مدرسان شریف

فصل اول

« یادآوری »

با توجه به این که بعضی دانشجویان مطالب ابتدایی ریاضیات را فراموش کرده‌اند در ابتدای این کتاب به صورت خلاصه اشاره‌ای به این مباحث شده است. از این فصل در آزمون‌های دانشگاه دولتی به طور مستقیم سئوال مطرح نشده ولی در آزمون‌های دانشگاه آزاد به طور مستقیم سئوال آمده است همچنین در آزمون‌های دانشگاه دولتی به طور غیر مستقیم مباحث این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرد. دانشجویانی که در مباحث این فصل دارای پایه‌ی علمی قوی هستند، می‌توانند از فصل بعد شروع به مطالعه‌ی کتاب کنند.

توان

❖ **تعریف ۱:** a به توان n را به شکل a^n نمایش می‌دهند، یعنی اینکه عدد a را n بار در خودش ضرب کنیم. اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند آنگاه روابط زیر را داریم :

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$ ۳) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

۴) $(a^m)^n = a^{mn}$ ۵) $a^n = \frac{۱}{a^{-n}}$ ۶) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

تذکر۱ : هر عدد به توان یک برابر خود عدد می‌باشد : $a^۱ = a$

تذکر۲ : هر عدد غیر از صفر اگر به توان صفر برسد، برابر یک می‌شود : $a^\circ = ۱$

مثال۱: حاصل عبارت $\frac{a^۳ \times b^۳ \times c^{-۲}}{a^{-۲} \times c^۲ \times b^{-۱}} \div \frac{a^۲ \times c^{-۲} \times b}{(ab)^{-۱}}$ **برابر کدام است ؟**

۱) $(\frac{ab}{c})^۲$ ۲) $(\frac{c}{ab})^۲$ ۳) $\frac{a^۲b^۳}{c^۲}$ ۴) $a^۲b^۲$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»

$$\frac{a^۳ \times b^۳ \times a^۲ \times b^۱}{c^۲ \times c^۲} \div \frac{a^۲ \times b \times (ab)^۱}{c^۲} = \frac{a^۵b^۴}{c^۴} \times \frac{c^۲}{a^۳b^۲} = \frac{a^۲b^۲}{c^۲} = (\frac{ab}{c})^۲$$

رادیکالها

❖ **تعریف ۲:** عبارتی مانند $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام ، a گویند و n را که معمولاً عددی طبیعی می‌باشد فرجه رادیکال می‌نامند .

قضایای رادیکالها:

۱) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ۲) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > \circ)$ ۳) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[mnk]{a}$

تذکر ۳ : اگر فرجه رادیکال زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد تا رادیکال در مجموعه اعداد حقیقی معنی دار باشد .

تذکر ۴ : اگر فرجه رادیکال فرد باشد، عبارت زیر رادیکال منفی نیز می‌تواند باشد .

مثال : ۱) $\sqrt{۳۶}=۶$ ۲) $\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$ ۳) $\sqrt{-۱۶}\neq -۴$

مثال ۲: حاصل عبارت $A=\dfrac{\sqrt[۳]{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt[۶]{ab}}$ کدام است ؟

۱) $\sqrt[۶]{ab^۲}$ ۲) $\sqrt[۶]{ab}$ ۳) $\sqrt[۶]{a^۲b}$ ۴) $\sqrt[۳]{ab}$

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=\frac{\sqrt[۶]{a^۲}\times\sqrt[۶]{b^۳}}{\sqrt[۶]{ab}}=\frac{\sqrt[۶]{a^۲b^۳}}{\sqrt[۶]{ab}}=\sqrt[۶]{\frac{a^۲b^۳}{ab}}=\sqrt[۶]{ab^۲}$$

توجه شود در صورت کسر چون برای ضرب کردن، فرجه‌ها با هم برابر نبودند، لذا کوچکترین مضرب مشترک فرجه ها را حساب کردیم و عبارت داخل رادیکال را با توجه به فرجه تغییر دادیم .

مثال ۳: حاصل عبارت $A=۲\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt{۱۲}-\sqrt[۳]{۱۲۸}$ را بدست آورید .

پاسخ :
$$A=۲\sqrt[۳]{۲۷\times ۲}+\sqrt{۳\times ۴}-\sqrt[۳]{۴^۳\times ۲}=۶\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}-۴\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt{۳}$$

مثال ۴: حاصل عبارت $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}$ کدام است ؟ $(x>۰)$

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۶]{x}$ ۳) $\dfrac{۱}{\sqrt[۶]{x^۲}}$ ۴) $\sqrt[۶]{x^۵}$

پاسخ : گزینه «۳» برای حل اینگونه مسائل باید عبارتهای پشت رادیکال را به زیر رادیکال برد و در نهایت با ضرب فرجه‌ها در هم به یک رادیکال برسیم :

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt[۶]{x}}{\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲\times x}}}=\frac{\sqrt[۶]{x}}{\sqrt[۶]{x^۳}}=\sqrt[۶]{\frac{x}{x^۳}}=\sqrt[۶]{\frac{۱}{x^۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{x^۲}}$$

مثال ۵: ساده شده عبارت $A=۲\sqrt{۲۰}-\sqrt{۴۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}$ چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۳»

$$A=۲\sqrt{۲۰}-\sqrt{۴۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}=۲\sqrt{۲^۲\times ۵}-\sqrt{۳^۲\times ۵}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۵\times ۲^۴}=۲\times ۲\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}+\frac{۱}{۲}\times ۲^۲\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}-۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}=۳\sqrt{۵}$$

مثال ۶: حاصل $A=\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt[۴]{۶۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۱-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}-۱$ ۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۴» چون $۱-\sqrt{۲}$، عددی منفی است، پس وقتی می‌خواهیم آن را از قدر مطلق بیرون بیاوریم آن را در یک منفی ضرب می‌کنیم.

$$A=\left|۱-\sqrt{۲}\right|+۲(\frac{۱}{\sqrt{۲}})-\sqrt[۴]{۲^۶}\ \Rightarrow\ A=-(۱-\sqrt{۲})+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-\sqrt[۲]{۲^۳}$$

$$A=-۱+\sqrt{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-۲\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ A=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}=\frac{-\sqrt{۲}+۲-۲}{\sqrt{۲}}=-۱$$

اتحادهای جبری

تساوی $f(a)=g(a)$ را وقتی اتحاد گوئیم که به ازای تمام مقادیر a برقرار باشد برای مثال تساوی $(a-1)^2=a^2-2a+1$ اتحاد می‌باشد زیرا به ازای تمام مقادیر a برقرار است و تساوی $a^2-1=3$ اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $a=\pm 2$ برقرار می‌باشد، انواع اتحادهای مهم که حفظ آنها سرعت محاسبات را در بعضی مسائل افزایش می‌دهد به شرح زیر می‌باشد :

۱) $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$

۲) $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3a^2b+3b^2a$

۳) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۶) $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$

۷) $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

۸) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

۹) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۰) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

مثال۷: اگر $x-\frac{1}{x}=-1$ باشد آنگاه حاصل $A=x^3-\frac{1}{x^3}$ کدام است ؟

۱) ۴-　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۲-

پاسخ : گزینه «۱»

$$A=x^3-\frac{1}{x^3}=\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}_{-1}+3(x)\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)}_{-1}=(-1)^3+3\times 1\times(-1)=-4$$

مثال۸: تفاضل دوعدد۹ وحاصل ضرب آن دو ۱۸- بوده ؛ «مربع مجموع آنها» چقدر است؟

۱) ۴۵　　۲) ۳۶　　۳) ۱۸　　۴) ۹

پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از اتحادها داریم:

$$\begin{cases}x-y=9\\ xy=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=9^2-2\times 18=45\\ (x+y)^2=x^2+y^2+2xy=45+2xy=45-2\times 18=9\end{cases}$$

توجه: اگر مجموع مربعات خواسته می‌شد باید x^2+y^2 را محاسبه می‌کردیم که در این حالت گزینه (۱) صحیح می‌شد.

تجزیه عبارتهای جبری:

از کاربردهای تجزیه می‌توان به ساده کردن کسرها و عبارتهای جبری، بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) اشاره کرد .

مثال۹: عبارات زیر را تجزیه کنید :

۱) $x^3-27=(x-3)(x^2+9+3x)$

۲) $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۳) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

۴) $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$

مثال۱۰: حاصل $\frac{3}{x+2}+\frac{x^2-x+6}{x^2-4}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{2}{x-2}$　　۲) $\frac{x}{x-2}$　　۳) $\frac{x}{x+2}$　　۴) $\frac{2}{x+2}$

پاسخ : گزینه «۲» با تجزیه عبارت مخرج داریم:

$$\frac{x^2-x+6}{x^2-4}+\frac{3}{x+2}=\frac{x^2-x+6}{(x-2)(x+2)}+\frac{3}{x+2}=\frac{x^2-x+6+3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-x+6+3x-6}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x}{x-2}$$

مثال ۱۱: عبارت $\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}$ با کدام عبارت زیر هم ارز است؟

۱) y^3　　۲) y^3+1　　۳) $1-y+y^3$　　۴) y^3-y^4

پاسخ : گزینه «۲»

$$\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}=\frac{1-y+y^3(1-y)}{1-y}=\frac{(1-y)(1+y^3)}{1-y}=1+y^3$$

مثال ۱۲: ساده شده عبارت $A=\frac{(x^4-2x^3+x-2)(x^2+3x+2)}{(x^2-4)(x^2-x+1)}$ کدام است ؟

۱) $(x+1)$　　۲) $(x+1)^2$　　۳) ۱　　۴) ۱-

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\frac{[x^3(x-2)+(x-2)](x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{(x^3+1)(x-2)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x^3+1)(x+1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2+1-x)(x+1)}{(x^2-x+1)}=(x+1)^2$$

گویا کردن مخرج کسرها:

منظور از گویا کردن، حذف رادیکال از مخرج کسر می‌باشد، به طوری که کسر بعد از گویا شدن با کسر قبل از گویا شدن برابر باشد، معمولاً در اینگونه عبارات یکی از جمله های طرف دوم اتحادها در مخرج می‌باشد و برای گویا کردن باید صورت و مخرج را در پرانتز دوم اتحاد ضرب کرد به مثالهای زیر توجه کنید :

جمله‌ای از اتحاد مزدوج در مخرج کسر می‌باشد .

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$

جمله‌ای از طرف دوم اتحاد شماره ۸ در مخرج کسر می‌باشد .

۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}}=\frac{\text{صورت کسر}}{a-b}$

۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب . م . م) و کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) دو یا چند عبارت (عدد):

برای بدست آوردن (ب . م . م) دو عبارت (عدد) پس از تجزیه دو عبارت (عدد) به حاصلضرب عوامل، حاصلضرب عوامل اول مشترک باکوچکترین توان را به عنوان (ب . م . م) و حاصلضرب عامل‌های مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان را بعنوان (ک . م . م) تعیین می‌کنیم.

مثال ۱۳: (ب . م . م) و (ک. م . م) بین دو عدد ۲۴ و ۵۴ را تعیین کنید :

پاسخ : $24=3\times8=3\times2^3 \quad , \quad 54=2\times27=2\times3^3$

(ب . م . م) برابر $6=2\times3$ و (ک . م . م) برابر $216=3^3\times2^3$ می‌باشد.

مثال ۱۴: (ک . م . م) دو عبارت $A=(x^3-1)$, $B=(x-1)^2(x+1)^2$ را بدست آورید .

پاسخ : $A=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \quad , \quad B=(x-1)^2(x+1)^2$

ک . م . م $=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)$

معادلات و نامعادلات

معادله یک مجهولی درجه اول:

صورت کلی این معادله به صورت $ax + b = ۰$ با شرط $a \neq ۰$ است که در این حالت $x = -\frac{b}{a}$ ریشه معادله است.

تعیین علامت عبارت درجه اول $A = ax + b$:

هدف از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به ازای چه مقادیر x عبارت مثبت یا منفی است ، مشخص است که علامت عبارت $A = ax + b$ به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه معادله $ax + b = ۰$ موافق علامت ضریب x (a) و به ازای مقادیر کمتر از $-\frac{b}{a}$ مخالف علامت ضریب x است.

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

نکته۱: هرگاه عبارتی به صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد ، هر یک را جداگانه تعیین علامت نموده و علامتها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال۱۵: عبارتهای $A = ۳x + ۶$ و $B = ۴ - ۲x$ را تعیین علامت کنید.

$$۱) A = ۳x + ۶ \Rightarrow ۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۶}{۳} = -۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
$A = ۳x + ۶$	$-$	۰	$+$

$$۲) B = ۴ - ۲x \Rightarrow ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$B = ۴ - ۲x$	$+$	۰	$-$

مثال۱۶: عبارت $A = \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۱)^۲(x+۴)}$ را تعیین علامت کنید.

X	$-\infty$	-۴		۲		۳	$+\infty$
x+۴	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
x-۲	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
x-۳	$-$		$-$		$-$	۰	$+$
A	$-$	∞	$+$	۰	$-$	۰	$+$

توجه شود که در این مثال چون $(x-۱)^۲$ یک عبارت همواره مثبت است لذا تأثیری در علامت A ندارد . همچنین دقت شود ریشه‌ها از کوچکترین مقدار از سمت چپ به راست در جدول مرتب می‌شوند.

لازم به توضیح است که نقاط $x = ۱$ و $x = -۴$ که مخرج کسر را صفر می‌کنند بعنوان نقاط انفصال عبارت محسوب می‌شوند که در فصل دوم کاملاً شرح داده می‌شود.

نتیجه : اگر $x > ۳$ یا $-۴ < x < ۲$ آنگاه $A > ۰$ خواهد بود.

اگر $x < -۴$ یا $۲ < x < ۳$ آنگاه $A < ۰$ خواهد بود.

نکته۲: در تعیین علامت عبارت جبری از عوامل مضاعف [در مثال قبل $(x-۱)^۲$] صرف نظر می‌کنیم و بقیه را تعیین علامت می‌کنیم.

نامعادله درجه اول:

نامعادله یک مجهولی درجه اول پس از انتقال دادن همه جمله‌ها به یک طرف نامعادله و ساده کردن به شکل کلی زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} ax + b < ۰ \\ \text{یا} \\ ax + b \leq ۰ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} ax + b > ۰ \\ \text{یا} \\ ax + b \geq ۰ \end{cases}$$

مثال۱۷: نامعادله $-\frac{۳}{۲}x - ۱ < \frac{۱}{۲}x + ۴$ را حل کنید.

پاسخ :

$$\frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}x > -۵ \rightarrow ۲x > -۵ \xrightarrow{\div ۲} x > -\frac{۵}{۲}$$

نکته۳: هرگاه طرفین یک نامساوی را در یک مقدار منفی ضرب و یا تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض خواهد شد.

معادله درجه دوم

هر معادله بصورت $ax^2+bx+c=0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامیم، در این معادله مبین (دلتا) به فرم $\Delta = b^2 - 4ac$ بیان می‌شود و داریم :

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز می‌باشد که از رابطه: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

۲) اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

۳) اگر $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد : $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

نکته۴: اگر در معادله درجه دوم $a+b+c=0$ باشد یک ریشه (۱) و ریشه دیگر $(\dfrac{c}{a})$ است.

نکته۵: اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ باشد، آنگاه یک ریشه معادله (۱-) و ریشه دیگر $(-\dfrac{c}{a})$ است.

نکته۶: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ دو عدد متوالی باشند آنگاه $\Delta = a^2$ خواهد بود.

نکته۷: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر یک ریشه K برابر ریشه دیگر باشد آنگاه: $\dfrac{b^2}{ac} = \dfrac{(K+1)^2}{K}$

معادله $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید، داریم :

نکته۸: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس ریشه معادله فوق باشد، به صورت $cx^2+bx+a=0$ است.

نکته۹: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله فوق باشد، به صورت $ax^2-bx+c=0$ است.

نکته۱۰: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش n برابر هر ریشه معادله فوق باشد ، به صورت $ax^2+bnx+cn^2=0$ است.

نکته۱۱: معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش مربع هر ریشه معادله فوق باشد به صورت $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$ است.

مثال۱۸: کدام معادله زیر ریشه‌هایش ۲ برابر ریشه‌های معادله $x^2-3x-1=0$ است؟

۱) $x^2-5x-4=0$ ۲) $x^2-6x-4=0$ ۳) $x^2+6x-4=0$ ۴) $x^2-5x+4=0$

پاسخ : گزینه «۲» باتوجه به نکته ۱۰، در این مثال $n=2$ می‌باشد.

تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم است:

اگر x' و x'' دو ریشه معادلهٔ درجه دوم باشند، آنگاه با فرض $S = x'+x''$ و $P = x'.x''$ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش x' و x'' می‌باشند به شکل $x^2 - Sx + p = 0$ بیان می‌شود.

مثال۱۹: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشد.

$$\begin{cases} S=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ p=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+p=0 \to x^2-2x-1=0$$

رابطه بین ریشه‌های معادله:

در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، آنگاه داریم :

$$\begin{cases} S=x'+x''=-\dfrac{b}{a} \to \text{حاصل جمع دو ریشه} \\ p=x'.x''=\dfrac{c}{a} \to \text{حاصلضرب دو ریشه} \\ A=|x'-x''|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \to \text{قدر مطلق تفاضل دو ریشه} \end{cases} , \quad \begin{cases} x'^2+x''^2=S^2-2p \\ x'^3+x''^3=S^3-3Sp \\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+2\sqrt{p}} \\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}} \end{cases}$$

مثال۲۰: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله $x^۲ - kx + ۲۴ = ۰$ باشند،حاصل عبارت $(x_۱ - x_۲)^۲ + ۴x_۱x_۲$ برابر است با:

۱) $-k^۲$ ۲) $k^۲$ ۳) ۲۴ ۴) ۲۴-

پاسخ : گزینه «۲» مجموعه ریشه‌های معادله داده شده برابر k و حاصلضرب ریشه‌ها برابر ۲۴ است، یعنی:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = k \\ x_۱x_۲ = ۲۴ \end{cases}$$

بنابراین:
$$(x_۱ - x_۲)^۲ + ۴x_۱x_۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲x_۱x_۲ + ۴x_۱x_۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ + ۲x_۱x_۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ = k^۲$$

مثال۲۱: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله $x^۲ - k^۲x + k = ۰$ باشند، مقدار عبارت $\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $-k$ ۴) k

پاسخ : گزینه «۴»
$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = k^۲ \\ x_۱x_۲ = k \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱x_۲} = \frac{k^۲}{k} = k$$

تعیین علامت عبارت $A = ax^۲ + bx + c$:

اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشه حقیقی معادله فوق باشند آنگاه :

X	$-\infty$	$x_۱$		$x_۲$	$+\infty$
A	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

نکته۱۲: شرط آنکه عبارت فوق همواره مثبت باشد آن است که : $a > ۰ \ , \ \Delta < ۰$

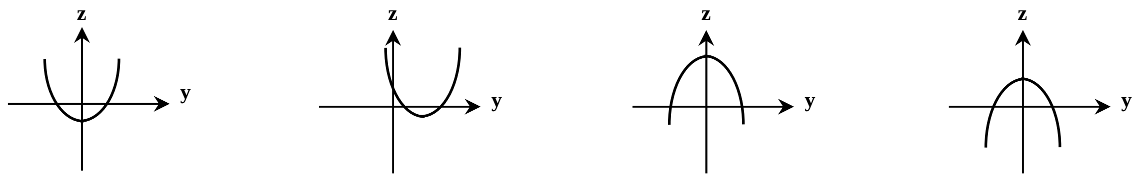
نکته۱۳: شرط آنکه عبارت فوق همواره منفی باشد آن است که : $a < ۰ \ , \ \Delta < ۰$

تابع با ضابطهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ را در نظر بگیرید، داریم :

نکته۱۴: اگر $a > ۰$ باشد تابع دارای مینیمم است و اگر $a < ۰$ باشد تابع دارای ماکزیمم است.

نکته۱۵: مختصات نقطه مینیمم یا ماکزیمم $M(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد.

مثال۲۲: نمودار $z = y^۲ - ۶y + ۵$ به کدام صورت است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به نکات فوق چون ضریب $y^۲$ مثبت است لذا نمودار تابع‌دارای مینیمم است یعنی گزینه‌های ۱ و ۲ اشتباه هستند اما برای بدست آوردن طول نقطه مینیمم داریم:

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲ \times ۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

لذا با توجه به اینکه طول نقطه مینیمم نمودار گزینه ۴ برابر صفر است نمودار گزینه ۳، مربوط به تابع داده شده می‌باشد.

تذکر۵: خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن تابع $y = ax^۲ + bx + c$ است.

تذکر۶: در مورد Max و Min توابع در فصول دیگر به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

مثال۲۳: در تابع $y = x^۲ - kx + ۲$ ، اگر طول نقطه مینیمم برابر ۲- باشد ، مقدار k کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴

پاسخ : گزینه «۱» طول نقطه مینیمم از رابطه $x = -\frac{b}{۲a}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت:
$$x = \frac{k}{۲} = -۲ \to k = -۴$$

محاسبه باقیمانده چند جمله‌ای $P(x) = ax^۲ + bx + c$ بر $mx + n$

برای محاسبه باقیمانده عبارت $P(x)$ بر عبارتی مانند $mx + n$ باید به جای x در ضابطه $P(x)$ ریشه معادله $mx + n = ۰$، یعنی $x = -\frac{n}{m}$ را قرار دهیم.

مثال ۲۴: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $۸x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰x$ بر دو جمله‌ای $۲x - ۱$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱» $۲x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow R = ۸(\frac{۱}{۲})^۳ + ۴(\frac{۱}{۲})^۲ - ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۸ \times \frac{۱}{۸} + ۴ \times \frac{۱}{۴} - ۵ = ۱ + ۱ - ۵ = -۳$

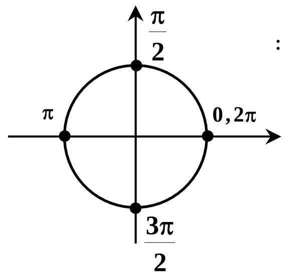
مثال ۲۵: اگر باقیمانده تقسیم $x^۲ - ax + ۳a$ بر $x - a$ عدد ۶ باشد. آن‌گاه a برابر است با:

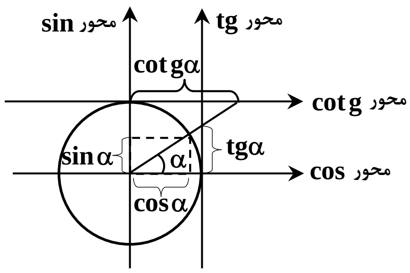
۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ : گزینه «۳» با توجه به صورت مسئله مقدار $P(a)$ برابر ۶ می‌باشد. $P(a) = ۶ \Rightarrow a^۲ - a^۲ + ۳a = ۶ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$

مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی :





علامت نسبتهای مثلثاتی در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی در جدول زیر آمده است :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−
cotg x	+	−	+	−

تذکر ۷: توجه شود که فقط کافی است علامتهای sin و cos در چهار ربع حفظ شود، علامتهای tg و cotg که همواره مانند یکدیگر هستند از ضرب علامت sin و cos در هم بدست خواهد آمد.

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای مختلف که باید به خاطر سپرده شود :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin x	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	۱-	۰
cos x	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	۰	۱
tg x	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot x	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

تذکر ۸: واحدهای استفاده شده در جدول فوق برحسب رادیان (R) می‌باشد درصورتی که واحد بر حسب درجه (D) بیان شود از فرمول $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ جهت تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده می‌کنیم.

نسبت‌های $\pi \pm \alpha$ ، $2n\pi \pm \alpha$ ، $(\frac{2n+1}{2})\pi \pm \alpha$:

الف) کمان $(-\alpha)$:

۱) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ۲) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ۳) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ ۴) $\cot(-\alpha) = -\cot g\alpha$

ب) کمان $(\pi-\alpha)$:

۱) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ ۳) $tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

ج) کمان $(\pi+\alpha)$:

۱) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ ۲) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ ۳) $tg(\pi+\alpha) = tg\alpha$ ۴) $\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

د) کمان $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = tg\alpha$

س) کمان $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$:

۱) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$ ۲) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$ ۳) $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -tg\alpha$

ش) کمان $(2\pi-\alpha)$:

۱) $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$ ۲) $\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$ ۳) $tg(2\pi-\alpha) = -tg\alpha$ ۴) $\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

ن) کمان $(2\pi+\alpha)$:

۱) $\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha$ ۲) $\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha$ ۳) $tg(2\pi+\alpha) = tg\alpha$ ۴) $\cot(2\pi+\alpha) = \cot\alpha$

باتوجه به مطالب فوق به نکات زیر جهت یادگیری راحت‌تر توجه فرمایید.

نکته۱۶: برای tg و cotg مضارب فرد و زوج π حذف می‌شوند.(بعبارت دیگر tg و cotg عبارت بعد از مضارب فرد یا زوج π محاسبه می‌شود و برای sin و cos ابتدا یک منفی پشت نسبت قرار داده و سپس مضرب فرد π را حذف می‌کنیم.)

نکته۱۷: برای sin و cos مضارب زوج π حذف می‌شوند. (بعبارت دیگر sin و cos عبارت بعد از مضارب زوج π محاسبه می‌شود.)

نکته۱۸: در تعیین نسبت مثلثاتی کمان ابتدا علامت نسبت مثلثاتی آن کمان را مشخص می‌کنیم ، در صورت وجود مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، sin را به cos و tg را به cotg و بالعکس تبدیل می‌کنیم.

مثال۲۶: مقادیر $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$, $\sin(\pi+\alpha)$, $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ را تعیین کنید. (α زاویه‌ای حاده می‌باشد)

پاسخ :

۳) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) \overset{\text{نکته ۱۸}}{=\!=\!=} -\sin\alpha$	۲) $\sin(\pi+\alpha) \overset{\text{نکته ۱۶}}{=\!=\!=} -\sin\alpha$	۱) $tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha) \overset{\text{نکته ۱۸}}{=\!=\!=} -\cot g\alpha$

مثال۲۷: اگر $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد آنگاه $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[\text{و } \cos\alpha \text{ در این ناحیه منفی است}]{\text{چون } \alpha \text{ در ربع دوم است}} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اما با توجه به نکته ۱۸ داریم :

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha = -(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اتحادهای مهم مثلثاتی:

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

۲) $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\cot g\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴) $tg\alpha.\cot g\alpha=1\ ,\ (\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2})$

۵) $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},(\alpha\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2})$

۶) $1+\cot g^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},(\alpha\neq n\pi)$

۷) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$

۸) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$

۹) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ,\ \sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\ ,\ \sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

۱۰) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\end{cases}$

۱۱) $tg 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

۱۲) $\cos 2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۳) $\sin 2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۴) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

۱۵) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

مثال۲۸: حاصل عبارت $(1-\cos\theta)(1+\sin\theta\cot g\theta)-\tan\theta.\cot g\theta$ برابر کدام است؟

۱) $\sin^2\theta$ ۲) $-\sin^2\theta$ ۳) $\cos^2\theta$ ۴) $-\cos^2\theta$

پاسخ : گزینه «۴»

$$A=(1-\cos\theta)(1+\sin\theta\cot g\theta)-\underbrace{\tan\theta\cot g\theta}_{1}$$

$$A=(1-\cos\theta)(1+\cancel{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}})-1=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)-1=1-\cos^2\theta-1=-\cos^2\theta$$

مثال۲۹: حاصل عبارت $A=\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x=7/5^\circ$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\dfrac{1}{8}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{4}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$A=\frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x\xrightarrow{x=7/5^\circ}A=\frac{1}{4}\times\sin(4\times 7/5^\circ)=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}$$

مثال۳۰: اگر $tgx+\cot gx=3$ باشد حاصل $A=tg^3x+\cot g^3x$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۳

پاسخ : گزینه «۱» بر طبق اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ داریم:

$$tg^3x+\cot g^3x=(\underbrace{tgx+\cot gx}_{3})^3-3\underbrace{tgx\cot gx}_{1}(\underbrace{tgx+\cot gx}_{3})=3^3-3\times1\times3=18$$

مثال۳۱: اگر $\sin\alpha=\dfrac{a^4+1}{2a^2}$ باشد $\cos 2\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۱-