مدرسان شریف

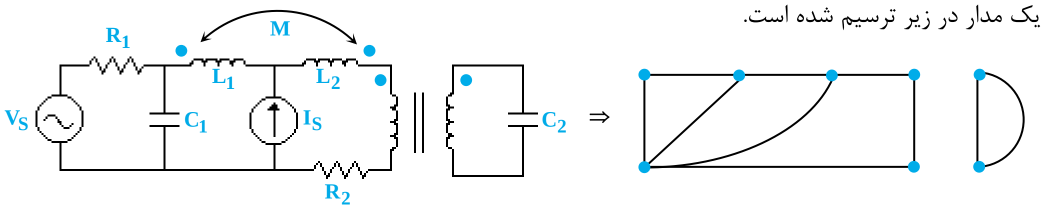
فصل ششم

«گراف‌های شبکه، روش‌های تجزیه و تحلیل مدار و مدار دوگان»

درسنامه (۱): مفاهیم و تعاریف اولیه گراف

تعریف گراف

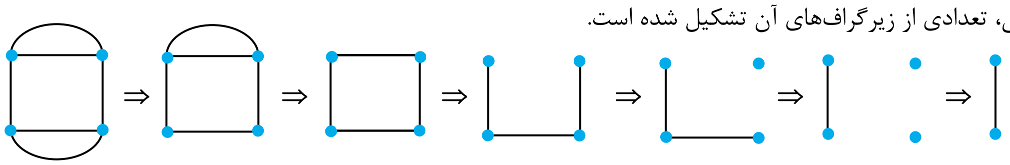
گراف به مجموعه‌ای از گره‌ها و شاخه‌های متصل به آن گفته می‌شود، در صورتی که هر شاخه در ابتدا و انتهایش گره‌ای داشته باشد. برای اینکه گراف معادل یک شبکه را ترسیم کنیم، لازم است که به جای هر المان، یک شاخه به همراه دو گره در انتها و ابتدای شاخه قرار دهیم. لازم به ذکر است که ترسیم گراف‌های مربوط به سلف‌های شامل القای متقابل و یا ترانسفورمر، بدون توجه به القای متقابل آنها صورت می‌گیرد. (یعنی نمایش به صورت گراف، القای متقابل در سلف‌ها را نشان نمی‌دهد، زیرا القای متقابل مربوط به ماهیت شاخه‌های مدار الکتریکی مورد نظر بوده و در تعریف ریاضیاتی گراف بی‌معنا است.) برای مثال، گراف یک مدار در زیر ترسیم شده است.



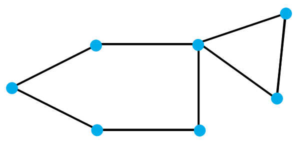
همان‌طور که دیده می‌شود، القای متقابل سلف‌های L_1 و L_2 و تزویج ترانسفورماتور در نمایش گرافی، نشان داده نشده است. لازم به ذکر است که در ترسیم گراف یک مدار، ممکن است گره‌ای وجود داشته باشد که به آن، هیچ شاخه‌ای متصل نباشد و این مورد با تعریف گراف منافاتی ندارد.

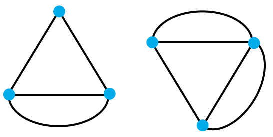
تعاریف اولیه در مبحث گراف‌ها

با حذف تعدادی از گره‌ها و شاخه‌های یک گراف، زیرگراف‌های مربوط به آن تشکیل می‌شوند. برای مثال در گراف زیر با حذف مرحله به مرحله گره‌ها و شاخه‌های گراف اصلی، تعدادی از زیرگراف‌های آن تشکیل شده است.

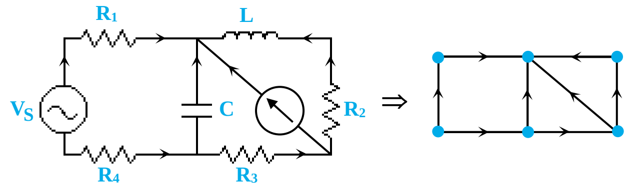


در صورتی که بین هر دو گره دلخواه از یک گراف، حداقل یک شاخه (یا حداقل یک مسیر متصل‌کننده آن دو گره) وجود داشته باشد، گراف مذکور پیوسته بوده و در غیر این صورت گراف ناپیوسته است. برای مثال گراف (الف) یک گراف پیوسته و گراف (ب) یک گراف ناپیوسته است.

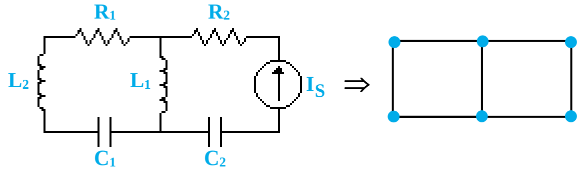

(گراف الف)


(گراف ب)

در صورتی که در یک مدار جریان المان‌ها دارای جهت قراردادی باشد، شاخه‌های گراف معادل آن نیز دارای همان جهت‌ها خواهند بود. لذا گرافی را که شامل شاخه‌های جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار و گرافی را که شامل شاخه‌های بدون جهت باشد، گراف بدون جهت می‌نامند. برای مثال گراف معادل مدار (الف) جهت‌دار و گراف معادل مدار (ب) بدون جهت است.



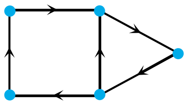
(مدار الف)

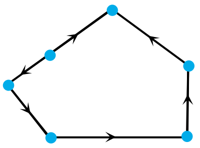


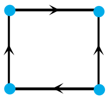
(مدار ب)

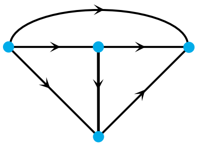
تعریف حلقه و قانون KVL

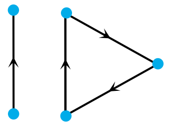
اگر زیرگرافی از یک گراف در نظر گرفته شود، به صورتی که اولاً زیرگراف مورد نظر پیوسته بوده و ثانیاً در آن هر گره فقط به دو شاخه متصل باشد، آنگاه زیرگراف مذکور تشکیل یک حلقه خواهد داد. برای مثال، چند زیرگراف زیر را در نظر بگیرید:


(الف)


(ب)


(ج)


(د)


(هـ)

گراف‌های (ب) و (ج) هر دو شرط را دارا بوده و حلقه هستند؛ ولی گراف‌های (الف) و (د) شرط دوم را ندارند و حلقه نمی‌باشند. همچنین گراف (هـ) نیز شرط اول و دوم را ندارد (زیرا برخی از گره‌ها تنها به یک شاخه وصلند). لذا گراف‌های (الف)، (د) و (هـ) حلقه نمی‌باشند.

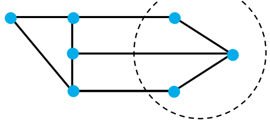
پس از تعریف حلقه به ارائه قانون KVL در هر حلقه می‌پردازیم. قانون ولتاژ کیرشهف یا همان قانون KVL در مورد هر حلقه مطلب زیر را بیان می‌کند:

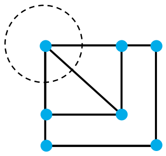
«برای هر حلقه از یک گراف، حاصل جمع جبری ولتاژ شاخه‌ها برابر صفر است.»

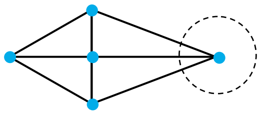
برای نوشتن KVL به این نکته باید دقت شود که اگر جهت شاخه‌ها با جهت حرکت برابر باشد، ولتاژ شاخه با ضریب مثبت و در غیر این صورت با ضریب منفی نوشته می‌شود. لازم به ذکر است که انتخاب جهت حرکت اختیاری است.

تعریف کاتست و قانون KCL

برای مشخص شدن مفهوم کاتست، یک زیرگراف شامل چند شاخه را در نظر بگیرید. اگر با حذف کلیه شاخه‌های این زیرگراف، گراف اصلی به دو قسمت کاملاً جدا از هم و منفصل تبدیل شود، و با بازگرداندن هر یک از شاخه‌های این زیرگراف به گراف اصلی، این قسمت‌های مجزا دوباره متصل گردند، این زیرگراف که مجموعه‌ای از شاخه‌هاست، یک کاتست نامیده می‌شود. برای مثال در شکل‌های زیر چند کاتست از یک گراف ترسیم شده است.





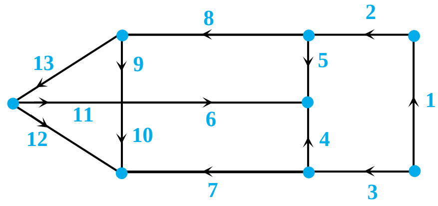


تفسیر قانون جریان کیرشهف یا همان قانون KCL در مورد هر کاتست به این صورت است:

«در هر کاتست مجموع جریان‌های شاخه‌های مختلف کاتست (با در نظر گرفتن جهت مناسب برای جریان‌ها) برابر صفر است.»

برای یافتن جهت مناسب جریان‌ها کافی است زیرمدار یا زیرگراف‌های ایجاد شده با حذف کاتست مورد نظر را در نظر بگیریم. در این صورت جهت جریان‌ها را به شکلی در نظر می‌گیریم که همگی به یکی از این دو زیرگراف خاص وارد شده و یا همگی از آن خارج شوند.

مثال۱: در گراف زیر کدامیک از دسته معادلات، مربوط به کاتست در گراف است؟



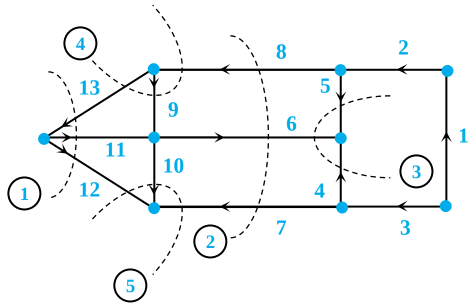
۱) $\begin{cases} I_{۶} = I_{۷} + I_{۸} \\ I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} I_{۴} = I_{۵} + I_{۶} \\ I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} I_{۷} + I_{۱۰} = I_{۱۲} \\ I_{۷} + I_{۹} + I_{۱۳} = ۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} I_{۴} = I_{۵} + I_{۶} \\ I_{۱۰} + I_{۶} + I_{۸} = ۰ \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با نوشتن معادلات کاتست‌های نشان داده شده داریم:



کاتست ۴ : $I_{۸} = I_{۹} + I_{۱۳}$

کاتست ۵ : $I_{۷} + I_{۱۰} + I_{۱۲} = ۰$

کاتست ۱ : $I_{۱۳} = I_{۱۱} + I_{۱۲}$

کاتست ۲ : $I_{۶} = I_{۸} + I_{۷}$

کاتست ۳ : $I_{۴} + I_{۵} + I_{۶} = ۰$

لازم به ذکر است که برای گراف بالا کاتست‌های دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت.

درسنامه (۲): تحلیل مدار یا گراف با استفاده از روش‌های پایه حلقه و گره

برای تحلیل یک گراف با استفاده از روش‌های حلقه و گره ابتدا باید ماتریس‌های تلاقی شاخه با مش و تلاقی شاخه با گره را معرفی کنیم.

ماتریس تلاقی شاخه با مش (M_a)

برای حل مدارها به صورت ساده‌تر با قانون KVL و بیان ارتباط حلقه‌های مدار با شاخه‌های موجود در آن، ماتریس تلاقی شاخه با مش یا در حالت کلی حلقه، M_a را تعریف می‌کنیم. برای نوشتن این ماتریس تمام حلقه‌ها یا مش‌های درونی را ساعتگرد و حلقه بیرونی گراف را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. ماتریس تلاقی شاخه با مش یا M_a مستطیلی بوده و به تعداد شاخه‌های گراف یعنی b، دارای ستون می‌باشد. همچنین تعداد سطرهای آن برابر با مجموع تعداد مش‌های درونی و بیرونی مدار یعنی $L+۱$ است. درایه‌های این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{ij}=\begin{cases}۰ & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ موجود نباشد.}\\ ۱ & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی باشد.}\\ -۱ & \text{اگر شاخه } j \text{ در مش } i \text{ بوده و جهت قراردادی آنها یکی نباشد.}\end{cases}$$

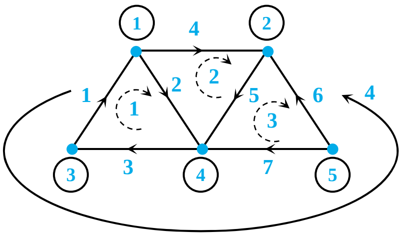
$$\begin{cases}L=b-n_t+۱\\ L: & \text{تعداد مش‌های درونی}\\ b: & \text{تعداد شاخه‌ها}\\ n_t: & \text{تعداد گره‌های گراف}\end{cases}$$

> **نکته۱:** در ماتریس تلاقی شاخه با مش، جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a باید برابر صفر باشد. همچنین هر سطر از این ماتریس، بیانگر این است که چند شاخه درون مش مورد نظر بوده و چه شاخه‌هایی با مش هم‌جهت و چه شاخه‌هایی با مش غیرهم‌جهت هستند. هر ستون از این ماتریس، بیانگر این است که هر شاخه با چه مش‌هایی تلاقی دارد و آیا با آنها هم‌جهت است یا خیر. بنابراین چون هر شاخه حتماً با یک مش هم‌جهت و حتماً با یکی غیر هم‌جهت است، پس جمع درایه‌های هر ستون حتماً صفر است. (یعنی حتماً یک ۱+ و یک ۱- دارد.)

ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده (M)

در صورتی که سطر مربوط به مش بیرونی از ماتریس M_a حذف شود، ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده M تشکیل می‌شود.

مثال ۲: برای گراف مقابل ماتریس‌های M_a و M را بدست آورید.



☑ **پاسخ:** طبق نکات گفته شده، برای مش درونی جهت را ساعتگرد و برای مش بیرونی جهت را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ذکر شده برای بدست آوردن ماتریس‌های M_a و M داریم:

$$M=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc}۱&۱&۱&۰&۰&۰&۰\\۰&-۱&۰&۱&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&-۱&-۱&۱\end{array}\right]\begin{array}{c}۱\\۲\\۳\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{مش‌های درونی}\\ \underbrace{\begin{array}{ccccccc}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷\end{array}}_{\text{تعداد شاخه‌ها}}\end{array}$$

$$M_a=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc}۱&۱&۱&۰&۰&۰&۰\\۰&-۱&۰&۱&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&-۱&-۱&۱\\-۱&۰&-۱&-۱&۰&۱&-۱\end{array}\right]\begin{array}{c}۱\\۲\\۳\\۴\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}L+۱=\text{تعداد مش‌ها}\\ \underbrace{\begin{array}{ccccccc}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷\end{array}}_{\text{تعداد شاخه‌ها}}\end{array}$$

> **نکته۲:** در صورتی که در یک سؤال ماتریس تلاقی شاخه با مش مختصر شده داده شده باشد و در گزینه‌ها ماتریس تلاقی شاخه با مش اصلی خواسته شده باشد، بدین صورت عمل می‌شود که یک سطر در انتهای ماتریس تلاقی شاخه با مش خلاصه شده M به صورتی اضافه می‌شود که جمع جبری درایه‌های هر ستون ماتریس M_a تشکیل شده صفر شود.

مثال ۳: کدامیک از ماتریس‌های زیر مربوط به ماتریس تلاقی شاخه با مش $\mathbf{M}$ زیر به صورت $\mathbf{M_a}$ هستند؟

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه جمع جبری عناصر هر ستون ماتریس M_a صفر است، یک سطر در انتهای ماتریس M، به صورتی اضافه می‌کنیم که جمع جبری هر ستون برابر صفر شود. دقت کنید که سطر اضافه شده، مربوط به مش بیرونی خواهد بود.

$$M_a=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \text{سطر اضافه شده} \end{matrix}$$

ماتریس تلاقی گره با شاخه (A_a)

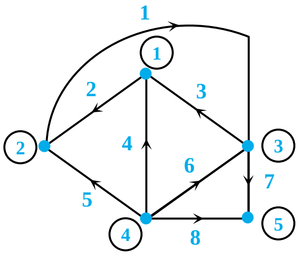
برای بیان کامل‌تر قوانین KVL و KCL، ماتریس تلاقی گره با شاخه را تعریف می‌کنیم. این ماتریس بیانگر مشخصات ظاهری و ترسیمی گراف است و از روی آن به سادگی می‌توان یک گراف را ترسیم کرد و بدون داشتن خود گراف می‌توان در مورد اینکه کدام گره به کدام شاخه متصل است، اظهارنظر کرد. ماتریس A_a به صورت یک ماتریس مستطیلی بوده و دارای ابعاد $n_t \times b$ می‌باشد که n_t تعداد سطرها و برابر تعداد گره‌ها بوده و b تعداد ستون‌ها و برابر تعداد شاخه‌ها است. ماتریس A_a فقط برای گراف‌های جهت‌دار تعریف شده و درایه‌های آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$A_a=\overbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \ldots \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}}^{b:\text{تعداد شاخه‌ها}} \left.\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ \vdots \end{matrix}\right\} n_t:\text{تعداد گره‌ها}$$

$$a_{jk}=\begin{cases} ۰ & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } j \text{ تلاقی نداشته باشد} \\ ۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ از گره } j \text{ خارج شونده باشد} \\ -۱ & \text{اگر شاخه } k \text{ به گره } j \text{ وارد شونده باشد} \end{cases}$$

برای توصیف بهتر ماتریس A_a، مطلب را با ذکر یک مثال ادامه می‌دهیم.

مثال ۴: گراف روبرو را در نظر گرفته و ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a را برای آن بدست آورید.



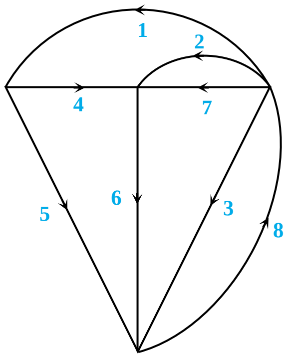
☑ **پاسخ:** برای شماره‌گذاری گره‌ها به این صورت عمل می‌شود که از بالاترین گره شروع کرده و سپس از سمت چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به قوانین مذکور، ماتریس A_a گراف فوق به صورت زیر است:

$b=۸$ (تعداد شاخه‌ها)

$$A_a=\begin{array}{c|cccccccc|} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \end{array}$$

$n_t=۵$ تعداد گره‌ها

مثال۳۰: **در گراف شکل مقابل اگر ماتریس حلقه‌های اساسی متناظر با درختی با شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ را بنویسیم، این ماتریس به صورت [F,I] در می‌آید. حال ماتریس F به کدام صورت زیر است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۶)



۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر ماتریس حلقه‌های اساسی (B) که متناظر با لینک‌های ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ است، نوشته شود، داریم:

$$B=\begin{array}{c|cccccccc|} ۴ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۶ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{array} \quad , \quad B=[F\,|\,I] \Rightarrow F=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال۳۱: **ماتریس کاتست گرافی به صورت زیر است. دو حلقه اساسی متناظر با درخت این کاتست کدام گزینه است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)

$$\begin{array}{r|ccccc|cccc|} \text{شماره شاخه‌ها}\rightarrow & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \\ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ Q= & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}$$

۱) $L_۱=\{۲,۳,۷\}$ و $L_۲=\{۳,۴,۸\}$
۲) $L_۱=\{۲,۳,۸\}$ و $L_۲=\{۳,۴,۷\}$
۳) $L_۱=\{۱,۲,۷\}$ و $L_۲=\{۲,۳,۷\}$
۴) $L_۱=\{۱,۲,۸\}$ و $L_۲=\{۳,۴,۸\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل مسأله لازم است که از روی ماتریس Q، ماتریس حلقه اساسی گراف بدست آورده شود و سپس معادلات حلقه‌های اساسی نوشته شود. با توجه به ماتریس داده شده که مربوط به کاتست‌ها است، شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ متناظر با درخت‌ها بوده و شاخه‌های ۶ و ۷ و ۸ و ۹ متناظر با لینک‌ها هستند. حال روابط مقابل برقرار است: $Q=[I:F] \Rightarrow B=[-F^T:I]$

لازم به ذکر است که F^T با تعویض جای سطر و ستون‌های ماتریس F به دست می‌آید. لذا با توجه به ماتریس بدست آمده، حلقه‌های اساسی به صورت زیر هستند:

$$B=\left[\begin{array}{ccccc|cccc} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \Rightarrow \{۳,۴,۷\},\{۱,۲,۶\},\{۲,۳,۵,۹\},\{۲,۳,۸\}$$

روش بدست آوردن حلقه‌های اساسی و کاتست‌های اساسی با داشتن ماتریس‌های B و Q

۱ـ در صورتی که ماتریس Q یا همان ماتریس کاتست‌های اساسی را داشته باشیم، از رابطه $Q.j=۰$ می‌توان کاتست‌های اساسی را بدست آورد. لازم به ذکر است که بردار j بردار جریان شاخه‌های مدار است.

۲ـ در صورتی که ماتریس حلقه‌های اساسی یا همان ماتریس B را داشته باشیم، از رابطه $B.V=۰$ می‌توان حلقه‌های اساسی گراف را بدست آورد. بدیهی است که بردار V همان بردار ولتاژ شاخه‌ها می‌باشد.

۳ـ در صورتی که ماتریس حلقه‌های اساسی یا همان ماتریس B را داشته باشیم و بخواهیم کاتست‌های اساسی گراف را بدست آوریم، باید ابتدا از رابطه $Q=[-F^T\vdots I]=[E\vdots I]$، ماتریس کاتست‌های اساسی را محاسبه نموده و سپس با رابطه $Q.j=۰$، کاتست‌های اساسی گراف را بدست آوریم.

۴ـ در صورتی که بخواهیم حلقه‌های اساسی مدار یا گراف را بدست آوریم و ماتریس Q یا همان ماتریس کاتست‌های اساسی را داشته باشیم، باید ابتدا از رابطه $B=[I\vdots-E^T]=[I\vdots F]$، ماتریس حلقه‌های اساسی مدار را محاسبه کرده و سپس با استفاده از رابطه $B.V=۰$، حلقه‌های اساسی گراف را بدست آوریم.

مثال۳۲: در گرافی با ماتریس حلقه‌های اساسی روبه‌رو، کدام یک از گزینه‌های زیر معادلات حلقه‌های اساسی هستند؟

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{cases} V_۱+V_۵-V_۷=۰ \\ V_۳-V_۶=۰ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} V_۳+V_۶=۰ \\ V_۱-V_۵+V_۷=۰ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} V_۴+V_۵+V_۶-V_۷=۰ \\ V_۳+V_۶=۰ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} V_۱+V_۳=۰ \\ V_۴+V_۵+V_۶=۰ \end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به ماتریس B و با استفاده از رابطه $B.V=۰$ داریم:

$$B.V=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ V_۳ \\ V_۴ \\ V_۵ \\ V_۶ \\ V_۷ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{cases} V_۱+V_۵+V_۷=۰ \\ V_۲-V_۵-V_۶=۰ \\ V_۳+V_۶=۰ \\ V_۴+V_۵+V_۶-V_۷=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \{۱,۵,۷\}\ ,\ \{۲,۵,۶\} \\ \{۳,۶\}\ ,\ \{۴,۵,۶,۷\} \end{matrix}$$

معادلات حلقه‌های اساسی

مثال۳۳: درگراف k اگر ماتریس حلقه‌های اساسی به صورت زیر باشد، آنگاه کدام دسته از گزینه‌های زیر مربوط به کاتست‌های اساسی گراف k هستند؟

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

۱) $\{۲,۳,۵\},\{۳,۷\}$

۲) $\{۳,۷\},\{۲,۱,۴\}$

۳) $\{۱,۳,۶\},\{۲,۷\}$

۴) $\{۱,۳,۵\},\{۱,۲,۶\}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ماتریس واحد قسمت اول B ماتریس ۳×۳ بوده و بیانگر این است که لینک‌های گراف، شاخه‌های ۳ و ۲ و ۱ و درخت آن شامل شاخه‌های ۴ و ۵ و ۶ و ۷ می‌باشد. حال داریم:

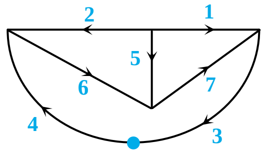
$$\mathbf{Q=[-F^T\vdots I]=[E\vdots I]}$$

$$E=-F^T \Rightarrow F=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow E=-F^T=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow Q=\left[\begin{array}{ccc|cccc} ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

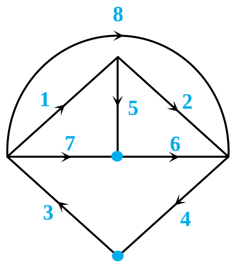
$$Q.j=۰ \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \\ j_۶ \\ j_۷ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{cases} -j_۲-j_۳+j_۴=۰ & \Rightarrow \{۲,۳,۴\} \\ -j_۱+j_۳+j_۵=۰ & \Rightarrow \{۱,۳,۵\} \\ j_۱+j_۲+j_۶=۰ & \Rightarrow \{۱,۲,۶\} \\ -j_۳+j_۷=۰ & \Rightarrow \{۳,۷\} \end{cases}$$

مثال۳۴: اگر ماتریس کات‌ست اساسی یک گراف به صورت $\mathbf{Q=[E|I]}$ نوشته شود که در آن زیر ماتریس E معلوم می‌باشد. گراف ماتریس مقابل، برابر با کدام گزینه است؟

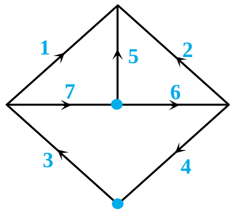
$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$



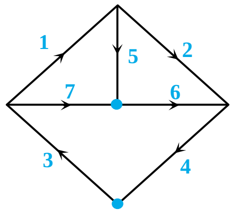
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۱) الف و ب

۲) ب و ج

۳) الف و د

۴) الف و ج

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ماتریس I باید ۴×۴ باشد؛ بنابراین با توجه به ماتریس Q باید ۷ شاخه داشته باشیم. لذا گراف «ب» که ۸ شاخه دارد، نمی‌تواند جواب صحیح باشد. از طرفی با توجه به معادلات کاتست داریم:

$$\begin{cases} Q_{۴} \Rightarrow -i_{۳}+i_{۴}=۰ \\ Q_{۵} \Rightarrow i_{۱}+i_{۲}+i_{۵}=۰ \\ Q_{۶} \Rightarrow -i_{۲}-i_{۳}+i_{۶}=۰ \\ Q_{۷} \Rightarrow i_{۱}-i_{۳}+i_{۷}=۰ \end{cases}$$

که معادله‌ی $Q_{۵}$ نشان‌دهنده‌ی نادرست بودن گراف «د» می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح می‌باشد.

نکته۵: در صورتی که ماتریس‌های B و Q به صورت استاندارد $[F \vdots I]$ یا $[I \vdots F]$ و $[I \vdots E]$ یا $[E \vdots I]$ نباشد، ابتدا ماتریس را به حالت استاندارد تبدیل نموده و سپس مراحل بعدی را اجرا می‌کنیم. برای تشکیل ساختار استاندارد به دنبال ستون‌هایی می‌گردیم که عدد ۱، یک بار در آنها آمده باشد و بقیه ستون عدد صفر باشد. حال ستون‌های مذکور را طوری کنار یکدیگر قرار می‌دهیم که ماتریس مربعی I تشکیل شود. در ادامه ماتریس E (یا F) نیز خود به خود ساخته می‌شود.

مثال۳۵: در گراف ۶ شاخه‌ای و ۴ گرهی، ماتریس کات‌ست‌های اساسی به‌صورت زیر است. ماتریس حلقه‌های اساسی کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)

$$\begin{array}{r|rrrrrr|} \text{شماره‌ی شاخه‌ها} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ Q= & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}$$

۱) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» می‌دانیم برای هر گراف رابطه $BQ^T=۰$ برقرار است. حال با چک کردن گزینه‌ها داریم:

$$\text{گزینه (۱)} \Rightarrow BQ^T=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \text{گزینه (۲)} \Rightarrow BQ^T=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ & -۲ \\ -۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\text{گزینه (۳)} \Rightarrow BQ^T=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \text{گزینه (۴)} \Rightarrow BQ^T=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

مثال۳۶: در مدار ۵ شاخه‌ای و چهار گرهی، بردار ولتاژهای مدار (v_b) به صورت $V_b=V_{۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}+V_{۲}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}+V_{۵}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است، ماتریس حلقه‌های اساسی متناظر، کدام است؟

(مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)

۱) $\underline{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۲) $\underline{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۳) $\underline{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\underline{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست کافی است رابطه $BV_b=۰$ را برای تک‌تک گزینه‌ها چک کنیم: (V_b همان بردار ولتاژ شاخه‌هاست.)

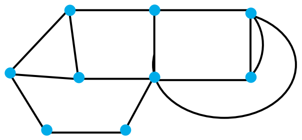
$$\text{گزینه (۱)}: BV_b=\begin{bmatrix} -V_{۲} \\ V_{۱} \end{bmatrix} \qquad \text{گزینه (۲)}: BV_b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \text{گزینه (۳)}: BV_b=\begin{bmatrix} V_{۱}-V_{۲} \\ -V_{۱} \end{bmatrix} \qquad \text{گزینه (۴)}: BV_b=\begin{bmatrix} -۲V_{۲}+V_{۵} \\ -V_{۱}-V_{۵} \end{bmatrix}$$

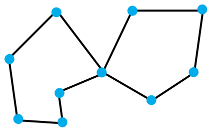
بنابراین گزینه (۲) پاسخ تست می‌باشد. دقت کنید از آنجایی که شماره شاخه‌ها با هدف تشکیل ماتریس حلقه اساسی انتخاب نشده است، ماتریس B در فرمت استاندارد نمی‌باشد.

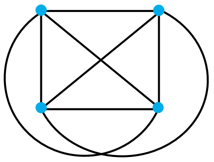
درسنامه (۴): مدارات دوگان

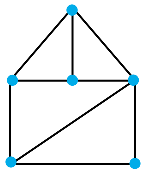
برای بررسی مفهوم مدار دوگان ابتدا باید با چند تعریف جدید در مبحث گراف آشنا شویم. این تعاریف مربوط به گراف مسطح و غیرمسطح و گراف لولادار و گراف بدون لولا خواهد بود.

اگر در یک گراف بتوان گراف را به صورتی به دو قسمت تجزیه کرد که دو قسمت گراف در یک گره مشترک باشند، گراف لولادار و در غیر این صورت گراف بدون لولا خواهد بود. همچنین در صورتی که بتوان گرافی را روی یک صفحه به صورتی نمایش داد که هیچ دو شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند، گراف مذکور مسطح و در غیر این صورت گراف غیرمسطح است. برای مشخص شدن تعاریف، به اشکال زیر دقت کنید:


گراف بدون لولا


گراف لولادار


گراف غیرمسطح


گراف مسطح

تعریف دو شبکه دوگان

دو گراف یا دو شبکه را در صورتی دوگان می‌نامند که شرایط زیر برای آنها برقرار باشد:

۱ـ هر دو گراف مسطح و بدون لولا باشند.

۲ـ بین گره‌های گراف اول و مش‌های گراف دوم با در نظر گرفتن مش بیرونی یک تناظر یک به یک برقرار باشد.

۳ـ بین شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک برقرار باشد به صورتی که اگر در گراف اول بین دو گره یک المان مشترک موجود بود، در گراف دوم نیز مابین حلقه‌های متناظر با گره‌های مذکور، المان متناظری وجود داشته باشد.

۴ـ معادله هر شاخه از این گراف‌ها با جایگزینی زیر در گراف دوگان در شاخه متناظر بدست آید.

$$\boxed{j\to V\ \ ,\ \ V\to j} \qquad \boxed{q\to\phi\ \ ,\ \ \phi\to q}$$

مراحل ترسیم مدار دوگان

برای یک گراف مسطح و بدون لولا، مراحل ترسیم دوگان گراف یا مدار به صورت زیر است:

۱ـ ابتدا درون هر مش از گراف یک گره قرار می‌دهیم و بیرون گراف در زیر آن نیز یک گره مبنا متناظر می‌کنیم.

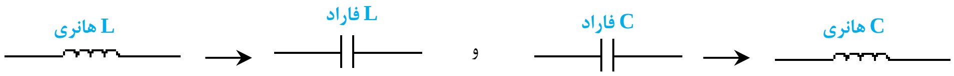
۲ـ به ازای وجود شاخه‌هایی که فقط در یک مش گراف هستند، یک شاخه بین گره درون مش و گره مبنا قرار می‌دهیم.

۳ـ به ازای هر شاخه که بین دو مش درونی در گراف وجود دارد، یک شاخه بین دو گره موجود در مش‌ها قرار می‌دهیم.

۴ـ امپدانس‌ها را به ادمیتانس و ادمیتانس‌ها را به امپدانس تبدیل می‌کنیم. همچنین عناصر سری را به عناصر موازی و عناصر موازی را به عناصر سری تبدیل می‌کنیم.

$$R\to\frac{1}{R}\quad,\quad Z\to\frac{1}{Z}$$

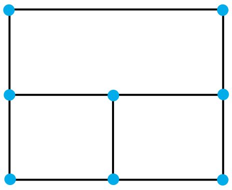
۵ـ سلف‌ها را به خازن و خازن‌ها را به سلف تبدیل می‌کنیم.



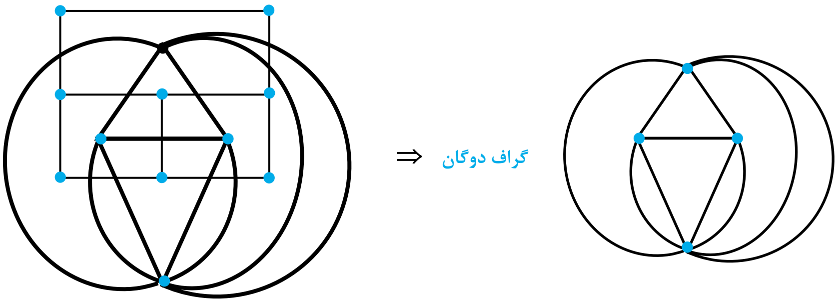
۶ـ منابع جریان را به منابع ولتاژ و منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم. (به جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان با همان مقدار منبع ولتاژ قرار می‌دهیم و برعکس)

پلاریته منبع ولتاژ و جهت منبع جریان دوگان و همچنین ولتاژ و جریان دوگان سایر شاخه‌ها باید با تحلیل‌های مداری مشخص گردد. در این راستا مهمترین نکته‌ای که باید مدنظر قرار گیرد این است که جریان مش‌ها در مدار اصلی برابر ولتاژ گره‌های متناظر در مدار دوگان است.

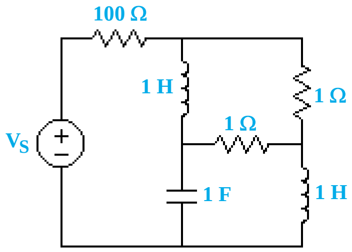
مثال ۴۳: دوگان گراف زیر را ترسیم کنید.

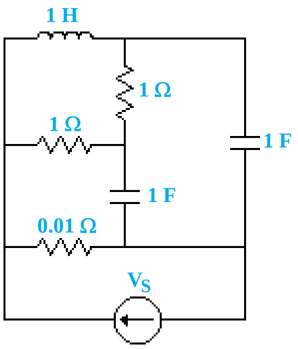


☑ **پاسخ:** برای ترسیم مدار دوگان، درون هر مش یک گره در نظر می‌گیریم و مطابق با مراحل ذکر شده در قبل عمل می‌کنیم.

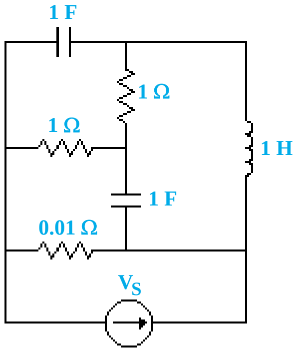


مثال ۴۴: کدامیک از مدارهای زیر، دوگان مدار مقابل است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۰)

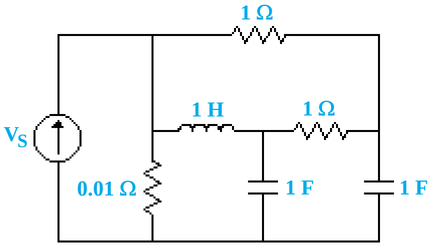




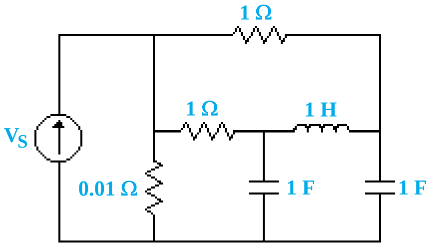
(۱)



(۲)

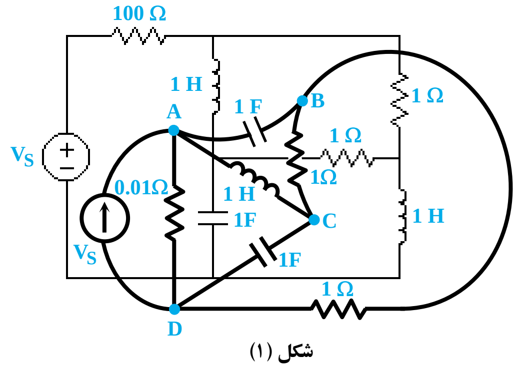


(۳)

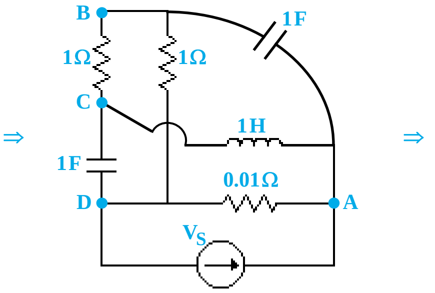


(۴)

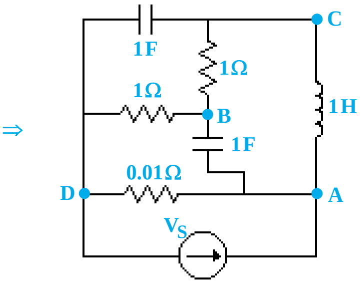
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن دوگان مدار فوق طبق مراحل ذکر شده به صورت زیر عمل می‌کنیم.



شکل (۱)



شکل (۲)

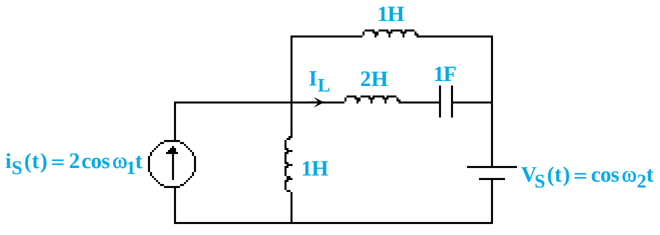


شکل (۳)

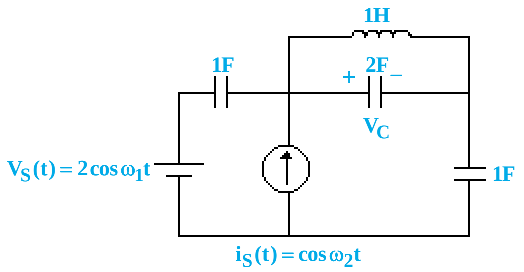
با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود که فقط گزینه ۲ صحیح است.

توجه: برای رسم شکل (۲) از روی شکل (۱) کافی است به تمام گره‌های درونی و نیز گره‌ی بیرونی نام‌هایی را (مثل A و B و C و D) اختصاص دهید. در این صورت شکل (۲) به راحتی رسم می‌شود. حال برای رسم شکل (۳) (شکل مرتب شده‌ی شکل ۲) کافی است گره‌ها را با نگاهی به گزینه‌ها مرتب کنید و هر عنصری را که بین دو گره‌ی معین در شکل (۲) بود، در محل مناسب خود در شکل (۳) قرار دهید. در این صورت شکل (۳) رسم می‌شود.

مثال۴۵: در مدار شکل (۱)، مقدار جریان سلف ۲H در جهت نشان داده شده و در حالت دائمی برابر $۲\cos\omega_۱ t+\cos\omega_۲ t$ است. مقدار ولتاژ خازن ۲F در مدار شکل (۲) در حالت دائمی چقدر خواهد بود؟



(1)



(2)

۱) $V_C=۲\cos\omega_۱ t+\cos\omega_۲ t$

۲) $V_C=-۲\cos\omega_۲ t+\cos\omega_۱ t$

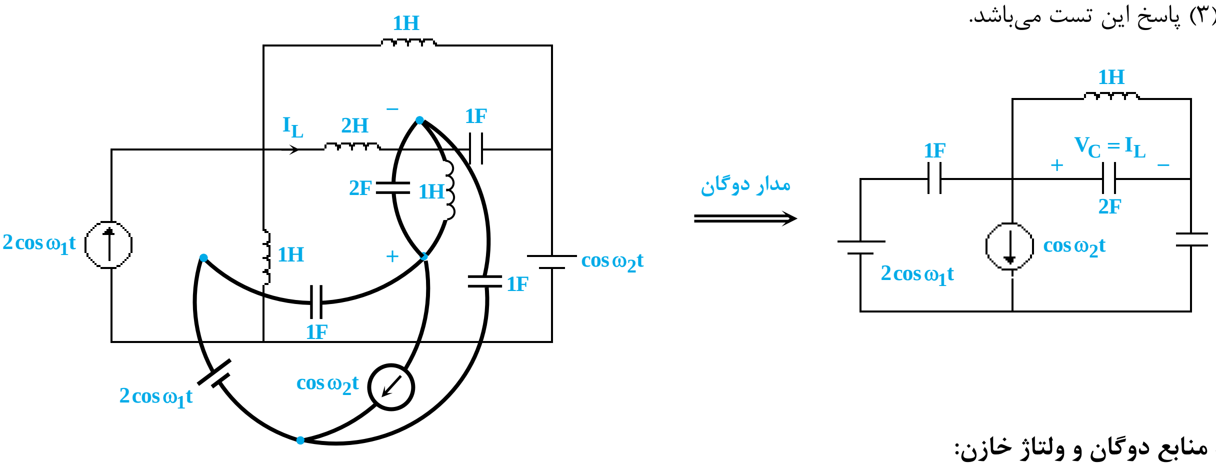
۳) $V_C=۲\cos\omega_۱ t-\cos\omega_۲ t$

۴) $V_C=۲\cos\omega_۲ t+\cos\omega_۱ t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مدار اول سه سلف و یک منبع جریان داریم که تشکیل گره داده‌اند و در مدار دوم سه خازن و یک منبع ولتاژ که تشکیل حلقه داده‌اند. همچنین یک خازن و منبع ولتاژ در شکل اول داریم که متعاقباً یک سلف و منبع جریان در شکل دوم نیز قرار گرفته است. اگر مدار دوگان شکل (۱) را رسم کنیم به شکل (۲) خواهیم رسید، لذا نکته سؤال در یافتن رابطه دوگانی دو مدار با یکدیگر است. بر اساس روابط دوگانی ولتاژ خازن در مدار دوگان برابر جریان سلف در مدار اصلی است. همچنین سلف و خازن مطرح شده در سؤال دقیقاً دوگان هم هستند، لذا ولتاژ خازن V_C همان I_L خواهد بود. البته این به معنای صحیح بودن گزینه (۱) نیست، زیرا جهت منبع جریان در مدار دوگان با جهت منبع جریان در مدار مورد سؤال یکسان نیست؛ با این حال به راحتی با در نظر گرفتن قانون جمع آثار می‌توان ولتاژ خازن را محاسبه کرد:

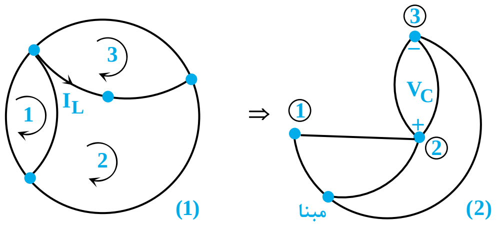
$$V_C=۲\cos\omega_۱ t-\cos\omega_۲ t$$

بنابراین گزینه (۳) پاسخ این تست می‌باشد.



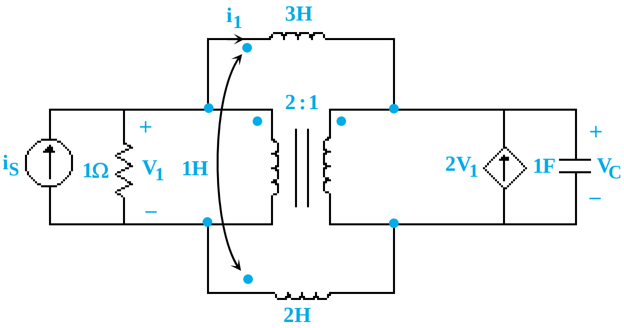
تعیین پلاریته منابع دوگان و ولتاژ خازن:

گراف مدار (۱) و دوگان آن را در نظر بگیرید. جریان I_L در این گراف برابر جریان مش (۲) منهای جریان مش (۳) است. ولتاژ V_C نیز برابر ولتاژ گره (۲) منهای ولتاژ گره (۳) در مدار دوگان است، پس $V_C=I_L$. از طرفی منبع ولتاژ موجود در مدار (۱) جریانی در خلاف جهت I_L در سلف ۲ هانری تولید می‌کند؛ بنابراین دوگان آن در مدار (۲) باید ولتاژی با پلاریته مخالف V_C در خازن ۲ فارادی به وجود آورد؛ از این رو منبع جریان در مدار دوگان از پلاریته مثبت V_C خارج شده است. با استدلال مشابهی می‌توان پلاریته درست منبع ولتاژ در مدار دوگان را تعیین کرد.



توجه: داوطلبانی که بعد از مطالعه کل کتاب نیاز به تست بیشتری برای مرور و تمرین دارند، می‌توانند با مراجعه به سایت www.modaresanesharif.ac.ir بانک تست‌های مربوط به همه فصول کتاب را دانلود نمایند.

مثال ۱۸: اگر معادلات حالت مدار روبرو را بر اساس بردار حالت $\begin{bmatrix} V_C \\ i_۱ \end{bmatrix}$ بنویسیم، ماتریس ضرایب حالت (A) و ماتریس ضرایب ورودی (B) در کدام گزینه آمده است؟



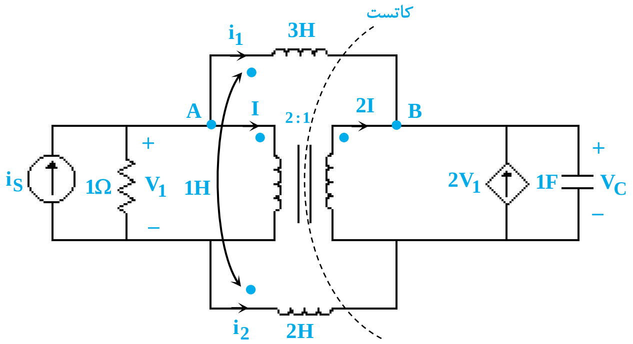
۱) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$

۳) $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۴) با توجه به این‌که مدار دارای ۳ عنصر ذخیره‌کننده انرژی است، بردار حالت آن باید دارای ۳ مؤلفه باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»



برای حل این مثال در گام اول باید این نکته را مدنظر قرار داد که جریان سلف ۲ هانری وابسته به $i_۱$ بوده و از این رو در مجموعه متغیرهای حالت مدار وارد نمی‌شود. علت این است که سلف‌های ۲ و ۳ هانری تشکیل یک کاتست می‌دهند؛ پس مطابق شکل روبرو می‌توان نوشت:

$$i_۱ + i_۲ = ۰ \Rightarrow i_۲ = -i_۱ \text{ و } \dot{i}_۲ = -\dot{i}_۱ \qquad (۱)$$

با توجه به نسبت دور ترانس داریم:

$$V_۱ = ۲V_C \qquad (۲)$$

حال در گره‌های A و B روابط KCL را می‌نویسیم:

$$KCL(A): i_S = \frac{۲V_C}{۱} + I + i_۱ \Rightarrow I = i_S - ۲V_C - i_۱ \qquad (۳)$$

$$KCL(B): i_۱ + ۲I + ۲ \times ۲V_C = \dot{V}_C \xrightarrow{(۳)} \dot{V}_C = i_۱ + ۲ \times (i_S - ۲V_C - i_۱) + ۴V_C \Rightarrow \dot{V}_C = -i_۱ + ۲i_S \qquad (۴)$$

اکنون در حلقه بیرونی مدار KVL می‌زنیم:

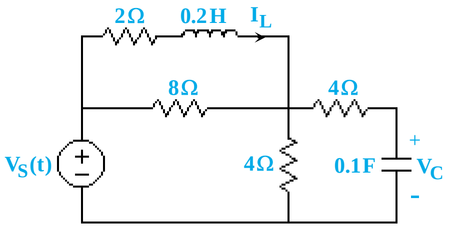
$$-V_۱ + V_{۳H} + V_C - V_{۲H} = ۰ \xrightarrow{(۱)} -۲V_C + ۳\dot{i}_۱ + (-\dot{i}_۱) + V_C - [۲(-\dot{i}_۱) + \dot{i}_۱] = ۰ \Rightarrow -V_C + ۳\dot{i}_۱ = ۰ \Rightarrow \dot{i}_۱ = \frac{V_C}{۳} \qquad (۵)$$

حال روابط (۴) و (۵) را به صورت ماتریسی نوشته و A و B را استخراج می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{i}_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} i_S \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۹: اگر بردار حالت مدار شکل مقابل را به صورت $X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$ انتخاب کنیم، ماتریس A در معادلات حالت $\dot{X} = AX$ به کدام صورت خواهد بود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)



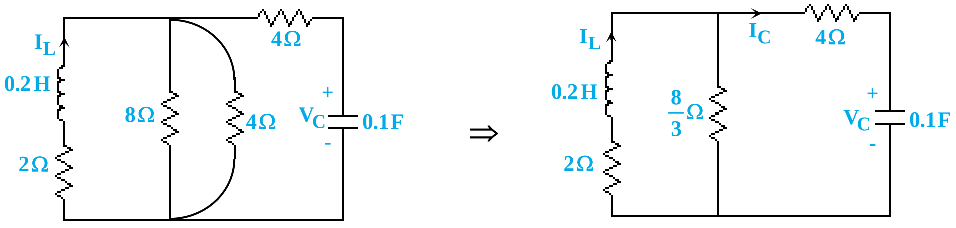
۱) $\begin{bmatrix} -۱۸ & ۴ \\ -۲ & -۱/۵ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -۲ & -۱/۵ \\ -۱۸ & ۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۴ & -۱/۵ \\ -۱۸ & -۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۱۸ & -۲ \\ ۴ & -۱/۵ \end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» **روش اول:** با اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ $V_S(t)$ و موازی کردن مقاومت‌های ۸Ω و ۴Ω داریم:



با قرار دادن رابطه‌های (۳) و (۴) در رابطه (۱) داریم:

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{dI_L}{dt}-V_C-\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}+\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۱}{۲}I_L \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۱}{۲}I_L \qquad (۵)$$

با نوشتن KVL در حلقه بیرونی مدار داریم:

$$۲I_k+۳V_k+V_C=۰ \qquad (۶)$$

با ترکیب روابط (۳) و (۴) و (۶) داریم:

$$۲\left[\frac{۱}{۲}\frac{dI_L}{dt}-\frac{۱}{۲}V_C+\frac{۱}{۲}I_L\right]+۳\left[\frac{dI_L}{dt}-V_C\right]+V_C=۰ \Rightarrow \frac{۴dI_L}{dt}-۳V_C+I_L=۰ \Rightarrow \frac{dI_L}{dt}=\frac{۳}{۴}V_C-\frac{۱}{۴}I_L \qquad (۷)$$

با قرار دادن رابطه (۷) در رابطه (۵) داریم:

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۳}{۴}V_C-\frac{۱}{۴}I_L\right]-\frac{۱}{۲}V_C-\frac{۱}{۲}I_L \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۸}V_C-\frac{۵}{۸}I_L \qquad (۸)$$

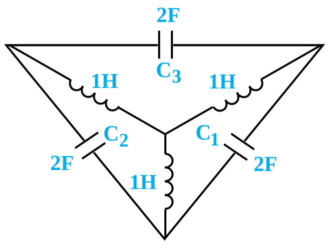
با کنار هم قرار دادن روابط (۷) و (۸) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dV_C}{dt}&=-\frac{۱}{۸}V_C-\frac{۵}{۸}I_L\\ \frac{dI_L}{dt}&=\frac{۳}{۴}V_C-\frac{۱}{۴}I_L\end{aligned} \Rightarrow \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۸} & -\frac{۵}{۸}\\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$$

نکته۳: در صورتی که در یک مدار حلقه خازنی باشد، برای انتخاب درخت مناسب، یکی از سلف‌ها را وارد درخت کرده و یکی از خازن‌ها را از درخت حذف می‌کنیم و جزو لینک‌ها در نظر می‌گیریم. در این حالت برای خازنی که جزو لینک‌ها است، به جای نوشتن معادله کاتست اساسی، باید معادله حلقه اساسی نوشته شود.

نکته۴: در صورتی که در یک مدار، کاتست سلفی وجود داشته باشد، برای انتخاب درخت مناسب، یکی از سلف‌ها را از لینک‌ها خارج کرده و جزو شاخه‌های درخت در نظر می‌گیریم. در این حالت برای سلف وارد شده در درخت به جای نوشتن معادله حلقه اساسی، باید معادله کاتست اساسی نوشته شود.

مثال۲۲: در مدار شکل زیر، ماتریس A در معادلات حالت کدام است؟



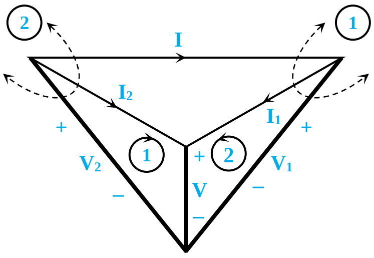
۱) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳}\\ -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۰\\ -\frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & ۰ & ۰\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۶}\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳}\\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & ۰ & ۰\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶}\\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶}\\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳}\\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۰\\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰\end{bmatrix}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا باید درخت مناسب را انتخاب کنیم، ولی با توجه به حضور یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی در درخت، به جای یک خازن، یک سلف در درخت در نظر گرفته می‌شود و یک خازن از درخت حذف و به جمع لینک‌ها اضافه می‌شود. حال معادلات کاتست‌های اساسی برای خازن‌ها و حلقه‌های اساسی برای سلف‌ها نوشته می‌شود.



حلقه اساسی (۱) : $L_۲\frac{dI_۲}{dt}=V_۲-V$ کاتست اساسی (۱) : $C_۱\frac{dV_۱}{dt}=-I_۱+I$

حلقه اساسی (۲) : $L_۱\frac{dI_۱}{dt}=V_۱-V$ کاتست اساسی (۲) : $C_۲\frac{dV_۲}{dt}=-I_۲-I$

حال دقت کنید که در معادلات حالت نوشته شده، پارامترهای I و V اضافه بوده و جزو متغیرهای حالت نمی‌باشند. لذا باید با نوشتن روابط KVL یا KCL مناسب، متغیرهای V و I را برحسب متغیرهای حالت بدست آوریم و در معادلات حالت جایگزین کنیم. با توجه به نکته ذکر شده قبل از این مثال، برای خازنی که جزو لینک در نظر گرفته شده است، معادله حلقه اساسی می‌نویسیم.

$V_{C_۳} = V_{C_۲} - V_{C_۱} = V_۲ - V_۱$: (حلقه اساسی شامل $C_۳$ و $C_۱$ و $C_۲$) و $I = C_۳ \frac{dV_{C_۳}}{dt} \Rightarrow I = \frac{۲dV_{C_۳}}{dt}$

$$\Rightarrow\ I = \frac{۲d(V_۲ - V_۱)}{dt} \Rightarrow I = \frac{۲dV_۲}{dt} - \frac{۲dV_۱}{dt} \quad (*)$$

با نوشتن رابطه کاتست اساسی برای سلف وارد شده در درخت در گره وسط مدار، داریم:

$$\frac{۱}{۱H}\int V dt = I_۱ + I_۲$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم:

$$V = \frac{dI_۱}{dt} + \frac{dI_۲}{dt} \quad (**)$$

با جایگذاری رابطه (*) در معادلات کاتست‌های اساسی بدست آمده در ابتدای حل داریم:

کاتست اساسی (۱) : $\frac{۲dV_۱}{dt} = -I_۱ + \frac{۲dV_۲}{dt} - \frac{۲dV_۱}{dt} \Rightarrow \frac{dV_۱}{dt} = -\frac{۱}{۴}I_۱ + \frac{۱}{۲}\frac{dV_۲}{dt} \quad (۱)$

کاتست اساسی (۲) : $\frac{۲dV_۲}{dt} = -I_۲ - (\frac{۲dV_۲}{dt} - \frac{۲dV_۱}{dt}) \Rightarrow \frac{dV_۲}{dt} = -\frac{۱}{۴}I_۲ + \frac{۱}{۲}\frac{dV_۱}{dt} \quad (۲)$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{dV_۱}{dt} = -\frac{۱}{۳}I_۱ - \frac{۱}{۶}I_۲ \quad (۳)$$

$$\frac{dV_۲}{dt} = -\frac{۱}{۶}I_۱ - \frac{۱}{۳}I_۲ \quad (۴)$$

با جایگذاری معادله (**) در معادله حلقه‌های اساسی بدست آمده در ابتدای حل سؤال داریم:

حلقه اساسی (۱) : $\frac{dI_۲}{dt} = V_۲ - (\frac{dI_۱}{dt} + \frac{dI_۲}{dt}) \Rightarrow \frac{dI_۲}{dt} = \frac{۱}{۲}V_۲ - \frac{۱}{۲}\frac{dI_۱}{dt} \quad (۵)$

حلقه اساسی (۲) : $\frac{dI_۱}{dt} = V_۱ - (\frac{dI_۱}{dt} + \frac{dI_۲}{dt}) \Rightarrow \frac{dI_۱}{dt} = \frac{۱}{۲}V_۱ - \frac{۱}{۲}\frac{dI_۲}{dt} \quad (۶)$

با ترکیب روابط (۶) و (۵) داریم:

$$\frac{dI_۱}{dt} = \frac{۲}{۳}V_۱ - \frac{۱}{۳}V_۲ \quad (۷) \qquad , \qquad \frac{dI_۲}{dt} = -\frac{۱}{۳}V_۱ + \frac{۲}{۳}V_۲ \quad (۸)$$

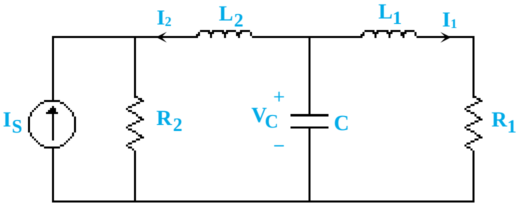
با نوشتن روابط (۷) و (۸) و (۳) و (۴) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_۱}{dt} \\ \frac{dV_۲}{dt} \\ \frac{dI_۱}{dt} \\ \frac{dI_۲}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \\ I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۶} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۶} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نکته۵: در صورتی که در مدار به جای ولتاژ خازن، بار خازن و به جای جریان سلف، شار سلف به عنوان متغیر حالت انتخاب شود، برطبق روش ذکر شده در ابتدای فصل، روابط معادلات حالت را برحسب ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها محاسبه کرده و در نهایت از روابط زیر استفاده کرده و به جای ولتاژ خازن، بار خازن و به جای جریان سلف، شار سلف را جایگزین می‌کنیم و معادلات حالت را بازنویسی می‌کنیم.

$$I_C = \frac{dQ}{dt} \qquad V_C = \frac{Q}{C} \qquad I_L = \frac{\phi}{L} \qquad V_L = \frac{d\phi}{dt}$$

مثال۲۳: در مدار زیر کدام گزینه بیانگر معادلات حالت است؟ (شار سلف‌ها و بار خازن به عنوان متغیر حالت انتخاب شود)



$$\begin{cases} R_۱=۳\Omega \\ R_۲=۴\Omega \\ L_۱=۲H \\ L_۲=۱H \\ C=۲F \end{cases}$$

۱) $$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۲\\ -۱ & -\frac{۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۸\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

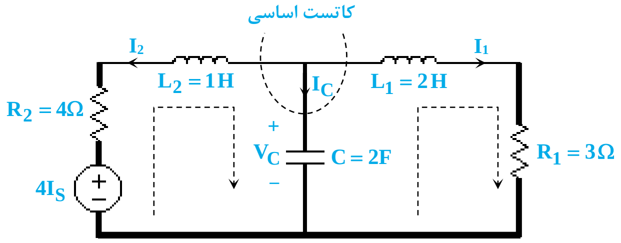
۲) $$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲}\\ ۰ & -۴ & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۴\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

۳) $$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & \frac{۱}{۴}\\ -۲ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸\\ -۱\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

۴) $$\begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & \frac{۱}{۴}\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}.I_S$$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

ابتدا تبدیل منابع را برای مقاومت $R_۲$ و منبع جریان I_S اعمال می‌کنیم. حال درختی را به صورتی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن بوده و سلف‌های مدار لینک‌های آن باشد. سپس معادلات حلقه‌های اساسی برای سلف‌ها و کاتست‌های اساسی برای خازن را می‌نویسیم.



برای نوشتن رابطه کاتست اساسی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{کاتست اساسی}: I_C+I_۱+I_۲=۰ \Rightarrow C\frac{dV_C}{dt}+I_۱+I_۲=۰ \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=\frac{-I_۱}{C}-\frac{I_۲}{C} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۲}I_۱-\frac{۱}{۲}I_۲ \quad (۱)$$

حال معادلات حلقه‌های اساسی را برای سلف‌های $L_۱$ و $L_۲$ می‌نویسیم.

$$(\text{حلقه اساسی سمت چپ}): -۴I_S-۴I_۲-L_۲\frac{dI_۲}{dt}+V_C=۰ \Rightarrow L_۲\frac{dI_۲}{dt}=-۴I_۲+V_C-۴I_S \Rightarrow \frac{dI_۲}{dt}=-۴I_۲+V_C-۴I_S \quad (۲)$$

$$(\text{حلقه اساسی سمت راست}): -V_C+L_۱\frac{dI_۱}{dt}+۳I_۱=۰ \Rightarrow ۲\frac{dI_۱}{dt}=-۳I_۱+V_C \Rightarrow \frac{dI_۱}{dt}=-\frac{۳}{۲}I_۱+\frac{۱}{۲}V_C \quad (۳)$$

با مرتب‌سازی روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{dI_۱}{dt}=-\frac{۳}{۲}I_۱+۰I_۲+\frac{۱}{۲}V_C+۰\,I_S \quad , \quad \frac{dI_۲}{dt}=۰\,I_۱-۴I_۲+V_C-۴I_S \quad , \quad \frac{dV_C}{dt}=-\frac{۱}{۲}I_۱-\frac{۱}{۲}I_۲+۰V_C+۰I_S$$

با توجه به این که متغیرهای حالت شار سلف‌ها و بار خازن است، لازم است که روابط بالا برحسب شار سلف‌ها و بار خازن مرتب شود. لذا داریم:

$$\phi_۱=L_۱.I_۱ \quad \text{و} \quad \phi_۲=L_۲.I_۲ \quad \text{و} \quad q=C.V_C \Rightarrow I_۱=\frac{\phi_۱}{L_۱}=\frac{\phi_۱}{۲} \quad \text{و} \quad I_۲=\frac{\phi_۲}{L_۲}=\phi_۲ \quad \text{و} \quad V_C=\frac{q}{۲}$$

حال با جایگذاری روابط بالا در معادلات حالت و مرتب‌سازی آنها داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{d(\frac{\phi_۱}{۲})}{dt}=-\frac{۳}{۲}(\frac{\phi_۱}{۲})+۰\phi_۲+\frac{۱}{۲}(\frac{q}{۲})+۰\,I_S \\ \dfrac{d(\phi_۲)}{dt}=۰(\frac{\phi_۱}{۲})-۴\phi_۲+\frac{q}{۲}-۴I_S \\ \dfrac{d(\frac{q}{۲})}{dt}=-\frac{۱}{۲}(\frac{\phi_۱}{۲})-\frac{۱}{۲}\phi_۲+۰(\frac{q}{۲})+۰I_S\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{d\phi_۱}{dt}\\ \frac{d\phi_۲}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲}\\ ۰ & -۴ & \frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲} & -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_۱\\ \phi_۲\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ -۴\\ ۰\end{bmatrix}.I_S$$

تابع $f(t)$	مثال برای $F(S)$	$f(t)$	$F(S)$
$۳r(t)$	$\frac{۳}{S^۲}$	$kr(t)$	$\frac{k}{S^۲}$
$۳u(t)$	$\frac{۳}{S}$	$ku(t)$	$\frac{k}{S}$
$۲\delta(t)$	۲	$k\delta(t)$	k
$۵\delta'(t)$	$۵S$	$K\delta'(t)$	kS
$۶e^{۲t}u(t)$	$\frac{۶}{S-۲}$	$ke^{at}u(t)$	$\frac{k}{S-a}$
$۴e^{-۷t}u(t)$	$\frac{۴}{S+۷}$	$ke^{-at}u(t)$	$\frac{k}{S+a}$
$t^۲u(t)$	$\frac{۲}{S^۳}$	$\frac{k}{(n-۱)!}t^{n-۱}u(t)$	$\frac{k}{S^n}$
$\frac{۹}{۲}\sin ۲t\ u(t)$	$\frac{۹}{S^۲+۴}$	$\frac{k}{a}\sin at\ u(t)$	$\frac{k}{S^۲+a^۲}$
$۹\cos ۳t\ u(t)$	$\frac{۹S}{S^۲+۹}$	$k\cos at\ u(t)$	$\frac{kS}{S^۲+a^۲}$

برای عکس تبدیل لاپلاس کسرهای گویا که صورت و مخرج آن شامل یک چندجمله‌ای برحسب S هستند $(F(S)=\frac{X(S)}{Y(S)})$، ابتدا لازم است که کسر مذکور را به اجزای کوچکتر تجزیه کنیم. لازم به ذکر است که در روش تجزیه کسر به صورت کسرهای جزئی، همواره باید درجه صورت کسر از مخرج کسر کمتر باشد. در غیر این صورت باید صورت کسر را به مخرج آن تقسیم کنید تا در کسرهای بدست آمده از تقسیم، درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر کوچکتر شود. در صورتی‌که $X(S)$ بر $Y(S)$ تقسیم شود، نتیجه به صورت روبرو خواهد بود:

$$F(S)=\frac{X(S)}{Y(S)}=N(S)+\frac{P(S)}{Q(S)}$$

حال کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به صورت کسرهای جزئی تجزیه می‌شود و عکس تبدیل لاپلاس تابع $N(S)$ نیز با توجه به جدول عکس تبدیل لاپلاس بدست می‌آید.

در ادامه، روش تجزیه کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به صورت کسرهای جزئی را ارائه می‌دهیم.

روش تجزیه کسر به صورت کسرهای جزئی برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس

در صورتی که بخواهیم کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ را به صورت کسرهای جزئی تجزیه کنیم، پس از اطمینان از این‌که درجه $P(S)$ از $Q(S)$ کمتر است، به مخرج کسر که همان $Q(S)$ باشد توجه می‌کنیم. حال برحسب نوع ریشه‌های $Q(S)$ حالت‌های زیر طبقه‌بندی می‌شوند.

حالت اول: مخرج کسر دارای دو یا چند ریشه حقیقی از مرتبه ۱ باشد.

در این حالت به تعداد عبارت‌های درجه اول، کسر جزئی در سمت راست تساوی قرار می‌دهیم و در صورت هر یک از این کسرها، ضریب مجهولی که یک عدد ثابت است را قرار می‌دهیم. در صورتی که $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به صورت زیر فرض شود، داریم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{P(S)}{\prod_{i=۱}^{n}(S+S_i)}=\frac{P(S)}{(S+S_۱)(S+S_۲)(S+S_۳)...(S+S_n)}$$

حال برای تجزیه کسر $\frac{P(S)}{Q(S)}$ به کسرهای جزئی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{k_i}{(S+S_i)}=\frac{k_۱}{S+S_۱}+\frac{k_۲}{S+S_۲}+\frac{k_۳}{S+S_۳}+\cdots+\frac{k_n}{S+S_n}$$

در روابط بالا k_iها، مانده $F(S)$ در $S=-S_i$ بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_i=\lim_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S)$$

حالت دوم: مخرج کسر دارای ریشه حقیقی مکرر از مرتبه n باشد.

در این حالت نیز مشابه با همان روش قبل، کسر را تفکیک می‌کنیم و برای پرانتزی که به توان m رسیده است، m کسر را در نظر می‌گیریم؛ بدین صورت که یک بار کسری با عددی مجهول در صورت کسر و عبارتی با توان m در مخرج و یک بار دیگر کسری با عدد مجهول در صورت کسر و عبارتی با توان $m-۱$ در مخرج کسر خواهیم داشت. این روند را تا یک شدن توان مخرج کسر ادامه می‌دهیم. در صورت وجود ریشه‌های غیرتکراری در کنار ریشه‌های تکراری در مخرج کسر، روش تجزیه کسر برای ریشه‌های غیرتکراری مانند حالت اول انجام می‌شود.

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{P(S)}{(S+S_j)^m\prod_{i=۱}^{n}(S+S_i)}=\frac{P(S)}{(S+S_j)^m(S+S_۱)(S+S_۲)(S+S_۳)\ldots(S+S_n)}$$

برای تجزیه کسر بالا به صورت کسرهای جزئی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F(S)=\frac{P(S)}{Q(S)}=\frac{A_m}{(S+S_j)^m}+\frac{A_{m-۱}}{(S+S_j)^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_۱}{(S+S_j)}+\frac{k_۱}{(S+S_۱)}+\frac{k_۲}{(S+S_۲)}+\cdots+\frac{k_i}{(S+S_i)}$$

در این حالت، ضرایب A_m تا $A_۱$ و $k_۱$ تا k_i به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_i=\lim_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S) \qquad \text{و} \qquad A_m=\lim_{S\to -S_j}(S+S_j)^m F(S)$$

$$A_{m-۱}=\lim_{S\to -S_j}\frac{d}{dS}[(S+S_j)^m F(S)] \qquad \text{و} \qquad A_{m-۲}=\frac{۱}{۲!}\lim_{S\to -S_j}\frac{d^۲}{dS^۲}[(S+S_j)^m F(S)]$$

مرتبه‌ی مشتق‌گیری برابر با اختلاف m و درجه‌ی مخرج A_{m-i} است.

$$A_{m-i}=\frac{۱}{i!}\lim_{S\to -S_j}\frac{d^i}{ds^i}[(S+S_j)^m F(S)]$$

مثال ۸: اگر تبدیل لاپلاس ولتاژ $V(t)$ به صورت $V(S)=\frac{۱}{S^۲(S+۱)}$ بیان شده باشد، آنگاه معادله زمانی ولتاژ آن کدام است؟

۱) $V(t)=(t+e^{-t}-۱)u(t)$

۲) $V(t)=(t+e^{-t}+۱)u(t)$

۳) $V(t)=(t-e^{-t}+۱)u(t)$

۴) $V(t)=(t-e^{-t}-۱)u(t)$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با تجزیه کسر $V(S)$ به صورت مقابل داریم:

$$V(S)=\frac{۱}{S^۲(S+۱)}=\frac{A}{S^۲}+\frac{B}{S}+\frac{C}{S+۱}$$

حال ضرایب A و B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\lim_{S\to ۰}S^۲V(S)=\lim_{S\to ۰}S^۲\frac{۱}{S^۲(S+۱)}=۱$$

$$B=\lim_{S\to ۰}\frac{d(S^۲V(S))}{dS}=\lim_{S\to ۰}\frac{d}{dS}(S^۲\times\frac{۱}{S^۲(S+۱)})=\lim_{S\to ۰}(-\frac{۱}{(S+۱)^۲})=-۱$$

$$C=\lim_{S\to -۱}(S+۱)V(S)=\lim_{S\to -۱}(S+۱)\frac{۱}{S^۲(S+۱)}=۱\Rightarrow V(S)=\frac{۱}{S^۲(S+۱)}=\frac{۱}{S^۲}-\frac{۱}{S}+\frac{۱}{S+۱}\Rightarrow \mathbf{V(t)=L^{-۱}[V(S)]=(t-۱+e^{-t})u(t)}$$

مثال ۹: تابع زمانی $f(t)$ که تبدیل لاپلاس آن $F(S)=\frac{S^۲+۳S+۵}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}$ است، را بدست آورید.

۱) $[۱/۵e^{-t}-e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t}]u(t)$

۲) $[۱/۵e^{-t}-۳e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t}]u(t)$

۳) $[e^{-t}-۳e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t}]$

۴) $[-e^{-t}-e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t}]$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» در این حالت کسر را با توجه به مواردی که بیان شد، تفکیک کرده و سپس با ضرایب مجهول، مخرج مشترک می‌گیریم.

$$F(S)=\frac{S^۲+۳S+۵}{(S+۱)(S+۲)(S+۳)}=\frac{A}{(S+۱)}+\frac{B}{(S+۲)}+\frac{C}{(S+۳)}$$

پس از مخرج مشترک گرفتن و حذف مخرج از طرفین تساوی، داریم: $\Rightarrow \quad S^{۲}+۳S+۵=A(S+۲)(S+۳)+B(S+۱)(S+۳)+C(S+۱)(S+۲)$

تساوی فوق به ازای تمامی Sها برقرار است؛ لذا با انتخاب Sهای مناسب (که معمولاً از عامل‌های صفرشونده عبارت انتخاب می‌شوند)، می‌توانیم ضرایب مجهول را تعیین کنیم:

$$S=-۲ \quad \Rightarrow \quad (-۲)^{۲}+۳(-۲)+۵=B(-۲+۱)(-۲+۳) \quad \Rightarrow \quad B=-۳$$

$$S=-۳ \quad \Rightarrow \quad (-۳)^{۲}+۳(-۳)+۵=C(-۳+۱)(-۳+۲) \quad \Rightarrow \quad C=۲/۵$$

$$S=-۱ \quad \Rightarrow \quad (-۱)^{۲}+۳(-۱)+۵=A(-۱+۲)(-۱+۳) \quad \Rightarrow \quad A=۱/۵$$

$$f(t)=L^{-۱}[F(S)]=L^{-۱}\left[\frac{۱/۵}{S+۱}-\frac{۳}{S+۲}+\frac{۲/۵}{S+۳}\right]=[۱/۵e^{-t}-۳e^{-۲t}+۲/۵e^{-۳t}]u(t)$$

نکته۱: برای بدست آوردن ضرایب مجهول در روش تجزیه کسرها، می‌توان از روش متحد قرار دادن نیز استفاده کرد. در این روش، ابتدا کسر را به صورت کسرهای جزیی با ضرایب ثابت تجزیه می‌کنیم. سپس از قسمت تجزیه شده، مخرج مشترک می‌گیریم و آن را برابر با کسر اصلی قرار می‌دهیم. حال در طرفین رابطه بدست آمده با قرار دادن چند عدد به جای S، چند معادله برای بدست آوردن ضرایب ثابت بدست آورده و از حل آنها ضرایب ثابت را محاسبه می‌کنیم.

حالت سوم: مخرج کسر شامل یک عبارت درجه دوم با ریشه‌های مختلط باشد.

در این حالت باید متناظر با عبارت درجه دوم در مخرج کسر اصلی، یک کسر که در صورت آن عبارتی به شکل $AS+B$ قرار دارد و مخرج آن شامل همان عبارت درجه دوم است، قرار دهیم و برای بقیه کسرها که دارای ریشه‌های حقیقی هستند، از دو حالت قبل استفاده کنیم. به مثال پارامتری زیر دقت کنید:

$$F(S)=\frac{M}{(S^{۲}+\beta S+\alpha)(S+S_i)}=\frac{AS+B}{S^{۲}+\beta S+\alpha}+\frac{k}{S+S_i}$$

در اینجا ضریب k مانند حالت اول، محاسبه می‌شود. $k=\lim\limits_{S\to -S_i}(S+S_i)F(S)$

پس از بدست آمدن ضریب k، برای محاسبه ضرایب B و A می‌توانیم دو عدد (مثلاً $S=۱$ و $S=۰$) را به جای S در طرفین رابطه قرار دهیم و با تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول، ضرایب A و B را بدست آوریم.

همچنین دقت کنید زمانی که کسری به‌صورت $F(S)=\dfrac{P(S)}{S^{۲}+aS+b}$ با ریشه‌های مختلط در مخرج کسر داریم، باید F(S) را به صورت $\dfrac{k_{۱}(S+\alpha)+k_{۲}\omega}{(S+\alpha)^{۲}+\omega^{۲}}$ درآورده و سپس از روابط موجود برای محاسبه $L^{-۱}[F(S)]$ استفاده کنیم.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

فرض کنید می‌خواهیم مقادیر اولیه یا نهایی پاسخ یک مدار را صرفاً با داشتن F(S) (پاسخ مدار در حوزه لاپلاس) و بدون محاسبه f(t) به دست آوریم؛ در این‌صورت می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم. لازم به ذکر است که قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی زمانی صادق است کـه f(t) شامل تابع ضربه یا مشتقات تابع ضربه نباشد. همچنین f(t) باید علّی باشد یعنی در $t<۰$ برابر صفر باشد.

قضیه مقدار اولیه : $f(۰^{+})=\lim\limits_{t\to ۰^{+}}f(t)=\lim\limits_{S\to\infty}SF(S)$

قضیه مقدار نهایی : $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{S\to ۰}SF(S)$

مثال۱۰: اگر تبدیل لاپلاس V(t) به شکل $V(S)=\dfrac{۱۰(S^{۲}+۱)}{(S+۲)(۴S^{۲}+S+۱)}$ باشد، مقدار $V(t=۰^{+})$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲/۵ ۴) صفر

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم:

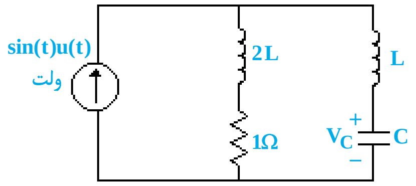
$$V(t=۰^{+})=\lim_{S\to\infty}SV(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{۱۰S(S^{۲}+۱)}{(S+۲)(۴S^{۲}+S+۱)}=\lim_{S\to\infty}\frac{۱۰S^{۳}}{۴S^{۳}}=۲/۵$$

با قرار دادن $S = j\omega$ در رابطه بالا داریم:

$$۲+\frac{۱}{j\omega C}=\frac{۲۰}{j\omega+۵} \Rightarrow ۲+\frac{-j}{\omega C}=\frac{۱۰۰}{۲۵+\omega^۲}-j\frac{۲۰\omega}{۲۵+\omega^۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲=\dfrac{۱۰۰}{۲۵+\omega^۲} \\ \dfrac{۱}{\omega C}=\dfrac{۲۰\omega}{۲۵+\omega^۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega=۵(\dfrac{rad}{sec}) \\ \dfrac{۱}{۵C}=\dfrac{۲۰\times ۵}{۲۵+۵^۲} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C=۰/۱F}$$

مثال ۳۸: در مدار زیر، با فرض صفر بودن جریان اولیه هر دو سلف، مقدار ولتاژ اولیه خازن $V_C(۰)$ برحسب ولت را به نحوی بیابید که جریان مقاومت برای $t \geq ۰$ برابر صفر باشد. در این حالت مقدار سلف L برحسب هانری کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)



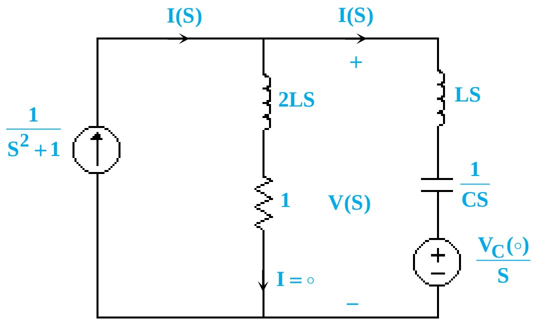
۱) $L=\frac{۱}{C}\ ,\ V_C(۰)=-\frac{۱}{C}$

۲) $L=\frac{۲}{C}\ ,\ V_C(۰)=۰$

۳) $L=\frac{۱}{C}\ ,\ V_C(۰)=\frac{۱}{C}$

۴) $L=\frac{۲}{C}\ ,\ V_C(۰)=-\frac{۱}{C}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» صفر بودن جریان مقاومت در شاخه وسط به معنای صفر بودن ولتاژ دو سر این شاخه در زمان $t \geq ۰$ است. این حالت زمانی رخ می‌دهد که ولتاژ مدار LC سری در سمت راست برابر صفر و البته جریانش برابر $\sin(t)u(t)$ باشد تا جریانی به شاخه وسط مدار تزریق نشود. حال با نوشتن روابط مربوط به شاخه سمت راست در حوزه S، ولتاژ اولیه خازن و مقدار سلف را پیدا می‌کنیم:



$$I(S)=\frac{۱}{S^۲+۱} \quad , \quad V(S)=(LS+\frac{۱}{CS})\times I(S)+\frac{V_C(۰)}{S}=۰$$

$$\Rightarrow (LS+\frac{۱}{CS})\times\frac{۱}{S^۲+۱}+\frac{V_C(۰)}{S}=\frac{LCS^۲+۱+CV_C(۰)(S^۲+۱)}{CS(S^۲+۱)}=\frac{[LC+CV_C(۰)]S^۲+CV_C(۰)+۱}{CS(S^۲+۱)}=۰$$

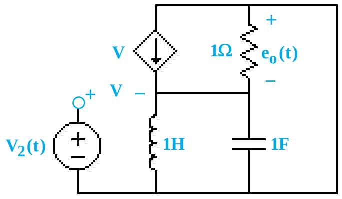
$$\Rightarrow \begin{cases} V_C(۰)=-\dfrac{۱}{C} \\ LC=-CV_C(۰)=۱ \Rightarrow L=\dfrac{۱}{C} \end{cases}$$

محاسبه پاسخ پله با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

برای محاسبه پاسخ پله در یک مدار، ابتدا منبع ورودی مدار را که ممکن است منبع ولتاژ یا منبع جریان باشد، به صورت تابع پله واحد فرض می‌کنیم. سپس مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. برای ترسیم مدار در حوزه فرکانس ابتدا لاپلاس تابع ورودی مدار (که همان $u(t)$ باشد) را جایگزین می‌کنیم و در ادامه مدار معادل المان‌های مدار را برطبق روش گفته شده در ابتدای فصل، در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. دقت کنید که برای محاسبه پاسخ پله مدار، لازم است که همه شرایط اولیه (ولتاژ خازن و جریان سلف) صفر فرض شود یا به عبارتی مدار در حالت صفر تحلیل گردد. حال با استفاده از قوانین فصل اول مدار مانند قوانین حلقه و گره، پاسخ خروجی مدار را محاسبه می‌کنیم. پس از محاسبه پاسخ پله در حوزه فرکانس، با استفاده از قانون عکس تبدیل لاپلاس، پاسخ پله را در حوزه زمان بدست می‌آوریم.

مثال ۳۹: در مدار الکتریکی شکل داده شده، پاسخ پله $e_o(t)$ برابر با کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۹)



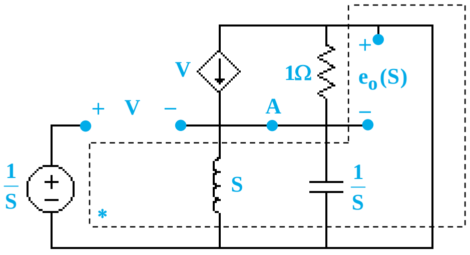
۱) $e^{-t}u(t)$

۲) $-te^{-t}u(t)$

۳) $(۱-e^{-t})u(t)$

۴) $(۱+te^{-t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با ترسیم مدار در حوزه فرکانس و نوشتن KVL در حلقه (*) داریم:



$$-\frac{۱}{S}+V-e_o(S)=۰ \Rightarrow e_o(S)=V-\frac{۱}{S} \quad (۱)$$

با نوشتن KCL در گره A داریم:

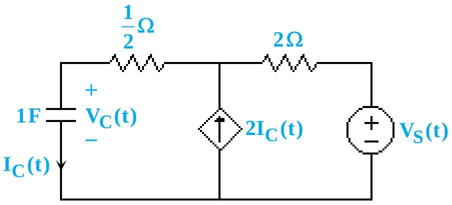
$$\frac{-e_o(S)}{۱}-Se_o(S)-\frac{e_o(S)}{S}=V \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow e_o(S)=+[-e_o(S)-Se_o(S)-\frac{e_o(S)}{S}]-\frac{۱}{S}\Rightarrow e_o(S)=-e_o(S)-Se_o(S)-\frac{e_o(S)}{S}-\frac{۱}{S}$$

$$\Rightarrow e_o(S)[۱+۱+S+\frac{۱}{S}]=-\frac{۱}{S}\Rightarrow e_o(S)=\frac{-\frac{۱}{S}}{S+\frac{۱}{S}+۲}=\frac{-۱}{S^۲+۲S+۱}\Rightarrow e_o(S)=-\frac{۱}{(S+۱)^۲}\Rightarrow \mathbf{e_o(t)=-te^{-t}u(t)}$$

مثال ۴۰: **در شکل زیر، پاسخ پله واحد $I_C(t)$، چگونه است؟**

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



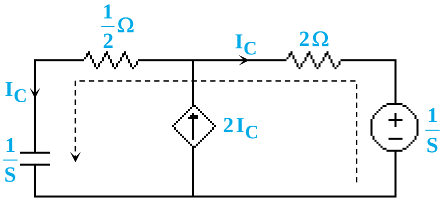
۱) $I_C(t)=-\frac{۲}{۳}e^{+\frac{۲}{۳}t}u(t)$

۲) $I_C(t)=-\frac{۳}{۲}e^{+\frac{۳}{۲}t}u(t)$

۳) $I_C(t)=\frac{۲}{۳}e^{-\frac{۲}{۳}t}u(t)$

۴) $I_C(t)=\frac{۳}{۲}e^{-\frac{۳}{۲}t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه پاسخ پله، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم و به جای منبع $V_S(t)$ لاپلاس تابع $u(t)$ را در مدار قرار می‌دهیم. حال با نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

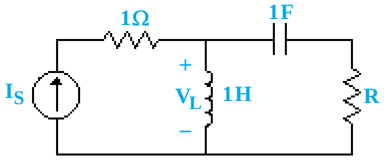


$$-\frac{۱}{S}-۲I_C+\frac{۱}{۲}I_C+\frac{۱}{S}I_C=۰\Rightarrow I_C(-۲+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{S})=\frac{۱}{S}$$

$$\Rightarrow I_C=\frac{۱}{۱-۱/۵S}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}S-۱}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۲}(S-\frac{۲}{۳})}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{S-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow \mathbf{I_C(t)=-\frac{۲}{۳}e^{\frac{۲}{۳}t}}$$

مثال ۴۱: **در مدار شکل زیر با تغییر آنی I_S به اندازه $\frac{۲}{۳}$ آمپر، ولتاژ V_L به اندازه ۲ ولت تغییر آنی می‌کند. مقاومت R چند اهم است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)



۱) $\frac{۳}{۲}$

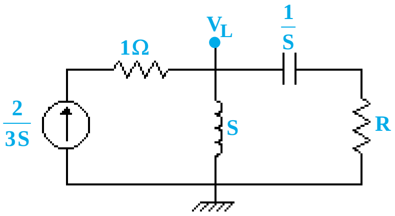
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه مقدار I_S به اندازه $\frac{۲}{۳}$ تغییر آنی دارد، می‌توان آن را به‌صورت $\frac{۲}{۳}u(t)$ فرض کرد. حال داریم:

(دقت شود که چون تغییرات مدنظر است، می‌توان شرایط اولیه را صفر فرض کرد)



$$V_L(S)=\frac{۲}{۳S}\times\left[S\|\left[R+\frac{۱}{S}\right]\right]\Rightarrow V_L(S)=\frac{۲}{۳S}\times\frac{S(R+\frac{۱}{S})}{R+\frac{۱}{S}+S}=\frac{۲RS+۲}{۳S^۲+۳RS+۳}$$

با توجه به اینکه V_L به اندازه ۲v تغییر آنی دارد، می‌توان $V_L(۰^+)=۲v$ فرض نمود. حال داریم:

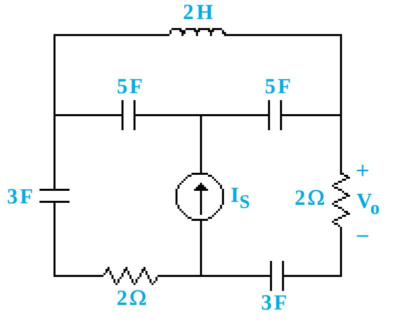
$$V_L(۰^+)=\lim_{S\to\infty}SV_L(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{۲RS^۲+۲S}{۳S^۲+۳RS+۳}\Rightarrow V_L(۰^+)=\frac{۲R}{۳}=۲v\Rightarrow \mathbf{R=۳\Omega}$$

شایان ذکر است که این تست را می‌توانستیم با یک تحلیل فیزیکی ساده و بدون انجام محاسبات فوق نیز جواب دهیم. تغییرات آنی منبع I_S به طور کامل به شاخه سمت راست که شامل مقاومت R و خازن می‌باشد، منتقل می‌شود، زیرا جریان سلف در این مدار نمی‌تواند به صورت آنی تغییر کند (دقت کنید که مدار نه منبع ولتاژ ضربه‌ای دارد و نه قابلیت تولید ولتاژ ضربه‌ای را). از طرف دیگر با توجه به ثابت بودن ولتاژ خازن در لحظه اول، تغییرات ولتاژ V_L برابر تغییرات ولتاژ دو سر مقاومت R خواهد بود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta V_L=R\Delta i_R\Rightarrow ۲=R\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow R=۳\Omega$$

مثال ۴۲: در شکل زیر، $V_o(t)$ کدام است؟ (تمامی مقادیر اولیه (ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف)، صفر می‌باشند.)

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)



$I_S(t) = u(t)$

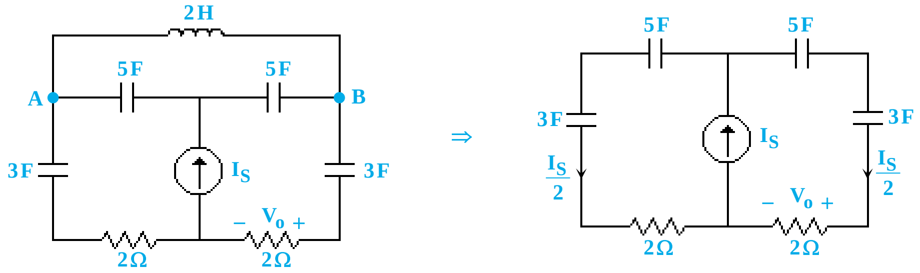
۱) $u(t)$

۲) $tu(t)$

۳) $\frac{۱}{۲}u(t)$

۴) $\frac{۱}{۲}tu(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به سری بودن خازن ۳ فاراد و مقاومت ۲ اهمی در سمت راست مدار، جای این دو المان را عوض می‌کنیم. حال مدار به صورت زیر خواهد بود. دقت کنید در این حالت به علت تقارن مدار ولتاژ نقاط A و B برابر است و از سلف ۲ هانری در بالای مدار جریان عبور نمی‌کند. بنابراین سلف ۲ هانری را حذف می‌کنیم و مدار را ساده می‌کنیم. در مدار ساده شده منبع جریان I_S دو مسیر مشابه را پیش روی خود دارد و به علت مشابه بودن مسیرها سهم هر مسیر برابر با نصف جریان I_S یا $\frac{u(t)}{۲}$ است.

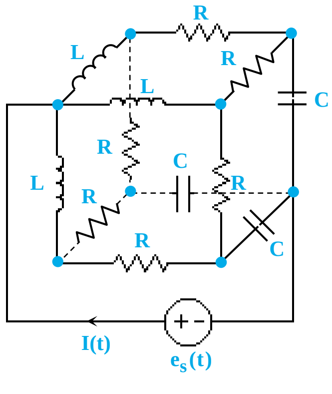


$$V_o = ۲\times\frac{I_S}{۲} = I_S = \mathbf{u(t)}$$

مثال ۴۳: در مدار شکل زیر سه سلف هر کدام به مقدار یک هانری، سه خازن هر کدام به مقدار دو فاراد و شش مقاومت هر کدام به مقدار سه اهم روی یال‌های یک مکعب قرار دارند. پاسخ حالت صفر جریان I گذرنده از منبع برای ورودی $e_S = u(t)$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۶)

$(C = ۲F, L = ۱H, R = ۳\Omega)$



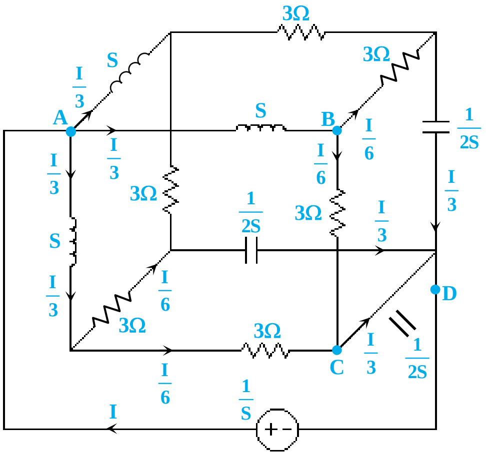
۱) $I(t) = (۲e^{-t} - ۲e^{-\frac{t}{۲}})u(t)$

۲) $I(t) = (-۲e^{-t} - ۲e^{-\frac{t}{۲}})u(t)$

۳) $I(t) = (-۶e^{-t} + ۶e^{-\frac{t}{۲}})u(t)$

۴) $I(t) = (۶e^{-t} - ۶e^{-\frac{t}{۲}})u(t)$

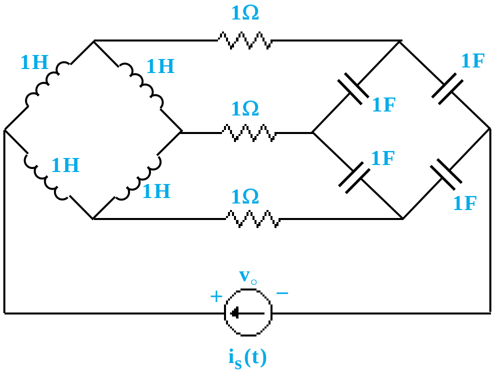
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» پس از مدل‌سازی مدار در فضای لاپلاس مشخص است که با توجه به تقارن مدار، جریان I در گره A به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود. همچنین جریان $\frac{I}{۳}$ در گره B به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. در گره D جمع سه جریان $\frac{I}{۳}$ مقدار جریان I را می‌سازد. با اعمال KVL در مسیر (A B C D) داریم:



$$\frac{۱}{S} = S\times\frac{I}{۳} + ۳\times\frac{I}{۶} + \frac{۱}{۲S}\times\frac{I}{۳}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{۶}{۲S^۲ + ۳S + ۱} = \frac{۳}{(S+۱)(S+\frac{۱}{۲})} = \frac{۶}{S+\frac{۱}{۲}} - \frac{۶}{S+۱} \Rightarrow \mathbf{I(t) = [۶e^{-\frac{۱}{۲}t} - ۶e^{-t}]u(t)}$$

مثال ۴۴: **در مدار زیر با $i_s = u(t)$، پاسخ حالت صفر $v_\circ$ کدام است؟ ($s_۱$ و $s_۲$ فرکانس‌های طبیعی مدار می‌باشند)** (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)



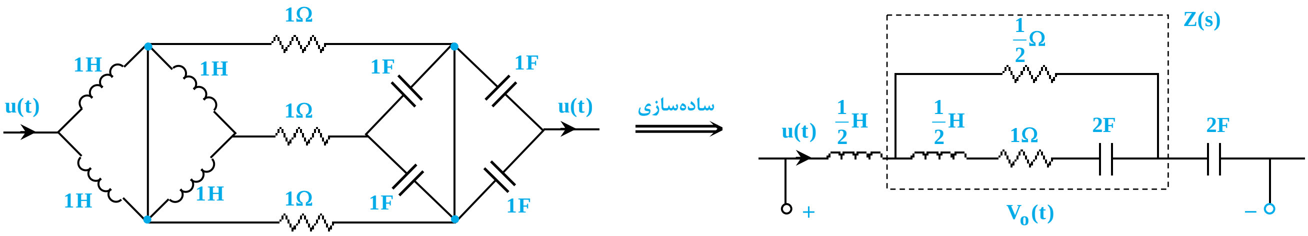
۱) $v_\circ(t) = \frac{۱}{۲}u(t) + tu(t) + k_۱e^{s_۱t} + k_۲e^{s_۲t}$

۲) $v_\circ(t) = \frac{۱}{۲}\delta(t) + \frac{۱}{۲}tu(t) + k_۱e^{s_۱t} + k_۲e^{s_۲t}$

۳) $v_\circ(t) = \frac{۱}{۲}u(t) + \frac{۱}{۲}tu(t) + k_۱e^{s_۱t} + k_۲e^{s_۲t}$

۴) $v_\circ(t) = \frac{۱}{۲}\delta(t) + \frac{۱}{۲}u(t) + \frac{۱}{۲}tu(t) + k_۱e^{s_۱t} + k_۲e^{s_۲t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست از تقارن مدار بهره می‌گیریم. بدین منظور نقاط هم‌پتانسیل را به یکدیگر متصل می‌کنیم و سپس در فضای لاپلاس، V_o را محاسبه می‌کنیم:



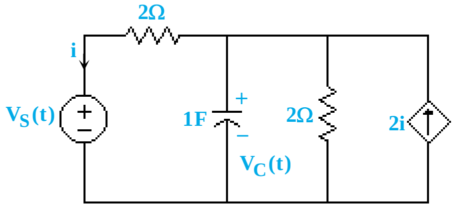
$$Z(S) = \frac{\frac{۱}{۲}\times(\frac{S}{۲}+۱+\frac{۱}{۲S})}{\frac{S}{۲}+۱+\frac{۱}{۲S}+\frac{۱}{۲}} = \frac{S^۲+۲S+۱}{۲(S^۲+۳S+۱)} = \frac{۱}{۲} - \frac{S}{۲(S^۲+۳S+۱)}$$

$$V_o(S) = \frac{۱}{S}\times[\frac{S}{۲}+(\frac{۱}{۲}-\frac{S}{۲(S^۲+۳S+۱)})+\frac{۱}{۲S}] = \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲S}+\frac{۱}{۲S^۲}-\frac{۱}{۲(S^۲+۳S+۱)} \Rightarrow V_o(t) = \frac{\delta(t)}{۲}+\frac{u(t)}{۲}+\frac{tu(t)}{۲}+\underbrace{L^{-۱}\{\frac{-۱}{۲(S^۲+۳S+۱)}\}}_{K_۱e^{S_۱t}+k_۲e^{S_۲t}}$$

محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

برای محاسبه پاسخ ضربه در یک مدار، ابتدا منبع ورودی مدار را به صورت تابع ضربه در نظر می‌گیریم. در این حالت شرایط اولیه (ولتاژ خازن و جریان سلف) را صفر فرض می‌کنیم؛ به عبارت بهتر می‌توان گفت که برای محاسبه پاسخ ضربه، مدار را در حالت صفر فرض می‌کنیم. در ادامه برای ترسیم مدار در حوزه فرکانس، ابتدا لاپلاس تابع ورودی (که همان $\delta(t)$ باشد) را محاسبه کرده و به عنوان منبع ورودی مدار در حوزه فرکانس در نظر می‌گیریم. سپس بقیه المان‌های مدار را با استفاده از قوانین ذکر شده در ابتدای فصل، در حوزه فرکانس معادل‌گذاری می‌کنیم. حال با تحلیل مدار در حوزه فرکانس، و با استفاده از قضیه عکس تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه را در حوزه زمان محاسبه می‌کنیم.

مثال ۴۵: **در مدار روبه‌رو، پاسخ ضربه ولتاژ دو سر خازن $V_C(t)$ برابر کدام است؟** (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)



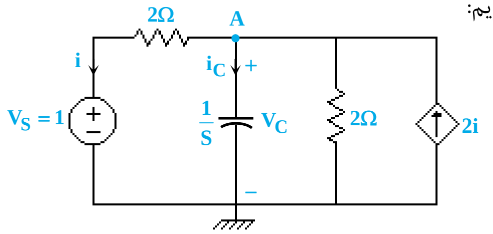
۱) $-\circ/۵t\delta(t)$

۲) $-\circ/۵u(t)$

۳) $-\circ/۵u(t)-\circ/۵t\delta(t)$

۴) $-\circ/۵tu(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای حل این تست مدار را در فضای S مدل کرده و V_C را به‌دست می‌آوریم:

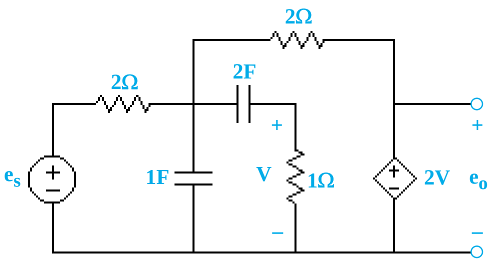


$$KCL(A): i_C = ۲i - i - \frac{V_C}{۲} \xrightarrow{i=\frac{V_C-۱}{۲}\ ,\ i_C=SV_C}$$

$$SV_C = \frac{V_C-۱}{۲} - \frac{V_C}{۲} \Rightarrow V_C = -\frac{۱}{۲S} \Rightarrow V_S(t) = -\frac{u(t)}{۲}$$

مثال ۴۶: **پاسخ ضربه $e_o(t)$ در مدار زیر کدام است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)



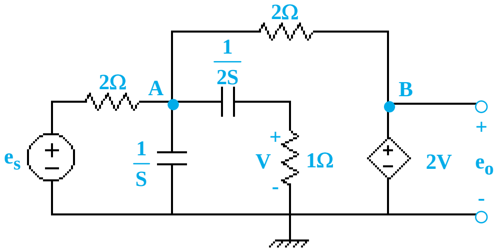
۱) $(۲e^{-t}-e^{-۰/۵t})u(t)$

۲) $۲te^{-t}u(t)$

۳) $(e^{-t}-e^{-۰/۵t})u(t)$

۴) $۲e^{-t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» مدار را در فضای S مدل نموده، با نوشتن KCL در گره A داریم:



$$V_B=۲V$$

$$\frac{V_A}{\frac{۱}{S}}+\frac{V_A}{\frac{۱}{۲S}+۱}+\frac{V_A-e_S}{۲}+\frac{V_A-۲V}{۲}=۰ \qquad (۱)$$

با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V=\frac{V_A\times ۱}{۱+\frac{۱}{۲S}} \Rightarrow V_A=V(۱+\frac{۱}{۲S}) \qquad (۲)$$

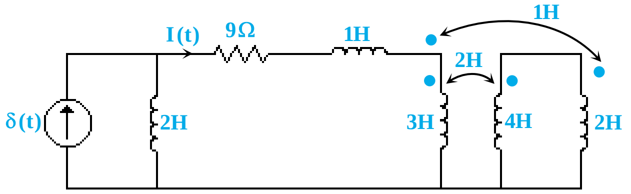
با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) داریم:

$$\frac{V(۱+\frac{۱}{۲S})}{\frac{۱}{S}}+\frac{V(۱+\frac{۱}{۲S})}{\frac{۱}{۲S}+۱}+\frac{V(۱+\frac{۱}{۲S})-e_S}{۲}+\frac{V(۱+\frac{۱}{۲S})-۲V}{۲}=۰ \quad , \quad e_s(t)=\delta(t)\Rightarrow e_s(S)=۱$$

$$\Rightarrow V=\frac{S}{(S+۱)(۲S+۱)}=\frac{۱}{S+۱}+\frac{-\frac{۱}{۲}}{S+\frac{۱}{۲}} \Rightarrow V(t)=e^{-t}-\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}t} \quad , \quad \mathbf{e_o(t)=۲V(t)=(۲e^{-t}-e^{-\frac{t}{۲}})u(t)}$$

مثال ۴۷: **پاسخ ضربه جریان $I(t)$ مدار شکل زیر چگونه است؟**

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۰)



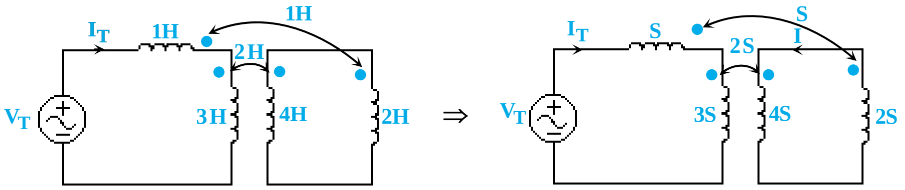
۱) $\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۲) $\frac{۴}{۹}\delta(t)+\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۳) $\frac{۲}{۹}\delta(t)-\frac{۴}{۹}e^{-۲t}u(t)$

۴) $\frac{۲}{۹}\delta(t)+\frac{۴}{۹}e^{-۲t}u(t)$

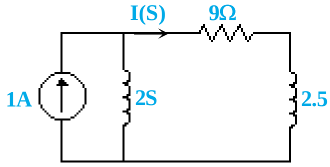
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا سلف معادل در سمت راست مدار را بدست می‌آوریم. برای این کار مدار را در فضای S مدل کرده و منبع تست V_T را به آن متصل می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه‌های مدار داریم:

$$\begin{cases} V_T=SI_T+۳SI_T+۲SI+SI & (۱) \\ ۲SI+۴SI+۲SI_T+SI_T=۰ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱),(۲)} V_T=۲/۵I_TS \Rightarrow \frac{V_T}{I_T}=۲/۵S \Rightarrow \mathbf{L_{eq}=۲/۵H}$$

با جایگذاری L_{eq} در مدار داریم:



$$I(S)=۱\times\frac{۲S}{۲S+۹+۲/۵S} \Rightarrow I(S)=\frac{۲S}{۴/۵S+۹} \Rightarrow I(S)=\frac{۴/۵S}{۴/۵S+۹}\times\frac{۱}{۲/۲۵}$$

$$\Rightarrow I(S)=\frac{۱}{۲/۲۵}[۱-\frac{۹}{۴/۵S+۹}] \Rightarrow I(S)=\frac{۱}{۲/۲۵}[۱-\frac{۲}{S+۲}]$$

$$I(t)=\frac{۱}{۲/۲۵}[\delta(t)-۲e^{-۲t}u(t)] \Rightarrow \mathbf{I(t)=\frac{۴}{۹}\delta(t)-\frac{۸}{۹}e^{-۲t}u(t)}$$

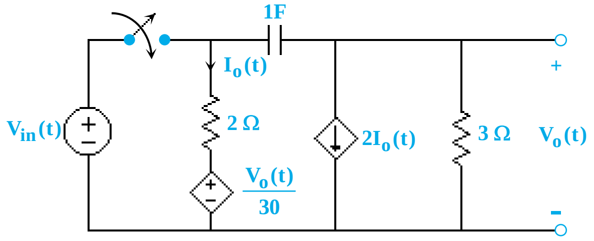
مثال ۴۸: **در مدار زیر پاسخ ضربه واحد کدام است؟**

۱) $\delta(t)-۱/۳e^{۰/۳t}u(t)$

۲) $\delta(t)-۱/۳^{-۰/۳t}u(t)$

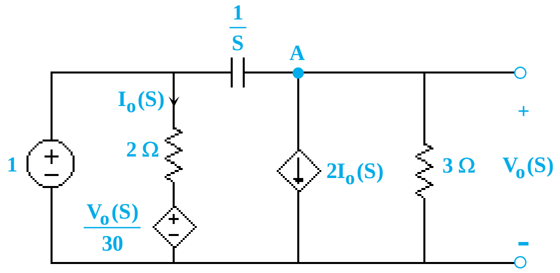
۳) $\delta(t)+۱/۳e^{۰/۳t}u(t)$

۴) $\delta(t)+۱/۳e^{-۰/۳t}u(t)$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن پاسخ ضربه، تابع $\delta(t)$ را به عنوان ورودی به مدار وصل می‌کنیم و مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم.

حال با اعمال KCL در گره A داریم: $(V_A=V_o(S))$



$$\frac{V_o(S)}{۳}+\frac{V_o(S)-۱}{\frac{۱}{S}}+۲I_o(S)=۰ \qquad (۱)$$

با توجه به قانون اهم جریان I_o را بدست می‌آوریم:

$$I_o(S)=\frac{۱-\frac{V_o(S)}{۳۰}}{۲} \qquad (۲)$$

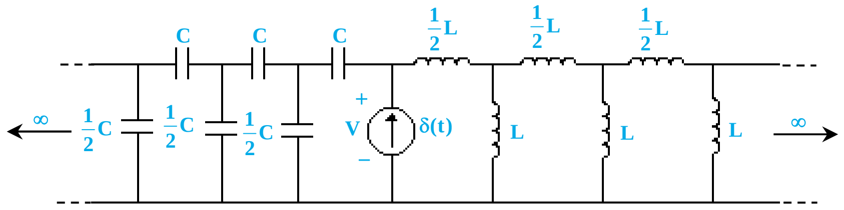
از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{V_o(S)}{۳}+S(V_o(s)-۱)+۲\left(\frac{۱-\frac{V_o(S)}{۳۰}}{۲}\right)=۰ \Rightarrow V_o(S)[\frac{۱}{۳}+S-\frac{۱}{۳۰}]=S-۱$$

$$\Rightarrow V_o(S)=\frac{S-۱}{S+۰/۳}=\frac{S+۰/۳-۰/۳-۱}{S+۰/۳} \Rightarrow V_o(S)=۱-\frac{۱/۳}{S+۰/۳} \Rightarrow \mathbf{V_o(t)=\delta(t)-۱/۳e^{-۰/۳t}u(t)}$$

مثال ۴۹: **مدار شکل زیر، از هر دو طرف به سمت بینهایت می‌رود. با شرایط اولیه صفر، معادله‌ی ولتاژ دو سر منبع جریان ضربه برای $t>۰$ برابر کدام است؟**

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)



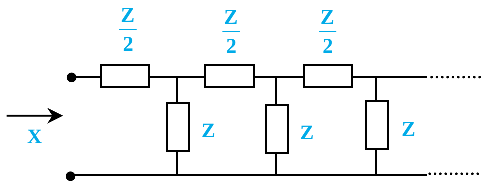
۱) $\frac{۲}{C}\sin\sqrt{\frac{۲}{LC}}t$

۲) $\frac{۱}{C}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$

۳) $\frac{۱}{C}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$

۴) $\frac{۲}{C}\cos\sqrt{\frac{۲}{LC}}t$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدار زیر را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم امپدانس معادل X را بدست آوریم:



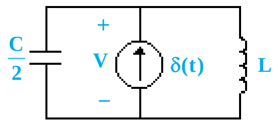
با توجه به نامحدود بودن مدار می‌توان نوشت:

$$X=\frac{Z}{۲}+Z\,||\,X=\frac{Z}{۲}+\frac{XZ}{X+Z}\xrightarrow{\times(X+Z)}X^۲+XZ=\frac{Z^۲}{۲}+\frac{XZ}{۲}+XZ\Rightarrow X^۲-\frac{XZ}{۲}-\frac{Z^۲}{۲}=۰$$

$$X=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{Z}{۲}\pm\sqrt{\frac{Z^۲}{۴}-۴\times۱\times\left(-\frac{Z^۲}{۲}\right)}\right)\Rightarrow\begin{cases}X=Z\\X=-\frac{Z}{۲}\end{cases}$$

از دو مقدار به دست آمده برای X تنها مقدار اول یعنی $X=Z$ قابل قبول می‌باشد. حال با توجه به نتایج این محاسبات می‌توان هم شبکه سلفی و هم شبکه خازنی را براحتی مدل کرد:

$$L_{eq}=L \quad C_{eq}=\frac{C}{۲}$$



دقت کنید که امپدانس Z را در شبکه سلفی باید LS و در شبکه خازنی بایـد $\frac{۲}{CS}$ در نظر گرفت. با جایگذاری سلف و خازن معادل مداری به شکل روبرو خواهیم داشت:

حال به سادگی می‌توان ولتاژ دو سر منبع جریان را محاسبه نمود:

$$V(S)=۱\times\frac{LS\times\frac{۲}{CS}}{LS+\frac{۲}{CS}}=\frac{۲LS}{LCS^{۲}+۲}=\frac{\frac{۲}{C}S}{S^{۲}+\frac{۲}{LC}}\quad\Rightarrow V(t)=\frac{۲}{C}\cos\sqrt{\frac{۲}{LC}}t$$

محاسبه معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده پاسخ مدار با استفاده از تبدیل لاپلاس

همان‌طور که در فصل مدارهای مرتبه اول و دوم دیدیم، محاسبه معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده پاسخ مدار در حـوزه زمـان بـرای مـدارهای پیچیـده‌تـر از مدار RLC سری یا موازی بسیار وقت‌گیر است. درصورتی که اگر از روش تـبدیل لاپـلاس بـرای محاسـبه معادلـه دیفرانسـیل اسـتفاده کـنیم، زودتـر و بـا محاسبات کمتر به جواب خواهیم رسید. برای محاسبه معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده پاسخ مدار به روش زیر عمل می‌کنیم:

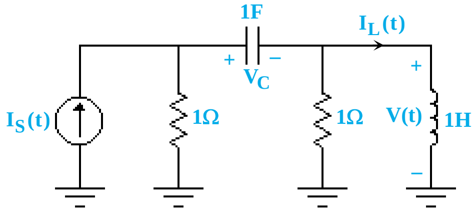
۱) ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم می‌کنیم. بدیهی است که در این حالت تابع ورودی مدار به صورت پارامتری در معادلات استفاده می‌شود.

۲) با استفاده از قوانین فصل اول مانند KVL یا KCL یا روش تحلیل حلقه و گره و حتی قضایای تونن و نورتن، پاسخ مـدار را برحسـب مـوج ورودی بـه صورت پارامتری در حوزه فرکانس محاسبه می‌کنیم.

۳) در ادامه با ضرب طرفین و وسطین، پاسخ مدار را با ضرایب آن در یک طرف مساوی قرار می‌دهیم و در طرف دیگر مساوی، تابع پارامتری مـوج ورودی را با ضرایب خودش قرار می‌دهیم.

۴) حال با جایگذاری $S=\frac{d}{dt}$ و $S^{۲}=\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}$ و یا به صورت کلی $S^{n}=\frac{d^{n}}{dt^{n}}$ در طرفین رابطه بدست آمده، معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده پاسخ مدار را بدست می‌آوریم.

مثال ۵۰: در مدار زیر معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $V(t)$ و $I_S(t)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



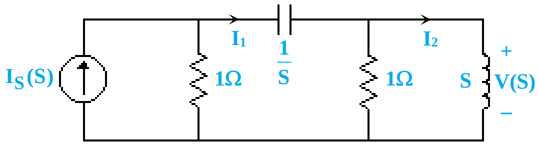
۱) $\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}}+۲\frac{dV}{dt}+V=\frac{d^{۲}I_S}{dt^{۲}}$

۲) $۲\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}}+۲\frac{dV}{dt}+V=۲\frac{d^{۲}I_S}{dt^{۲}}$

۳) $۲\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}}+۲\frac{dV}{dt}+V=\frac{d^{۲}I_S}{dt^{۲}}$

۴) $\frac{d^{۲}V}{dt^{۲}}+\frac{dV}{dt}+V=۲\frac{d^{۲}I_S}{dt^{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا مدار را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم و با اسـتفاده از قانون تقسیم جریان، $I_۱$ و سپس $I_۲$ را محاسبه می‌کنیم.



$$I_۱=I_S(S)\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}+\frac{S}{S+۱}}$$

$$I_۲=I_۱\times\frac{۱}{۱+S}\quad و \quad V(S)=I_۲\times S\quad و \quad I_۲=I_S(S)\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}+\frac{S}{S+۱}}\times\frac{۱}{۱+S}\quad\Rightarrow\quad V(S)=I_S(S)\times\frac{۱}{۱+\frac{۱}{S}+\frac{S}{S+۱}}\times\frac{S}{S+۱}$$

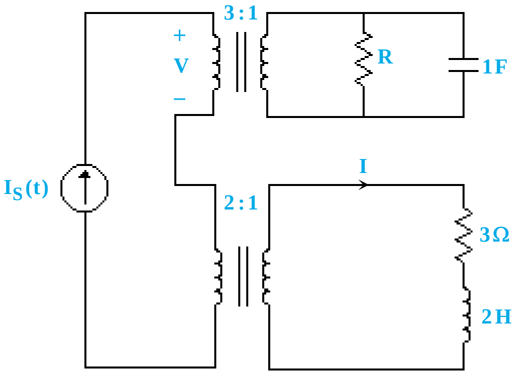
با ساده‌سازی رابطه بالا داریم:

$$\frac{S^{۲}I_S(S)}{۲S^{۲}+۲S+۱}=V(S)\quad\Rightarrow\quad(۲S^{۲}+۲S+۱)V(S)=S^{۲}I_S(S)$$

حال از روی معادله بالا، معادله دیفرانسیل به صورت روبرو نوشته می‌شود:

$$۲\frac{d^{۲}V(t)}{dt^{۲}}+۲\frac{dV(t)}{dt}+V(t)=\frac{d^{۲}I_S(t)}{dt^{۲}}$$

مثال ۷: **در مدار زیر R بر حسب اهم کدام باشد تا فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد؟**



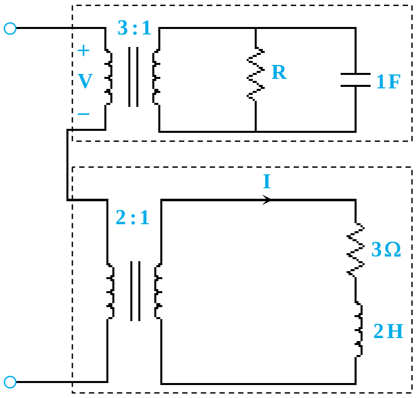
۱) $\frac{۹}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱۰}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۱۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به اینکه مدار شامل دو قسمت مجزا و مرتبه اول است، می‌توان فرکانس طبیعی مربوط به هر متغیر را در هر قسمت به طور جداگانه محاسبه کرد. در این حالت انتخاب نوع متغیر در هر قسمت تأثیری در فرکانس طبیعی ندارد و فرکانس طبیعی بدست آمده برای هر قسمت، به ازای انتخاب هر نوع متغیر ولتاژ و یا جریان یکسان می‌باشد. حال ابتدا منبع جریان مستقل مدار را غیرفعال می‌کنیم و معادله مشخصه هر قسمت را جداگانه می‌نویسیم. در این حالت با توجه به این که انتخاب متغیر در هر قسمت اختیاری است، نیازی به انتقال المان‌ها به سمت اولیه ترانس‌ها نمی‌باشد.



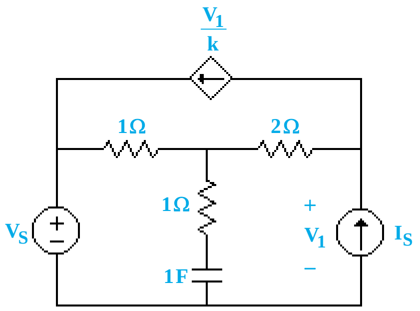
$$\Rightarrow \begin{cases} S_۱ + \frac{۱}{RC} = ۰ \\ S_۱ + \frac{۱}{R} = ۰ \quad \Rightarrow \quad S_۱ = -\frac{۱}{R} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} S_۲ + \frac{R}{L} = ۰ \\ S_۲ + \frac{۳}{۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad S_۲ = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

با توجه به این که در صورت سؤال گفته شده که فرکانس طبیعی متغیر V، ۳ برابر فرکانس طبیعی متغیر I باشد، داریم: $S_۱ = -\frac{۱}{R}$, $S_۲ = -\frac{۳}{۲}$

$$S_۱ = ۳S_۲ \quad \Rightarrow \quad -\frac{۱}{R} = ۳\times(-\frac{۳}{۲}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R = \frac{۲}{۹}\Omega}$$

مثال ۸: **فرکانس طبیعی مدار زیر برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. وقتی خازن اتصال باز است، چه مقاومتی از دو سر منبع جریان مستقل دیده می‌شود؟ (k ثابت)**

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)



۱) -۴Ω

۲) ۳Ω

۳) ۸Ω

۴) ۱۲Ω

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در یک مدار مرتبه اول، فرکانس طبیعی مدار از فرمول $S = -\frac{۱}{\tau}$ بدست می‌آید. بنابراین می‌توانیم مقدار ثابت زمانی مدار یا همان τ را بدست آوریم.

$$S = -\frac{۱}{۳} = -\frac{۱}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = ۳\ (\text{sec})$$

با توجه به اینکه $\tau = R_{th}.C$ است و R_{th} مقاومت دیده شده از دو سر خازن است، می‌توانیم R_{th} را نیز محاسبه کنیم.

$$\tau = R_{th}.C \quad \Rightarrow \quad ۳ = R_{th} \times ۱F \quad \Rightarrow \quad R_{th} = ۳\Omega$$

حال با قرار دادن منبع ولتاژ V_T به جای خازن، مقاومت تونن از دو سر خازن را محاسبه کرده و آن را برابر با ۳ اهم قرار می‌دهیم تا مقدار k محاسبه شود. دقت کنید که در این حالت منابع مستقل مدار غیرفعال می‌شوند.

روش بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر کل مدار

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار، ابتدا لازم است که معادله مشخصه ساده شده مدار را بدست آوریم. ریشه‌های این معادله مشخصه، همان فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار می‌باشند. برای بدست آوردن معادله مشخصه و به دنبال آن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ کلیه منابع مستقل ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم.

۲ـ کلیه منابع مستقل جریان را مدار باز می‌کنیم.

۳ـ جهت ساده‌تر شدن محاسبات مدار را ساده می‌کنیم؛ در این ساده‌سازی می‌توان خازن‌های سری و موازی و سلف‌های سری و موازی را با مقادیر معادلشان جایگزین کرد.

۴ـ با استفاده از قوانین حلقه یا گره و یا قضایای تونن و نورتن، ماتریس امپدانس و یا ماتریس ادمیتانس و یا ماتریس A در معادلات حالت را بدست می‌آوریم.

۵ـ با صفر قرار دادن دترمینان یکی از ماتریس‌های زیر، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار بدست می‌آید.

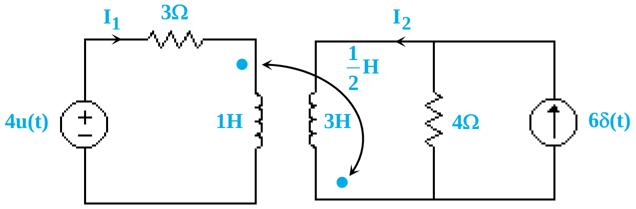
$$\det[Z(S)] = ۰ \;,\; \det[Y(S)] = ۰ \;,\; \det[SI - A] = ۰$$

۶ـ ریشه‌های معادله مشخصه بدست آمده، همان فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار هستند.

تذکر۱: دقت داشته باشید که ممکن است میان ریشه‌های به‌دست آمده مقادیر صفر نیز موجود باشد؛ در این حالت در صورتی که از ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانس برای محاسبه معادله مشخصه استفاده شده، فرکانس طبیعی صفر به‌دست آمده مشخصه ذاتی یک یا تعدادی از متغیرهای شبکه بوده که از وجود منابع وابسته نشأت گرفته و ناشی از وجود حلقه سلفی یا کاتست خازنی نمی‌باشد.

تذکر۲: اگر در محاسبه ماتریس A و مقادیر ویژه آن، ساده‌سازی خازن‌های سری و سلف‌های موازی صورت گیرد، فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار همراه با تعدادی از فرکانس‌های طبیعی صفر به‌دست خواهد آمد که این تعداد حداقل برابر مجموع تعداد کاتست‌های خازنی و حلقه‌های سلفی در مدار ساده شده نهایی است. همچنین اگر ماتریس حالت سیستم بدون این ساده‌سازی‌ها محاسبه گردد، مقادیر ویژه حاصله، کل فرکانس‌های طبیعی سیستم اعم از فرکانس‌های صفر و غیرصفر خواهد بود.

مثال۱۰: فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار زیر کدام است؟



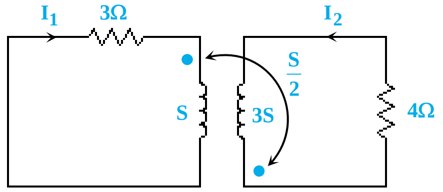
۱) $S_۱ = -۳/۴ \;,\; S_۲ = -۲$

۲) $S_۱ = -۳/۴ \;,\; S_۲ = -۱/۲$

۳) $S_۱ = -۲ \;,\; S_۲ = -۲/۲$

۴) $S_۱ = -۱/۴ \;,\; S_۲ = -۲$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدار، ابتدا مدار را در حوزه فرکانس ترسیم کرده و در حلقه‌های مدار KVL می‌زنیم و ماتریس امپدانس را بدست می‌آوریم. لازم به ذکر است که در این حالت منابع مستقل مدار غیرفعال می‌شوند. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس Z، معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$۳I_۱ + SI_۱ - \frac{S}{۲}I_۲ = ۰$$

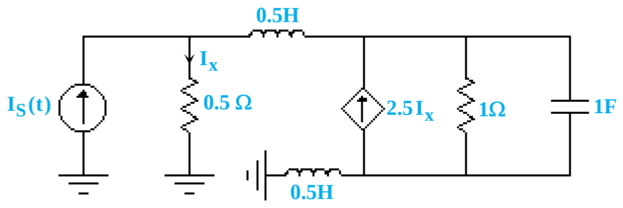
با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$۴I_۲ + ۳SI_۲ - \frac{S}{۲}I_۱ = ۰$$

با توجه به معادلات بالا، ماتریس امپدانس به صورت زیر تشکیل می‌شود. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس امپدانس Z، معادله مشخصه شامل فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار بدست می‌آید.

$$Z = \begin{bmatrix} ۳+S & -\frac{S}{۲} \\ -\frac{S}{۲} & ۴+۳S \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳+S & -\frac{S}{۲} \\ -\frac{S}{۲} & ۴+۳S \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (S+۳)(۴+۳S) - \frac{S^۲}{۴} = ۰ \Rightarrow ۲/۷۵S^۲ + ۱۳S + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = -۳/۴ \\ S_۲ = -۱/۲ \end{cases}$$

مثال۱۱: فرکانس‌های طبیعی مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



۱) -۲ و $-۰/۵$

۲) -۲ و $۰/۵$

۳) $-۰/۷۵ - j$ و $-۰/۷۵ + j$

۴) $-۱/۵ - j۲$ و $-۱/۵ + j۲$

فرکانس‌های طبیعی از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود:

$$\det(SI-A)=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} S+۳ & \alpha \\ -۱ & S-\alpha+۲ \end{vmatrix}=۰$$

حال به جای S، مقدار ۴− قرار داده و α را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} -۴+۳ & \alpha \\ -۱ & -۴-\alpha+۲ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -۱ & \alpha \\ -۱ & -۲-\alpha \end{vmatrix}=۲+\alpha+\alpha=۲+۲\alpha=۰ \Rightarrow \alpha=-۱$$

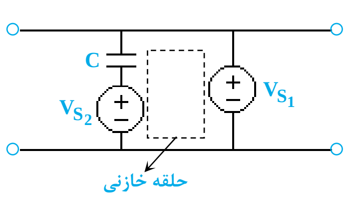
درجه یا مرتبه مدار

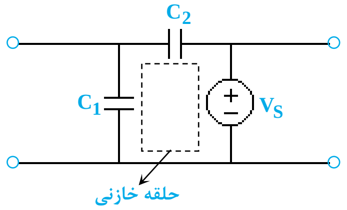
درجه یا مرتبه یک مدار برابر با تعداد شرایط اولیه مستقل موجود در آن است. با توجه به این که شرایط اولیه مدار شامل ولتاژ اولیه خازن‌ها و جریان اولیه سلف‌ها است، می‌توان گفت که درجه یا مرتبه مدار برابر با تعداد المان‌های ذخیره‌کننده مستقل موجود در مدار یا به عبارتی همان تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار است. اما در برخی شرایط برخی از خازن‌ها یا سلف‌های مدار را نمی‌توان به عنوان یک المان ذخیره‌کننده مستقل در مدار فرض کرد و در این حالت‌ها نباید سلف یا خازن مورد نظر را برای شمارش مرتبه مدار در نظر گرفت. حال این موارد را به طور کامل توضیح می‌دهیم.

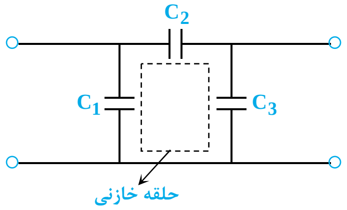
مراحل محاسبه درجه یا مرتبه مدار به قرار زیر است:

۱) ابتدا بدون تغییر یا ساده‌سازی مدار، تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار را شمارش می‌کنیم.

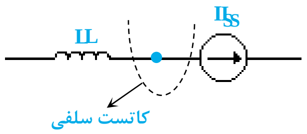
۲) در صورت وجود حلقه خازنی در مدار می‌توان ولتاژ یکی از خازن‌ها را بر حسب ولتاژ خازن‌های دیگر موجود در حلقه نوشت. لذا ولتاژ یکی از خازن‌های حلقه نسبت به بقیه ولتاژهای خازن‌ها دارای استقلال نمی‌باشد. بنابراین در صورت وجود حلقه خازنی در مدار به ازای هر حلقه خازنی یکی از تعداد شمارش شده برای سلف‌ها و خازن‌ها کم می‌شود. در اشکال زیر چند نمونه حلقه خازنی را آورده‌ایم. دقت کنید که وجود منبع ولتاژ مستقل در حلقه خازنی موردی ندارد و همچنان حلقه خازنی خواهیم داشت.

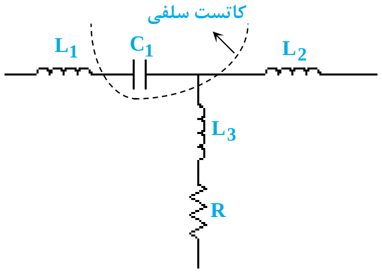


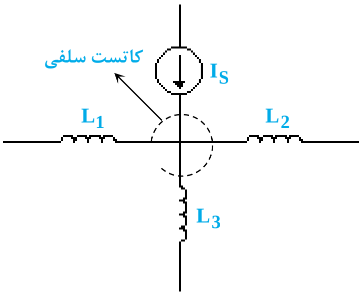




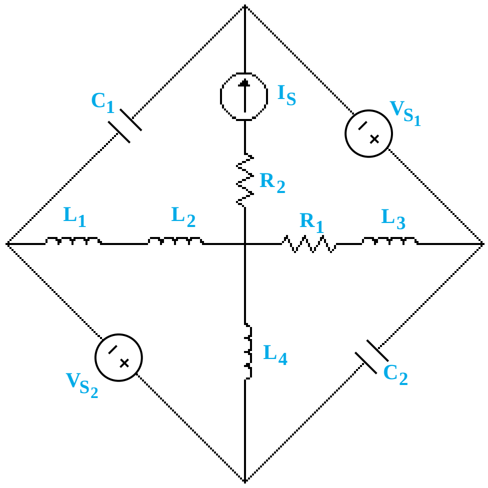
۳) در صورت وجود یک کاتست سلفی در مدار، می‌توان جریان یکی از سلف‌های موجود در کاتست را بر حسب جریان بقیه سلف‌ها نوشت. در این حالت جریان سلف مورد نظر، دارای استقلال نسبت به بقیه جریان‌های سلف‌های موجود در کاتست نمی‌باشد. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت که به ازای هر کاتست سلفی در مدار، از تعداد شمارش شده سلف‌ها و خازن‌ها برای مرتبه مدار، یکی کم می‌شود. دقت کنید که وجود منابع جریان مستقل در کاتست‌های سلفی اشکالی ندارد و همچنان کاتست سلفی خواهیم داشت. در اشکال زیر چند نمونه کاتست سلفی را آورده‌ایم.







مثال ۲۳: در مدار زیر تعداد شرایط اولیه مستقل کدام است؟



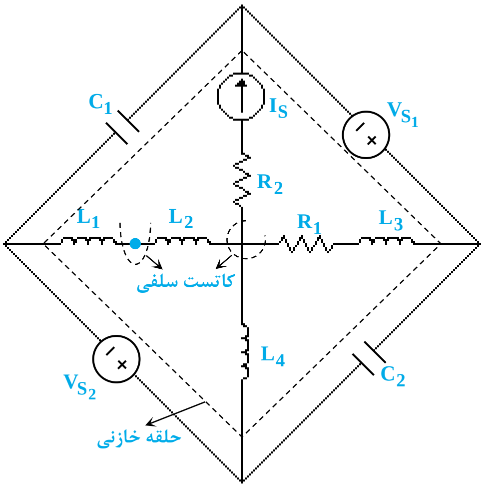
۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها در مدار ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود دو کاتست سلفی و یک حلقه خازنی از تعداد شمارش شده ۳ عدد کم می‌شود. بنابراین مدار از مرتبه ۳ می‌باشد. تعداد شرایط اولیه مستقل در مدار برابر با مرتبه مدار است، بنابراین این تعداد نیز برابر با ۳ می‌باشد.

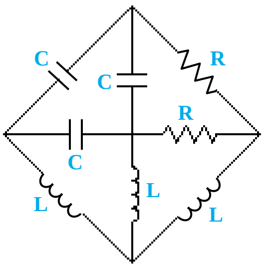


روش بدست آوردن تعداد فرکانس‌های طبیعی در مدار

برای بدست آوردن تعداد فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، ابتدا تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی که همان سلف‌ها و خازن‌ها باشند را شمارش می‌کنیم. برای شمارش خازن‌ها و سلف‌ها به این نکته دقت کنید که مدار نباید ساده شود و سلف‌ها و خازن‌های سری و موازی معادل‌گذاری نشوند. حال در ازای وجود هر حلقه خازنی و هر کاتست سلفی در مدار، از تعداد فوق یکی کم خواهد شد. لازم به ذکر است که در صورتی که ولتاژ یک خازن به جریان سلف یا ولتاژ خازن دیگری وابسته باشد، از تعداد فرکانس‌های طبیعی یکی کم می‌شود. همچنین اگر جریان یک سلف به جریان سلف دیگری و یا به ولتاژ خازن دیگری وابسته باشد، باز از تعداد فرکانس‌های طبیعی یکی کم خواهد شد. مطالب فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

(تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار) = (تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی) − (تعداد کاتست‌های سلفی) − (تعداد حلقه‌های خازنی) − (تعداد خازن‌ها یا سلف‌های غیرمستقل)

مثال ۲۴: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار کدام است؟



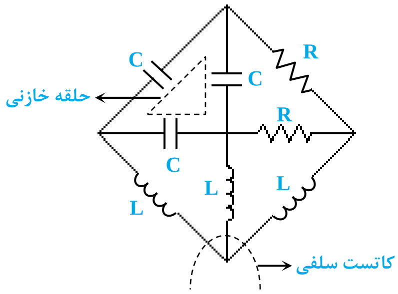
۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

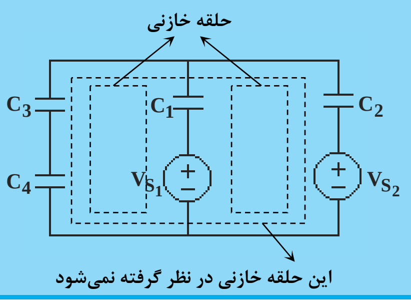
۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل، در مدار، ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد، ولی به علت وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی، از این ۶ عدد ۲ تا کم می‌شود و تعداد فرکانس‌های طبیعی در مدار ۴ عدد خواهد بود.

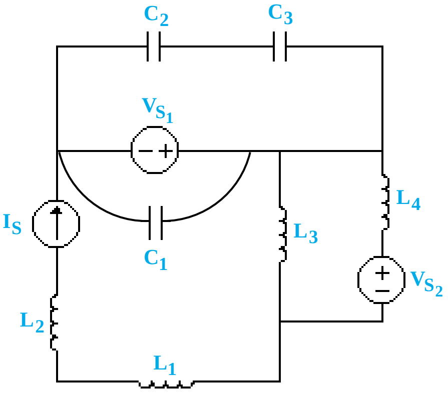


نکته ۶: تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار برابر با مرتبه مدار و برابر با تعداد متغیرهای حالت موجود در مدار است.

نکته ۷: در صورتی که درون یک حلقه خازنی بزرگ، بیش از دو حلقه خازنی مستقل وجود داشته باشد، حلقه خازنی بزرگ را در نظر نمی‌گیریم، زیرا معادله حلقه خازنی بزرگ از ترکیب معادلات حلقه‌های خازن‌های درونی قابل محاسبه بوده و نسبت به آنها دارای استقلال خطی نیست.



مثال ۲۵: تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار مقابل کدام است؟



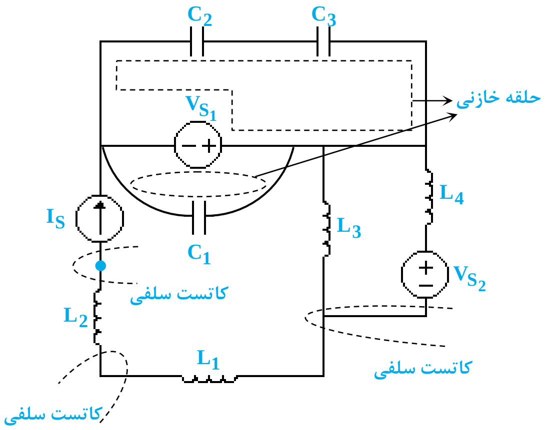
۱) ۳

۲) ۵

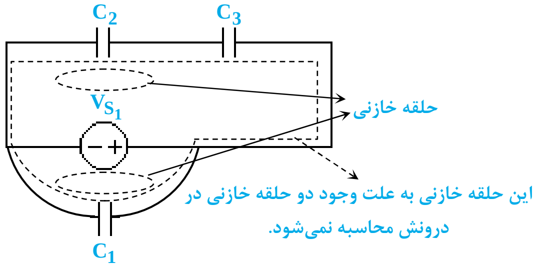
۳) ۷

۴) ۲

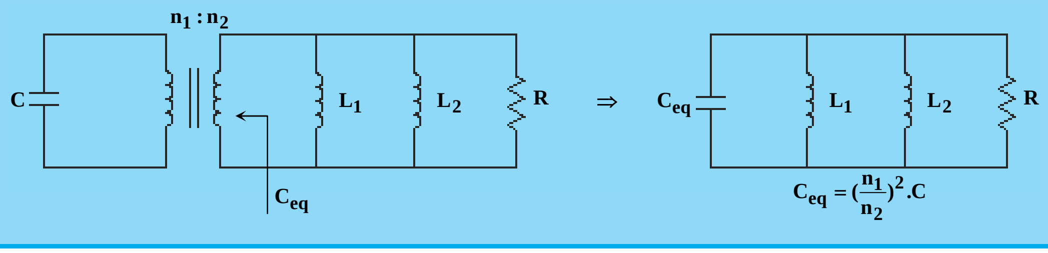
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا تعداد سلف‌ها و خازن‌های مدار را شمارش می‌کنیم. با توجه به مدار، تعداد ۷ سلف و خازن وجود دارد. دقت کنید نباید هیچ نوع ساده‌سازی و معادل‌گذاری برای سلف‌ها و خازن‌های سری و موازی انجام شود. با توجه به وجود دو حلقه خازنی و ۳ کاتست سلفی، از عدد ۷، ۵ واحد کم می‌شود. بنابراین در مدار ۲ فرکانس طبیعی وجود دارد.



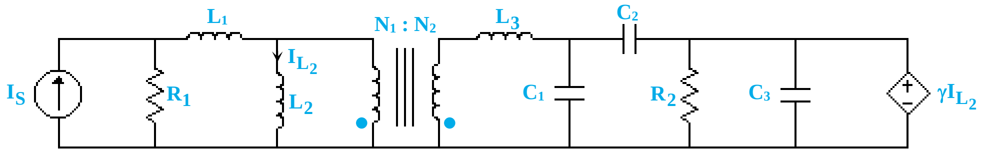
دقت کنید مطابق با نکته گفته شده، حلقه شامل خازن‌های C_1، C_2 و C_3 را به عنوان حلقه خازنی در نظر نمی‌گیریم زیرا درون این حلقه، دو حلقه خازنی مستقل وجود دارد.



نکته ۸: در صورتی که مدار دارای ترانسفورمر باشد، برای شمارش تعداد فرکانس‌های طبیعی، سلف‌های موجود در ترانسفورمر را لحاظ نمی‌کنیم. دقت کنید که می‌توانید با انتقال امپدانس‌ها از ثانویه به سمت اولیه و یا برعکس، ترانسفورمر را از مدار خارج کنید. به مثال زیر توجه کنید. در این مثال با انتقال خازن به سمت راست ترانس، یک مدار RLC موازی ایجاد می‌شود که می‌توان به سادگی فرکانس‌های طبیعی آن را بدست آورد.



مثال ۲۶: تعداد متغیرهای حالت در مدار زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۲)



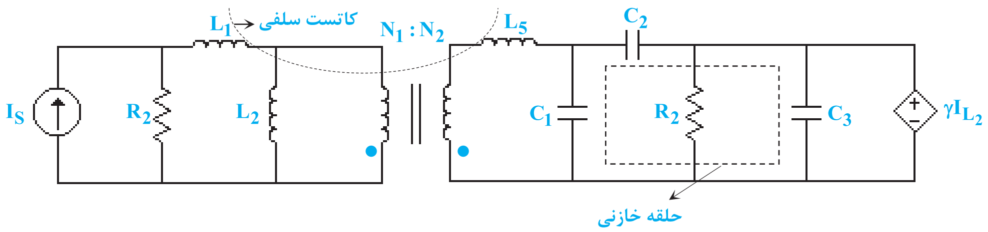
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

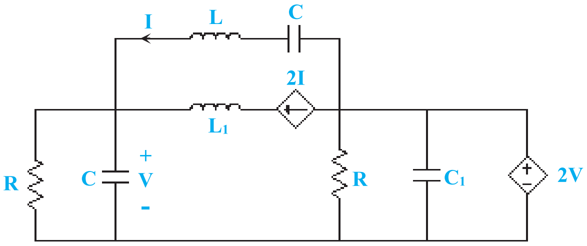
۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد متغیرهای حالت به طور پیش‌فرض برابر تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی در سیستم است که برابر عدد ۶ می‌باشد. حال با توجه به وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی ۲ واحد از عدد ۶ کم می‌شود. همچنین ولتاژ خازن C_3 به جریان سلف L_2 ارتباط دارد [$V_{C_3} = \gamma . I_{L_2}$]، لذا از عدد ۴ یکی دیگر کم خواهد شد و تعداد متغیرهای حالت برابر ۳ است.



نکته۹: ممکن است منابع وابسته در مدار باعث ایجاد وابستگی خطی بین متغیرهای حالت مدار شوند. در این حالت مرتبه مدار یا همان تعداد فرکانس‌های طبیعی، به تعداد وابستگی‌های ایجاد شده کم می‌شود. بنابراین در صورت وجود منابع وابسته در مدار، برای محاسبه تعداد فرکانس‌های طبیعی این مورد حتماً باید در نظر گرفته شود.

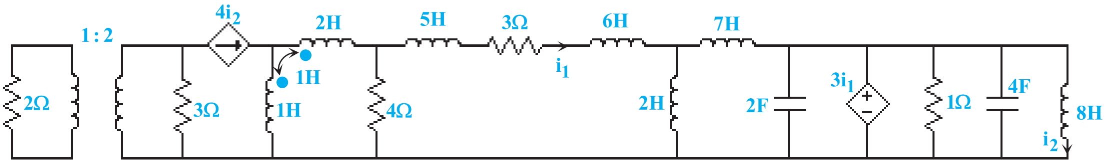
مثال ۲۷: تعداد متغیرهای مستقل حالت در مدار زیر کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

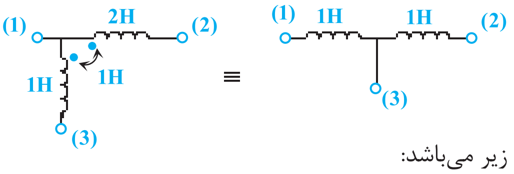
پاسخ: گزینه «۳» با شمارش اولیه تعداد خازن‌ها و سلف‌ها ۵ المان ذخیره‌کننده انرژی دیده می‌شود. با دقت در مدار مشاهده می‌شود که ولتاژ خازن سمت راست توسط منبع وابسته‌ای به ولتاژ خازن دیگری مربوط است و این امر باعث می‌شود که ولتاژ این خازن دارای استقلال نباشد و لذا باید یکی از فرکانس‌های طبیعی کم شود. همچنین دیده می‌شود که جریان سلف L_1 توسط منبع وابسته‌ای به جریان سلف دیگری وابسته است. لذا جریان سلف مذکور نیز دارای استقلال خطی نمی‌باشد و نمی‌توان آن را به عنوان متغیر حالت برگزید. بنابراین از مرتبه مدار باز یکی کم می‌شود. در انتها می‌توان گفت که مدار دارای ۳ فرکانس طبیعی بوده و لذا تعداد متغیرهای حالت که برابر تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار است، برابر عدد ۳ می‌باشد.

مثال ۲۸: مرتبه مدار زیر، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۷)

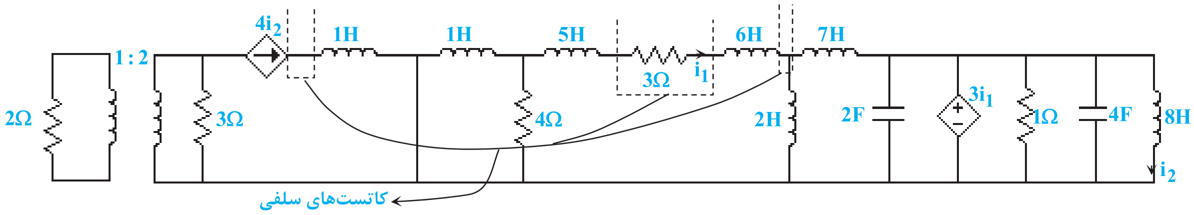


۱) ۴
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» برای یافتن مرتبه مدار باید تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی در مدار را شمرده و سپس به دنبال کاتست‌های سلفی، حلقه‌های خازنی و وابستگی‌های موجود میان ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌های مدار بگردیم. قبل از این کار، سلف‌های تزویج شده را با مدار معادل T آنها جایگزین می‌کنیم تا پروسه مذکور ساده‌تر شده و نیازی به تحلیل‌های فیزیکی در این امر نباشد. دقت کنید که در این مدار خاص، مدارهای معادل T و π یکسان هستند و لذا می‌توان با جایگزینی مدار معادل، تعداد فرکانس‌های طبیعی مرتبط با سلف‌های تزویج شده را محاسبه نمود. در حالات متفاوت، چنین امری میسر نمی‌باشد.



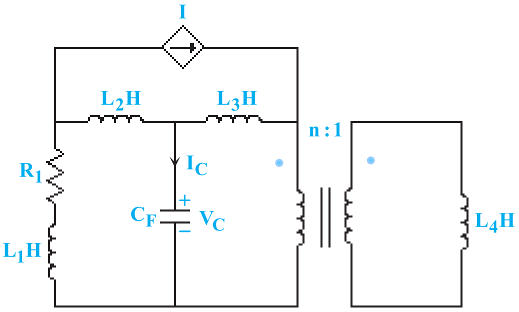
با جایگذاری مدار معادل فوق، مدار کلی به شکل زیر می‌باشد:



مدار شامل ۲ خازن و ۷ سلف می‌باشد. همچنین مطابق شکل بالا مدار شامل ۳ کاتست سلفی بوده که یکی به شکل مجازی از طریق منبع جریان وابسته $4i_2$ تولید شده است. از طرفی ولتاژ دو خازن موجود در مدار یکی بوده و برابر $3i_1$ است که i_1 جریان یکی از سلف‌های مدار می‌باشد. از این رو عملاً این دو خازن نمی‌توانند هیچ فرکانس طبیعی به مدار بیفزایند و لذا مرتبه مدار را افزایش نمی‌دهند. بنابراین مرتبه مدار برابر است با:

تعداد سلفها − تعداد کاتست‌های سلفی = ۷ − ۳ = ۴

مثال ۲۹: در مدار زیر با تغییر منبع وابسته از $I = V_C$ به $I = I_C$ درجه مدار (تعداد فرکانس‌های طبیعی): (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)



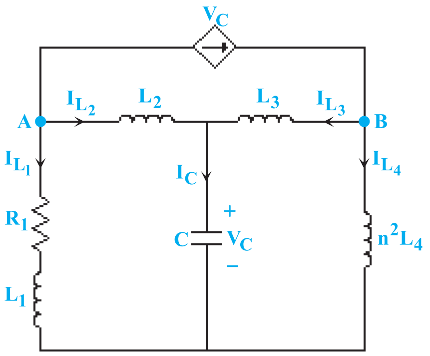
۱) تغییر نمی‌کند.

۲) از دو به سه تغییر می‌یابد.

۳) از چهار به سه تغییر می‌یابد.

۴) از سه به چهار تغییر می‌یابد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا سلف سمت راست را به سمت چپ منتقل کرده و ترانسفورمر را حذف می‌کنیم. حال در ابتدا $I = V_C$ را در نظر می‌گیریم. با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها در مدار، تعداد المان‌های ذخیره‌کننده انرژی برابر با ۵ عدد است.

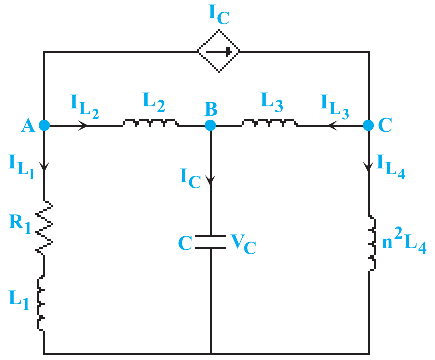


با نوشتن معادله KCL در گره‌های A و B داریم:

$$\begin{cases} V_C + I_{L_۲} + I_{L_۱} = ۰ & (۱) \\ V_C = I_{L_۳} + I_{L_۴} & (۲) \end{cases}$$

با توجه به وابستگی متغیرهای حالت در روابط (۱) و (۲)، از عدد ۵، دو واحد کم شده و مرتبه مدار یا همان درجه مدار ۳ خواهد بود.

حال اگر $I = I_C$ باشد، معادلات KCL در گره‌های A، B و C به صورت زیر است:



$$\begin{cases} I_C + I_{L_۲} + I_{L_۱} = ۰ & (۳) \\ I_{L_۲} + I_{L_۳} = I_C & (۴) \\ I_C = I_{L_۳} + I_{L_۴} & (۵) \end{cases}$$

از ترکیب روابط (۵) و (۴) داریم:

$$I_{L_۲} + I_{L_۳} = I_{L_۳} + I_{L_۴} \Rightarrow$$

حال به علت وابستگی متغیرهای حالت، یک واحد از درجه مدار کم می‌شود.

از ترکیب روابط (۴) و (۳) داریم:

$$I_{L_۲} + I_{L_۳} = -I_{L_۲} - I_{L_۱} \Rightarrow$$

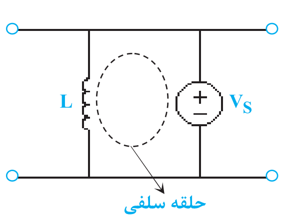
به علت وابستگی متغیرهای حالت دوباره یک واحد از درجه مدار کم می‌شود.

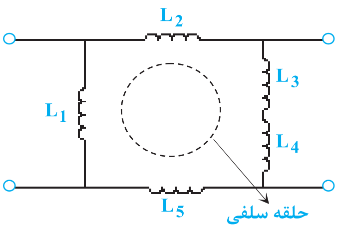
بنابراین از تعداد ۵ المان سلفی و خازنی، اگر ۲ واحد کم شود، مرتبه مدار ۳ خواهد بود. بنابراین مرتبه مدار در دو حالت برابر است.

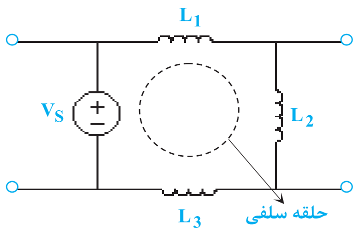
فرکانس‌های طبیعی صفر مدار

همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم، فرکانس‌های طبیعی موجود در مدار به دو دسته فرکانس‌های طبیعی صفر و فرکانس‌های طبیعی غیرصفر تقسیم‌بندی می‌شوند. عواملی که در مدار باعث ایجاد فرکانس‌های طبیعی صفر می‌شوند به قرار زیر هستند:

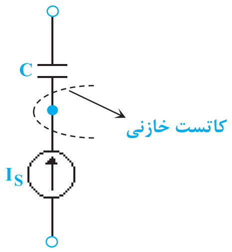
۱) وجود حلقه سلفی در مدار: در صورتی که در مدار حلقه سلفی باشد، به ازای هر حلقه سلفی یک فرکانس طبیعی صفر وجود دارد. دقت کنید که وجود منابع ولتاژ مستقل در حلقه سلفی اشکالی ندارد. در اشکال زیر چند نوع حلقه سلفی نمایش داده شده است:

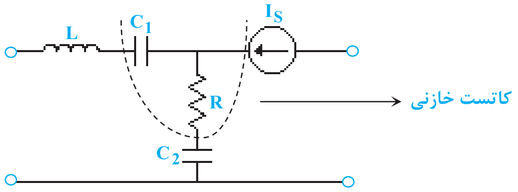


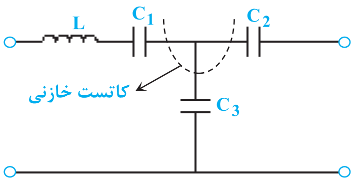




۲) وجود کاتست خازنی در مدار: در صورتی که یک مدار شامل کاتست خازنی باشد، به ازای هر کاتست خازنی، یک فرکانس طبیعی صفر در مدار وجود دارد. دقت کنید که وجود منابع جریان مستقل در کاتست خازنی اشکالی ندارد. تعدادی کاتست خازنی در اشکال زیر نمایش داده شده است:







با توجه به موارد گفته شده به صورت خلاصه می‌توان گفت که تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر یک مدار از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

[تعداد حلقه‌های سلفی] + [تعداد کاتست‌های خازنی] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر]

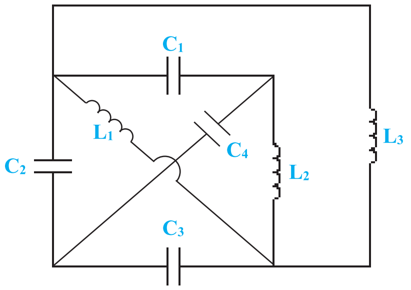
مثال۳۰: در رابطه با مدار شکل مقابل، کدام عبارت صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۳)

۱) سه فرکانس طبیعی صفر دارد.

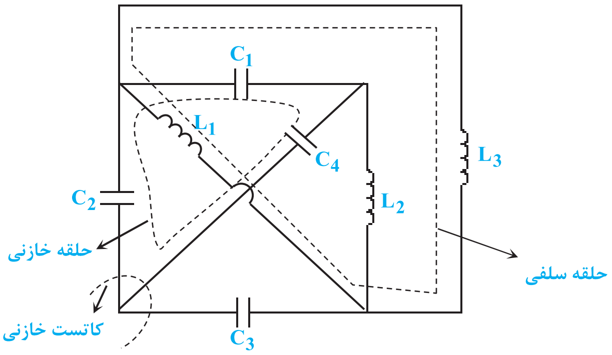
۲) یک فرکانس طبیعی صفر دارد.

۳) فرکانس طبیعی صفر ندارد.

۴) هیچکدام از عبارات فوق صحیح نیست.



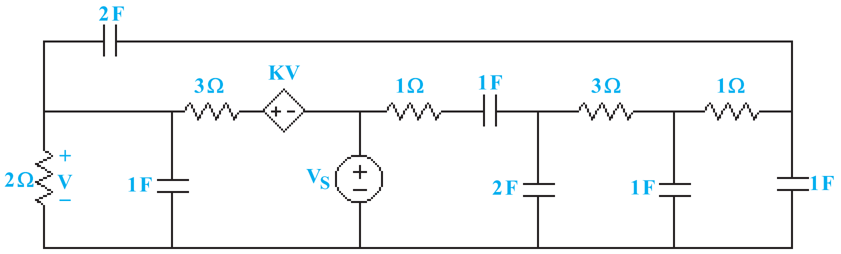
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدار دارای تعداد ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی است، ولی به علت وجود یک حلقه خازنی از این تعداد یک واحد کم می‌شود. لذا مدار دارای ۶ فرکانس طبیعی است. با توجه به وجود یک حلقه سلفی و یک کاتست خازنی، مدار دارای دو فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی غیرصفر و ۲ فرکانس طبیعی صفر است.



تذکر ۳: وجود منابع وابسته در مدار نیز گاهی ممکن است باعث ایجاد فرکانس‌های طبیعی صفر شود.

نکته۱۰: در صورت وجود کاتست خازنی در مدار، فرکانس طبیعی صفر در **ولتاژ خازن‌های درون کاتست** و در صورت وجود حلقه سلفی در مدار، فرکانس طبیعی صفر در **جریان سلف‌های درون حلقه**، ظاهر شده و از طریق پاسخ ورودی صفر خود را نشان می‌دهد؛ با این حال این فرکانس‌های طبیعی صفر در پاسخ حالت صفر و توابع انتقال دیده نخواهند شد.

مثال۳۱: به ازای چه مقدار k مدار دو فرکانس طبیعی صفر دارد؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)



۱) $-\frac{۵}{۲}$

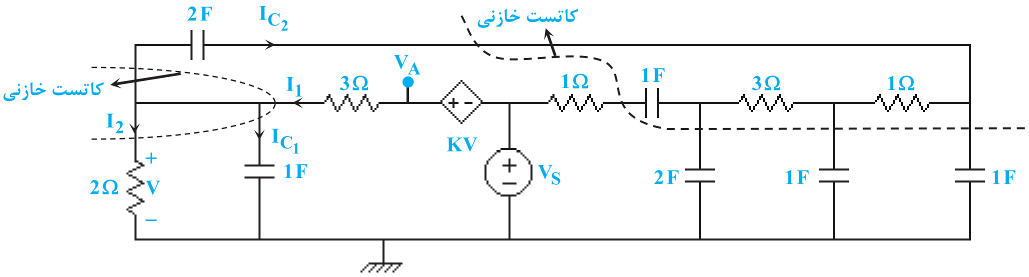
۲) ۱-

۳) ۳

۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با دقت در مدار دیده می‌شود که یک کاتست خازنی در سمت راست مدار به صورت زیر قرار دارد. این کاتست خازنی یک فرکانس طبیعی صفر ایجاد می‌کند. برای داشتن یک فرکانس طبیعی صفر دیگر، باید یک کاتست خازنی در گره سمت چپ مدار داشته باشیم. بنابراین لازم است که جریان‌های $I_۲$ و $I_۱$ برابر باشند:

$$I_{C_۱}+I_{C_۲}+I_۲-I_۱=۰ \quad , \quad I_۱=I_۲ \Rightarrow I_{C_۱}+I_{C_۲}=۰$$



$$I_۱ = \frac{V_A - V}{۳} \;,\; V_A = KV + V_S \;\Rightarrow I_۱ = \frac{KV + V_S - V}{۳}$$

حال در ادامه V_S را صفر و اتصال کوتاه می‌کنیم.

$$\Rightarrow I_۱ = \frac{KV - V}{۳} \;,\; I_۲ = \frac{V}{۲} \Rightarrow I_۱ = I_۲ \Rightarrow \frac{KV - V}{۳} = \frac{V}{۲} \Rightarrow K = \frac{۵}{۲}$$

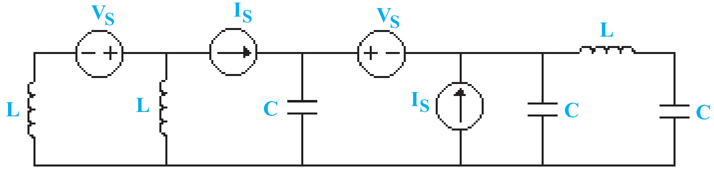
روش محاسبه تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار

با توجه به موارد گفته شده در قبل، ابتدا تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار و سپس تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر را می‌شماریم. حال تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر مدار از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

[تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر] – [تعداد کل فرکانس‌های طبیعی] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر]

[تعداد حلقه‌های سلفی] – [تعداد کاتست‌های خازنی] – [تعداد کل فرکانس‌های طبیعی مدار] = [تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر]

مثال ۳۲: در مدار زیر تعداد فرکانس‌های طبیعی صفر و غیرصفر مدار کدام است؟



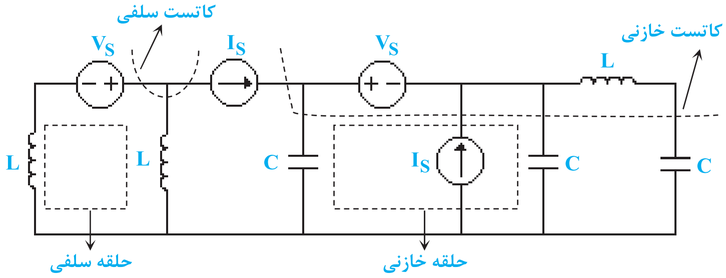
۱) ۳ تا غیرصفر و ۱ عدد صفر

۲) ۴ تا غیرصفر

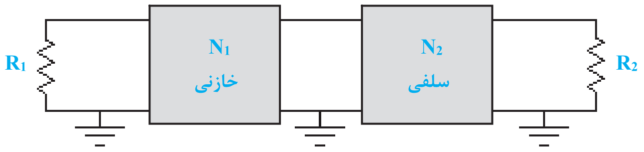
۳) ۴ تا صفر

۴) ۲ تا صفر و ۲ تا غیرصفر

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با شمارش تعداد سلف‌ها و خازن‌ها، مشاهده می‌شود که در مدار ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه خازنی، از این تعداد ۲ واحد کم می‌شود. بنابراین مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی خواهد بود. با توجه به وجود یک کاتست خازنی و یک حلقه سلفی، مدار دارای دو فرکانس طبیعی صفر است. بنابراین مدار دارای ۲ فرکانس طبیعی صفر و دو فرکانس طبیعی غیرصفر است.



مثال ۳۳: در شکل زیر $N_۱$ منحصراً از خازن‌های مثبت و $N_۲$ منحصراً از سلف‌های مثبت خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل یافته‌اند. حداکثر تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکه چند است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) ۲

۲) ۴

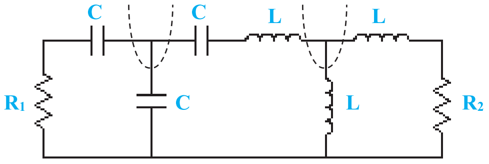
۳) ۶

۴) ۵

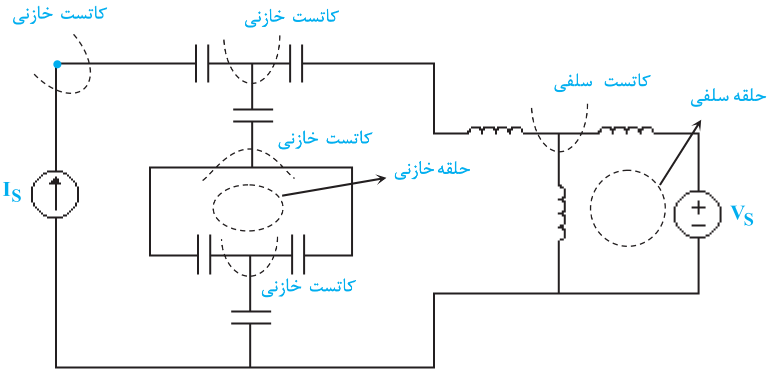
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر مدار معادل T را برای شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ معادل‌گذاری کنیم، مدار به صورت زیر خواهد بود.

با توجه به شکل دیده می‌شود که تعداد ۶ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود کاتست سلفی، از این تعداد یکی کم می‌شود و به خاطر وجود یک کاتست خازنی یک فرکانس صفر نیز وجود دارد؛ لذا مدار دارای ۴ فرکانس طبیعی غیرصفر است.

دقت شود که اگر به جای مدار معادل T، مدار معادل π را در نظر می‌گرفتید هم به نتیجه‌ی مشابهی می‌رسیدید.

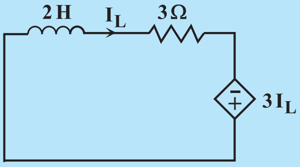


☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا به جای هر شبکه مدار معادل T آن شبکه را قرار داده و تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار را محاسبه می‌کنیم.



در مدار بالا مجموعاً ۹ سلف و خازن وجود دارد که به علت وجود یک کاتست سلفی و یک حلقه خازنی از این تعداد ۲ واحد کم شده و مدار دارای ۷ فرکانس طبیعی است. از طرفی از این ۷ فرکانس طبیعی، ۵ تای آن به علت وجود ۴ کاتست خازنی و یک حلقه سلفی برابر صفر است. بنابراین تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر حداکثر ۲ عدد می‌باشند. قابل ذکر است اگر به جای مدار معادل T شبکه‌ها، مدار معادل π آنها را در نظر بگیریم نیز تعداد فرکانس‌های طبیعی غیرصفر ۲ عدد بدست خواهد آمد، هرچند ممکن است تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار تغییر کند.

نکته۱۱: در برخی موارد وجود منابع وابسته باعث ایجاد فرکانس طبیعی صفر می‌شود.



به عنوان مثال به مدار مقابل دقت کنید. اگر در حلقه مدار KVL بنویسیم، داریم:

$$\frac{۲dI_L}{dt}+۳I_L-۳I_L=۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{۲dI_L}{dt}=۰$$

در این صورت اگر معادله مشخصه ناشی از معادله دیفرانسیل بالا را بنویسیم، داریم:

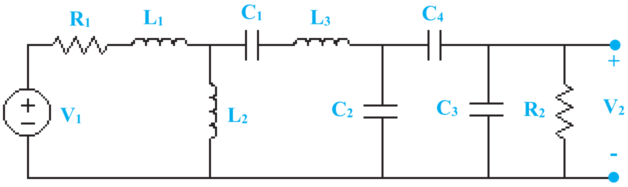
$$۲S=۰ \quad\Rightarrow\quad S=۰$$

بنابراین تنها فرکانس طبیعی مدار $S=۰$ است.

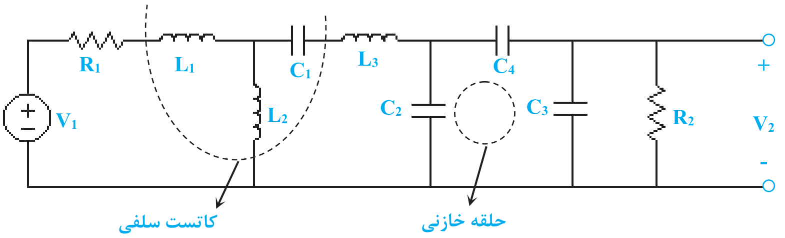
نکته۱۲: در هر مدار حداکثر تعداد قطب‌های هر تابع شبکه دلخواه، برابر با مرتبه مدار و برابر با تعداد فرکانس‌های طبیعی مدار است. دقت کنید که به طور کلی هر قطب هر تابع شبکه یا همان فرکانس طبیعی هر متغیر شبکه، حتماً جزو فرکانس‌های طبیعی مدار است، ولی فرکانس‌های طبیعی مدار ممکن است جزو قطب‌های یک تابع شبکه خاص نباشد.

مثال۴۰: در تابع تبدیل $\frac{V_۲(S)}{V_۱(S)}$ در مدار شکل زیر حداکثر چند قطب وجود دارد؟

۱) هفت قطب
۲) شش قطب
۳) پنج قطب
۴) چهار قطب



☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با دقت در مدار دیده می‌شود که تعداد ۷ المان ذخیره‌کننده انرژی وجود دارد. با توجه به وجود یک حلقه خازنی و یک کاتست سلفی از تعداد فوق ۲ عدد کم می‌شود. لذا مدار دارای مرتبه ۵ بوده و پنج فرکانس طبیعی دارد و این تعداد برابر حداکثر تعداد قطب‌ها است.



نکته۱۳: در صورتی که در یک مدار مقدار پارامتر α خواسته شود و در اطلاعات سؤال $S=۰$، جزو فرکانس‌های طبیعی مدار باشد، می‌توان مدار را در فرکانس صفر یا در حالت DC تحلیل کرد. در این حالت خازن‌ها را با مدار باز و سلف‌ها را با اتصال کوتاه مدل می‌کنیم و با نوشتن روابط KVL و یا KCL مناسب در مدار ساده شده، مقدار پارامتر مجهول را حساب می‌کنیم.

مثال ۵۹: در مدار مرتبه سوم A، تابع انتقال $\frac{V_o}{V_S}=\frac{۱۰}{(S+۱)(S+۲)}$ و در مدار مرتبه سوم B، تابع انتقال $\frac{V_o}{V_S}=\frac{۵}{(S+۱)^۲(S+۲)}$ را داریم. در کدام مدار با $V_S=\cos t$ حتماً $\underset{t\to\infty}{V_o(t)}$ را داریم و با کدام دامنه سینوسی؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)

۱) در مدار B با دامنه $\frac{۱}{۴}$
۲) در مدار A با دامنه $\frac{۱}{۴}$
۳) در مدار A با دامنه $\sqrt{۱۰}$
۴) در مدار B با دامنه $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در یک مدار اگر همه فرکانس‌های طبیعی در سمت چپ محور $j\omega$ باشد، مدار پایدار است و در $t=\infty$ مقدار پاسخ مدار محدود بوده و با گذشت زمان زیاد نمی‌شود. در مدار A با توجه به اینکه مدار مرتبه سوم است و با توجه به تابع تبدیل آن، فقط دو فرکانس طبیعی مدار مشخص است، ممکن است فرکانس طبیعی سوم مدار در سمت چپ محور $j\omega$ نباشد و مدار ناپایدار شود. بنابراین با قاطعیت نمی‌توان در مورد پایداری و در مورد وجود مقدار $\underset{t\to\infty}{V_o(t)}$ نظر داد. ولی با توجه به مشخص بودن هر سه فرکانس طبیعی در تابع انتقال مدار B، می‌توان گفت که به علت اینکه هر سه فرکانس طبیعی مدار B، $(S=-۲$ و $S=-۱$ و $S=-۱)$ در سمت چپ محور $j\omega$ هستند، مدار B، پایدار بوده و مقدار $\underset{t\to\infty}{V_o(t)}$ وجود دارد. حال با توجه به ورودی V_S، ابتدا $\frac{V_o}{V_S}(j\omega)$ را در مدار B محاسبه کرده و سپس مقدار خروجی ناشی از تابع ورودی V_S را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید با توجه به $V_S=\cos t$، $\omega=۱(\frac{rad}{sec})$ فرض می‌شود.

$$\frac{V_o}{V_S}(j\omega)=\frac{V_o}{V_S}(j)=\frac{۵}{(j+۱)^۲.(j+۲)}\Rightarrow\frac{V_o}{V_S}(j)=\frac{۵}{(j^۲+۱^۲+۲j)(j+۲)}=\frac{۵}{(۲j)(j+۲)}$$

$$\Rightarrow\frac{V_o}{V_S}(j)=\frac{۵}{۴j-۲}=-\frac{۱}{۲}-j\Rightarrow V_o(j)=(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\angle-۱۱۶^\circ)\times۱\angle۰=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\angle-۱۱۶^\circ\Rightarrow|\mathbf{V_o}|=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\mathrm{v}$$

مثال ۶۰: در مداری با ۳ فرکانس طبیعی تابع انتقال $\frac{V_o}{V_s}=\frac{s+۳}{(s+۱)^۲(s+۲)}$ را داریم. اگر $v_s(t)=\cos t$ باشد، مقدار ماکزیمم $v_o(t)(t\to\infty)$، کدام است؟

(مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به تابع انتقال مدار، فرکانس‌های طبیعی مدار برابر $\{-۲,-۱,-۱\}$ هستند و مدار پایدار است. حال با فرض $s=j$ داریم:

(**توجه:** چون در صورت سؤال ذکر شده $t\to\infty$ و $V_s=\cos t$ می‌توانیم از حالت فازوری (حالت دائمی سینوسی) استفاده کنیم.)

$$\frac{V_o}{V_s}(s=j)=\frac{j+۳}{(j+۱)^۲(j+۲)}\Rightarrow\left|\frac{V_o}{V_s}\right|=\frac{|j+۳|}{|(j+۱)^۲(j+۲)|}=\frac{\sqrt{۱۰}}{(\sqrt{۲})^۲\times\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow V_o(t)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(t+\phi):\text{حالت ماندگار}\quad\Rightarrow V_o(\max)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

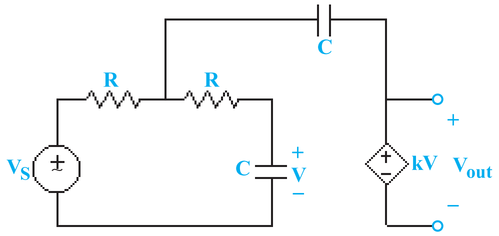
شرایط نوسان‌سازی در مدار

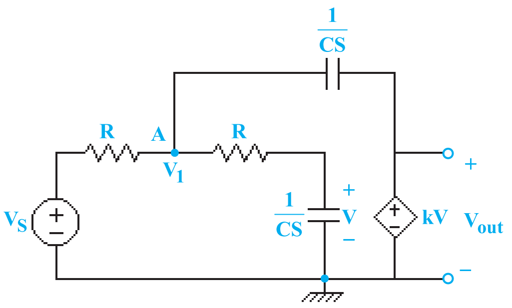
در صورتی که یک مدار در حالت بی‌اتلاف باشد و یا به عبارتی همه فرکانس‌های طبیعی مدار بر روی محور $j\omega$ قرار گیرد (با این شرط که فرکانس‌های طبیعی تماماً از مرتبه ۱ باشند)، مدار نوسان‌ساز خواهد بود. دقت کنید چون مدار در حالت بی‌اتلاف است، دامنه نوسان‌های مدار، میرا نشده و ثابت باقی می‌ماند. در برخی مسائل دیده می‌شود که مقدار پارامتری مانند k برای نوسان‌سازی خواسته شده است. در این حالت ابتدا معادله مشخصه مدار را محاسبه می‌کنیم. سپس ضریب S با توان فرد در معادله مشخصه را برابر صفر قرار می‌دهیم تا همه فرکانس‌های طبیعی مدار روی محور $j\omega$ قرار گیرد. دقت شود که بعد از محاسبه k، آن را در معادله قرار دهید و موهومی بودن ریشه‌ها را تحقیق کنید.

مثال ۶۱: به ازای کدام مقدار k، مدار زیر نوسان دائم خواهد داشت؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴





☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به خواسته سؤال، مسلم است که مدار روبه‌رو مدنظر طراح تست بوده است، چرا که در غیر این صورت، جریان خازن بالایی صفر بوده و مدار امکان نوسان نخواهد داشت. حال معادله مشخصه مدار را با فرض $V_S = ۰$ محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{\frac{۱}{CS}}{\frac{۱}{CS}+R} \times V_۱ = \frac{۱}{RCS+۱} V_۱ \qquad (۱)$$

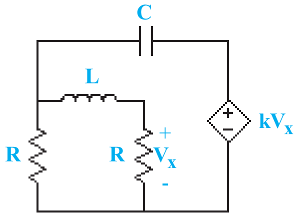
$$KCL(A): \frac{V_۱}{R} + \frac{V_۱}{R+\frac{۱}{CS}} + \frac{V_۱ - kV}{\frac{۱}{CS}} = ۰ \xrightarrow{(۱)} V_۱\left(\frac{۱}{R} + \frac{CS}{RCS+۱} + CS - \frac{KCS}{RCS+۱}\right) = ۰ \xrightarrow{\times R(RCS+۱)}$$

$$\Rightarrow V_۱(RCS+۱+RCS+R^۲C^۲S^۲+RCS-kRCS) = ۰$$

$$\Rightarrow V_۱(R^۲C^۲S^۲+(۳-k)RCS+۱) = ۰ \Rightarrow S^۲ + \frac{۳-k}{RC}S + \frac{۱}{R^۲C^۲} = ۰$$:معادله مشخصه

مشخص است که به ازای $k = ۳$، ضریب S در معادله مشخصه صفر شده و ریشه‌های آن موهومی محض خواهند شد. در این حالت مدار نوسان دائم خواهد داشت.

مثال ۶۲: **به ازاء کدام مقدار k مدار شکل مقابل نوسانی است و فرکانس نوسان آن کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

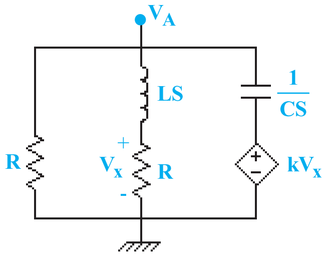


۱) $\omega = \sqrt{\frac{۲}{LC}}$, $k = ۱ + \frac{L}{R^۲C}$

۲) $\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$, $k = ۱ + \frac{L}{R^۲C}$

۳) $\omega = \sqrt{\frac{۲}{LC}}$, $k = ۱ + \frac{C}{R^۲L}$

۴) $\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$, $k = ۱ + \frac{C}{R^۲L}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای محاسبه فرکانس نوسان، مدار را در حوزه فرکانس تحلیل کرده و معادله مشخصه مدار را بدست می‌آوریم. حال اگر مدار به صورت نوسانی عمل کند، لازم است که ریشه‌های معادله مشخصه یا همان فرکانس‌های طبیعی روی محور $j\omega$ واقع شوند. با نوشتن KCL در گره بالای مدار داریم:

$$\frac{V_A}{R} + \frac{V_A}{R+LS} + \frac{V_A - kV_x}{\frac{۱}{CS}} = ۰ \qquad (۱)$$ و $$V_x = V_A \times \frac{R}{R+LS} \qquad (۲)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{V_A}{R} + \frac{V_A}{R+LS} + \frac{V_A - k(V_A \cdot \frac{R}{R+LS})}{\frac{۱}{CS}} = ۰ \Rightarrow \frac{V_A}{R} + \frac{V_A}{R+LS} + V_A.CS - \frac{kCSV_A.R}{R+LS} = ۰ \Rightarrow V_A\left(\frac{۱}{R} + \frac{۱}{R+LS} + CS - \frac{kCSR}{R+LS}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{R} + CS + \frac{۱-kCS\,R}{R+LS} = ۰ \Rightarrow (R+LS)(\frac{۱}{R}+CS) + ۱ - kCSR = ۰$$

$$۱ + RCS + \frac{LS}{R} + LCS^۲ + ۱ - kCSR = ۰ \Rightarrow LCS^۲ + S(RC + \frac{L}{R} - kCR) + ۲ = ۰ \Rightarrow S^۲ + S\left(\frac{RC + \frac{L}{R} - kCR}{LC}\right) + \frac{۲}{LC} = ۰$$

برای قرار گرفتن ریشه‌های معادله مشخصه روی محور $j\omega$ باید ضریب S صفر شود.

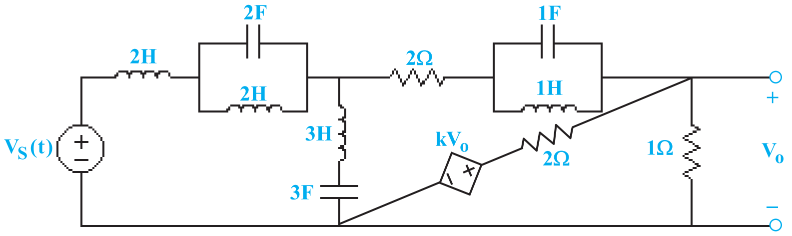
$$\Rightarrow \frac{RC + \frac{L}{R} - kCR}{LC} = ۰ \Rightarrow RC + \frac{L}{R} - kCR = ۰ \Rightarrow \mathbf{k = ۱ + \frac{L}{R^۲C}}$$

با صفر شدن ضریب S در معادله مشخصه، معادله مذکور به صورت روبرو ساده می‌شود:

$$\Rightarrow S^۲ + \frac{۲}{LC} = ۰ \Rightarrow \omega_۰ = \sqrt{\frac{۲}{LC}}$$

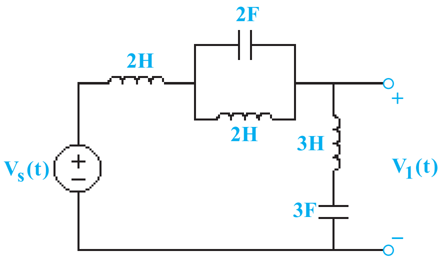
مثال ۶۷: در مدار شکل زیر مقدار k چقدر باشد تا تمامی قطب‌های تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_S(S)}$ بر روی محور $j\omega$ قرار بگیرند؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۷)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

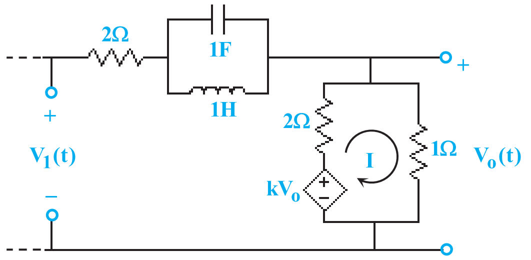
☑ **پاسخ:** گزینه «۳ و ۴» ابتدا قسمت سمت چپ مدار را به شکل زیر با فرض مجزا بودن آن از باقی مدار در نظر بگیرید:



با توجه به این که مدار تنها از سلف و خازن تشکیل شده است، تمامی فرکانس‌های طبیعی آن بر روی محور $j\omega$ قراردارند؛ بنابراین قطب‌های تابع انتقال $\frac{V_1(S)}{V_S(S)}$ همگی موهومی و یا صفر هستند.

حال اگر در قسمت سمت راست مدار اصلی مقدار k طوری تنظیم شود که دو شاخه موازی سمت راست به شکل مدار باز عمل کنند، خواهیم داشت:

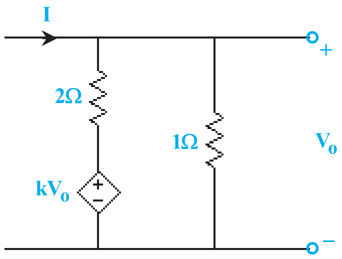
$$V_o(t)=V_1(t)\Rightarrow\frac{V_o(S)}{V_S(S)}=\frac{V_1(S)}{V_S(S)}$$



برای رخداد چنین حالتی باید جریان I در حلقه سمت راست مدار گردش کند:

$$I=\frac{V_o}{۱}=\frac{(k-۱)V_o}{۲}\Rightarrow k=۳$$

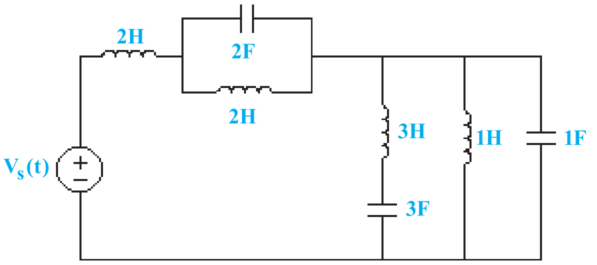
در این حالت جریانی از مقاومت ۲ اهم و LC موازی سمت راستش عبور نکرده و تابع انتقال $\frac{V_o}{V_S}$ همچون تابع انتقال $\frac{V_1}{V_S}$ دارای قطب‌های روی محور $j\omega$ خواهد بود.



اما اگر دو شاخه موازی سمت راست مدار مشابه یک مقاومت ۲Ω− عمل کنند نیز، مدار عملاً عاری از مقاومت بوده و فرکانس‌های طبیعی آن همگی روی محور $j\omega$ خواهند بود:

$$I=-\frac{V_o}{۲}=\frac{(۱-k)V_o}{۲}+\frac{V_o}{۱}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}=\frac{(۱-k)}{۲}+۱\Rightarrow k=۴$$

(به یاد داشته باشید که قطب‌های هر تابع انتقال شبکه زیرمجموعه‌ای از فرکانس‌های طبیعی آن شبکه هستند.)



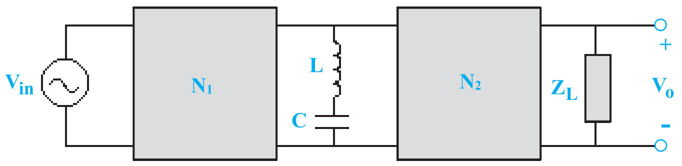
مدار در حالت $k=۴\leftarrow$

روش بدست آوردن صفرهای تابع انتقال شبکه

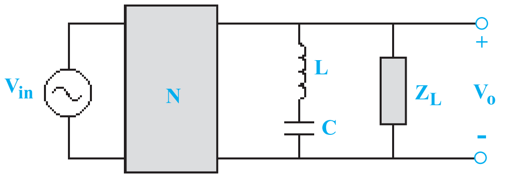
برای بدست آوردن صفرهای تابع شبکه می‌توان به صورت کلاسیک $H(S)=\frac{X_o(S)}{X_i(S)}$ را بدست آورده و از روی آن صفرهای تابع انتقال را مشخص کرد، ولی روش فوق گاهی وقت‌گیر و زمان‌بر است؛ لذا به ارائه یک روش دیگر نیز می‌پردازیم.

در صورتی که در مدار، LC سری در شاخه‌های عمودی قرار گیرد، در صورت رزونانس، با اتصال کوتاه مدل شده و باعث صفر شدن خروجی می‌شود؛ لذا حضور آن باعث ایجاد یک جفت صفر در $S=\frac{\pm j}{\sqrt{LC}}$ روی محور $j\omega$ خواهد شد. این مورد در مدارهای (۱) و (۲) مشخص می‌باشد.

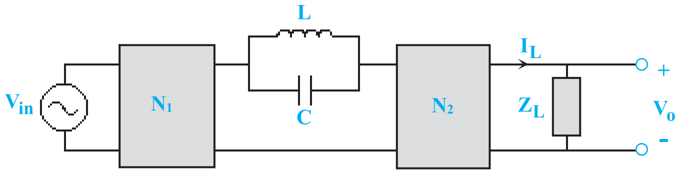
به صورت مشابه اگر مدار LC موازی در شاخه‌های افقی در مدار قرار گیرد، در صورت رزونانس، با مدار باز مدل شده و باعث صفر شدن خروجی می‌شود؛ لذا حضور مدار LC موازی در شاخه‌های افقی، باعث ایجاد یک جفت صفر به صورت $S=\frac{\pm j}{\sqrt{LC}}$ در روی محور $j\omega$ خواهد شد. به مدارهای (۳) و (۴) دقت کنید.



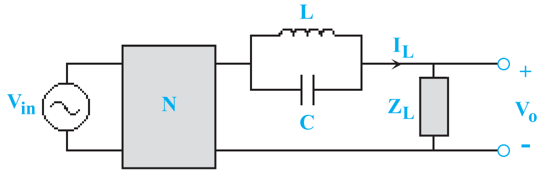
مدار (۲) ($N_۱$ و $N_۲$ شامل عناصر خطی و پسیو هستند)



مدار (۱) (N یک شبکه خطی و پسیو است)

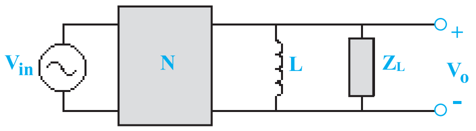


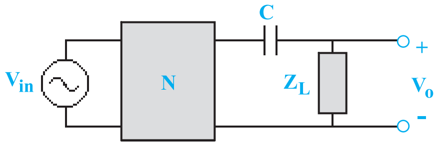
مدار (۳)



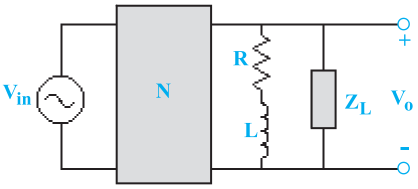
مدار (۴)

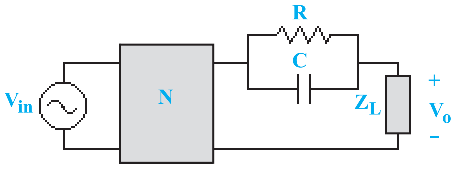
لازم به ذکر است که حضور یک سلف تنها در شاخه‌های عمودی و یک خازن تنها در شاخه‌های افقی، باعث ایجاد صفر در $S=۰$ می‌شود. به مدارهای زیر دقت کنید. در این مدارها اگر فرکانس صفر باشد، مقدار خروجی صفر خواهد بود.

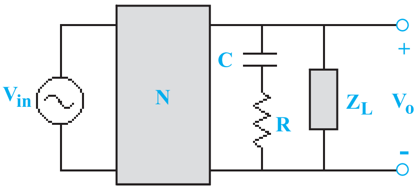


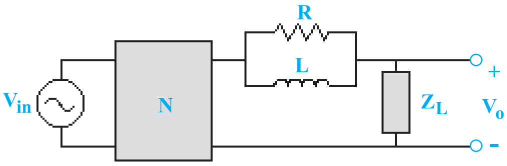


علاوه بر مطالب گفته شده حضور مدارهای RL و RC در حالت سری در شاخه‌های عمودی باعث ایجاد یک صفر به صورت $S_۱=\frac{-R}{L}$ و یا $S_۱=\frac{-۱}{RC}$ می‌شود. حال اگر مدارهای RL و RC در حالت موازی در شاخه‌های افقی قرار گیرند نیز صفرهای ذکر شده وجود خواهند داشت. به مدارهای صفحه بعد دقت کنید.

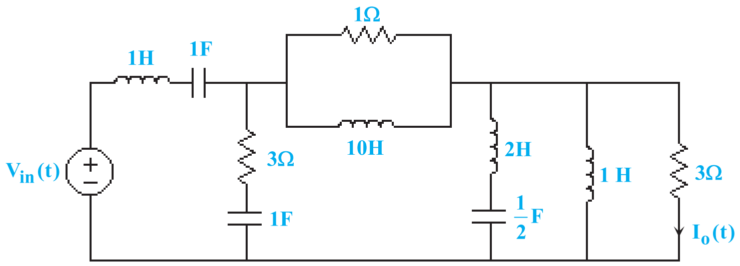








مثال ۶۸: در مدار زیر صفرهای تابع انتقال $H(S)=\frac{I_o(S)}{V_i(S)}$ کدام است؟



۱) $S=۰\ ,\ S=\pm j\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}$

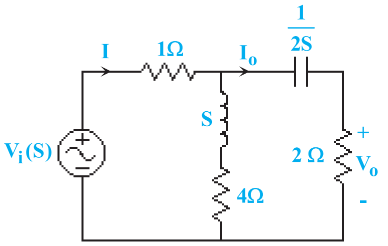
۲) $S=۰\ ,\ S=\pm j$

۳) $S=۰\ ,\ S=۰\ ,\ S=\frac{-۱}{۱۰}\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=\pm j$

۴) $S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=۰\ ,\ S=\pm j$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به شکل دیده می‌شود که یک LC سری در سمت راست مدار باعث ایجاد دو صفر در $S=\frac{\pm j}{\sqrt{۲\times\frac{۱}{۲}}}=\pm j$ خواهد شد. با دقت در شکل، یک سلف موازی با مقاومت ۳Ω نیز دیده می‌شود که باعث ایجاد یک صفر در $S=۰$ خواهد شد. با توجه به وجود یک مدار RL موازی و مدار RC سری دو صفر به صورت $S=\frac{-R}{L}=\frac{-۱}{۱۰}$, $S=\frac{-۱}{RC}=\frac{-۱}{۳}$ در تابع شبکه موجود می‌باشد. لازم به ذکر است که وجود یک LC سری در سمت چپ مدار نمایان است و نباید این اشتباه صورت گیرد که این LC باعث ایجاد صفر نمی‌شود؛ در واقع به دلیل وجود خازن ۱F یک صفر در $S=۰$ در تابع انتقال وجود دارد. لذا صفرهای تابع شبکه به صورت روبرو است: $S=۰\ ,\ S=۰\ ,\ S=-\frac{۱}{۱۰}\ ,\ S=-\frac{۱}{۳}\ ,\ S=\pm j$

مثال۶۹: کدام یک از توابع زیر مربوط به تابع انتقال $H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}$ است؟



۱) $\frac{S(S+۴)}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}$

۲) $\frac{۲S(S+۴)}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}$

۳) $\frac{S^۲+۴}{۳S^۲+۲S+۱}$

۴) $\frac{S(S^۲+۴)}{۳S^۲+۲S+۱}$

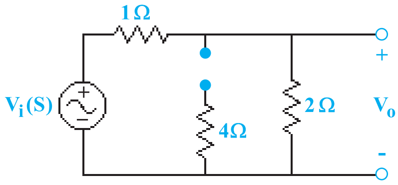
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» **روش اول:** ابتدا جریان I را بدست آورده و سپس با نوشتن قانون تقسیم جریان، مقدار جریان I_o را بدست می‌آوریم.

$$I(S)=\frac{V_i(S)}{۱+(S+۴)\|(\frac{۱}{۲S}+۲)}\ \Rightarrow\ I(S)=\frac{V_i(S)}{۱+\frac{(S+۴)(\frac{۱}{۲S}+۲)}{S+۴+\frac{۱}{۲S}+۲}}$$

$$\Rightarrow\ I(S)=\frac{V_i(S)(S^۲+۶S+۰/۵)}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}\ \Rightarrow\ I_o(S)=I(S)\times\frac{S+۴}{S+۴+۲+\frac{۱}{۲S}}=\frac{V_i(S)(S^۲+۶S+۰/۵)}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}\times\frac{S+۴}{S+۶+\frac{۱}{۲S}}$$

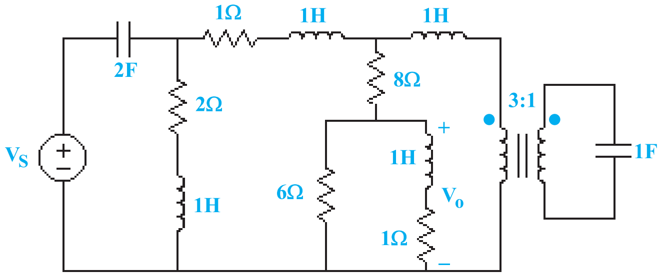
$$\Rightarrow\ V_o(S)=۲I_o(S)=V_i(S)\times\frac{۲\left[S^۲+۴S\right]}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}\ \Rightarrow\ H(S)=\frac{V_o(S)}{V_i(S)}=\frac{۲\left[S(S+۴)\right]}{۳S^۲+۱۴/۵S+۲/۵}$$

روش دوم: با توجه به حضور یک خازن سری با مقاومت ۲Ω، یک صفر در $S=۰$ داریم و با توجه به حضور یک مدار RL سری، یک صفر در $S=\frac{-R}{L}=\frac{-۴}{۱}=-۴$ موجود است. لذا گزینه‌های (۱) و (۲) ممکن است صحیح باشند و گزینه‌های (۳) و (۴) غلط است. در صورتی که مدار در فرکانس $S=\infty$ تحلیل شود، مدار به صورت روبرو خواهد بود.



بنابراین با اعمال قاعده تقسیم ولتاژ، $\frac{V_o}{V_i}=\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین با توجه به این که از میان گزینه‌های (۱) و (۲) فقط گزینه (۲) در $S=\infty$ عدد $\frac{۲}{۳}$ را نشان می‌دهد، بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال۷۰: صفرهای انتقال تابع شبکه $H(S)=\frac{V_o}{V_S}$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



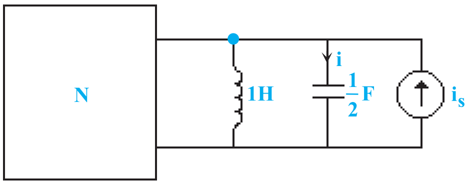
۱) $۰\ ,\ -۱\ ,\ -۷\ ,\ \pm j$

۲) $۰\ ,\ -۱\ ,\ -۲\ ,\ \pm j$

۳) $۰\ ,\ -۱\ ,\ -۷\ ,\ \pm ۳j$

۴) $۰\ ,\ -۱\ ,\ -۲\ ,\ \pm ۳j$

مثال ۱۷: در مدار زیر، « N » شامل مقاومت‌های خطی و بدون منابع مستقل است. توان N به ازای ورودی $i_s = \cos ۲t$ در شرایط دائمی سینوسی ماکزیمم است. در این مدار با شرایط اولیه‌ی صفر و به ازای ورودی ضربه‌ی $i_s = \delta(t)$، جریان خازن در $t = ۰^+$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)



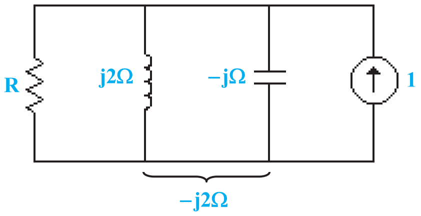
۱) $+۱$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) -۱

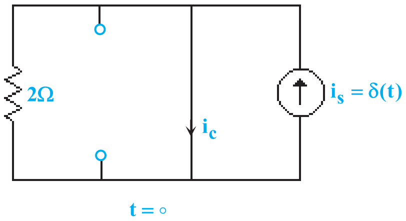
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» صورت این تست کمی ابهام دارد و منظور طراح تست از این‌که توان N به ازای ورودی $i_s = \cos ۲t$ ماکزیمم است دقیقاً مشخص نیست؛ با این برداشت که با فرض ورودی $i_s = \cos ۲t$ شرایط انتقال توان ماکزیمم به N فراهم شده است، می‌توان تست را حل کرد و به جواب رسید.



بدین منظور مدار را در حالت فازوری مطابق شکل مقابل در نظر می‌گیریم. در این شکل شبکه N با مقاومت معادل خود جایگزین شده است. حال باید داشته باشیم:

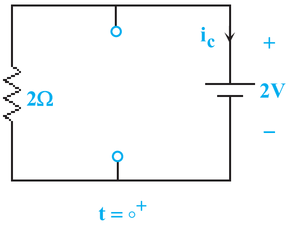
$$R = |-j۲| = ۲\Omega$$

حال به حل تست ادامه می‌دهیم. ابتدا ولتاژ خازن را در لحظه $t = ۰^+$ با فرض $i_s = \delta(t)$ بدست می‌آوریم.



$$i_c(t = ۰) = \delta(t)$$

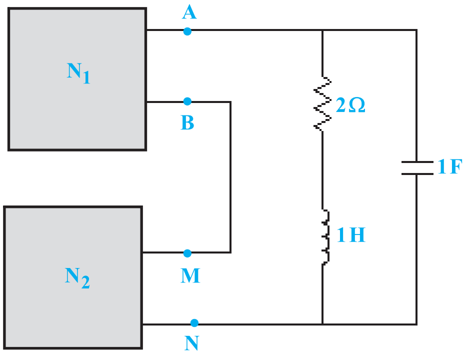
$$V_c(t = ۰^+) = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int_{۰^-}^{۰^+} \delta(t)dt = ۲v$$



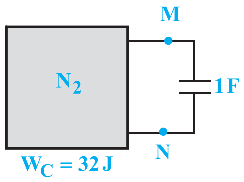
در ادامه جریان خازن را در لحظه $t = ۰^+$ بدست می‌آوریم:

$$i_c = -\frac{۲}{۲} = -۱A$$

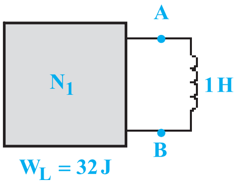
مثال ۱۸: در مدار زیر شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ از مقاومت‌های خطی و مثبت و منابع مستقل DC تشکیل شده‌اند. در صورتی که مقاومت تونن هر دو شبکه یکسان و برابر با ۲ اهم باشد، در مدار (ج) مقدار انرژی ذخیره شده در مدار چند ژول است؟



(ج)



(ب)



(الف)

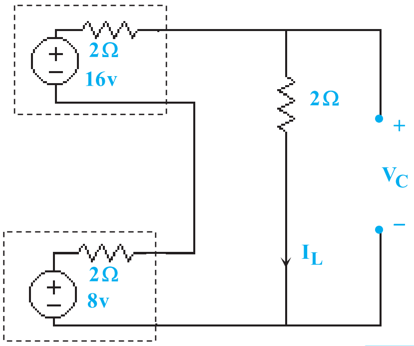
۱) ۲۰　۲) ۱۰　۳) ۴۰　۴) ۳۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» جریان عبوری از سلف ۱ هانری در حالت ماندگار همان جریان نورتن شبکه $N_۱$ و ولتاژ دو سر خازن ۱ فارادی در حالت ماندگار همان ولتاژ تونن شبکه $N_۲$ می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{۱}{۲}LI_{SC_۱}^۲ = ۳۲ \Rightarrow I_{SC_۱} = ۸A \qquad و \qquad R_{th_۱} = ۲\Omega \Rightarrow V_{th_۱} = R_{th_۱}.I_{SC_۱} = ۲\times۸ = ۱۶v$$

$$\frac{۱}{۲}CV_{OC_۲}^۲ = ۳۲ \Rightarrow V_{OC_۲} = ۸v \qquad و \qquad R_{th_۲} = ۲\Omega$$

حال در مدار (ج) مدار معادل شبکه‌ها را قرار می‌دهیم. در حالت ماندگار مدار به شکل زیر خواهد بود:

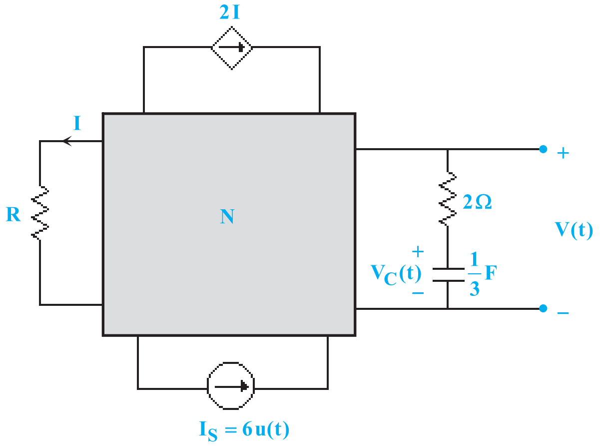


$$I_L=\frac{۱۶+۸}{۲+۲+۲}=۴A$$

$$V_C=I_L\times ۲=۴\times ۲=۸v$$

$$W_T=\frac{۱}{۲}CV^۲+\frac{۱}{۲}LI^۲=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۸^۲+\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۴^۲\Rightarrow W_T=۴۰J$$

مثال۱۹: در مدار زیر شبکه N از المان‌های مقاومتی خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. در صورتی که مقاومت ۲ اهمی با مقاومت ۴ اهمی جایگزین شود، معادله V(t) مطابق با کدام گزینه است؟ ($V_C(t)=۴-۲e^{-t}$)



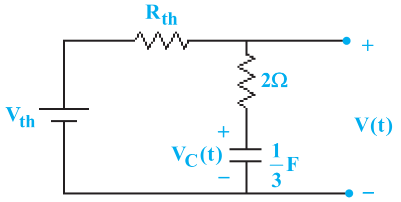
۱) $۴-\frac{۴}{۱۰}e^{-۳t}$

۲) $۴-\frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$

۳) $۴-۴e^{-۳t}$

۴) $۴-۴e^{-\frac{۳}{۵}t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با تغییر مقاومت ۲ اهمی فقط مقدار τ عوض می‌شود و مقادیر $V_C(\infty)$ و $V_C(0^-)$ تغییری ندارند. در این مرحله ابتدا τ را در حالت اولیه محاسبه می‌کنیم:



$$\tau_{old}=R_{eq}.C=(۲+R_{th})\times\frac{۱}{۳}=۱\Rightarrow R_{th}=۱\Omega$$

$$\tau_{new}=R_{eq}.C=(۴+۱)\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}$$

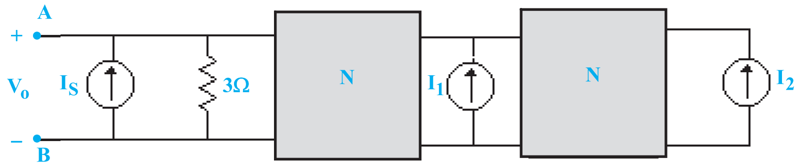
حال در صورت تغییر مقاومت ۲ اهمی به ۴ اهمی داریم:

$$V(t)=۴I_C+V_C\ ,\ I_C=C\frac{dV_C}{dt}$$ و $$V_C(t)(new)=۴-۲e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

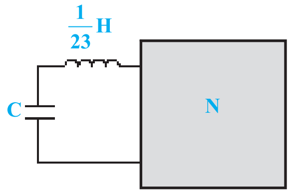
$$\Rightarrow I_C=\frac{۱}{۳}\frac{d\left[۴-۲e^{-\frac{۳}{۵}t}\right]}{dt}=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۶}{۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}\right]\Rightarrow I_C=\frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}\Rightarrow V(t)=۴I_C+V_C=۴\times\frac{۶}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}+۴-۲e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

$$\Rightarrow V(t)=\frac{۲۴}{۱۵}e^{-\frac{۳}{۵}t}+۴-۲e^{-\frac{۳}{۵}t}=۴-\frac{۴}{۱۰}e^{-\frac{۳}{۵}t}$$

مثال۲۰: در مدار (الف) شبکه N فقط شامل مقاومت‌های خطی، موازی با هم، مثبت و تغییرناپذیر با زمان است. در صورتی که معادله ولتاژ V_o به صورت $۲I_۱+\frac{۴}{۹}I_s+\frac{۳}{۲}I_۲$ باشد، در مدار (ب) پهنای باند مدار بر حسب رادیان بر ثانیه مطابق با کدام گزینه است؟



مدار (الف)



مدار (ب)

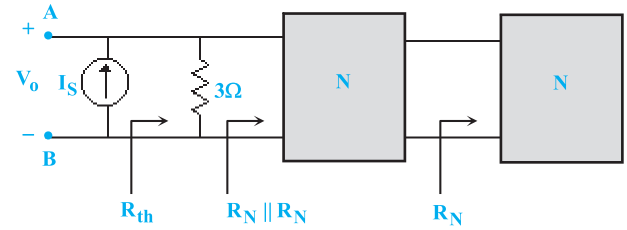
۱) ۲۴

۲) ۲۳

۳) $\frac{۲۳}{۲۴}$

۴) $\frac{۲۴}{۲۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در صورتی که بخواهیم مقاومت تونن را از پایه‌های A و B بدست آوریم، منابع مستقل $I_۱$ و $I_۲$ را صفر می‌کنیم و ولتاژ دو سر منبع جریان I_S را به مقدار جریان آن تقسیم می‌کنیم.



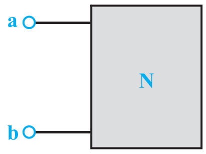
$$V_o=\frac{۴}{۹}I_S \Rightarrow R_{th}=\frac{V_o}{I_S}=\frac{\frac{۴}{۹}I_S}{I_S}=\frac{۴}{۹}\Omega$$

$$R_{th}=\frac{۴}{۹}=۳\|R_N\|R_N \Rightarrow \frac{۴}{۹}=۳\|\frac{R_N}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{۹}=\frac{\frac{۳R_N}{۲}}{۳+\frac{R_N}{۲}} \Rightarrow \frac{۲۷}{۲}R_N=۱۲+۲R_N \Rightarrow R_N=\frac{۱۲}{۱۱/۵}=\frac{۲۴}{۲۳}\Omega$$

در مدار (ب) با توجه به اینکه مدار RLC سری است، پهنای باند به صورت روبرو است:

$$BW=\frac{R_N}{L}=\frac{\frac{۲۴}{۲۳}}{\frac{۱}{۲۳}}=۲۴(\frac{rad}{sec})$$

مثال۲۱: یک‌قطبی N، شامل عناصر RLC خطی تغییرناپذیر با زمان و تعدادی منبع سینوسی با فرکانس یکسان $\omega=۲$ است. اگر یک مدار LC موازی با مقادیر $L=۱H$ و $C=\frac{۱}{۲}F$ را به سرهای a و b وصل کنیم، ولتاژ دو سر a و b به صورت $V_{ab}=۲۰\sin(۲t-۳۰^\circ)$ می‌شود و اگر یک مدار LC موازی با مقادیر $L=\frac{۱}{۲}H$ و $C=۱F$ را به سرهای a و b وصل کنیم، آن‌گاه ولتاژ دو سر a و b به صورت $V_{ab}=۵\sqrt{۲}\sin(۲t-۷۵^\circ)$ می‌شود. حالا اگر یک مقاومت خطی $R=۱\Omega$ را به سرهای a و b وصل کنیم، چه ولتاژی در سرهای a و b مشاهده می‌شود؟



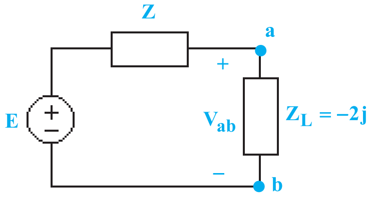
۱) $V_{ab}(t)=۵\sin(۲t+۱۵^\circ)$

۲) $V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t+۱۵^\circ)$

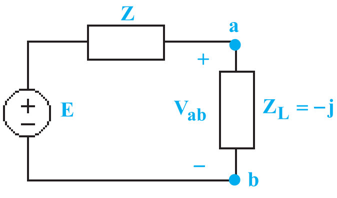
۳) $V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t-۱۵^\circ)$

۴) $V_{ab}(t)=۵\sin(۲t-۱۵^\circ)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» این گونه مثال‌ها را معمولاً می‌توان با یافتن مدار معادل تونن یک‌قطبی حل نمود. در این مدار E و Z مجهول هستند که ما باید با توجه به نتایج دو آزمایش، آن‌ها را پیدا کنیم. مدل مدار در حالت دائمی سینوسی در دو آزمایش، انجام شده بصورت روبرو خواهد بود:



آزمایش ۱



آزمایش ۲

آزمایش اول را در نظر گرفته، سعی می‌کنیم V_{ab} را برحسب E و Z بیان کنیم:

$$V_{ab}=۲۰\angle-۳۰^\circ$$

$$V_{ab}=\frac{-۲j}{-۲j+Z}E=۲۰\angle-۳۰^\circ \Rightarrow E=\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ$$

حال همین عملیات را برای آزمایش دوم انجام می‌دهیم:

$$V_{ab}=۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ$$

$$V_{ab}=\frac{-j}{-j+Z}E=۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ \Rightarrow E=\frac{Z-j}{-j}\times۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ$$

با توجه به دو رابطه بدست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ=\frac{Z-j}{-j}\times۵\sqrt{۲}\angle-۷۵^\circ \Rightarrow Z-۲j=(Z-j)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\angle-۴۵^\circ \Rightarrow Z=۱+۲j$$

و در ادامه E را نیز می‌توان محاسبه نمود:

$$E=\frac{Z-۲j}{-۲j}\times۲۰\angle-۳۰^\circ=-\frac{۱۰}{j}\angle-۳۰^\circ=۱۰\angle+۶۰^\circ$$

اکنون می‌توانیم ولتاژ خروجی مدار را در حالتی که بار یک مقاومت ۱ اهمی باشد، محاسبه کنیم:

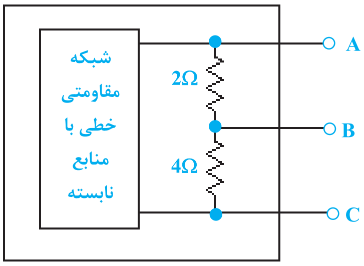
$$V_{ab}=\frac{۱}{۱+Z}E=\frac{۱۰\angle۶۰^\circ}{۱+۱+۲j}=\frac{۱۰\angle۶۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\angle۴۵^\circ}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\angle۱۵^\circ$$

پس V_{ab} برابر است با:

$$\mathbf{V_{ab}(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\sin(۲t+۱۵^\circ)}$$

مثال ۲۲: در مدار شکل زیر، اگر بین A و B را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۲^A از A به B می‌گذرد و اگر بین B و C را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۳^A از B به C می‌گذرد. شبکه معادل تونن دیده شده (V_{th}, R_{th}) از سرهای A و B به ترتیب از راست به چپ چند اهم و ولت است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)



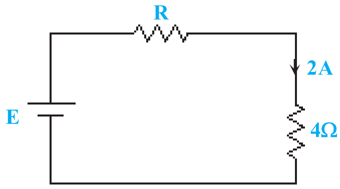
۱) ۳، ۲

۲) ۲، ۱۲

۳) $۳,\frac{۳}{۲}$

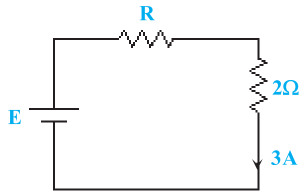
۴) ۳، ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» هر شبکه مقاومتی خطی با منابع نابسته را می‌توان با یک مدار معادل تونن مدل کرد. در این تست، ابتدا باید از طریق اطلاعات داده شده، پارامترهای این مدار معادل تونن شامل E یا ولتاژ تونن و R یا مقاومت تونن را بدست آوریم. بدین منظور آزمایش اول که در آن دو سر A و B اتصال کوتاه‌شده را در نظر می‌گیریم:



با یک KVL ساده داریم: $\frac{E}{R+۴}=۲ \Rightarrow ۲R-E=-۸$

در مرحله دوم، حالتی را در نظر می‌گیریم که دو سر B و C اتصال کوتاه شده‌اند:

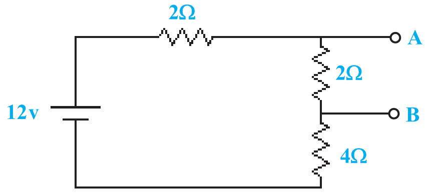


در این جا نیز با یک KVL ساده می‌توان نوشت: $\frac{E}{R+۲}=۳ \Rightarrow ۳R-E=-۶$

حال باید از طریق روابط بدست آمده مقدار E و R را پیدا کنیم:

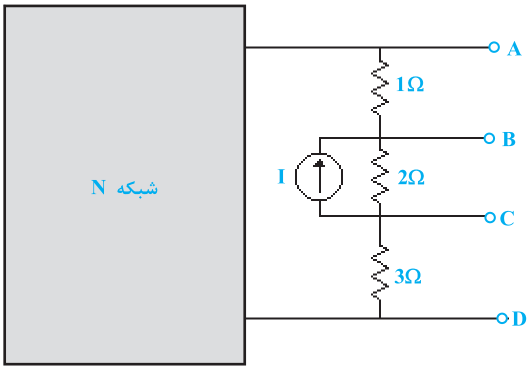
$$\begin{cases}۲R-E=-۸\\ ۳R-E=-۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R=۲\Omega\\ E=۱۲v\end{cases}$$

با پیدا کردن مقادیر پارامترهای E و R، یافتن مدار معادل تونن از دو سر A و B کار چندان سختی نخواهد بود:



$$V_{th}=\frac{۲}{۲+۶}\times ۱۲=۳v \quad و \quad R_{th}=۲\|۶=\frac{۲\times۶}{۲+۶}=\frac{۳}{۲}\Omega$$

مثال ۲۳: مدار زیر را که در آن شبکه N یک شبکه مقاومتی خطی با منابع مستقل است، در نظر بگیرید. اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۵ آمپر از A به D برقرار می‌شود. اگر سرهای B و C را اتصال کوتاه کنیم، جریان ۱ آمپر از C به B برقرار شده و ولتاژ V_{AD} برابر ۸ ولت خواهد شد. اگر سرهای A و C و سرهای B و D را اتصال کوتاه کنیم، ولتاژ V_{BC} چند ولت خواهد بود؟



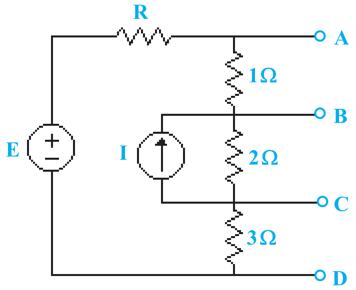
۱) $\frac{۹}{۷}$ ولت

۲) $-\frac{۲۷}{۷}$ ولت

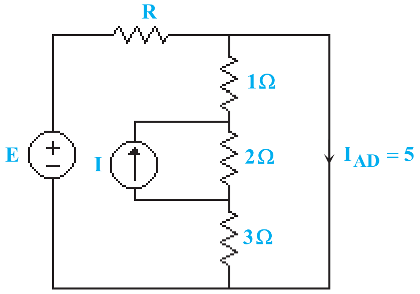
۳) $-\frac{۹}{۷}$ ولت

۴) ۰ ولت

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر مدار معادل تونن شبکه N را در نظر بگیریم، مداری به شکل زیر خواهیم داشت:



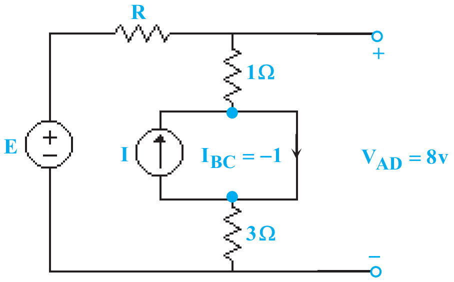
حال باید مقادیر نامعلوم E، R و I را بر اساس اطلاعات صورت سؤال محاسبه کنیم. در آزمایش اول اگر سرهای A و D را اتصال کوتاه کنیم، با مدار روبرو سر و کار خواهیم داشت:



در این حالت داریم:

$$I_{AD} = \frac{E}{R} + \frac{۲}{۲+۴} \times I = ۵ \Rightarrow \frac{E}{R} + \frac{I}{۳} = ۵ \qquad (۱)$$

در آزمایش دوم با اتصال کوتاه شدن سرهای B و C مداری به شکل زیر خواهیم داشت:



در این حالت I_{BC} و V_{AD} به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

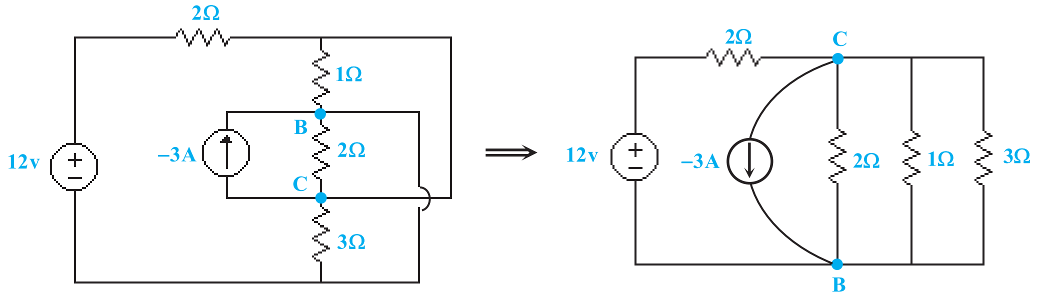
$$\left.\begin{array}{ll} V_{AD} = \frac{۱+۳}{۱+۳+R} \times E = \frac{۴E}{۴+R} = ۸ \Rightarrow \frac{E}{۴+R} = ۲ & (۲) \\ I_{BC} = \frac{E}{R+۱+۳} + I = \frac{E}{R+۴} + I = -۱ & (۳) \end{array}\right\} \xrightarrow{(۳),(۲)} ۲ + I = -۱ \Rightarrow I = -۳A$$

حال با در نظر گرفتن روابط (۱) و (۲) و با توجه به مقدار بدست آمده برای I داریم:

$$(۱) \Rightarrow \frac{E}{R} + \frac{I}{۳} = ۵ \Rightarrow \frac{E}{R} = ۶ \Rightarrow E = ۶R$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{E}{۴+R} = \frac{۶R}{۴+R} = ۲ \Rightarrow R = ۲\Omega \quad , \quad E = ۶R = ۱۲v$$

با بدست آمدن مقادیر مجهول مسأله، اکنون به سراغ محاسبه V_{BC} می‌رویم، در حالتی که سرهای A و C و سرهای B و D اتصال کوتاه شده باشند. بدین منظور مدار معادل زیر را در نظر می‌گیریم:



دقت کنید که در این حالت مقاومت‌های ۱، ۲ و ۳ اهمی موازی بوده و می‌توان آنها را با مقاومت معادل $\frac{۶}{۱۱}$ اهم جایگزین کرد. حال با بکارگیری قضیه جمع آثار داریم:

$$V_{BC} = -۱۲ \times \frac{\frac{۶}{۱۱}}{\frac{۶}{۱۱}+۲} - ۳ \times \frac{۲ \times \frac{۶}{۱۱}}{\frac{۶}{۱۱}+۲} = -۱۲ \times \frac{۶}{۲۸} - ۳ \times \frac{۱۲}{۲۸} = -\frac{۱۰۸}{۲۸} = -\frac{۲۷}{۷} v$$

با توجه به اینکه اندازه I_o مورد سؤال است، فقط اندازه I_o را از فرمول بالا محاسبه می‌کنیم و نیازی به محاسبات کامل فازوری نمی‌باشد.

$$I_o = \frac{۱}{۲} \times \frac{\frac{۸}{\sqrt{۱۵}}}{\sqrt{۸^۲ + (\frac{۸}{\sqrt{۱۵}})^۲}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}\mathbf{A}$$

روش دوم: مجموع توان اکتیو عناصر مختلف مدار باید صفر باشد. توان اکتیو شبکه LC برابر صفر است و برای سه عنصر دیگر مدار داریم:

$$P_{V_S} = -\frac{۱}{۲}|V_S||I_۱| \times \cos(\frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲} \times ۱ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}W \qquad P_{۰/۵\Omega} = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times |I_۱|^۲ = \frac{۱}{۱۶}W$$

$$P_{۸\Omega} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times |I_۰|^۲ = ۴|I_۰|^۲\ W \Rightarrow ۴|I_۰|^۲ + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۸} = ۰ \Rightarrow |I_۰|^۲ = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow \ |\mathbf{I}_۰| = \frac{۱}{۸}\ \mathbf{A}$$

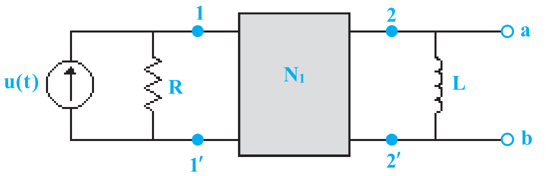
مثال ۲۷: در مدار شکل زیر اگر بین نقاط a و b یک مقاومت ۲ اهمی وصل کنیم، $i_{ab} = (۲ + ۲e^{-t})u(t)$ می‌شود و اگر بین همین نقاط یک مقاومت یک اهمی وصل شود، $i_{ab} = (۲ + ۴e^{-t})u(t)$ می‌شود. حال در مدار شکل (ب) که در آن $N_۲$ همان $N_۱$ می‌باشد که تمام امپدانس‌های آن چهار برابر شده‌اند، جریان $i(t)$ کدام می‌شود؟

۱) $i(t) = (-\frac{۶}{۵} - ۶e^{-t} + \frac{۱۲}{۵}te^{-t})u(t)$

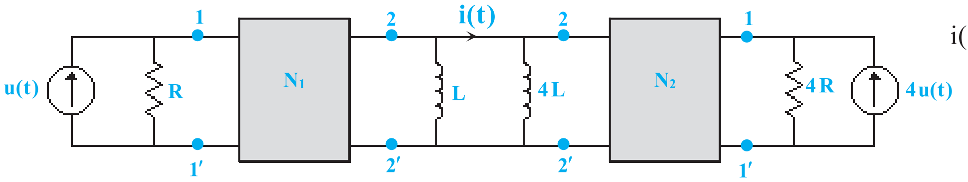
۲) $i(t) = (-۲ - ۱۰e^{-t} + ۴te^{-t})u(t)$

۳) $i(t) = ۰$

۴) $i(t) = (-۶ - ۳۰e^{-t} + ۱۲te^{-t})u(t)$

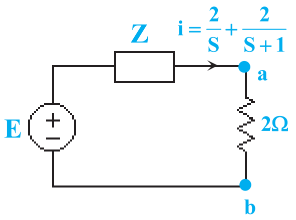


(الف)

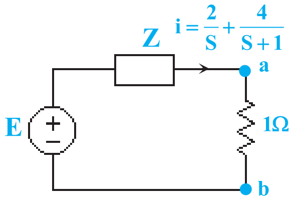


(ب)

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با اطلاعاتی که از صورت سؤال داریم، می‌توانیم مدار معادل تونن شبکه را از دید دو سر a و b بدست آوریم. برای این کار مدار معادل شبکه را همراه بار آن در دو آزمایش انجام گرفته، در نظر می‌گیریم:



آزمایش ۱



آزمایش ۲

برای آزمایش اول می‌توان نوشت:

$$V_{ab} = \frac{۲}{۲ + Z}E = \frac{۸S + ۴}{S(S + ۱)} \Rightarrow E = \frac{۴S + ۲}{S(S + ۱)}(Z + ۲)$$

و به همین ترتیب برای آزمایش دوم داریم:

$$V_{ab} = \frac{۱}{۱ + Z}E = \frac{۶S + ۲}{S(S + ۱)} \Rightarrow E = \frac{۶S + ۲}{S(S + ۱)}(Z + ۱)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{۴S + ۲}{S(S + ۱)}(Z + ۲) = \frac{۶S + ۲}{S(S + ۱)}(Z + ۱) \Rightarrow ۲SZ = ۲S + ۲ \Rightarrow Z = \frac{S + ۱}{S}$$

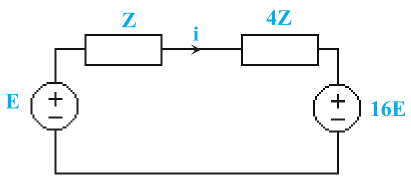
$$E = \frac{۶S + ۲}{S(S + ۱)}(Z + ۱) = \frac{۶S + ۲}{S(S + ۱)} \times \frac{۲S + ۱}{S} = \frac{(۶S + ۲)(۲S + ۱)}{S^۲(S + ۱)}$$

با پیدا کردن مقدار E و Z باید ببینیم چگونه می‌توانیم مدار جدید را با بکارگیری Z و E مدل کنیم. در مدلسازی شبکه $N_۲$ (همراه با مقاومت، سلف و منبع جریان متصل به آن) باید دو نکته را در نظر بگیریم:

۱ـ از آنجایی که تمامی امپدانس‌های موجود در این مدار ۴ برابر شده‌اند، امپدانس معادل خروجی این مدار برابر ۴Z خواهد بود.

۲ـ از آنجایی که هم منبع جریان ورودی به شبکه و هم امپدانس‌های شبکه ۴ برابر شده‌اند، ولتاژ مدار بازِ معادل، برابر ۱۶E خواهد بود.

با توجه به توضیحات ارائه شده، مدار معادل زیر را می‌توان برای مدار جدید در نظر گرفت:

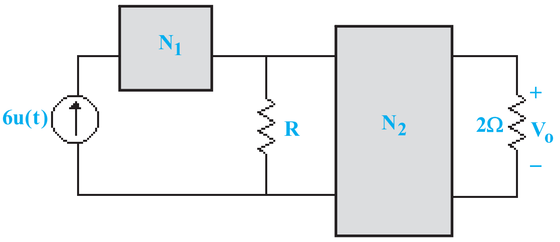


حال جریان i را می‌توان حساب نمود:

$$i(s) = -\frac{۱۵E}{۵Z} = -۳\frac{E}{Z} = -۳\frac{(۶S+۲)(۲S+۱)}{S^{۲}(S+۱)} \times \frac{S}{S+۱} = -۳\frac{(۶S+۲)(۲S+۱)}{S(S+۱)^{۲}} = -۳\times[\frac{۲}{S} + \frac{۱۰}{S+۱} - \frac{۴}{(S+۱)^{۲}}]$$

$$\Rightarrow i(t) = (-۶ - ۳۰e^{-t} + ۱۲te^{-t})u(t)$$

مثال ۲۸: در صورتی که شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ از مقاومت‌های خطی و مثبت تشکیل شده باشد، کدام گزینه برای ولتاژ V_0 می‌تواند قابل قبول باشد؟



۱) $\frac{۱۰R}{R+۲}$

۲) $\frac{R+۱}{۲R+۴}$

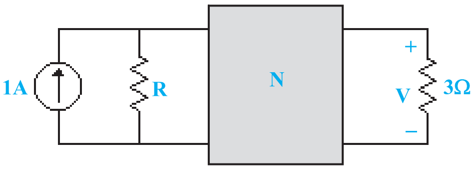
۳) $\frac{۱۰R}{\frac{۱}{۲}R+۴}$

۴) $\frac{۶R+۲}{۲R+\frac{۱}{۲}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه شبکه $N_۱$ با منبع جریان سری است، وجود این شبکه بی‌اثر است. در صورتی که R صفر باشد، همه جریان منبع جریان وارد R می‌شود و $V_0 = ۰$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) غلط هستند. حال اگر $R = \infty$ باشد و همه جریان نیز از شبکه $N_۲$ خارج شود، مقدار حداکثر V_0 به صورت $V_0(\max) = ۲\times۶ = ۱۲v$ است. بنابراین با چک کردن $R = \infty$ در گزینه‌ها، فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۲۹: در مدار زیر شبکه N متشکل از مقاومت‌های خطی مثبت است. کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند ولتاژ V را نشان دهد؟ $(R \geq ۰)$

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)



۱) $\frac{۲R}{R+۱}$

۲) $\frac{۲R+۱}{R+۱}$

۳) $\frac{۷R}{۲R+۳}$

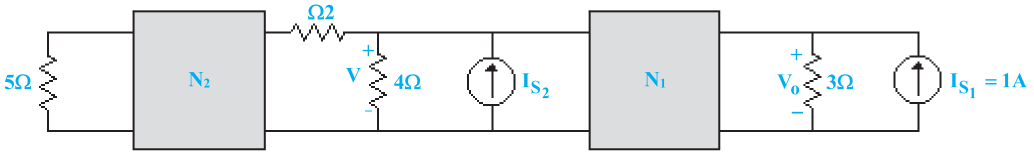
۴) $\frac{۴R+۱}{۳R+۱}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» حل این سؤال، با تست گزینه‌ها صورت می‌گیرد. اگر مقاومت R صفر شود، کل جریان ۱A از آن عبور می‌کند و باید V صفر شود. این خاصیت فقط در گزینه‌های (۱) و (۳) یافت می‌شود. اگر مقدار R بینهایت شود، حداکثر جریان خروجی در مقاومت ۳Ω باید ۱A شود و در نتیجه حداکثر ولتاژ خروجی ۳v می‌شود که این مورد در گزینه (۳) صادق نیست. لذا فقط گزینه «۱» صحیح است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا باید به این نکته توجه کرد که شبکه‌های خطی و مقاومتی در قضیه هم‌پاسخی صادق بوده و برای آنها رابطه زیر برقرار است.

$$Z_{۲۱} = Z_{۱۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{۲}}{I_{۱}} = \frac{V_{۱}}{I_{۲}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{I_{S_{۲}}} = \frac{V}{I_{S_{۱}}}$$

علاوه بر قضیه هم‌پاسخی، قضیه جمع آثار نیز در این مدارها برقرار است. حال داریم:



$$V = k_{۱}I_{S_{۱}} + k_{۲}I_{S_{۲}} \ , \ I_{S_{۱}} = ۱ \ , \ I_{S_{۲}} = ۲ + ۳\cos t \qquad \text{و} \qquad V = ۸ + ۹\cos t$$

با جایگذاری مقادیر $I_{S_{۱}}$ و $I_{S_{۲}}$ در رابطه V می‌توان ضریب $k_{۱}$ و $k_{۲}$ را محاسبه کرد.

$$۸ + ۹\cos t = k_{۱} \times ۱ + k_{۲} \times (۲ + ۳\cos t) \quad \Rightarrow \quad k_{۱} = ۲ \ , \ k_{۲} = ۳ \quad \Rightarrow \quad V = ۲I_{S_{۱}} + ۳I_{S_{۲}}$$

حال با توجه به این که هر دو منبع ورودی در هر دو طرف شبکه منبع جریان‌اند، از بیان $Z_{۱۲} = Z_{۲۱}$ برای قضیه‌ی هم‌پاسخی استفاده می‌کنیم. در واقع ولتاژ V، ولتاژ دو سر منبع جریان $I_{S_{۲}}$ و ولتاژ دو سر مقاومت ۳Ω همان ولتاژ دو سر $I_{S_{۱}}$ است. حالا که ارتباط ولتاژ V با دو منبع جریان را به صورت $V = ۲I_{S_{۱}} + ۳I_{S_{۲}}$ یافتیم، چنانچه $I_{S_{۲}} = ۰$ باشد، $V = ۲I_{S_{۱}}$ می‌شود. یعنی منبع سمت راست، ولتاژ مدار بازی مساوی با ۲ برابر مقدار خود ($۲I_{S_{۱}}$) روی منبع سمت چپ ایجاد می‌کند. پس منبع سمت چپ هم طبق قضیه هم‌پاسخی ولتاژی به اندازه ۲ برابر مقدار خود را روی منبع سمت راست ایجاد می‌کند. یعنی وقتی $I_{S_{۲}}$ وجود دارد و $I_{S_{۱}} = ۰$ است، ولتاژ دو سر $I_{S_{۱}}$ که همان ولتاژ دو سر مقاومت ۳Ω است، برابر $۲I_{S_{۲}}$ می‌باشد.

به عبارت دیگر:

$$\frac{V_o}{I_{S_{۲}}} = \frac{V}{I_{S_{۱}}} = ۲ \quad \Rightarrow \quad V_o = ۲I_{S_{۲}}$$

در ادامه داریم:

$$\Rightarrow \quad V_o = ۲\cos t \quad \Rightarrow \quad V_o(\text{rms}) = \frac{۲}{\sqrt{۲}}\text{v} \qquad \text{و} \qquad P_{۳\Omega} = \frac{V_o^{۲}(\text{rms})}{۳} = \frac{(\frac{۲}{\sqrt{۲}})^{۲}}{۳} = \frac{۲}{۳}\text{w}$$

نکته۵: نکته‌ای جالب و کاربردی در قضیه‌ی هم‌پاسخی: اغلب دانشجویان در تشخیص این که دو درگاه ورودی و خروجی در شبکه دقیقاً کجا هستند و نیز این که در یک مثال معین، از کدام بیان هم‌پاسخی استفاده کنند، دارای مشکل هستند. در این‌جا به عنوان یک روش ساده، راحت‌ترین روش استفاده از قضیه هم‌پاسخی را بیان می‌کنیم. در هر صورت روش‌های دیگری هم ممکن است موجود باشد، ولی این روش بسیار کاربردی و ساده است:

الف) تعیین درگاه‌های ورودی و خروجی: برای این کار درگاه‌های ورودی و خروجی را همان محل اعمال ورودی در دو طرف مدار در نظر بگیرید (مثلاً اعمال ورودی در سمت چپ مدار «الف» را با درگاه $A - B$ به عنوان درگاه ورودی و محل اعمال ورودی در سمت راست مدار «ب» را به عنوان درگاه $C - D$ در نظر بگیرید.) کاری نداشته باشید که چه مجهولی از شما و در کجا خواسته شده است. با تقسیم ولتاژ یا جریانی ساده می‌توانید این مجهول را به ولتاژ یا جریان درگاهی که مشخص کرده‌اید، ارتباط دهید.

ب) تعیین این که از کدام بیان استفاده کنیم: برای این کار به نوع ورودی‌ها نگاه می‌کنیم.

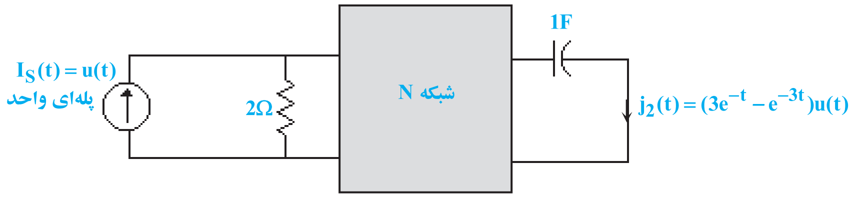
۱) در بیان $Z_{۱۲} = Z_{۲۱}$، $\frac{V_{۲}}{I_{۱}} = \frac{V_{۱}}{I_{۲}}$ می‌باشد؛ بنابراین هر دو ورودی جریان هستند.

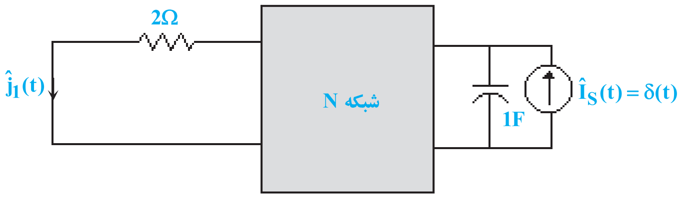
۲) در بیان $Y_{۱۲} = Y_{۲۱}$، $\frac{I_{۲}}{V_{۱}} = \frac{I_{۱}}{V_{۲}}$ می‌باشد؛ بنابراین هر دو ورودی ولتاژ هستند.

۳) در بیان $H_{۱۲} = -H_{۲۱}$، $\frac{V_{۱}}{V_{۲}} = -\frac{I_{۲}}{I_{۱}}$ می‌باشد، و در بیان $G_{۱۲} = -G_{۲۱}$، $\frac{V_{۲}}{V_{۱}} = -\frac{I_{۱}}{I_{۲}}$ می‌باشد؛ بنابراین در این حالات یکی از ورودی‌ها ولتاژ و دیگری جریان است.

برای درک بهتر این توضیحات مثال بعدی را با هم بررسی می‌کنیم.

مثال ۵۴: دو آزمایش برای شبکه N که یک شبکه RLC خطی تغییرناپذیر با زمان است، در حالت صفر انجام شده است. مقدار $\hat{j}_۱(t)$ برای $t > ۰$ و به ازای ورودی $\hat{I}_S(t) = \delta(t)$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۴)





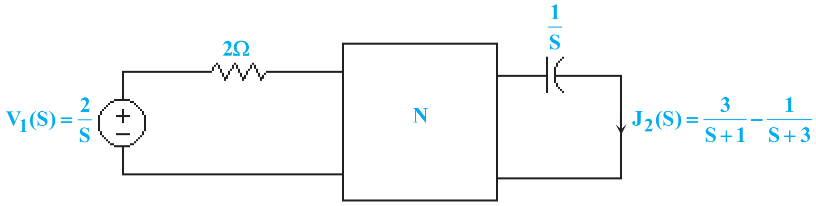
۱) $\hat{j}_۱(t) = \frac{۱}{۲}(۳e^{-t} + e^{-۳t})u(t)$

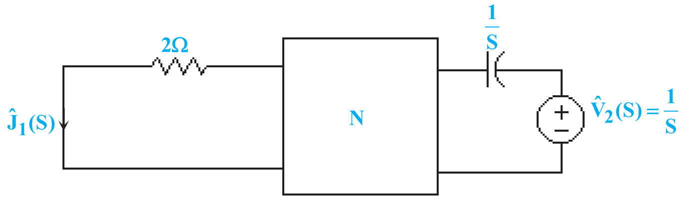
۲) $\hat{j}_۱(t) = \frac{۱}{۲}(۳e^{-t} - e^{-۳t})u(t)$

۳) $\hat{j}_۱(t) = \frac{۱}{۲}(e^{-۳t} + ۳e^{-t})u(t)$

۴) $\hat{j}_۱(t) = \frac{۱}{۲}(e^{-۳t} - ۳e^{-t})u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به این که شبکه RLC ساده یک شبکه متقابل است، در حل این تست می‌توانیم از قضیه هم‌پاسخی استفاده کنیم. بدین منظور ابتدا با تبدیل‌های نورتن به تونن مناسب، شرایط مورد نیاز برای بهره‌گیری از بیان‌های استاندارد قضیه هم‌پاسخی را فراهم می‌سازیم:

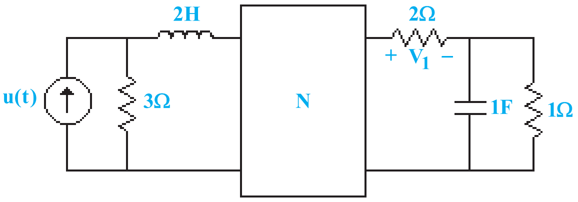




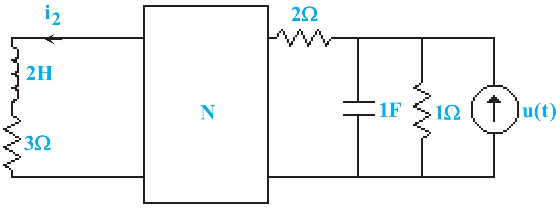
حال می‌توان از بیان اول قضیه هم‌پاسخی برای حل تست استفاده نمود:

$$\frac{J_۲(S)}{V_۱(S)} = \frac{\hat{J}_۱(S)}{\hat{V}_۲(S)} \Rightarrow \frac{\frac{۳}{S+۱} - \frac{۱}{S+۳}}{\frac{۲}{S}} = \frac{\hat{J}_۱(S)}{\frac{۱}{S}} \Rightarrow \hat{J}_۱(S) = \frac{\frac{۳}{۲}}{S+۱} - \frac{\frac{۱}{۲}}{S+۳} \Rightarrow \hat{j}_۱(t) = \frac{۱}{۲}(۳e^{-t} - e^{-۳t})u(t)$$

مثال ۵۵: اگر پاسخ حالت صفر $v_۱$ در شکل (۱) برابر $V_۱ = \left[۲e^{-t} - ۳e^{-۲t} + ۱\right]u(t)$ باشد، پاسخ حالت صفر $i_۲$ در شکل (۲)، برابر کدام است؟ (N هم پاسخ است) (مهندسی برق ـ دکتری ۹۵)



شکل (۱)



شکل (۲)

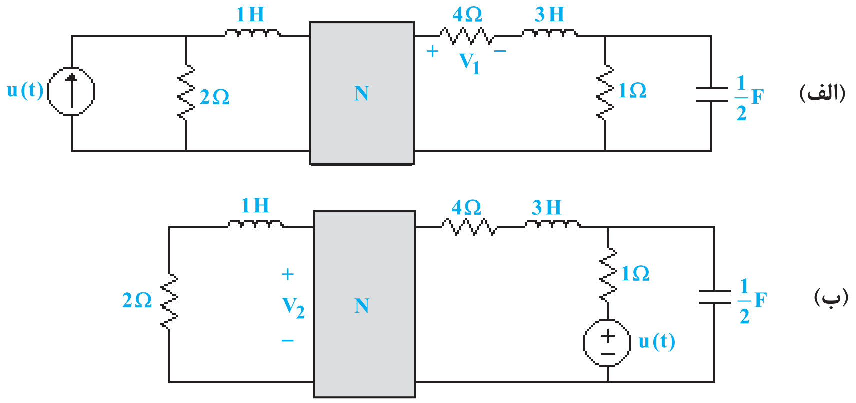
۱) $\frac{۱}{۶}\left[۱ - ۳e^{-t} + te^{-t} + e^{-۲t}\right]u(t)$

۲) $\frac{۱}{۶}\left[۱ - ۴e^{-t} + ۲te^{-t} + ۳e^{-۲t}\right]u(t)$

۳) $\frac{۱}{۲}\left[۱ - ۴e^{-t} + ۲te^{-t} - e^{-۲t}\right]u(t)$

۴) $\frac{۱}{۲}\left[۱ - e^{-t} + te^{-t} - e^{-۲t}\right]u(t)$

۵ـ مدار زیر یک مدار هم‌پاسخ است. اگر در شکل (الف) پاسخ حالت صفر $V_۱$ به‌صورت $V_۱ = u(t)(۳ - e^{-t} - ۲e^{-۳t})$ باشد، در مدار شکل (ب)، $V_۲(t)$ برابر با کدام گزینه است؟



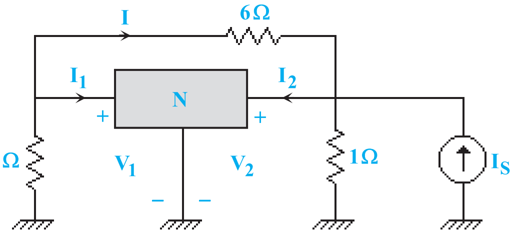
۱) $u(t)(-۴e^{-t} + e^{-۳t} + ۳)$

۲) $u(t)(۳ - e^{-t} - ۲e^{-۳t})$

۳) $\frac{۱}{۴}u(t)(۳ + e^{-۳t} - ۴e^{-t})$

۴) $\frac{۱}{۴}u(t)(۳ - e^{-t} - ۲e^{-۳t})$

۶ـ در مدار شکل زیر، روابط زیر در مورد شبکه N برقرار است. حال مقدار α را طوری تعیین کنید که $I = \frac{۱}{۹}I_S$ شود.



$$\begin{cases} I_۱ = ۲V_۱ + \alpha V_۲ \\ I_۲ = -۲V_۱ + ۳V_۲ \end{cases}$$

۱) −۲/۷

۲) −۳/۷

۳) ۳/۷

۴) −۱۰۷

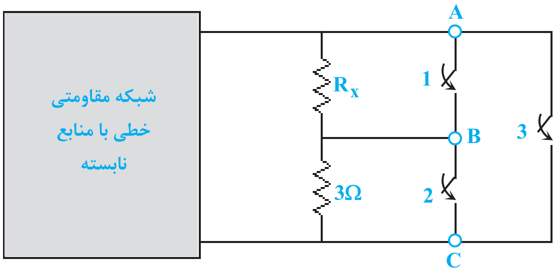
۷ـ در مدار شکل زیر آزمایش‌های زیر انجام شده است: (در حالت اولیه تمام کلیدها باز هستند و همچنین از مقاومت کلیدها صرف‌نظر می‌کنیم)

۱. اگر تنها کلید ۱ را ببندیم، جریان ۳A از کلید ۱ عبور خواهد کرد.

۲. اگر تنها کلید ۲ را ببندیم، جریان ۲A از کلید ۲ عبور خواهد کرد.

۳. اگر تنها کلید ۳ را ببندیم، جریان ۶A از کلید ۳ عبور خواهد کرد.

با فرض باز بودن تمام کلیدها، شبکه معادل تونن دیده شده (V_{th}, R_{th}) از دو سر کلید ۱ (سرهای A و B) به ترتیب از راست به چپ چند اهم و چند ولت است؟



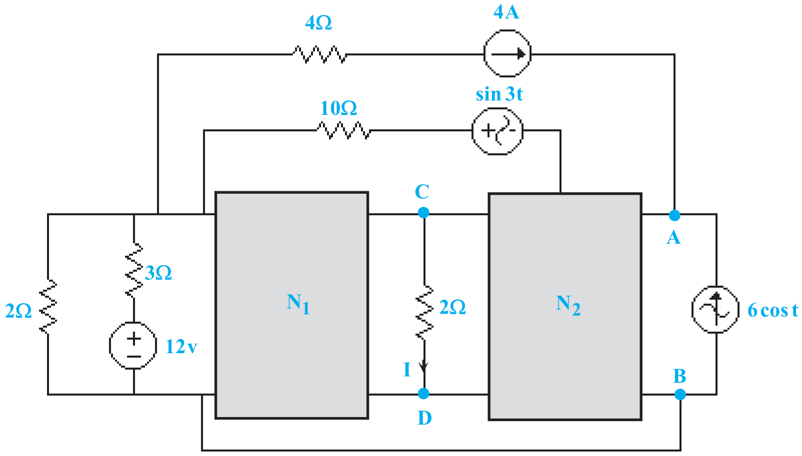
۱) ۱۲،۳

۲) ۹،۳

۳) ۱۸،۳

۴) ۱۸،۶

۸ـ در مدار زیر جریان I علاوه بر بقیه جملات، شامل یک تابع کسینوسی با فرکانس زاویه‌ای یک و دامنه $-\frac{۱}{۳}$ آمپر می‌باشد. مقدار متوسط جریان I مطابق با کدام گزینه است؟ ($N_۱$ و $N_۲$ فقط از مقاومت‌های مثبت و خطی تشکیل شده‌اند.)



۱) $-\frac{۱}{۱۸}$

۲) $-\frac{۱}{۶}$

۳) $-\frac{۱}{۱۲}$

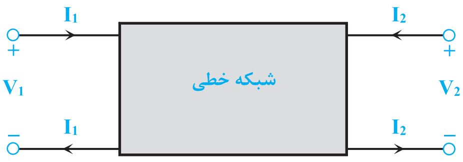
۴) $-\frac{۲}{۹}$

مدرسان شریف

فصل یازدهم

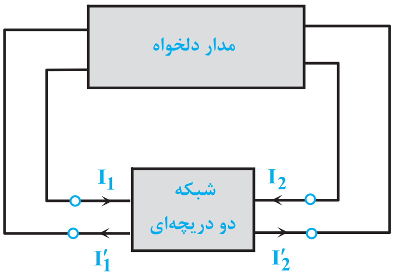
«شبکه‌های دو دریچه‌ای»

درسنامه (۱): پارامترهای شبکه‌های دو دریچه‌ای



بنا به تعریف، یک شبکه دو دریچه‌ای را می‌توان به عنوان یک شبکه، داخل یک جعبه سیاه در نظر گرفت که تنها دو دریچه ورودی و خروجی آن قابل دسترس است. در حالت کلی ما شبکه‌های دو دریچه‌ای را متشکل از عناصری مانند R، L، C، ترانسفورماتورها و منابع وابسته می‌دانیم و همواره یک زوج ترمینال به عنوان ورودی و یک زوج ترمینال به عنوان خروجی در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است که یک شبکه دو دریچه‌ای، منبع مستقل ندارد.

تذکر ۱: در سؤالات کنکور و کتاب‌های مرجع، شبکه‌های دو دریچه‌ای را **شبکه‌های دوقطبی** (Two Port) و شبکه‌های **چهارسر** (Four terminal) نیز می‌نامند. در این کتاب، هر سه مورد آنها را به کار برده‌ایم که دانشجویان عزیز دچار مشکل نشوند و بدانند هر سه این موارد، با هم یکی هستند.

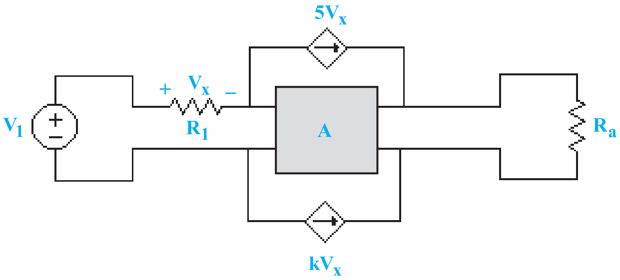


تذکر ۲: ممکن است شبکه دو دریچه‌ای طوری تحریک گردد که جریان پایه‌های ورودی و خروجی در یک دریچه شبکه برابر نباشند. در این حالت این شبکه دیگر شبکه دو دریچه‌ای به حساب نیامده و نمی‌توان از خواص کلی این شبکه‌ها در تحلیل آن استفاده نمود:

$$\underbrace{I_۱ \neq I'_۱}_{\searrow} \quad \text{یا} \quad \underbrace{I_۲ \neq I'_۲}_{\swarrow}$$

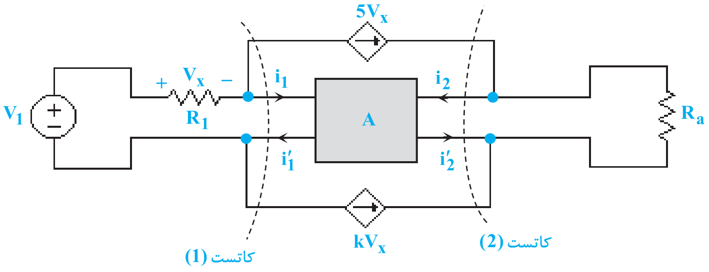
شبکه دو دریچه‌ای خواص خود را از دست می‌دهد.

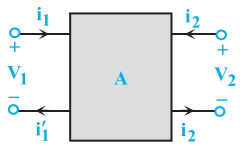
مثال ۱: اگر بخواهیم شبکه A یک دوقطبی باشد، مقدار k کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۵
۳) −۵
۴) −۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای این که یک مجموعه ۴ سر، یک دوقطبی باشد، باید جریان‌های ورودی و خروجی از قطب‌ها برابر باشند؛ یعنی در شکل‌های زیر باید $i_۱ = i'_۱$ و $i_۲ = i'_۲$.





با در نظر گرفتن کاتست‌های (۱) و (۲) در شکل فوق می‌توان نوشت:

$$i_۲ = i'_۲ + kV_x + ۵V_x \xrightarrow{i_۲ = i'_۲} k = -۵$$

$$i_۱ + kV_x + ۵V_x = i'_۱ \xrightarrow{i_۱ = i'_۱} k = -۵$$

پس اگر k برابر ۵- باشد، شبکه A یک دوقطبی خواهد بود.

انواع پارامترهای شبکه‌های دو دریچه‌ای

چهار نوع از پارامترهای شبکه‌های دو دریچه‌ای مرسوم عبارتند از:

۱) پارامترهای امپدانس (Z) ، ۲) پارامترهای ادمیتانس (Y) ، ۳) پارامترهای هایبرید (H) ، ۴) پارامترهای انتقال (T)

پارامترهای امپدانس

در صورتی که شبکه دوقطبی N به شکل زیر در نظر گرفته شود که در آن جریان‌های $I_۱$ و $I_۲$، متغیرهای مستقل و ولتاژهای $V_۱$ و $V_۲$ متغیرهای وابسته باشند، همواره روابط زیر برای آنها برقرار است: (به جهت جریان‌ها دقت شود)

$$\boxed{\begin{matrix} V_۱ = Z_{۱۱}I_۱ + Z_{۱۲}I_۲ \\ V_۲ = Z_{۲۱}I_۱ + Z_{۲۲}I_۲ \end{matrix}} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ Z_{۲۱} & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ Z_{۲۱} & Z_{۲۲} \end{bmatrix}$$

روش محاسبه پارامترهای Z به صورت زیر است:

$Z_{۱۲} = \frac{V_۱}{I_۲}\Big|_{I_۱=۰}$ **(امپدانس تبدیل مستقیم)**

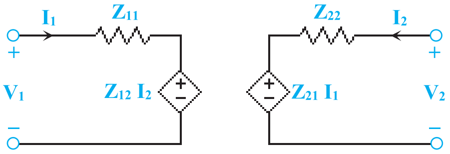
$Z_{۱۱} = \frac{V_۱}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$ **(امپدانس ورودی در حالت مدار باز بودن خروجی)**

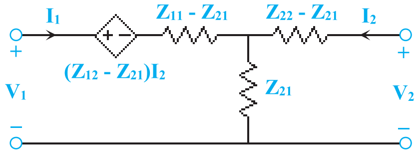
$Z_{۲۲} = \frac{V_۲}{I_۲}\Big|_{I_۱=۰}$ **(امپدانس خروجی در حالت ورودی مدار باز)**

$Z_{۲۱} = \frac{V_۲}{I_۱}\Big|_{I_۲=۰}$ **(امپدانس تبدیل معکوس)**

پارامترهای امپدانس همگی برحسب اهم (Ω) بیان می‌شوند.

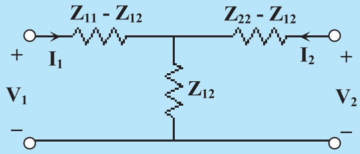
با استفاده از پارامترهای Z، مدارهای معادل زیر را در حالت کلی می‌توان جایگزین شبکه N نمود:





نکته ۱: در صورت تساوی $Z_{۱۲}$ و $Z_{۲۱}$، دوقطبی را متقابل می‌گویند و در این صورت مدار معادل ذکر شده با پارامترهای Z، به صورت مقابل ساده می‌شود:

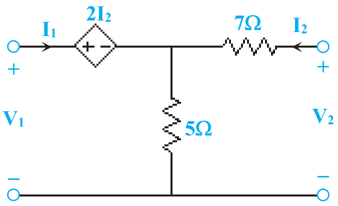
مدار معادل بدست آمده همان مدار معادل T برای شبکه‌های متقابل است.



تذکر ۳: به دانشجویان توصیه می‌شود روابط فوق را حفظ نکنند و فقط معادلات اصلی پارامترها را به خاطر بسپارند. واضح است که از روی معادلات به راحتی می‌توان هر کدام از پارامترها را بیان نمود.

تذکر ۴: در حل بعضی مسائل که معمولاً بیش از یک پارامتر مدنظر است، بهتر است با نوشتن معادلات KCL و KVL مناسب در ورودی و خروجی دوقطبی، فرم معادلات اصلی را بنویسیم و از روی این معادلات، مقادیر پارامترها را تعیین نمائیم.

مثال ۲: در دوقطبی شکل زیر، مقدار $Z_{۱۱} + Z_{۲۱}$ چند اهم است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۵

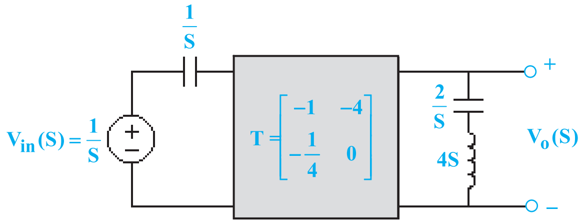
۴) ۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» **روش اول:** با نوشتن KVL در مش‌های سمت چپ و راست داریم:

$$\begin{cases} V_۱ = ۲I_۲ + ۵(I_۱ + I_۲) \\ V_۲ = ۷I_۲ + ۵(I_۱ + I_۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۵I_۱ + ۷I_۲ \\ V_۲ = ۵I_۱ + ۱۲I_۲ \end{cases}$$

لذا $Z_{۱۱} = ۵\Omega$ و $Z_{۲۱} = ۵\Omega$ است و $Z_{۱۱} + Z_{۲۱} = ۵ + ۵ = ۱۰\Omega$ خواهد بود.

حال با توجه به فرمول بهره ولتاژ با وجود ماتریس T داریم:

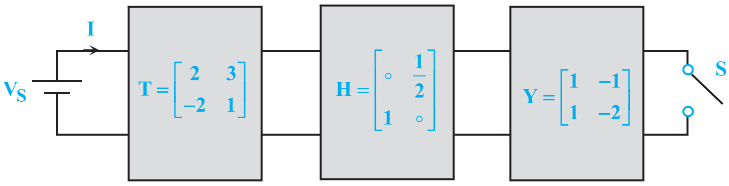


$$T=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\quad,\quad \frac{V_o}{V_{in}}=\frac{Z_L}{(A+CZ_S)Z_L+B+DZ_S}$$

$$H(S)=\frac{V_o(S)}{V_{in}(S)}=\frac{\frac{۲}{S}+۴S}{(-۱-\frac{۱}{۴S})(\frac{۲}{S}+۴S)+(-۴)}=\frac{۴S^۳+۲S}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}\quad و \quad V_{in}=u(t)\Rightarrow V_{in}(S)=\frac{۱}{S}$$

$$V_o(S)=H(S).V_{in}(S)=\frac{۴S^۳+۲S}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{S}\Rightarrow V_o(t=۰^+)=\lim_{S\to\infty}S\,V_o(S)=\lim_{S\to\infty}\frac{S(۴S^۳+۲S)}{-۴S^۳-۵S^۲-۲S-\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{S}\Rightarrow \mathbf{V_o(t=۰^+)=-۱v}$$

مثال ۸۳: **در مدار زیر هنگامی که کلید S بسته است، جریان I برابر $\frac{۱}{۲}$ آمپر می‌باشد. اگر کلید باز شود، جریان I چند آمپر خواهد بود؟**



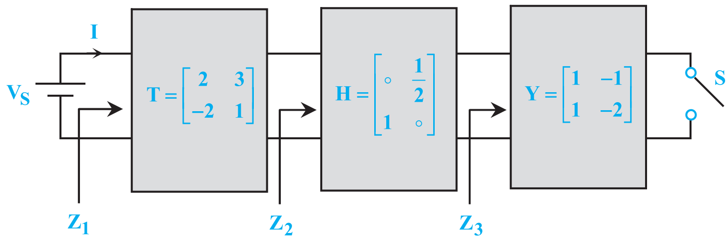
۱) $-\frac{۲}{۳}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست باید امپدانس ورودی را از دید منبع ولتاژ در دو حالت مورد نظر محاسبه کنیم. در محاسبه اول مقدار مجهول منبع ولتاژ به دست می‌آید و در محاسبه بعدی می‌توان جریان I را با استفاده از مقدار منبع ولتاژ و امپدانس مدار به دست آورد. برای حل سریع‌تر تست از روابط بیان شده برای محاسبه امپدانس ورودی شبکه‌های دوقطبی استفاده می‌کنیم. ابتدا با فرض بسته بودن کلید، مقادیر $Z_۱$ ، $Z_۲$ و $Z_۳$ را محاسبه می‌کنیم:



$$Z_۳=(y_{۱۱}-\frac{y_{۱۲}y_{۲۱}}{y_{۲۲}+Z_L^{-۱}})^{-۱}\xrightarrow{Z_L=۰}Z_۳=(۱-\frac{-۱\times۱}{-۲+\infty})^{-۱}=۱\Omega$$

$$Z_۲=h_{۱۱}-\frac{h_{۱۲}h_{۲۱}}{h_{۲۲}+Z_L^{-۱}}\xrightarrow{Z_L=Z_۳=۱\Omega}Z_۲=۰-\frac{\frac{۱}{۲}\times۱}{۰+۱}=-\frac{۱}{۲}\Omega$$

$$Z_۱=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}\xrightarrow{Z_L=Z_۲=-\frac{۱}{۲}\Omega}Z_۱=\frac{۲\times-\frac{۱}{۲}+۳}{-۲\times-\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۲}{۲}=۱\Omega$$

حال می‌توانیم مقدار V_S را محاسبه کنیم:

$$V_S=Z_۱I=۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}v$$

اکنون با فرض باز بودن کلید دوباره مقادیر $Z_۱$، $Z_۲$ و $Z_۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$Z_۳=(y_{۱۱}-\frac{y_{۱۲}y_{۲۱}}{y_{۲۲}+Z_L^{-۱}})^{-۱}\xrightarrow{Z_L=\infty}Z_۳=(۱-\frac{-۱\times۱}{-۲+۰})^{-۱}=۲\Omega$$

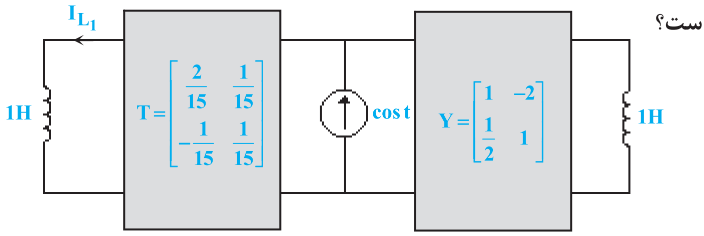
$$Z_۲=h_{۱۱}-\frac{h_{۱۲}h_{۲۱}}{h_{۲۲}+Z_L^{-۱}}\xrightarrow{Z_L=Z_۳=۲\Omega}Z_۲=۰-\frac{\frac{۱}{۲}\times۱}{۰+\frac{۱}{۲}}=-۱\Omega$$

$$Z_۱=\frac{AZ_L+B}{CZ_L+D}\xrightarrow{Z_L=Z_۲=-۱\Omega}Z_۱=\frac{۲\times-۱+۳}{-۲\times-۱+۱}=\frac{۱}{۳}\Omega$$

در نهایت می‌توان جریان I را به شکل روبرو محاسبه نمود:

$$\mathbf{I=\frac{V_S}{Z_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}A}$$

مثال ۸۴: در مدار مقابل، جریان I_{L_1} در حالت دائمی بر حسب آمپر کدام است؟



۱) $۰/۱\cos t$

۲) $۰/۱\sin t$

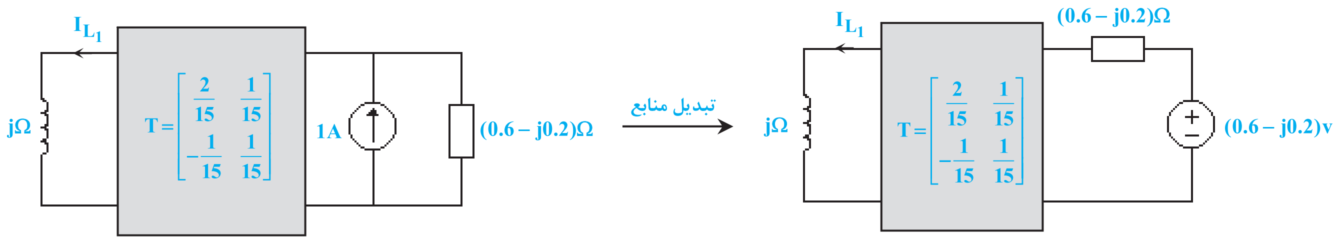
۳) $-۰/۱\cos t$

۴) $-۰/۱\sin t$

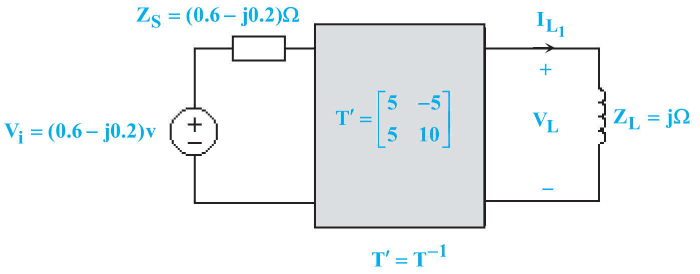
☑ **پاسخ:** گزینه «۲» از آنجایی که می‌خواهیم جریان سلف سمت چپ مدار را محاسبه کنیم، ابتدا مدار سمت راست منبع جریان را با امپدانس معادلش جایگزین می‌کنیم. این امپدانس از طریق رابطه زیر در حالت فازوری قابل محاسبه است:

$$Z=[y_{۱۱}-\frac{y_{۱۲}y_{۲۱}}{y_{۲۲}+\frac{۱}{Z_L}}]^{-۱}\xrightarrow{Z_L=j\Omega}Z=[۱-\frac{-۲\times\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{j}}]^{-۱}=[\frac{j۲+۱}{j+۱}]^{-۱}=\frac{j+۱}{j۲+۱}=(۰/۶-j۰/۲)\Omega$$

بنابراین مداری به صورت زیر خواهیم داشت (در حالت فازوری):



مدار فوق را می‌توان به مدار زیر تبدیل نمود:



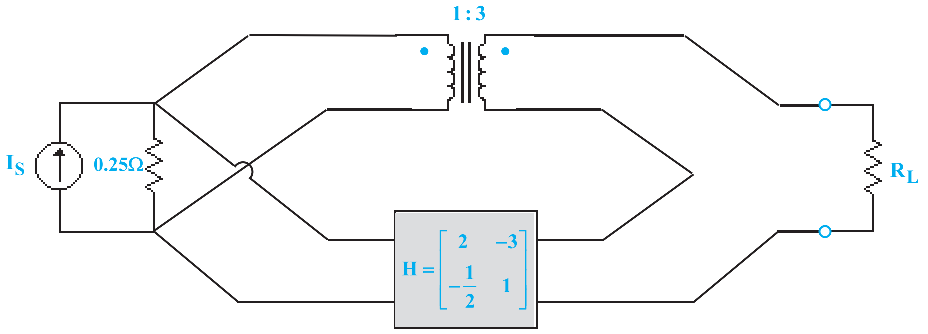
در این مدار جای ورودی و خروجی‌ها عوض شده و ماتریس انتقال دو قطبی با معکوسش جایگزین شده است.

حال طبق روابطی که قبل از این دیدیم، با محاسبه بهره ولتاژ مدار، ولتاژ و به دنبال آن جریان سلف را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{V_L}{V_i}=\frac{Z_L}{(A+CZ_S)Z_L+B+DZ_S}\xrightarrow{Z_L=j\Omega\,,Z_S=(۰/۶-j۰/۲)\Omega}\frac{V_L}{V_i}=\frac{j}{[۵+۵\times(۰/۶-j۰/۲)]\times j-۵+۱۰\times(۰/۶-j۰/۲)}=\frac{j}{۲+j۶}$$

$$\Rightarrow V_L=\frac{j}{۲+j۶}\times V_i=\frac{j}{۲+j۶}\times(۰/۶-j۰/۲)=۰/۱(v)\Rightarrow I_L=\frac{V_L}{j}=-j۰/۱\,(A)\Rightarrow\ \mathbf{I_L(t)=۰/۱\sin t\,(A)}$$

مثال ۸۵: در مدار زیر، مقدار R_L برای این که حداکثر توان ممکن را جذب کند، کدام است؟



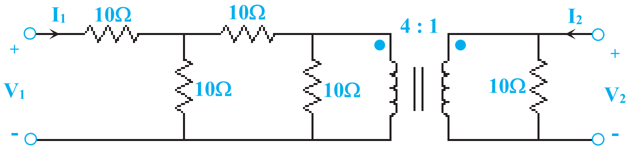
۱) ۰/۵ اهم

۲) ۱ اهم

۳) ۲ اهم

۴) ۴ اهم

۱۲ــ ماتریس T شبکه زیر کدام است؟



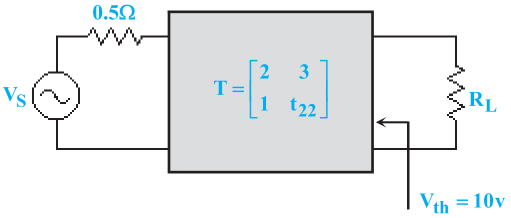
۱) $T=\begin{bmatrix} ۷/۵ & ۲ \\ ۱/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$

۲) $T=\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۷ \\ ۱/۲ & ۰/۵ \end{bmatrix}$

۳) $T=\begin{bmatrix} ۷/۵ & ۱/۵ \\ ۱/۵ & ۲ \end{bmatrix}$

۴) $T=\begin{bmatrix} ۲۰/۷۵ & ۷/۵ \\ ۱/۲۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$

۱۳ــ در مدار زیر بار R_L توان حداکثر ۲۰ w را جذب می‌کند. حال درایه $t_{۲۲}$ از ماتریس T کدام است؟



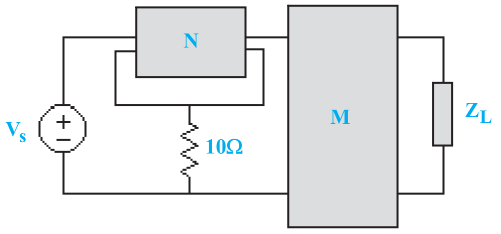
۱) ۱/۲۵

۲) ۱

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۲۵

۱۴ــ ماتریس امپدانس دوقطبی N به صورت $\begin{bmatrix} ۷S & ۶S \\ ۶S & ۸S \end{bmatrix}$ و ماتریس انتقال دوقطبی M به صورت $\begin{bmatrix} ۲۰S^{۲}+۱ & ۱۰S \\ ۴۰S^{۳}+۲S & ۲۰S^{۲}+۱ \end{bmatrix}$ داده شده است. اگر منبع مستقل در حالت دائمی سینوسی با فرکانس $\omega=۰/۵\ \frac{Rad}{sec}$ کار کند، امپدانس مدار از دو سر منبع مستقل برابر است با: $(Z_L\to\infty)$



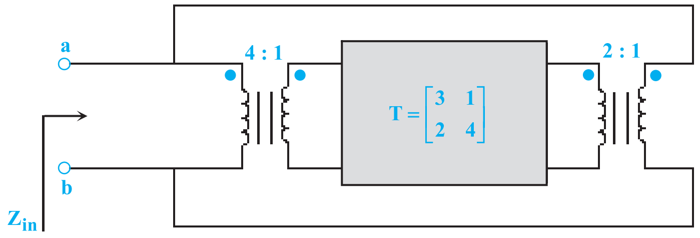
۱) ۰/۵ j اهم

۲) ۵ j اهم

۳) ۱۰+۰/۵ j اهم

۴) ۱۰+۵ j اهم

۱۵ــ در مدار زیر امپدانس ورودی کدام گزینه است؟



۱) ۰/۲۲Ω

۲) ۰/۱۴Ω

۳) ۰/۰۷Ω

۴) ۰/۴Ω

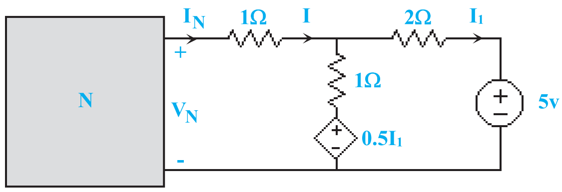
پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل یازدهم

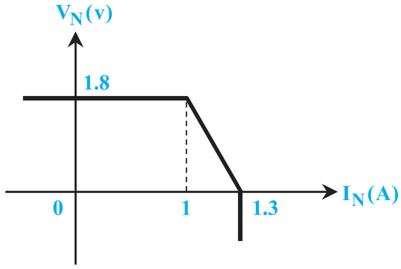
۱ــ گزینه «۳»	۲ــ گزینه «۱»	۳ــ گزینه «۴»	۴ــ گزینه «۱»	۵ــ گزینه «۱»
۶ــ گزینه «۴»	۷ــ گزینه «۲»	۸ــ گزینه «۴»	۹ــ گزینه «۱»	۱۰ــ گزینه «۲»
۱۱ــ گزینه «۳»	۱۲ــ گزینه «۴»	۱۳ــ گزینه «۴»	۱۴ــ گزینه «۱»	۱۵ــ گزینه «۲»

تحلیل مدارهای شامل مقاومت‌های غیرخطی

در این نوع مدارها ابتدا از دو سر المان غیرخطی، مدار معادل تونن را بدست می‌آوریم. سپس با جایگذاری مدار معادل تونن و با اعمال یک KVL یا KCL مناسب، رابطه $V-I$ المان غیرخطی را با توجه به مدار بدست می‌آوریم. حال رابطه بدست آمده را در روی منحنی $V-I$ داده شده در صورت مسأله ترسیم می‌کنیم. در ادامه از محل برخورد دو منحنی، نقطه کار مدار بدست می‌آید. در صورتی که چند المان غیرخطی به صورت سری یا موازی در مدار باشد، ابتدا آنها را ترکیب می‌کنیم. بدین صورت که اگر دو مقاومت غیرخطی با هم موازی باشند، با توجه به برابری ولتاژ آنها، نمودارهای مربوطه را به صورتی با هم ترکیب می‌کنیم که در ولتاژهای ثابت، جریان آنها با هم جمع شود. همچنین اگر دو مقاومت غیرخطی سری داشته باشیم، با توجه به برابری جریان آنها، نمودارهای آنها را طوری ترکیب می‌کنیم که ولتاژ آنها در جریان ثابت با هم جمع شود. پس از ترکیب آنها، مدار معادل تونن مدار را از دو سر المان غیرخطی بدست آورده و جایگزین می‌کنیم. حال مطابق با روش گفته شده در قبل از برخورد منحنی $V-I$ داده شده در صورت سؤال با منحنی $(V-I)$ بدست آمده از مدار، نقطه کار را بدست می‌آوریم.

مثال ۲۰: مشخصه یک‌قطبی N در مدار شکل زیر داده شده است. جریان I در این مدار کدام است؟





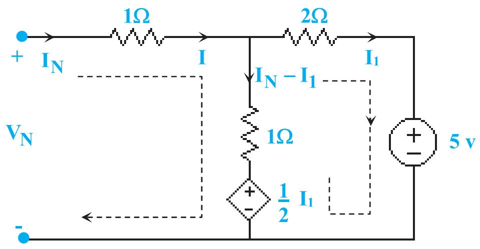
۱) $-\frac{۵}{۹}A$

۲) $-\frac{۴}{۹}A$

۳) $\frac{۵}{۹}A$

۴) $\frac{۴}{۹}A$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» برای بدست آوردن جریان I یا به عبارتی نقطه کار مدار، باید مدار معادل از سمت راست مدار را محاسبه کرده و سپس معادله بدست آمده را با منحنی یک‌قطبی قطع بدهیم. حال ابتدا مدار معادل تونن را از سمت راست محاسبه می‌کنیم.



با نوشتن KVL در حلقه سمت راست مدار داریم:

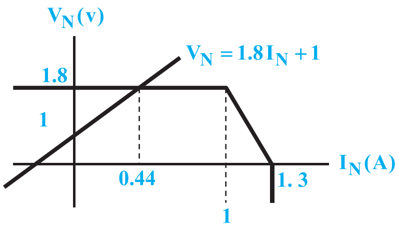
$$۲I_۱+۵-\frac{۱}{۲}I_۱-۱\times(I_N-I_۱)=۰ \Rightarrow I_N=۵+۲/۵I_۱ \Rightarrow I_۱=\frac{I_N-۵}{۲/۵} \quad (۱)$$

با نوشتن KVL در حلقه سمت چپ داریم:

$$V_N=I_N+(I_N-I_۱)+\frac{۱}{۲}I_۱ \quad (۲)$$

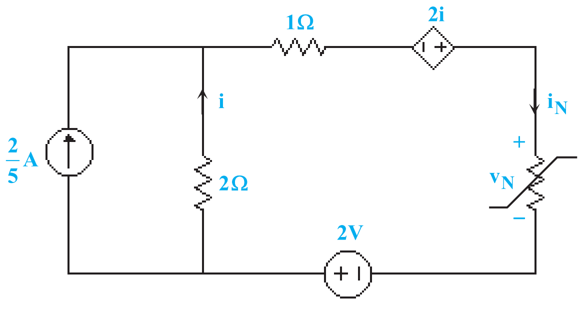
با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

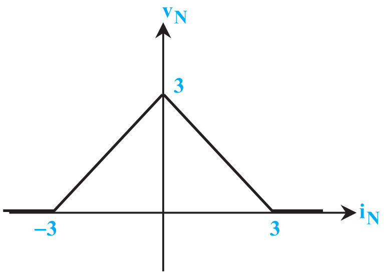
$$V_N=I_N+[I_N-\frac{I_N-۵}{۲/۵}]+\frac{۱}{۲}[\frac{I_N-۵}{۲/۵}] \Rightarrow V_N=۱/۸I_N+۱$$



حال رابطه بدست آمده را در منحنی مشخصه (V_N-I_N) شبکه N رسم می‌کنیم.
با توجه به شکل، دیده می‌شود که منحنی‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای با مشخصات $\mathbf{I_N=۰/۴۴A}$ و $\mathbf{V_N=۱/۸v}$ قطع می‌کنند.

مثال ۲۱: در مدار زیر، با توجه به مشخصه‌ی مقاومت غیرخطی v_N-i_N، جریان i چند آمپر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)



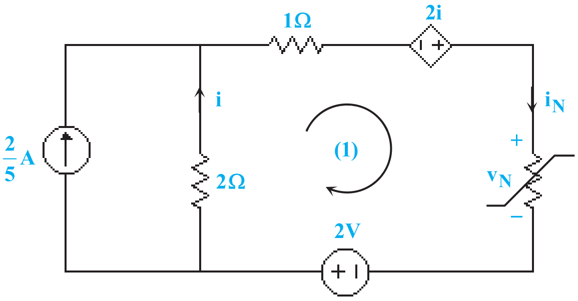


۱) $-\frac{۲}{۵}$

۲) $-\frac{۹}{۱۰}$

۳) $-\frac{۳}{۷}$

۴) $-\frac{۶}{۷}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا با یک KVL ساده رابطه V_N و i_N را به‌دست می‌آوریم:

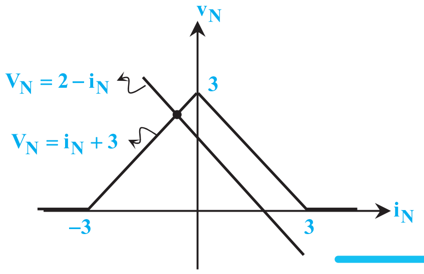
$$KVL(۱): ۲i + i_N - ۲i + V_N - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow V_N = ۲ - i_N$$

حال رابطه به‌دست آمده را با مشخصه مقاومت غیرخطی تلاقی می‌دهیم:

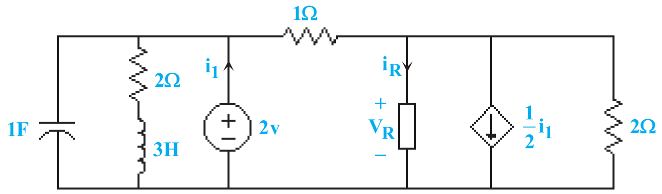
$$۲ - i_N = i_N + ۳ \Rightarrow i_N = -\frac{۱}{۲}A$$

$$i = i_N - \frac{۲}{۵} = -\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۵} = -\frac{۹}{۱۰}A$$



مثال ۲۲: در مدار زیر، جریان مقاومت غیرخطی $V_R = -\frac{۱}{۲}i_R^۳$، چند آمپر است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۷)



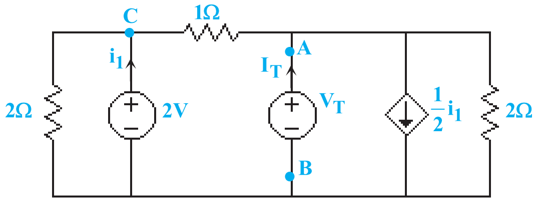
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق روند معمول حل تست‌های این چنینی ابتدا مدار معادل تونن از دو سر مقاومت غیرخطی R را محاسبه می‌کنیم. برای این کار مدار را در حالت ماندگار در نظر گرفته و با توجه به تغذیه DC آن، سلف را اتصال کوتاه و خازن را مدار باز در نظر می‌گیریم (بهتر بود که لفظ حالت ماندگار در صورت سؤال دقیقاً عنوان می‌شد که متأسفانه این امر در طراحی صورت سؤال رعایت نشده و می‌تواند باعث ابهام گردد).



مطابق شکل اکنون باید مدار معادل تونن را از دو سر A و B محاسبه کنیم.

دقت کنید که ما مجاز به حذف مقاومت ۲ اهمی در دو سر منبع ولتاژ ۲ ولت نیستیم چرا که این مقاومت در مقدار جریان $i_۱$ تأثیرگذار است.

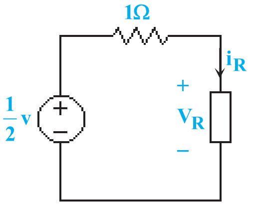
حال داریم:

$$KCL \ \ C: i_۱ = \frac{۲}{۲} + \frac{۲ - V_T}{۱} = ۳ - V_T \qquad (۱)$$

$$KCL \ \ A: \frac{۲ - V_T}{۱} + I_T = \frac{۱}{۲}i_۱ + \frac{V_T}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲}V_T + I_T - \frac{۱}{۲}i_۱ + ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{(۱)} -\frac{۳}{۲}V_T + I_T - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}V_T + ۲ = ۰ \Rightarrow V_T = I_T + \frac{۱}{۲} \Rightarrow R_{th} = ۱\Omega \ , \ \ V_{th} = \frac{۱}{۲}v$$

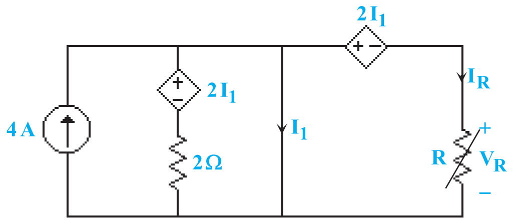
حال با جایگزینی مدار معادل تونن به‌دست آمده در مدار اصلی، داریم:



$$V_R = \frac{۱}{۲} - i_R = -\frac{۱}{۲}i_R{}^۳ \Rightarrow i_R{}^۳ - ۲i_R + ۱ = ۰ \Rightarrow i_R = ۱A$$

مثال ۲۳: در مدار غیرخطی زیر، ولتاژ V_R چند ولت می‌تواند باشد؟ مقاومت غیرخطی R با رابطه‌ی $I_R = V_R^۲ + ۳V_R$، توصیف می‌شود.

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۲)

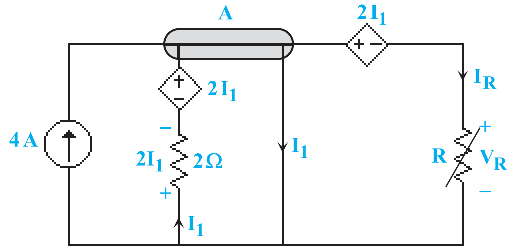


۱) ۲

۲) ۳

۳) ۲ و ‎−۲

۴) ۱ و ‎−۴



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به اینکه منبع وابسته $۲I_۱$ و مقاومت ۲ اهمی سری با آن در یک حلقه قرار دارند، لذا ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهمی برابر $۲I_۱$ و جریان آن نیز برابر $I_۱$ خواهد بود. حال با نوشتن KCL در گره A داریم:

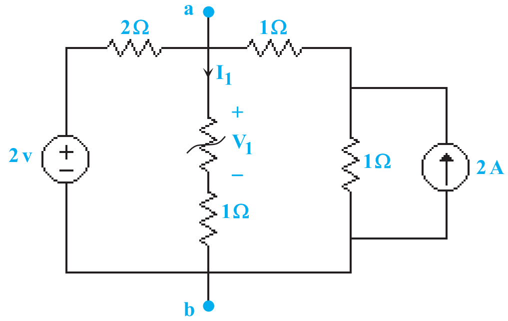
$$۴+I_۱=I_۱+I_R \quad \Rightarrow \quad I_R=۴A$$

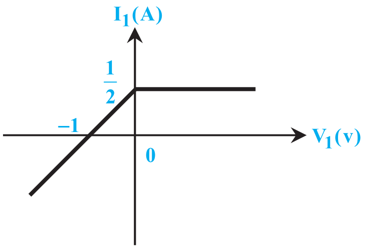
با قرار دادن $I_R=۴A$ در رابطه المان غیرخطی داریم:

$$I_R=V_R^۲+۳V_R \;\Rightarrow\; ۴=V_R^۲+۳V_R \;\Rightarrow\; V_R^۲+۳V_R-۴=۰ \;\Rightarrow\; (V_R-۱)(V_R+۴)=۰ \;\Rightarrow\; \mathbf{V_R=۱v} \text{ و } \mathbf{V_R=-۴v}$$

مثال ۲۴: ولتاژ V_{ab} در مدار زیر، چند ولت است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۲)





مقاومت غیرخطی V_1-I_1 مشخصه

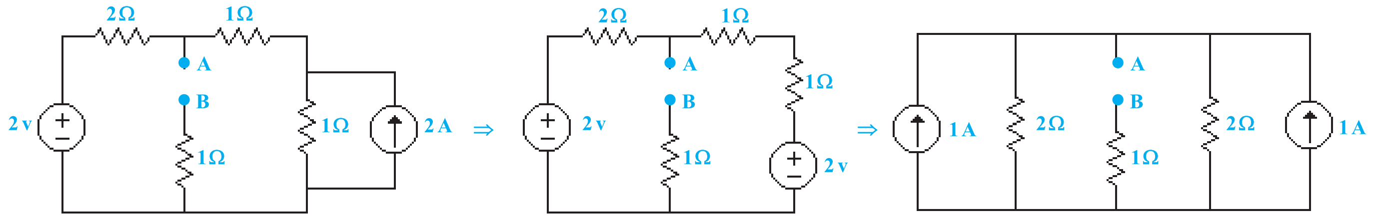
۱) $\frac{۱}{۲}$

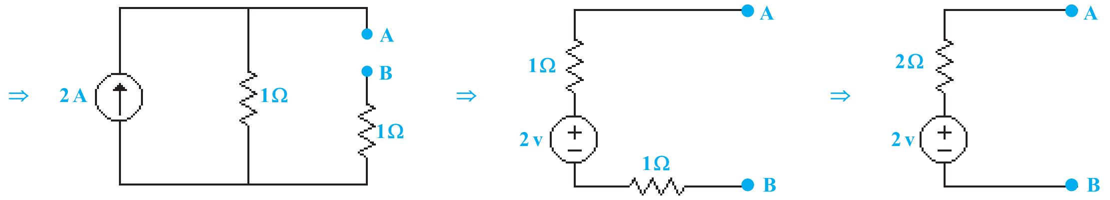
۲) ۲

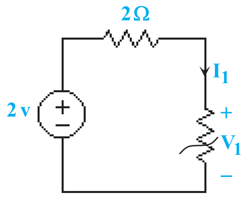
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا از دو سر المان غیرخطی، مدار معادل تونن را بدست می‌آوریم و در مدار جایگزین می‌کنیم. با تبدیل منابع و ساده‌سازی مدار داریم:



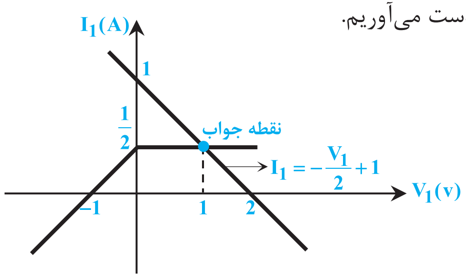




حال با جایگذاری مدار معادل تونن در مدار و نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:

$$-۲+۲I_۱+V_۱=۰ \quad \Rightarrow \quad I_۱=-\frac{V_۱}{۲}+۱ \qquad (*)$$

حال با ترسیم معادله (*) در نمودار مشخصه $(V_۱-I_۱)$، از محل تقاطع منحنی‌ها، نقطه‌کار را بدست می‌آوریم.

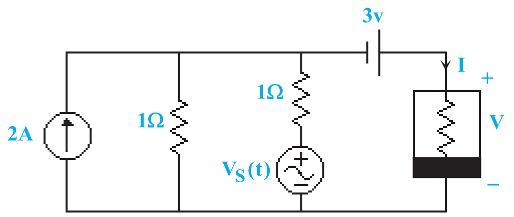


نقطه جواب $\begin{cases} I_۱=\frac{۱}{۲}A \\ V_۱=۱v \end{cases}$

$$I_D(rms)=\sqrt{\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T} I_D^{۲}(t)dt}=\sqrt{\frac{۱}{۱۲}\int_{۰}^{۱۲} I_D^{۲}(t)dt}$$

$$I_D(rms)=\sqrt{\frac{۱}{۱۲}[\int_{۰}^{۱} ۴^{۲}\sin^{۲}(\frac{\pi}{۶}t)\,dt+\int_{۱}^{۵} ۲^{۲}dt+\int_{۵}^{۶} ۴^{۲}\sin^{۲}(\frac{\pi}{۶}t)\,dt]}\;\Rightarrow\;\mathbf{I_D(rms)=۱/۲۵A}$$

مثال ۳۰: در مدار شکل زیر $V(t)$ دو سر مقاومت غیرخطی، به کدام جواب نزدیک‌تر است؟ $(V_S(t)=۰/۱۸\cos ۲t)$ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)



مشخصه مقاومت غیرخطی: $I=\begin{cases}V^{۲} & , \quad V\geq ۰\\ ۰ & , \quad V<۰\end{cases}$

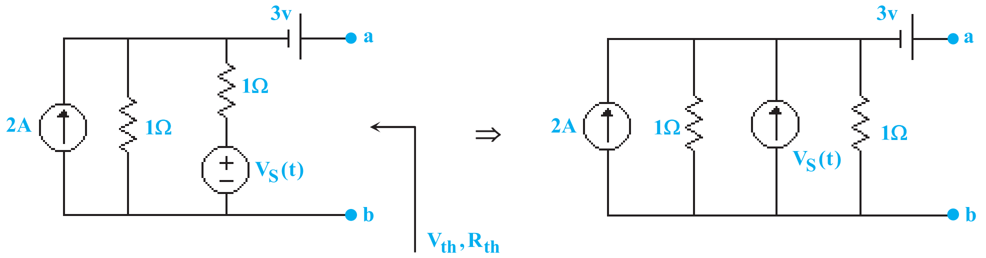
۱) $V(t)=۲+(۰/۰۳\cos ۲t)$ ولت

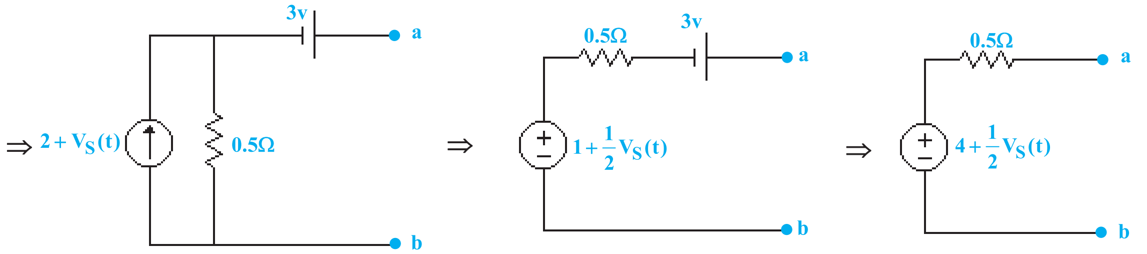
۲) $V(t)=۲+(۰/۰۶\cos ۲t)$ ولت

۳) $V(t)=۴+(۰/۰۱۸\cos ۲t)$ ولت

۴) $V(t)=۴+(۰/۰۳۶\cos ۲t)$ ولت

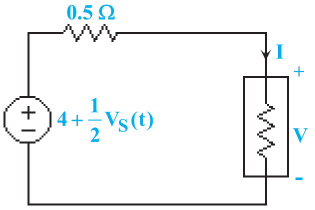
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا از دو سر مقاومت غیرخطی، مدار معادل تونن بدست آورده می‌شود. با ساده‌سازی مدار داریم:





$$\begin{cases}R_{th}=۰/۵\Omega\\ V_{th}=۴+\frac{۱}{۲}V_S(t)\end{cases}$$

با قرار دادن مدار معادل تونن در مدار و نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



$$۴+\frac{۱}{۲}V_S(t)=۰/۵I+V$$

$$V_S(t)=۰/۱۸\cos ۲t \quad و \quad I=V^{۲}$$

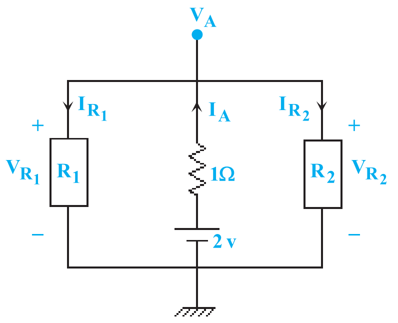
با جایگذاری روابط بالا، در رابطه بدست آمده از KVL داریم:

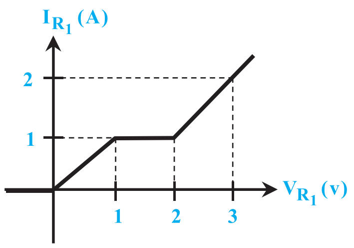
$$۴+\frac{۱}{۲}\times ۰/۱۸\cos ۲t=۰/۵\times V^{۲}+V$$

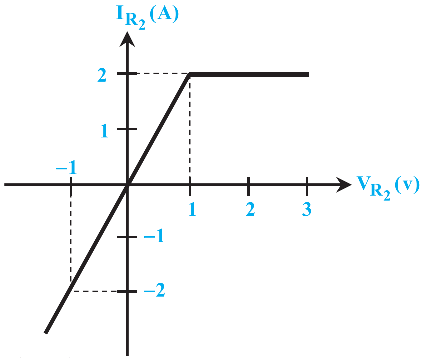
با حل معادله بالا برای V داریم:

$$\mathbf{V\approx ۲+۰/۰۳\cos ۲t}$$

مثال ۳۱ : منحنی $(I-V)$ مربوط به هر المان غیرخطی موجود است. در این شبکه جریان I_A برحسب آمپر کدام است؟







۱) ۱/۵

۲) ۲/۵

۳) ۱

۴) ۲

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» با توجه به موازی بودن المان‌های غیرخطی، ولتاژ آنها برابر بوده و جریان آنها با هم جمع می‌شود. لـذا ابتـدا منحنـی $(I_A - V_A)$ برآیند دو المان غیرخطی را بدست می‌آوریم:

$$V_A = V_{R_۱} = V_{R_۲} \quad , \quad I_A = I_{R_۱} + I_{R_۲}$$

$$V_A < ۰ \Rightarrow \begin{cases} I_{R_۱} = ۰ \\ I_{R_۲} = ۲V_{R_۲} \end{cases} \Rightarrow I_A = ۲V_{R_۲} \Rightarrow \mathbf{I_A = ۲V_A}$$

$$۰ < V_A < ۱ \Rightarrow \begin{cases} I_{R_۱} = V_{R_۱} \\ I_{R_۲} = ۲V_{R_۲} \end{cases} \Rightarrow I_A = V_{R_۱} + ۲V_{R_۲} \Rightarrow \mathbf{I_A = ۳V_A}$$

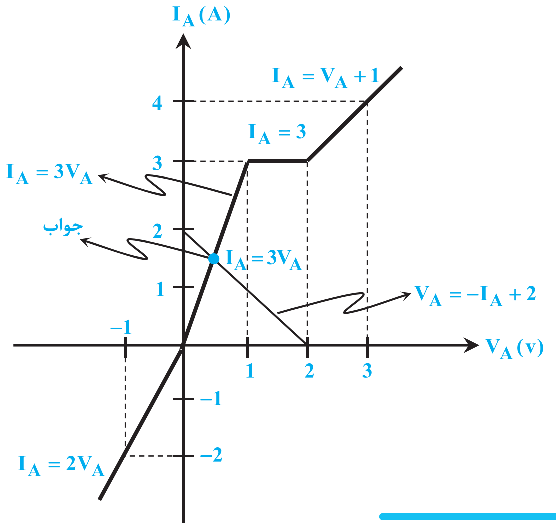
$$۱ < V_A < ۲ \Rightarrow \begin{cases} I_{R_۱} = ۱A \\ I_{R_۲} = ۲A \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I_A = ۳\,A}$$

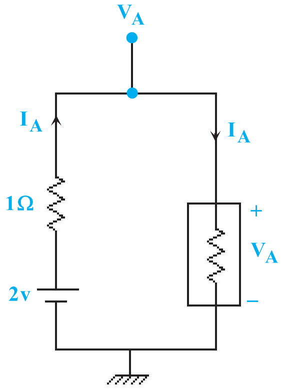
$$V_A > ۲ \Rightarrow \begin{cases} I_{R_۱} = V_{R_۱} - ۱ \\ I_{R_۲} = ۲A \end{cases} \Rightarrow I_A = V_{R_۱} - ۱ + ۲ \Rightarrow \mathbf{I_A = V_A + ۱}$$

در ادامه برای شاخه وسطی مدار داریم:

$$\mathbf{V_A = -I_A + ۲} \quad (*)$$

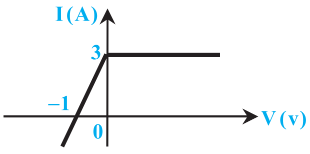
حال با توجه به ترکیب منحنی‌های المان‌های غیرخطی موازی، به جای آنها یک المان غیرخطی با منحنی $(I_A - V_A)$ گذاشته می‌شود. در ادامه حل، منحنی جدید $(I_A - V_A)$ و رابطه $(*)$ را در یک دستگاه واحد ترسیم می‌کنیم. حال از محل برخورد دو منحنی پاسخ I_A را محاسبه می‌کنیم.

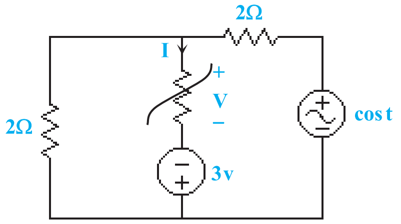




$$\begin{cases} V_A = -I_A + ۲ \\ I_A = ۳V_A \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I_A = ۱/۵\ A}$$

مثال ۳۲: در مدار زیر وقتی جریان مقاومت غیرخطی I − V برابر ۳ آمپر است، بیشترین مقدار V چند ولت است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۱)





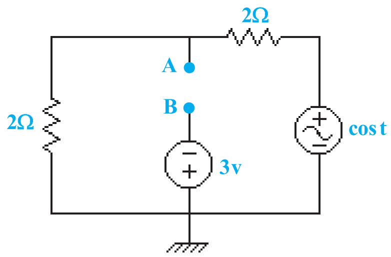
۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

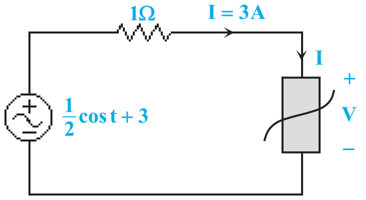
۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» جهت حل این سؤال، ابتدا از دو سر المان غیرخطی، مـدار معـادل تـونن را بدسـت می‌آوریم. سپس با جایگذاری مدار معـادل تـونن و بـا نوشـتن KVL در حلقـه مـدار، معادلـه V را بدسـت می‌آوریم. در صورتی که از دو سر المان غیرخطی معادل تونن دیده شود، داریم: $R_{th} = ۲ \| ۲ = ۱\Omega$



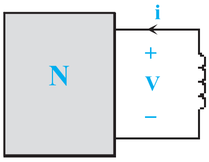
$$V_A = \cos t \times \frac{۲}{۲+۲} = \frac{۱}{۲}\cos t \Rightarrow V_{th} = V_{AB} = V_A - V_B = \frac{۱}{۲}\cos t + ۳$$

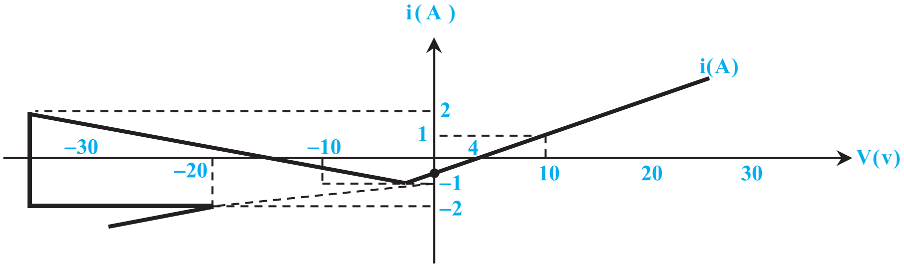
با جایگذاری مدار معادل تونن و نوشتن KVL در حلقه مدار داریم:



$$V = -۱ \times I + \frac{۱}{۲}\cos t + ۳ = -۱ \times ۳ + \frac{۱}{۲}\cos t + ۳ \Rightarrow V = \frac{۱}{۲}\cos t \Rightarrow \mathbf{V(Max) = \frac{۱}{۲}v}$$

مثال ۴۰: با توجه به رابطه‌ی $V-i$ دو سر سلف، با شرط $i(0^-)=۳A$ رابطه $V(t)$ برای $t>0^-$ کدام است؟





۱) $V(t)=۲۲e^{-\frac{۶}{L}t}$

۲) $V(t)=۲۲e^{-\frac{۶}{L}t}(۱+۱/۵t)$

۳) $V(t)=۲۲e^{\frac{۶}{L}t}(۱+۱/۵t)$

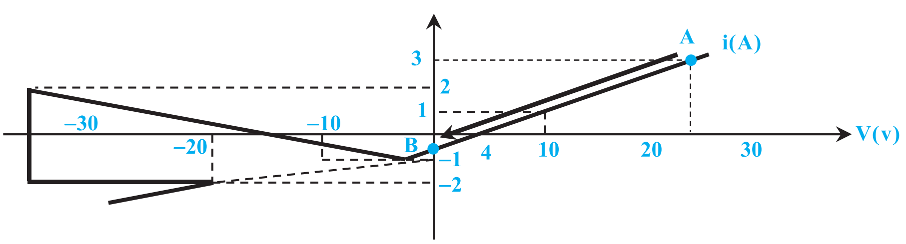
۴) $V(t)=۲۲e^{\frac{۶}{L}t}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» هیچ‌گاه گول نمودارهای عجیب و غریبی مثل نمودار این تست را نخورید. برای پاسخ به چنین سوالاتی کافیست ابتدا نقطه‌ی متناظر با شرایط اولیه مدار را روی منحنی مشخص نموده و سپس با تحلیل‌های فیزیکی مسیر حرکت متغیرهای مدار را روی منحنی موجود مشخص کنیم.

در وهله‌ی اول با توجه به وجود سلف L در سمت راست مدار می‌توان نوشت:

$$V=-L\frac{di}{dt}$$

علامت منفی در رابطه‌ی فوق به این دلیل است که یک V مثبت، سلف را در خلاف جهت i شارژ می‌کند؛ بنابراین با مثبت بودن V انتظار داریم جریان i کم شود. حال رابطه $V-i$ برای سیستم N را در نظر می‌گیریم:



ابتدا بر روی نقطه A قرار داریم. در این نقطه ولتاژ V مثبت بوده و این ولتاژ مثبت سعی دارد جریانی در خلاف جهت i به سلف تزریق کند؛ بنابراین i در این حالت کاهش پیدا می‌کند. با کاهش i، طبق منحنی V انتظار می‌رود که V نیز کاهش پیدا کند. این کاهش تا زمانی ادامه خواهد داشت که V به صفر برسد (نقطه B). در این حالت خواهیم داشت:

$$V=-L\frac{di}{dt}=0\Rightarrow\frac{di}{dt}=0$$

یعنی i، دیگر تغییری نداشته و ثابت خواهد ماند؛ به تبع آن V نیز ثابت خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم رابطه دقیق $V(t)$ را محاسبه کنیم. طبق شکل ترسیم شده برای رابطه $V-i$ در فاصله نقاط A تا B داریم:

$$i=\frac{۱}{۶}V-\frac{۲}{۳}$$

طبق این رابطه مقدار $V(0)$ برابر ۲۲ ولت است.

حال مقدار بدست آمده برای i را در رابطه قبلی جایگزین می‌کنیم:

$$V=-L\frac{di}{dt}=-L\frac{d}{dt}\left(\frac{۱}{۶}V-\frac{۲}{۳}\right)=-\frac{L}{۶}\frac{dV}{dt}$$

در این جا یک معادله‌ی دیفرانسیل ساده با شرط اولیه مشخص داریم که باید آن را حل کنیم:

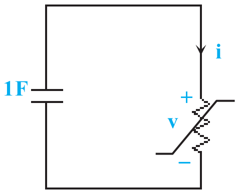
$$\begin{cases}\frac{dV}{dt}=-\frac{۶}{L}V\\ V(0)=۲۲v\end{cases}$$

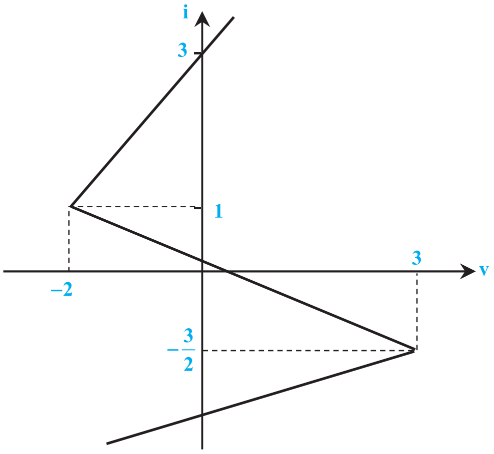
جواب معادله دیفرانسیل $\dot{x}=ax$ با شرط اولیه x_0 بصورت $x(t)=x_0e^{at}$ می‌باشد؛ بنابراین V برابر است با:

$$V(t)=۲۲e^{-\frac{۶}{L}t}$$

مثال ۴۱: در مدار زیر که شامل مقاومت غیرخطی با مشخصه‌ی نشان داده شده است، اگر $v(\bar{0})=۸V$ باشد، بعد از چه مدتی v به مقدار ۲- ولت می‌رسد؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۵)



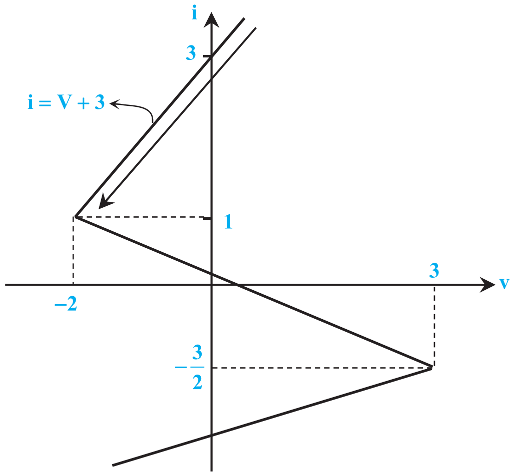


۱) Ln۵

۲) Ln۱۱

۳) ۱

۴) ۲



☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به مدار مشخص است که جریان‌های مثبت i، خازن را دشارژ می‌کند و ولتاژ آن را کاهش می‌دهد. با در نظر گرفتن این مسئله و با توجه به ولتاژ اولیه خازن که برابر ۸ ولت می‌باشد، منحنی تغییرات ولتاژ ـ جریان خازن بر روی خط بالایی مشخصه مقاومت غیرخطی حرکت خواهد کرد تا زمانی که ولتاژ خازن به ۲− ولت برسد. حال می‌توان نوشت:

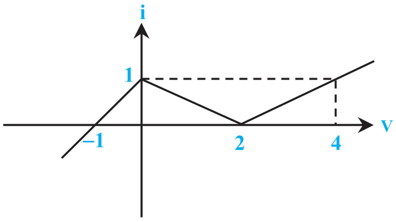
$$i=-\frac{dV}{dt}=V+۳\Rightarrow\frac{dV}{dt}+V+۳=۰\ \ ,\ V(۰)=۸v$$

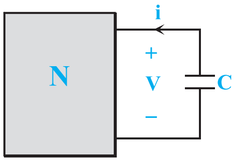
با حل معادله دیفرانسیل داریم:

$$V(t)=(-۳+۱۱e^{-t})u(t)$$

$$V(t)=-۲v\Rightarrow-۳+۱۱e^{-t}=-۲\Rightarrow۱۱e^{-t}=۱\Rightarrow t=Ln(۱۱)sec$$

مثال ۴۲: در مدار شکل زیر با توجه به نمودار $V-i$ داده شده، $V(t)$ در $t\to\infty$ چه مقداری دارد؟





۱) ۲

۲) ۱-

۳) اگر $V_C(۰)>۲$ باشد ۲، و اگر $V_C(۰)\le ۲$ باشد ۱-

۴) اگر $V_C(۰)>۰$ باشد ۲، و اگر $V_C(۰)\le ۰$ باشد ۱-

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در پاسخ‌گویی به چنین سؤالاتی همواره باید دو نکته مهم را در نظر گرفت:

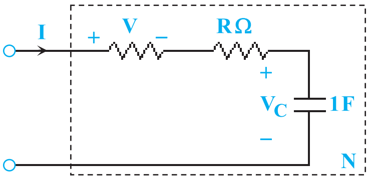
۱ـ زمانی تغییرات ولتاژ یک خازن متوقف می‌شود که جریانش صفر باشد.

۲ـ زمانی تغییرات جریان یک سلف متوقف می‌شود که ولتاژش صفر باشد.

بنابراین باید ببینیم در چه ولتاژهایی جریان خازن صفر می‌شود؛ طبق نمودار $V-i$ داده شده، در ولتاژهای ۲ و ۱- ولت، جریان خازن صفر می‌شود؛ اما این که در نهایت ولتاژ خازن کدامیک از این دو خواهد بود، متأثر از ولتاژ اولیه خازن است. طبق شکلِ مدار، مشخص است که جریان‌های مثبت i ، خازن را دشارژ و ولتاژ آن را کاهش می‌دهند؛ بالعکس جریان منفی خازن را شارژ کرده و ولتاژش را افزایش می‌دهد. اکنون فرض کنید $V_C(۰)>۲$ باشد؛ در این صورت جریان i مثبت بوده و این جریان خازن را تخلیه کرده و ولتاژ آن را کاهش می‌دهد. در این حالت بعلت کاهش خود جریان i بصورت خطی با ولتاژ انتظار داریم ولتاژ خازن به شکل یک تابع نمایی در زمان بی‌نهایت به مقدار ۲ برسد (این امر با حل معادلات دیفرانسیل مربوطه نیز قابل بررسی است). بنابراین در حالت $V_C(۰)>۲$ ولتاژ نهایی خازن برابر ۲ ولت است. اگر $-۱\le V_C(۰)\le ۲$ باشد، باز جریان مثبت بوده و ولتاژ خازن کم می‌شود تا در نهایت به ۱- برسد؛ اما اگر $V_C(۰)\le -۱$ باشد، جریان i منفی باعث شارژ خازن و افزایش ولتاژ می‌گردد؛ بنابراین در عمل در صورتی که $V_C(۰)\le ۲$ باشد، انتظار داریم در نهایت ولتاژ خازن به ۱- ولت برسد.

مثال ۴۳: در مدار زیر با مقاومت غیرخطی $V=I^۲$ و ولتاژ خازن $V_C=cost$ ، به ازای چه مقدار R بر حسب اهم، توان متوسط N برابر یک وات می‌شود؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۴

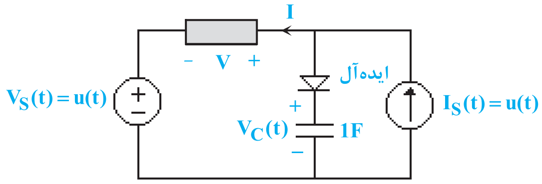
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توان متوسط مقاومت R در صورتی که با توان المان غیرخطی جمع شود، با توان متوسط شبکه N برابر خواهد بود. دقت کنید که خازن دارای توان متوسط صفر است.

$$۱w=RI_{rms}^۲+\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}V.I\,dt\ \Rightarrow\ ۱w=R\,I_{rms}^۲+\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}I^۳dt\quad و\quad I=I_C=C\frac{dV_C}{dt}=۱\times\sin t=-\sin t$$

$$I_{rms}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}A\ \Rightarrow\ ۱w=R\times(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}(-\sin t)^۳dt\ \Rightarrow\ ۱=R\times\frac{۱}{۲}+۰\ \Rightarrow\ \mathbf{R=۲\Omega}$$

مثال۴۴: اگر $V_C(۰^-)=۱\,v$ و مشخصه مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان به صورت $V=t\,I$ باشد، ولتاژ $V_C(t)$ در زمان‌های مثبت کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $t+۱$

۲) $\frac{۱}{۲}t+۱$

۳) $t^۲+t+۱$

۴) $\frac{۱}{۲}t^۲+t+۱$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جهت منابع ولتاژ و جریان، هدایت دیود مسلم است. با نوشتن KCL در گره بالای خازن داریم: (امپدانس مقاومت خطی به صورت $Z=\frac{V}{I}=\frac{tI}{I}=t$ فرض می‌شود)

$$\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C-V_S}{t}=I_S(t)\quad,\quad V_S=u(t)\quad,\quad I_S(t)=u(t)$$

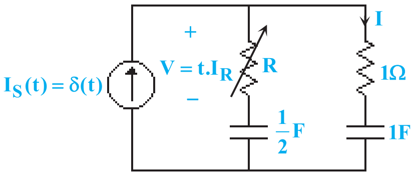
$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C-u(t)}{t}=u(t)\ \Rightarrow\ \frac{tdV_C}{dt}+V_C=tu(t)+u(t)\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}[tV_C(t)]=tu(t)+u(t)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه داریم:

$$\Rightarrow tV_C(t)=\int_۰^t(tu(t)+u(t))dt=\frac{t^۲}{۲}u(t)+tu(t)\ \Rightarrow\ V_C(t)=\frac{t}{۲}u(t)+u(t)\ \Rightarrow\ \mathbf{V_C(t)=\frac{t}{۲}+۱}$$

مثال۴۵: در مدار شکل زیر شدت جریان I عبوری از خازن یک فارادی بعد از یک ثانیه چند آمپر می‌باشد؟ (R یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به صورت $V=t.I_R$ می‌باشد و شرایط اولیه مدار همگی صفر است.)

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۵)



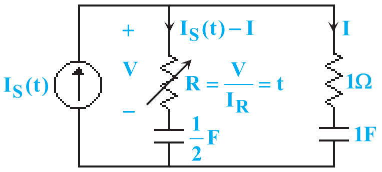
۱) $I=\frac{۱}{۲}$

۲) $I=\frac{۱}{۴}$

۳) $I=\frac{۱}{۸}$

۴) $I=\frac{۱}{۱۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای حل این تست ناچاراً باید معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده پاسخ مدار نوشته و حل شود. در صورتی که در حلقه شامل خازن‌ها KVL زده شود، داریم:



$$I\times۱+\frac{۱}{۱}\int_۰^t Idt-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int_۰^t(I_S(t)-I)\,dt-t(I_S(t)-I)=۰$$

حال با جایگذاری $\delta(t)$ به جای $I_S(t)$ داریم:

$$I+\int_۰^t Idt-۲\int_۰^t(\delta(t)-I)dt-t(\delta(t)-I)=۰$$

$$t\delta(t)=۰\quad,\quad\int_۰^t\delta(t)dt=۱\ \Rightarrow\ I+\int_۰^t Idt+۲\int_۰^t Idt+tI=۲$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه بالا داریم:

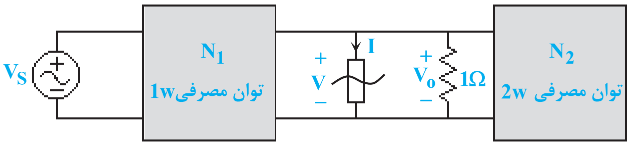
$$\frac{dI}{dt}+I+۲I+I+t\frac{dI}{dt}=۰\ \Rightarrow\ (۱+t)\frac{dI}{dt}+۴I=۰$$

در صورتی که $t=۰$ باشد، $I(t=۰)=۲A$ است؛ لذا معادله دیفرانسیل بالا را با شرط اولیه ذکر شده می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases}(۱+t)\frac{dI}{dt}=-۴I\\ I(۰)=۲A\end{cases}\Rightarrow\ \frac{-۴dt}{۱+t}=\frac{dI}{I}\ \Rightarrow\ \int\frac{-۴}{۱+t}dt=\int\frac{dI}{I}\ \Rightarrow\ LnI-Ln[(۰)]=-۴Ln(۱+t)$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{۲}{(۱+t)^۴}\ \Rightarrow\ \mathbf{I(t=۱)=\frac{۱}{۸}A}$$

مثال۴۶: در مدار زیر شبکه‌های $N_۱$ و $N_۲$ شامل مقاومت‌های خطی و مثبت هستند. با فرض وجود رابطه $V_0=-\sin t$ و $V^۲=I$ برای عنصر غیرخطی، توان تولیدی منبع V_S برحسب وات مطابق با کدام گزینه است؟



۱) ۳/۵

۲) ۲/۵

۳) ۰

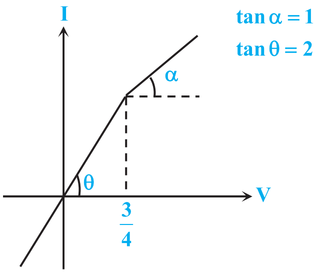
۴) ۱/۵

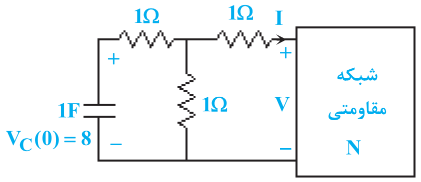
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» توان تولیدی منبع ولتاژ برابر با مجموع توان مصرفی المان‌های مدار است.

$$P_{۱\Omega}=\frac{V_o(rms)^۲}{۱}=\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲}{۱}=\frac{۱}{۲}w$$

$$P\ (\text{مقاومت غیرخطی})=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}V.Idt=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}V^۳dt=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}(-\sin t)^۳dt=۰\Rightarrow P(\text{منبع})=۱w+\frac{۱}{۲}w+۲w=۳/۵w$$

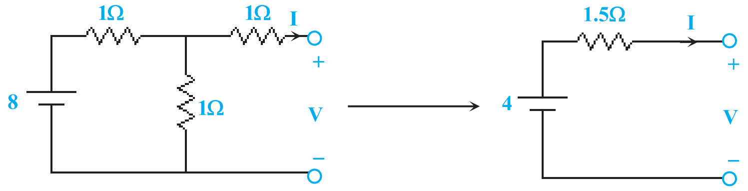
مثال۴۷: در مدار شکل زیر، ولتاژ اولیه خازن ۸ ولت است و رابطه $I-V$ شبکه مقاومتی N به صورت نمودار داده شده می‌باشد. ولتاژ V پس از $t=\frac{۱}{۳}$ ثانیه چقدر است؟ $(e^{-۰/۲}=۰/۸۲)$





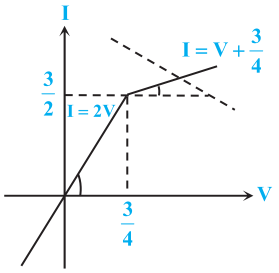
۱) تقریباً صفر
۲) ۰/۵
۳) ۰/۸۵
۴) ۰/۷۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در این مسأله باید ببینیم با توجه به ولتاژ اولیه خازن، مقدار اولیه ولتاژ V چند است. سپس بر اساس نمودار $I-V$ داده شده، مدل خطی شبکه N را جایگزین کنیم. در لحظه‌ی $t=۰$ به جای خازن یک منبع ۸ ولت قرار داده و معادل تونن سمت چپ شبکه N را بدست می‌آوریم.



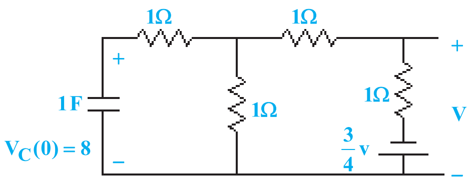
$$I=\frac{۴-V}{۱/۵}=\frac{۸}{۳}-\frac{۲V}{۳}$$

اگر رابطه‌ی فوق را با نمودار داده شده قطع دهیم، خواهیم دید که نمودار را در جایی قطع می‌کند که رابطه $I=V+\frac{۳}{۴}$ برای آن برقرار است.



$$V+\frac{۳}{۴}=\frac{۸}{۳}-\frac{۲V}{۳}\Rightarrow V=۱/۱۵v>\frac{۳}{۴}$$

بنابراین به جای شبکه N، معادل آن را قرار داده و مدار را حل می‌کنیم.



$$\longrightarrow\tau=RC=\frac{۵}{۳}\times۱=\frac{۵}{۳}sec$$

این مدار یک مدار خطی مرتبه اول است که معادله $V(t)$ در آن از فرمول $V(t)=(V(۰)-V(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}+V(\infty)$ محاسبه می‌شود. $V(۰)$ محل تقاطع خط و نمودار است و مقدار آن $V(۰)=۱/۱۵v$ می‌باشد. با مدار باز کردن خازن، مقدار نهایی $V(t)$ نیز $-\frac{۱}{۲}$ بدست خواهد آمد.

لذا $V(t)=۱/۶۵e^{-۰/۶t}-۰/۵$ و $V(\frac{۱}{۳})=۰/۸۵v$.

حال باید بررسی کنیم که آیا عدد بدست آمده از $\frac{۳}{۴}$ کوچکتر است یا بزرگتر، که مشاهده می‌شود بزرگتر است. در صورتی که $V(\frac{۱}{۳})<\frac{۳}{۴}$ می‌بود، باید معادل قسمت اول نمودار را نیز جایگزین کرده و مدار را مجدداً حل می‌کردیم [مقدار اولیه خازن نیز تغییر می‌کرد و برای مدار جدید باید مقدار $V_C(\frac{۱}{۳})$ را قرار می‌دادیم].

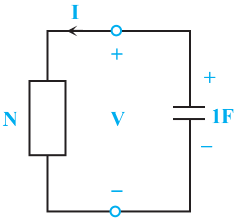
مثال۴۸: مطابق شکل زیر، خازنی با ولتاژ اولیه ۲- ولت به عنصر غیرخطی N با مشخصه ولتاژـ جریان داده شده متصل است. دامنه نوسانات ولتاژ خازن در حالت دائمی چقدر است؟ (منظور از دامنه، دامنه قله تا قله یا Peak to Peak می‌باشد)

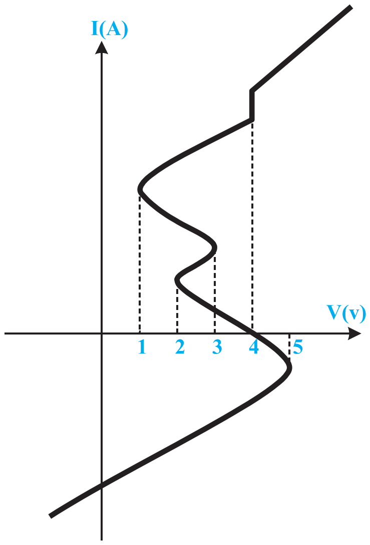
۱) ۱ ولت

۲) ۲ ولت

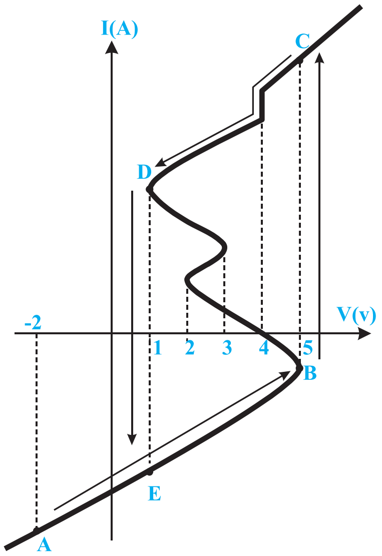
۳) ۳ ولت

۴) ۴ ولت





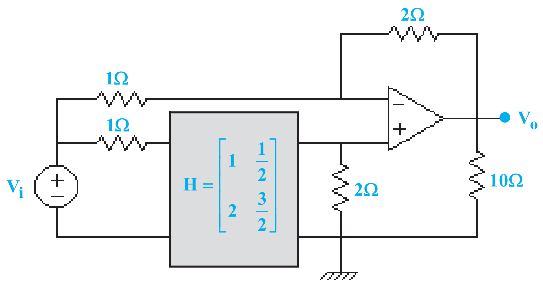
پاسخ: گزینه «۴» این گونه تست‌ها معمولاً با تحلیل‌های فیزیکی ساده قابل پاسخ‌گویی هستند. در این تحلیل‌ها رفتار خازن و شیب مشخصه ولتاژ ـ جریان دو عامل مهمی هستند که باید در تحلیل مدنظر قرار گیرند. ابتدا به این نکته توجه کنید که جریان‌های مثبت I منجر به دشارژ خازن و افت ولتاژ آن و جریان‌های منفی I منجر به شارژ خازن و افزایش ولتاژ آن می‌شوند. بنابراین هرگاه I مثبت است، ولتاژ V لزوماً باید روندی کاهشی و هرگاه I منفی است، ولتاژ V لزوماً باید روندی افزایشی داشته باشد. حال توجه خود را معطوف به مشخصه ولتاژ ـ جریان عنصر N کرده و نقطه متناظر با ولتاژ اولیه خازن را روی مشخصه در نظر می‌گیریم (نقطه A). با توجه به منفی بودن جریان I، ولتاژ خازن افزایش یافته تا زمانی که به نقطه B برسیم. در نقطه B روند تغییرات ولتاژ در مشخصه ولتاژ ـ جریان کاهشی می‌شود؛ بنابراین با توجه به منفی بودن I، ادامه مسیر ولتاژ ـ جریان در این نقطه امکان‌پذیر نیست. ناچاراً عنصر N بلافاصله باید جریان خود را تغییر دهد.



تنها نقطه‌ای که می‌تواند ادامه مسیر ولتاژ ـ جریان برای خازن باشد، نقطه C است زیرا خازن تغییرات یکباره ولتاژ را نمی‌پذیرد و ولتاژ V لزوماً باید ثابت بماند. در ادامه، ولتاژ V کاهش پیدا می‌کند تا زمانی که به نقطه D برسیم. در این نقطه نیز با توجه به افزایشی شدن روند تغییرات ولتاژ V و البته مثبت بودن I، امکان ادامه مسیر بدون پرش در مشخصه وجود ندارد؛ در این جا نیز ناچاراً عنصر N جریان خود را تغییر داده و نقطه کار به E می‌رود. با ادامه این روند ولتاژ خازن همواره بین نقاط E، B ، C و D در نوسان خواهد بود. دامنه این نوسان برابر با اختلاف ولتاژ خازن در نقاط E و B می‌باشد:

$$\Delta V = V_B - V_E = ۵ - ۱ = ۴\,\text{v}$$

بنابراین پاسخ این تست گزینه (۴) می‌باشد.



مثال ۷۵: در مدار زیر بهره $\frac{V_o}{V_i}$ کدام است؟

۱) صفر

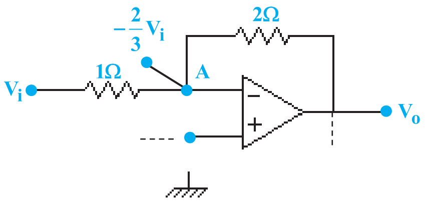
۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) $-\frac{۸}{۳}$

۴) -۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای حل این تست ابتدا ولتاژ پایه ورودی مثبت آپ‌امپ (V_{in}^{+}) را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور از روابطی که در فصل قبل ارائه شد، استفاده می‌کنیم.

$$V_{in}^{+} = \frac{-h_{۲۱}}{(h_{۲۲}+Z_L^{-۱})(h_{۱۱}+Z_S)-h_{۱۲}\,h_{۲۱}}V_i = \frac{-۲}{(\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-\frac{۱}{۲}\times ۲}V_i = -\frac{۲}{۳}V_i$$

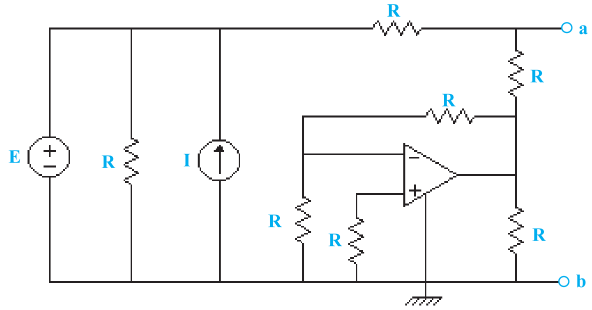


دقت کنید که با توجه به صفر بودن جریان پایه‌های ورودیش، آپ‌امپ هیچ‌گونه اثر بارگذاری در خروجی دوقطبی ندارد.

با توجه به وجود فیدبک منفی در مدار آپ‌امپ، ولتاژ پایه‌های ورودی مثبت و منفی برابر می‌باشد. حال با نوشتن رابطه KCL در گره A می‌توان ولتاژ خروجی را بر حسب ولتاژ ورودی محاسبه کرده و بهره ولتاژ را به دست آورد:

$$\frac{V_i-(-\frac{۲}{۳}V_i)}{۱} = \frac{-\frac{۲}{۳}V_i-V_o}{۲} \Rightarrow V_o=-۴V_i \Rightarrow \frac{V_o}{V_i}=-۴$$

مثال ۷۶: مدار معادل تونن از سرهای a و b کدام است؟ (op-amp در ناحیه خطی و ایده‌آل است) (مهندسی برق ـ سراسری ۸۹)

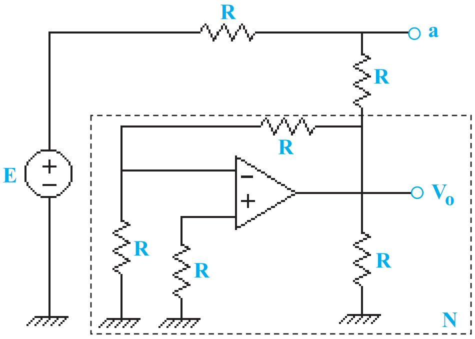


۱) $R_{th}=\frac{۲}{۳}R \quad , \quad V_{th}=E+RI$

۲) $R_{th}=\frac{۱۰}{۱۱}R \quad , \quad V_{th}=\frac{E+RI}{۲}$

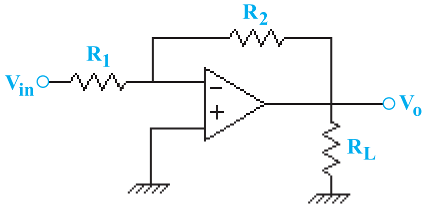
۳) $R_{th}=\frac{R}{۲} \quad , \quad V_{th}=\frac{E}{۲}$

۴) $R_{th}=R \quad , \quad V_{th}=E$

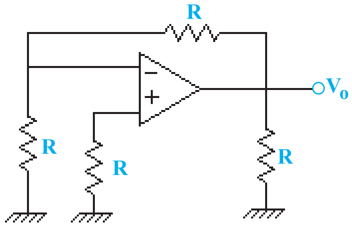


☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به موازی بودن مقاومت R و منبع جریان I با منبع ولتاژ مستقل E، می‌توان مقاومت R و منبع جریان R را از مدار حذف نمود.

قسمت نشان داده شده در شکل روبرو با نام N یک تقویت‌کننده منفی‌ساز است و با توجه به شکل زیر می‌توانیم ولتاژ خروجی آن را محاسبه کنیم. لازم به ذکر است که وجود مقاومت R در پایه ورودی مثبت آپ‌امپ به علت صفر بودن جریان پایه ورودی آپ‌امپ کاملاً بی‌اثر است.

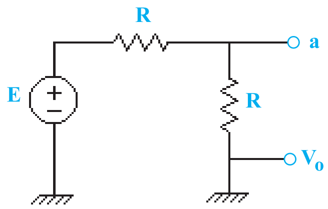


$$V_o=(-\frac{R_۲}{R_۱})\times V_{in} \Rightarrow$$



$$V_o=۰\times(-\frac{R}{R})=۰$$

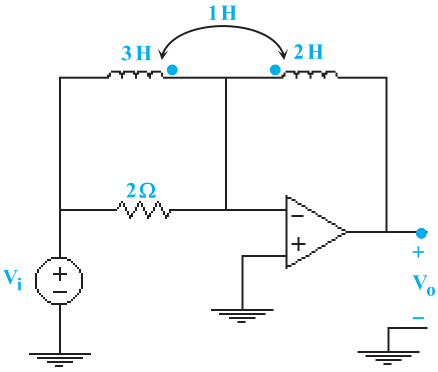
با توجه به صفر شدن ولتاژ V_o در خروجی آپ‌امپ و با صفر قرار دادن V_o در شکل اصلی مدار داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} R_{th}=R\,||\,R=\frac{R}{۲} \\ V_{th}=\frac{E\times R}{R+R}=\frac{E}{۲} \end{cases}$$

مثال۸۰: در مدار روبه‌رو در کدام حالت پاسخ خروجی مدار یا V_o شامل جزء هم‌فرکانس با ورودی مدار نخواهد بود؟

(آپ امپ ایده‌آل است.)



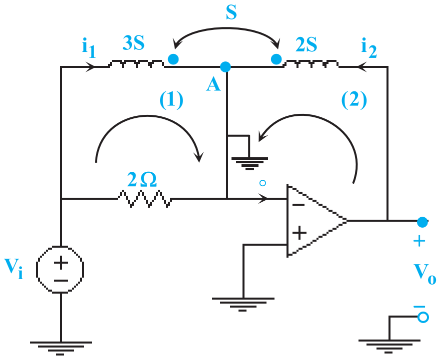
۱) $V_i = e^{-۰/۴t}u(t)$

۲) $V_i = e^{-۰/۸t}u(t)$

۳) $V_i = e^{-\frac{۵}{۴}t}u(t)$

۴) $V_i = e^{-\frac{۵}{۲}t}u(t)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای پاسخ دادن به این سؤال در واقع باید صفر تابع انتقال مدار را پیدا کنیم، زیرا در مداری که با فرکانسی برابر صفر تابع انتقالش تحریک شود، خروجی شامل مد فرکانسی تحریک ورودی نخواهد شد. بنابراین مدار را در فضای S مدل نموده و $\frac{V_o}{V_i}$ را محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$\text{KCL A}: i_۱ + i_۲ + \frac{V_i}{۲} = ۰ \Rightarrow i_۲ = -i_۱ - \frac{V_i}{۲} \qquad (۱)$$

$$\text{KVL }(۱): V_i = ۳Si_۱ + Si_۲ \xrightarrow{(۱)} V_i = ۳Si_۱ - Si_۱ - S\frac{V_i}{۲}$$

$$\Rightarrow (۱ + \frac{S}{۲})V_i = ۲Si_۱ \Rightarrow i_۱ = \frac{S+۲}{۴S}V_i \qquad (۲)$$

$$\text{KVL }(۲): V_o = ۲Si_۲ + Si_۱ \xrightarrow{(۱)} V_o = -۲Si_۱ - SV_i + Si_۱ = -Si_۱ - SV_i \xrightarrow{(۲)} V_o = -\frac{S+۲}{۴}V_i - SV_i = -(\frac{۵}{۴}S + \frac{۱}{۲})V_i$$

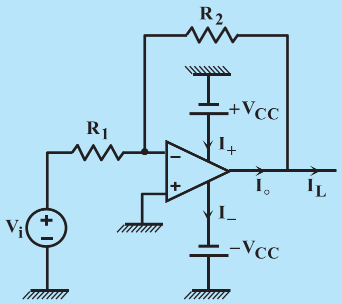
حال صفر تابع انتقال سیستم به‌راحتی محاسبه می‌شود:

$$\frac{۵}{۴}S + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow S = -۰/۴$$

پس اگر ورودی به صورت $V_۱ = e^{-۰/۴t}u(t)$ باشد، خروجی شامل جمله‌ی $e^{-۰/۴t}u(t)$ نخواهد بود.

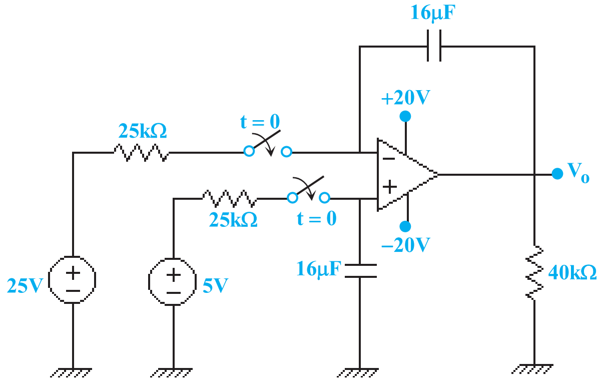
نکته ۳: تقویت‌کننده‌های عملیاتی همواره نیازمند منابع ولتاژی به عنوان تغذیه‌های مثبت و منفی خود هستند. در تقویت‌کننده‌های عملیاتی ایده‌آل اندازه این منابع ولتاژ معمولاً نامحدود در نظر گرفته می‌شود، اما در عمل همواره اندازه این منابع محدود است. نکته مهم این است که اندازه ولتاژ خروجی تقویت‌کننده نمی‌تواند از مقدار ولتاژ تغذیه مثبت تقویت‌کننده، بزرگتر و از مقدار ولتاژ تغذیه منفی، کوچکتر شود. اصطلاحاً زمانی که ولتاژ خروجی تقویت‌کننده عملیاتی برابر ولتاژ تغذیه مثبت و یا منفی تقویت‌کننده می‌شود، می‌گویند تقویت‌کننده به اشباع رفته است. در این حالت ولتاژ خروجی آپ‌امپ ممکن است دیگر به تغییرات ولتاژ ورودی حساس نباشد.

لازم به ذکر است جریان پایه خروجی آپ امپ از طریق منابع تغذیه مثبت و منفی آن تأمین شده و برقرار می‌شود (شکل روبه‌رو).



$$I_\circ = I_+ - I_-$$

مثال۸۱: دو کلید شکل مقابل در لحظه‌ی $t = ۰$ بسته می‌شوند. اگر انرژی اولیه ذخیره شده در خازن‌ها صفر باشد، چند میلی‌ثانیه طول می‌کشد تا تقویت‌کننده عملیاتی اشباع شود؟



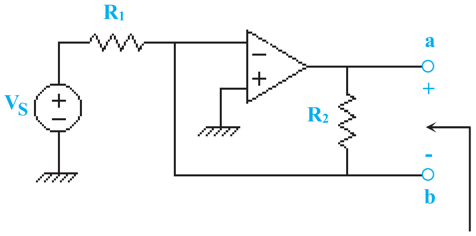
۱) ۳۰۰

۲) ۲۲۵

۳) ۴۰۰

۴) ۲۰۰

۱۷ـ مقاومت تونن R_{th} و ولتاژ تونن V_{th} دیده شده از دو سر (a,b) مدار زیر که در آن تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل است، به ترتیب برابر است با:



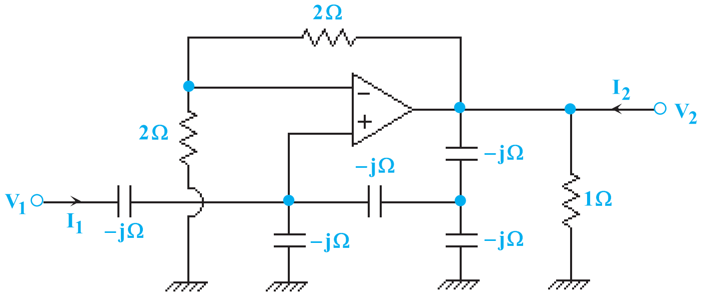
۱) R_2 و $\frac{R_2}{R_1}V_S$

۲) R_2 و $-\frac{R_2}{R_1}V_S$

۳) $R_1 \| R_2$ و $\frac{R_2}{R_1}V_S$

۴) (R_1+R_2) و $-\frac{R_2}{R_1}V_S$

۱۸ـ در مدار زیر مقدار پارامتر Z_{11} برحسب اهم کدام است؟



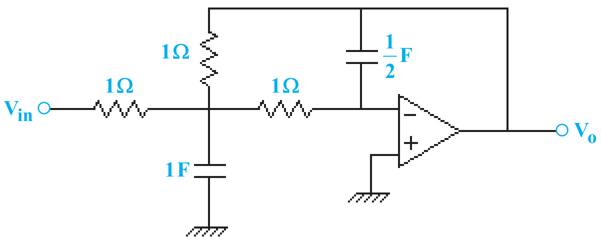
۱) $j2$

۲) $-j2$

۳) j

۴) $-j$

۱۹ـ پاسخ ضربه مدار زیر کدام گزینه است؟



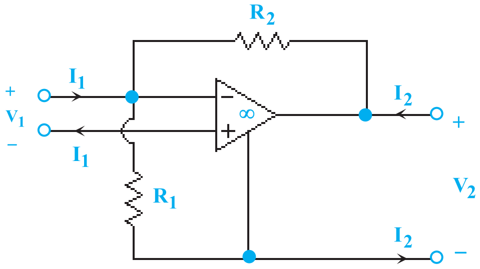
۱) $-2e^{-t}+te^{-t}$

۲) $-2te^{-t}$

۳) $-2e^{-t}+2e^{-2t}$

۴) $2e^{-t}-2e^{-2t}$

۲۰ـ برای دوقطبی نشان داده شده در شکل زیر کدام ماتریس وجود دارد؟



۱) Z

۲) Y

۳) H

۴) T

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل دوازدهم

۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۳»	۲۰ـ گزینه «۴»

برای دانلود پاسخ تشریحی تست‌های تکمیلی به سایت www. h-nami.ir مراجعه نمایید.
در ضمن در این وب‌سایت، رفع اشکال درسی آنلاین و پشتیبانی از کتاب انجام می‌شود.