه‌گذاری شده را به صورت شکل مقابل ترسیم کنیم:



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$j۶I_۱ - jX_M I_۲ - j۶(I_۱ - I_۲) = j۱۲ \;\Rightarrow\; (-jX_M + j۶)I_۲ = j۱۲ \;\Rightarrow\; I_۲ = \frac{j۱۲}{-jX_M + j۶} \;\Rightarrow\; I_۲ = \frac{۱۲}{۶ - X_M} \qquad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-j۶(I_۲ - I_۱) + j۶(I_۲) - jX_M I_۱ = ۰ \;\Rightarrow\; (j۶ - jX_M)I_۱ = ۰ \;\Rightarrow\; I_۱ = ۰ \text{ یا } X_M = ۶$$

$X_M = ۶$ با توجه به رابطه (۱) درست نمی‌باشد (متعلق به دامنه نیست) پس $I_۱ = ۰$. از طرفی داریم:

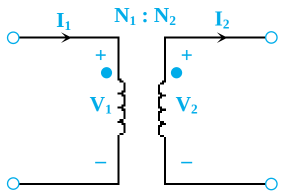
$$I = I_۱ - I_۲ \;\Rightarrow\; ۴ = ۰ - I_۲ \;\Rightarrow\; I_۲ = -۴(A) \;\Rightarrow\; \frac{۱۲}{۶ - X_M} = -۴ \;\Rightarrow\; ۱۲ = -۲۴ + ۴X_M \;\Rightarrow\; ۳۶ = ۴X_M \;\Rightarrow\; \mathbf{X_M = ۹\Omega}$$

در ادامه با توجه به این که $X_M = K\sqrt{X_{L_۱}X_{L_۲}}$ و $K \le ۱$ است، مقدار $X_M = ۹\Omega$ در رابطه صادق نمی‌باشد؛ بنابراین هیچ مقداری برای X_M بدست نمی‌آید و جریان I نمی‌تواند ۴A باشد.

ترانسفورماتور

ترانسفورماتور یا ترانسفورمر برای تغییر سطح ولتاژ و جریان در مدارهای جریان متناوب به کار می‌رود. ساختمان ترانسفورماتور متشکل از یک هسته آهنی و دو سیم‌پیچ با تعداد دورهای عمدتاً متفاوت که روی هسته آهنی پیچیده شده‌اند، می‌باشد. هسته آهنی از ورقه‌های نازکی که روی هم قرار گرفته‌اند، تشکیل شده است و دلیل ورقه ورقه بودن هسته، کاهش جریان گردابی در هسته ترانس می‌باشد.

اگر سیم‌پیچ اولیه N_1 دور و سیم‌پیچ ثانویه N_2 دور داشته باشد، بین ولتاژ و جریان‌های ثانویه و اولیه یک ترانس ایده‌آل (بدون تلفات) روابط زیر برقرار است:

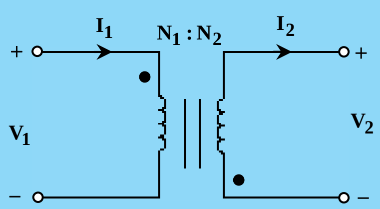


$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}=\frac{I_1}{I_2}$$

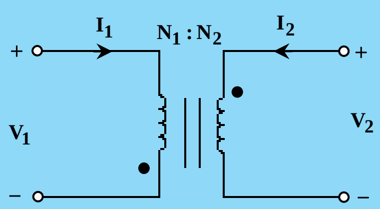
$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

ملاحظه می‌شود که با انتخاب تعداد دور مناسب سیم‌پیچ‌ها و تعیین عدد $\frac{N_2}{N_1}$ به اندازه دلخواه می‌توانیم به ازای ولتاژ معین اولیه، ولتاژ دلخواه در ثانویه را بدست آوریم. برطبق رابطه $V_2=(\frac{N_2}{N_1})V_1$ اگر $\frac{N_2}{N_1}<1$ باشد، آنگاه ولتاژ ثانویه ترانسفورماتور کمتر از ولتاژ اولیه آن خواهد بود و ترانسفورماتور را **کاهنده** و اگر $\frac{N_2}{N_1}>1$ باشد، آنگاه ولتاژ ثانویه بیشتر از ولتاژ اولیه خواهد بود و ترانسفورماتور را **افزاینده** می‌نامند.

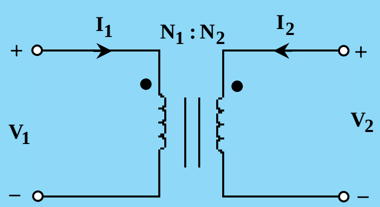
تذکر ۳: اگر جهت هر کدام از جریان‌ها عوض شود و یا جای یکی از نقطه‌ها به تنهایی عوض شود، روابط به صورت زیر بیان خواهد شد:



$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=-\frac{N_2}{N_1}\\ \frac{I_2}{I_1}=-\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$

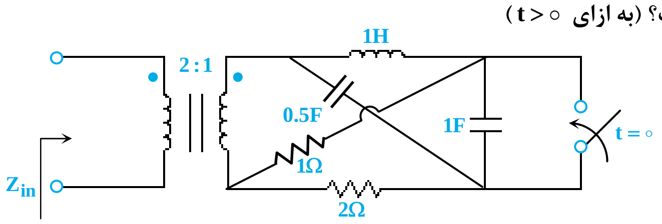


$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=-\frac{N_2}{N_1}\\ \frac{I_2}{I_1}=\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{V_2}{V_1}=\frac{N_2}{N_1}\\ \frac{I_2}{I_1}=-\frac{N_1}{N_2}\end{cases}$$

مثال ۵۰: امپدانس ورودی مدار شکل زیر در فرکانس $\omega = 1$، چند اهم است؟ (به ازای $t > 0$)



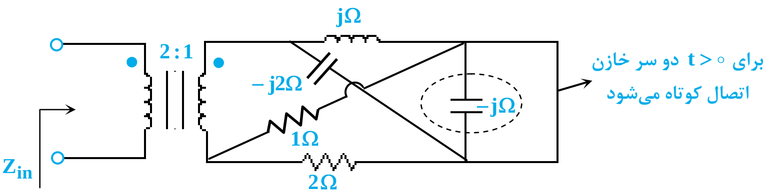
۱) $\frac{8}{3}+8j$

۲) $\frac{8}{3}-8j$

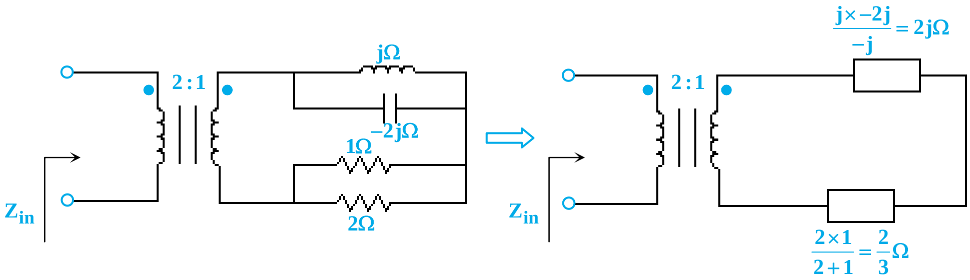
۳) $\frac{4}{3}+4j$

۴) $\frac{8}{3}-4j$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به این‌که $\omega = 1$ می‌باشد، مدار در حالت دائمی سینوسی به شکل زیر است:

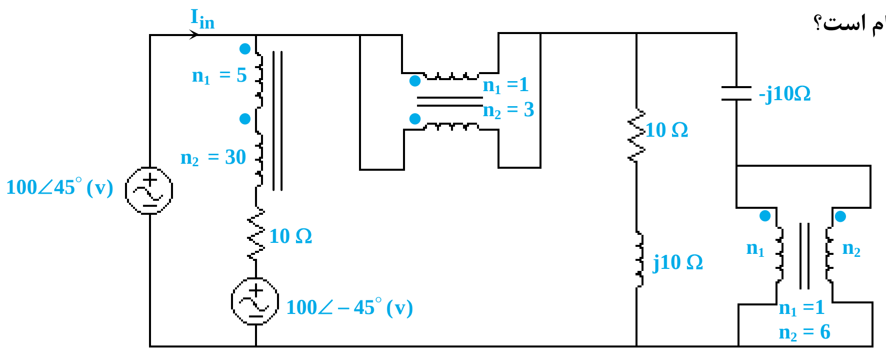


حال با ساده‌سازی مدار داریم:



$$\Rightarrow Z_{in} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \times \left(2j+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}+8j\Omega$$

مثال ۵۱: در مدار زیر مقدار جریان ورودی مدار کدام است؟



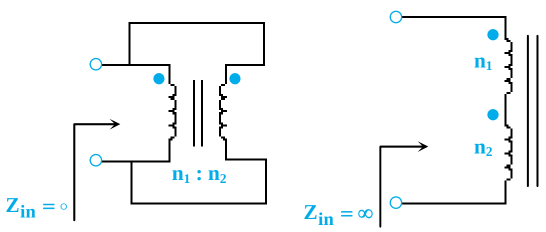
۱) $\sqrt{2}\,A$

۲) $j\sqrt{2}\,A$

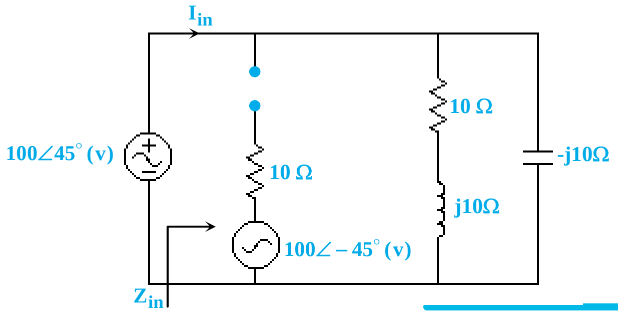
۳) $5\sqrt{2}\,A$

۴) $j5\sqrt{2}\,A$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به نکته زیر که در جداول قبل هم ذکر شده بود، داریم:



با جایگذاری معادل‌های ذکر شده در مدار داریم:



$$Z_{in} = (10+j10) \parallel (-j10) = (10-j10)\Omega$$

$$I_{in} = \frac{100\angle 45^\circ}{10-j10} = \frac{100\angle 45^\circ}{10\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 5\sqrt{2}\angle 90^\circ = j5\sqrt{2}\,A$$

امپدانس معادل شبکه $N_۱$ برابر است با $Z_۱ = R + jX_T$ که $X_T = X - ۸$. از آن جایی که می‌خواهیم ضریب توان شبکه $N_۱$ ، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ شـود، بایـد R برابـر X_T باشد. حال برای آن که در حالت زاویه فاز ثابت بار، حداکثر توان به بار یا همان شبکه $N_۱$ برسد، باید داشته باشیم:

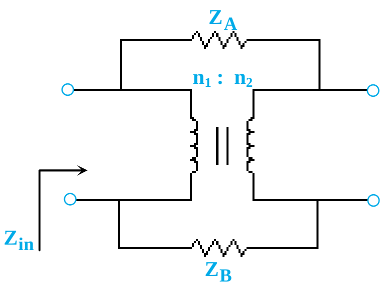
$$|Z_۱| = |Z_N|$$

$$|Z_n| = |R + jX_T| = |R + jR| = R\sqrt{۲} \quad , \quad |Z_۱| = |۱ - ۲j| = \sqrt{۵} \Rightarrow R\sqrt{۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}\Omega$$

$$X_T = X - ۸ = ۲L - ۸ = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow L = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}} + ۴H$$

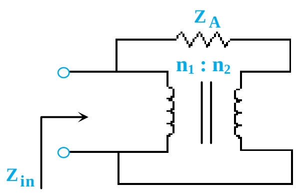
قانون انعکاس امپدانس در چند مورد خاص

در صورتی که امپدانس‌هایی در بالا و پایین یک ترانسفورمر قرار گیرد، قانون انعکاس امپدانس برای امپدانس دیده شده از ورودی ترانسفورمر به صورت زیر است:

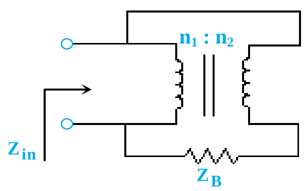


$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_A + Z_B}{(۱ \pm \frac{n_۲}{n_۱})^۲}}$$

لازم به ذکر است که در رابطه Z_{in} در صفحه قبل، در صورتی که نقاط مربوط به القای متقابل در سیم‌پیچ‌های ترانس همانند هم باشند (هر دو در بالا و یا هر دو در پایین)، از علامت منفی و در صورتی که یک نقطه در بالا و یک نقطه در پایین باشد، از علامت مثبت استفاده می‌کنیم. همچنین در صورتی که یکی از المان‌های Z_A و یا Z_B اتصال کوتاه شود، به جای آن در رابطه Z_{in} ، مقدار صفر را لحاظ می‌کنیم. به بیان دیگر داریم:

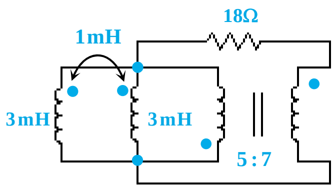


$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_A}{(۱ \pm \frac{n_۲}{n_۱})^۲}}$$



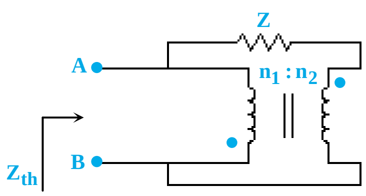
$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_B}{(۱ \pm \frac{n_۲}{n_۱})^۲}}$$

مثال ۵۶: ثابت زمانی مدار زیر بر حسب میلی‌ثانیه کدام است؟



۱) ۰/۶۴
۲) ۰/۳۲
۳) ۰/۰۱۸
۴) ۰/۰۰۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای بدست آوردن ثابت زمانی در این مدار، باید از دو سر سلف‌ها مقاومت تونن دیده شود. لذا داریم:

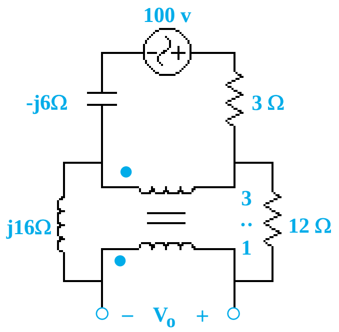


$$Z_{th} = \frac{Z}{(۱ + \frac{n_۲}{n_۱})^۲} \Rightarrow Z_{th} = \frac{۱۸}{(۱ + \frac{۷}{۵})^۲} = \frac{۲۵}{۸}\Omega$$

برای بدست آوردن مقدار L_{eq} ، دو سلف ۳ mH را با توجه به تزویج بین آن‌ها موازی می‌کنیم.

$$L_{eq} = \frac{L_۱ L_۲ - M^۲}{L_۱ + L_۲ - ۲M} = \frac{۳ \times ۳ - ۱^۲}{۳ + ۳ - ۲} = ۲\,mH \Rightarrow \tau = \frac{L_{eq}}{Z_{th}} = \frac{۲mH}{\frac{۲۵}{۸}\Omega} = ۰/۶۴\, m\sec$$

مثال ۵۷: در مدار زیر مقدار V_o بر حسب ولت کدام است؟



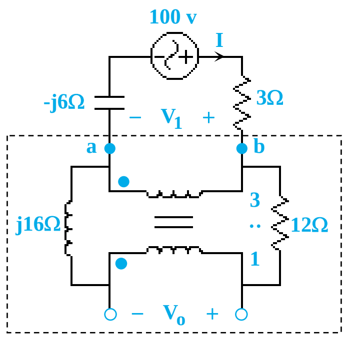
۱) $۲۵\angle ۸^\circ$

۲) $۲۵\angle -۸^\circ$

۳) $۳۵\angle ۸^\circ$

۴) $۳۵\angle -۸^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به نکات ذکر شده در جدول موجود در صفحات قبل، برای امپدانس دیده شده از b و a داریم:



$$Z(a,b)=\frac{۱۲+j۱۶}{(۱-\frac{n_۲}{n_۱})^۲}\quad,\quad n_۲=۱\quad,\quad n_۱=۳$$

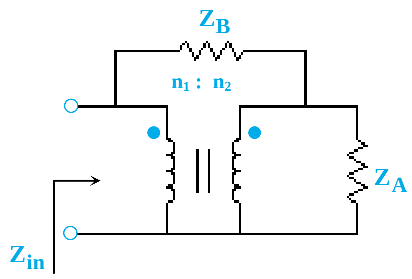
$$\Rightarrow\ Z(a,b)=\frac{۱۲+j۱۶}{(۱-\frac{۱}{۳})^۲}=\frac{۹}{۴}\times(۱۲+j۱۶)=(۲۷+j۳۶)\Omega$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{۱۰۰}{۲۷+j۳۶+۳-j۶}=\frac{۱۰۰}{۳۰+j۳۰}(A)$$

$$\Rightarrow V_۱=I\times Z_{ab}=\frac{۱۰۰}{۳۰+j۳۰}\times(۲۷+j۳۶)=\frac{۱۰(۹+j۱۲)}{۱+j}\ (v)$$

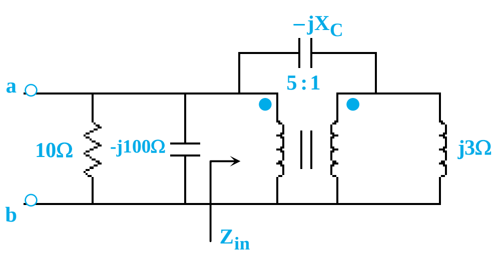
$$V_o=\frac{V_۱}{۳}=\frac{۱۰(۳+j۴)}{۱+j}=\frac{۱۰\times۵\angle۵۳^\circ}{\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ}=\frac{۵۰}{\sqrt{۲}}\angle۸^\circ\simeq۳۵\angle۸^\circ(v)$$

نکته۵: در صورتی که امپدانس‌های Z_A و Z_B در بالا و خروجی یک ترانسفورمر قرار گیرد، رابطه Z_{in} یا همان امپدانس دیده شده از اولیه ترانسفورمر به صورت زیر است:



$$Z_{in}=\frac{۱}{\frac{a^۲}{Z_A}+\frac{(a-۱)^۲}{Z_B}}\quad,\quad a=\frac{n_۲}{n_۱}$$

مثال ۵۸: در صورتی که مدار زیر در حالت تشدید باشد، مقدار X_C بر حسب اهم کدام است؟



۱) ۱۹۲

۲) ۱/۹۲

۳) ۴۶۸

۴) ۴/۶۸

پاسخ: گزینه «۱» مقدار Z_{in} باید برابر $j۱۰۰$ شود تا مدار در حالت رزونانس باشد؛ لذا داریم:

$$Z_{in}=\frac{۱}{\frac{n^۲}{j۳}+\frac{(n-۱)^۲}{-jX_C}}\ ,\ n=\frac{۱}{۵}\ ,\ Z_{in}=j۱۰۰\ \Rightarrow\ j۱۰۰=\frac{۱}{\frac{(\frac{۱}{۵})^۲}{j۳}+\frac{(\frac{۱}{۵}-۱)^۲}{-jX_C}}\ \Rightarrow\ j۱۰۰[\frac{۱}{j۷۵}-\frac{۱۶}{۲۵.jX_C}]=۱\ \Rightarrow\ X_C=۱۹۲\Omega$$