مزدوج همساز و روش‌های به دست آوردن آن

هرگاه $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، آنگاه v را مزدوج همساز u می‌نامند و همچنین هرگاه v یک مزدوج همساز u باشد، می‌توان نتیجه گرفت تابع $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی است. از جمله سؤالاتی که مورد توجه طراحان قرار دارد، به دست آوردن مزدوج همساز می‌باشد. در این‌گونه سؤالات معمولاً برای تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یکی از قسمت‌های حقیقی (u) و یا موهومی (v) را می‌دهند و قسمت دیگر (یا همان مزدوج همسازش) را سؤال می‌کنند. این مسائل را باید با استفاده از روابط کوشی ریمان حل کنیم.

مثال ۸۶: **اگر v مزدوج همساز u باشد، کدام گزاره درست <u>نیست</u>؟** (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) v_y مزدوج همساز u_y است. ۲) v_x مزدوج همساز u_x است. ۳) u_y مزدوج همساز v_y است. ۴) u_x مزدوج همساز $-v_x$ است.

پاسخ: گزینه «۳» v مزدوج همساز u است، یعنی تابع $f=u+iv$ تحلیلی است پس $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ تحلیلی است؛ یعنی v_x مزدوج همساز u_x است و $-u_y$ مزدوج همساز v_y است.

روش اولِ به دست آوردن مزدوج همساز

قبل از حل مثال روش حل را به صورت مرحله‌ای توضیح می‌دهیم، فرض می‌کنیم برای تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$، ضابطه u داده شده است.

مرحله اول: ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم.

مرحله دوم: چون تابع f تحلیلی است رابطه $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ برقرار می‌باشد، پس عبارت به دست آمده از مرحله اول را مساوی $\frac{\partial v}{\partial y}$ قرار می‌دهیم و از طرفین این تساوی نسبت به y انتگرال می‌گیریم. دقت کنید، پس از انتگرال‌گیری تساوی به صورت زیر خواهد بود:

$$v=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{یا همان}\right)\ \text{عبارت به دست آمده از مرحله اول}\right]dy+\left(x\ \text{تابعی بر حسب}\right)$$

مرحله سوم: پس از به دست آوردن حاصل انتگرال سمت راست تساوی فوق، از طرفین رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم ($\frac{\partial v}{\partial x}$ را محاسبه می‌کنیم)

چون تابع تحلیلی است، باید $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$، پس $\frac{\partial v}{\partial x}$ را مساوی $-\frac{\partial u}{\partial y}$ قرار می‌دهیم. (بدیهی است، محاسبه $-\frac{\partial u}{\partial y}$ از روی ضابطه u کار سختی نیست!)

مرحله چهارم: پس از مساوی قرار دادن $\frac{\partial v}{\partial x}$ با $-\frac{\partial u}{\partial y}$، مشتق آن تابع بر حسب x (مثلاً $h'(x)$) که در مرحله دوم به دست آمده بود، برابر یک عبارت می‌شود و با انتگرال‌گیری از $h'(x)$ نسبت به x، ضابطه $h(x)$ معلوم و در نتیجه ضابطه v مشخص می‌شود.

تذکر ۱۴: اگر مسئله v را به ما داده بود و u را سؤال کرده بود، باز هم روش حل تقریباً مانند مطالب گفته شده می‌باشد.

مثال ۸۷: **اگر $f(z)=f(x+jy)=u(x,y)+jv(x,y)$ یک تابع تحلیلی باشد که در آن:**
$u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ و $(j=\sqrt{-1})$ آنگاه $v(x,y)$ برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{-x}(y\sin y+x\cos y)$ ۲) $e^{-y}(x\sin x+y\cos y)$ ۳) $e^{-x}(x\sin x+y\cos x)$ ۴) $e^{-y}(y\sin y+x\cos y)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$u_x=-e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+e^{-x}\sin y=v_y\ \Rightarrow v=\int e^{-x}(-x\sin y+y\cos y+\sin y)dy$$

$$=e^{-x}[x\cos y+y\sin y+\cos y-\cos y]+h(x)=e^{-x}[x\cos y+y\sin y]+h(x)$$

$$u_y=-v_x\ \Rightarrow e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)-e^{-x}(\cos y)-h'(x)\ \Rightarrow h'(x)=0\ \Rightarrow h(x)=c$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

مثال۸۸: اگر تابع v مزدوج همساز تابع $u = Ln(x^2+y^2)$ باشد، تابع v کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۲ـ مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $v = \frac{1}{2}\cot g^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۲) $v = \frac{1}{2}tg^{-1}\frac{x}{y}+c$ ۳) $v = 2tg^{-1}\frac{y}{x}+c$ ۴) $v = 2\cot g^{-1}\frac{y}{x}+c$

پاسخ: گزینه «۳»

$$u = Ln(x^2+y^2) \Rightarrow u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} = v_y \Rightarrow v = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dy = \frac{2x}{x}Arctg\frac{y}{x}+h(x) = 2Arctg\frac{y}{x}+h(x)$$

$$v_x = -\frac{2y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}+h'(x) = -u_y = -\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c$$

توضیح: البته وقتی ضابطه v به دست آمد با توجه به گزینه‌ها دیگر نیازی به تعیین مقدار $h(x)$ نبود!

مثال۸۹: اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ باشد و $v(0,0) = 1$ ، آنگاه $v(1,1)$ برابر است با : (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$v_x = -u_y = -6xy \Rightarrow v(x,y) = \int -6xydx = -3x^2y + f(y) \Rightarrow v_y = -3x^2 + f'(y)$$

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 = v_y = -3x^2 + f'(y) \Rightarrow f'(y) = 3y^2 + 2 \Rightarrow f(y) = y^3 + 2y + c$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -3x^2y + y^3 + 2y + c \xrightarrow{v(0,0)=1} c = 1 \Rightarrow v(x,y) = -3x^2y + y^3 + 2y + 1 \Rightarrow v(1,1) = 1$$

مثال۹۰: اگر $u(x,y) = 2x(1-y)$ و تابع v یک مزدوج همساز تابع u باشد، یعنی $f = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۷)

۱) $f'(z) = -y + ix$ ۲) $f'(z) = 2iz$ ۳) $f'(z) = 2(1-y) + 2ix$ ۴) $f'(z) = 2(1-y) + 2i(x-1)$

پاسخ: گزینه «۳» سؤال راحتی است! طبق فرمول داریم: $f'(z) = u_x - iu_y = 2(1-y) - i(-2x) = 2(1-y) + 2xi$

مثال۹۱: تابع مزدوج همساز $u(x,y) = 2xy + \cosh x \sin y$ کدام است؟ (مهندسی نانومواد و مهندسی شیمی (بیوتکنولوژی و داروسازی) ـ سراسری ۹۱)

۱) $y^2 - x^2 - \cosh x \sin y + c$ ۲) $y^2 - x^2 - \sinh x \cos y + c$ ۳) $y^2 - x^2 + \cosh x \sin y + c$ ۴) $y^2 - x^2 + \sinh x \cos y + c$

پاسخ: گزینه «۲» طبق معادلات کوشی ریمان می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + \sinh x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = y^2 - \sinh x \cos y + f(x)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -\cosh x \cos y + f'(x) = -2x - \cosh x \cos y \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f(x) = -x^2 + c$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$v = y^2 - x^2 - \sinh x \cos y + c$$

روش دوم محاسبه‌ی مزدوج همساز

این روش بیان ساده‌تر و خلاصه‌تر روش اول است. اگر در تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ هر کدام از $u(x,y)$ و یا $v(x,y)$ داده شده باشند، آنگاه به کمک دو فرمول زیر می‌توان دیگری را نیز پیدا کرد:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}dy - \int [\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } y \text{ در ضابطه } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ حاصل می‌شود}]dx \quad \Leftarrow \text{اگر } u(x,y) \text{ داده شده باشد}$$

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y}dx - \int (\text{عبارتی که از حذف توابع شامل } x \text{ از ضابطه‌ی } \frac{\partial v}{\partial x} \text{ حاصل می‌شود})dy \quad \Leftarrow \text{اگر } v(x,y) \text{ داده شده باشد}$$

حفظ کردن دو رابطه‌ی بالا چندان کار سختی نیست وقتی طراح سؤال مثلاً به شما ضابطه‌ی u را داده است، پس معلوم است شما دنبال v هستید و چیزی جز u در اختیار ندارید، پس در زیر انتگرال باید مشتقات u نسبت به x و y را داشته باشیم، $(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x})$ وقتی از u نسبت به x مشتق می‌گیریم باید در dy ضرب شود و وقتی از u نسبت به y مشتق می‌گیریم باید در dx ضرب شود. (البته از $\frac{\partial u}{\partial y}$ باید جملات شامل y را حذف کنید) و به همین ترتیب برای وقتی که v را داده‌اند برای ضابطه‌ی u می‌توانید برای خودتان قانون بسازید!

مثال ۹۲: فرض کنید $v(x,y)=Ln(x^2+y^2)$ و تابع $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، در این صورت تابع $u(x,y)$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+c$ ۲) $\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+c$ ۳) $2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+c$ ۴) $2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+c$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ را حساب می‌کنیم؛ $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ طبق فرمول اگر $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ عبارات شامل x را حذف کنیم، چیزی نمی‌ماند!

$$u=\int\frac{2y}{x^2+y^2}dx-\int(0)\,dy=2y\int\frac{dx}{(y)^2+x^2}=(2y)\frac{1}{y}tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c=2tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$$

مثال ۹۳: اگر تابع $v(x,y)$ یک مزدوج همساز تابع $u(x,y)=(x^2-y^2+1)^2-4x^2y^2$ باشد، آنگاه با شرط $v(0,0)=0$ مقدار $v(1,1)$ کدام است؟

(مهندسی نانومواد ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینه «۳» ضابطه‌ی u را داریم. با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی آن داریم:

$$\begin{cases}u_x=4x(x^2-y^2+1)-8xy^2=4x^3-12xy^2+4x\\ u_y=-4y(x^2-y^2+1)-8x^2y=4y^3-12yx^2-4y\end{cases}$$

با استفاده از فرمول زیر، ضابطه‌ی v به دست می‌آید:

$v(x,y)=\int u_x dy-\int($ عبارتی که از حذف جملات شامل y از u_y به دست می‌آید $)dx$

$$=\int(4x^3-12xy^2+4x)dy-\int(0)\,dx=4x^3y-4y^3x+4xy+c$$

حالا از شرط $v(0,0)=0$ داریم $c=0$، بنابراین خواهیم داشت:

$$v(x,y)=4x^3y-4y^3x+4xy\Rightarrow v(1,1)=4$$

مثال ۹۴: تابع $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$ در همه نقاط هارمونیک (همساز) می‌باشد. تابع مختلط تحلیلی G از متغیّر Z را به گونه‌ای تعیین نمایید که $\operatorname{Re}G=\varphi$.

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۰)

۱) $(x^3-3xy^2)+i(3xy^2-y^3+c)$ ۲) $(x^3-3xy^2)+i(4xy-y^2+c)$

۳) $(x^3-3xy^2)+i(4xy^2+y^2+c)$ ۴) $(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c)$

پاسخ: گزینه «۴» در این سؤال به جای u از متغیر φ استفاده شده است، بنابراین باید v را حساب کنیم:

$V=\int\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dy-\int($ عبارتی که از حذف توابع شامل y در ضابطه $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ حاصل می‌شود $)dx$

توجه کنید که $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2-3y^2$ و $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-6xy$، لذا داریم:

$$V=\int(3x^2-3y^2)dy-\int(0)\,dx=3x^2y-\frac{3}{3}y^3+c=3x^2y-y^3+c$$

بنابراین داریم:

$$G=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+c)$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

نکته ۱۹: اگر u و v در مختصات قطبی داده شده باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

اگر u را داده باشند $\Rightarrow v=\int r\dfrac{\partial u}{\partial r}d\theta-\int($ عبارتی که از حذف عبارات شامل θ از تابع $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$ حاصل می‌شود $)dr$

اگر v را داده باشند $\Rightarrow u=\int\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right)dr-\int($ عبارتی که از حذف عبارات شامل r از تابع $r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ حاصل می‌شود $)d\theta$

مثال ۹۵: تابع پتانسیل $u(r,\theta)=Lnr+r\cos\theta$ در مختصات قطبی داده شده است. تابع مزدوج همساز (conjugate Harmonic) آن، یعنی $V(r,\theta)$ کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $-\theta-r\sin\theta+A$ ۲) $\theta+r\sin\theta+A$ ۳) $r+r\sin\theta+A$ ۴) $\theta-r\sin\theta+A$

پاسخ: گزینه «۲» طبق فرمول $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}+\cos\theta$ و $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\dfrac{-r\sin\theta}{r}=-\sin\theta$، بنابراین داریم:

$$v=\int r\left(\frac{1}{r}+\cos\theta\right)d\theta-\int(0)\,dr=\int(1+r\cos\theta)\,d\theta=\theta+r\sin\theta+A$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

روش به دست آوردن ضابطه تابع تحلیلی $f(z)$

هر گاه تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، برای یافتن f بر حسب z، کافی است پس از مشتق‌گیری از f، x را به z تبدیل کرده و y را مساوی صفر قرار دهیم. به همین شکل اگر تابع $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ تحلیلی باشد، پس از مشتق‌گیری از f نسبت به z، با تبدیل‌های $r\to z$ و $\theta\to 0$ تابع منحصراً برحسب z به دست می‌آید. پس از استفاده از این روش اگر u را داده بودند با استفاده از فرمول $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ و اگر v را داده بودند با استفاده از فرمول $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ ضابطه‌ی $f'(z)$ و سپس با انتگرال‌گیری از آن ضابطه‌ی $f(z)$ معلوم می‌شود. این روش به ویژه برای مسائلی بهتر است که مثلاً u یا v را می‌دهند و ضابطه تابع $f(z)$ را می‌خواهند.

مثال ۹۶: تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن $v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ می‌باشد عبارت است از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $f(z)=\exp(z^2)$ ۲) $f(z)=\exp(-z^2)$ ۳) $f(z)=-\exp(\bar{z}^2)$ ۴) $f(z)=\exp(\bar{z}^2)$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{\partial v}{\partial y}=(-2y)e^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)+(2y)e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

به جای تمام y ها صفر و به جای تمام x ها، z قرار می‌دهیم:

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2ze^{z^2}\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}}f(z)=\int(2z)e^{z^2}dz=e^{z^2}=\exp(z^2)$$

مثال ۹۷: اگر قسمت حقیقی (Real Part) مشتق تابع تحلیلی $f(z)$ برابر با $3x^2-3y^2+2e^{2x}\cos 2y$ باشد، آنگاه $f(z)$ کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون مشترک با نفت ـ سراسری ۹۶)

۱) $f(z)=3z^2+e^{2z}+(c_1+ic_2)$ ۲) $f(z)=z^3+e^{2z}+(c_1+ic_2)$

۳) $f(z)=z^3-e^{2z}+(c_1+ic_2)$ ۴) $f(z)=3z^2-e^{2z}+(c_1+ic_2)$

پاسخ: گزینه «۲» اگر قسمت حقیقی $f(z)$ را برابر u بگیریم و قسمت موهومی آن را v، چون تابع $f(z)$ تحلیلی است $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$؛ پس مطابق صورت سؤال داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2+2e^{2x}\cos 2y\Rightarrow u=x^3-3y^2x+e^{2x}\cos 2y+C\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-6yx-2e^{2x}\sin 2y$$

حال در $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ به جای x,z و به جای $y,0$ قرار می‌دهیم. در این‌صورت داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z,0)=3z^2+2e^{2z}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}(z,0)=0$$

پس $f'(z)$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=3z^2+2e^{2z}+i(0)$$

حال برای محاسبه $f(z)$ از $f'(z)$ انتگرال می‌گیریم:

$$f(z)=\int(3z^2+2e^{2z})dz=z^3+e^{2z}+C$$

که C می‌تواند به‌صورت یک عدد ثابت مختلط (C_1+iC_2) باشد. پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مدرسان شریف

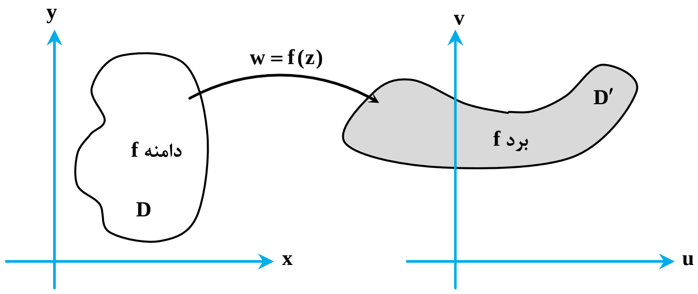
فصل دوم

نگاشت

درسنامه: تعریف نگاشت و نگاشت همدیس

تعریف نگاشت

از درس ریاضی عمومی و حتی از دوره‌ی دبیرستان می‌دانیم برای توابع حقیقی، تابع به صورت $y=f(x)$ نوشته می‌شد و نمایش هندسی آن در صفحه‌ی xoy انجام می‌گرفت. اما در مورد توابع مختلط انجام چنین کاری (یعنی رسم نمودار تابع در یک صفحه) ممکن نیست، چون برای رسم نمودار به یک فضا آن هم از نوع چهار بعدی نیاز داریم که بدیهی است امکان ندارد. برای اینکه خودِ z (که متغیر ورودی یا دامنه‌ی تابع مختلط $w=f(z)$ است) به دو متغیر حقیقی x و y وابسته است و تابع $w=u+iv$ که خروجی تابع یا همان برد تابع $f(z)$ است، به دو متغیر که خود به x و y وابسته هستند، بستگی دارد. برای حل این مشکل ما اطلاعات خود را در مورد تابع، با رسم دو صفحه‌ی مختلف (و البته مختلط)، یکی برای مقادیر z و دیگری برای مقادیر w و مشخص کردن تناظر بین نقاط این دو صفحه مشخص می‌کنیم:



همانطورکه در شکل فوق می‌بینید، تابع f نقاط ناحیه D را در صفحه z، به نقاط ناحیه D' در صفحه‌ی w تبدیل می‌کند. به تابع $w=f(z)$ یک نگاشت می‌گوییم هرگاه توسط آن، نقاط ناحیه‌ی D از صفحه‌ی $x-y$ به نقاط ناحیه‌ی D' از صفحه‌ی $u-v$ تبدیل شوند. برای مثال نگاشت $w=z^2$، نقطه‌ی $z=1+i$ از صفحه $x-y$ را به نقطه‌ی $2i$ در صفحه $u-v$ تبدیل می‌کند:

$$w=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \xrightarrow[x=1,\,y=1]{z=1+i} w=1^2-1^2+2i\times1\times1=2i$$

گاهی از کلمه‌ی «تبدیل» و یا «تابع» نیز برای نگاشت استفاده می‌کنیم.

نگاشت همدیس (حافظ زاویه)

هرگاه تحت نگاشت $w=f(z)$ هر زاویه با رأس z_0 از صفحه $x-y$ بدون هیچ‌گونه تغییری از نظر اندازه و جهت، به زاویه‌ای با رأس $w_0=f(z_0)$ در صفحه $u-v$ منتقل شود، آنگاه نگاشت را در نقطه $z=z_0$ همدیس می‌نامیم. برای اینکه تابع تحلیلی $w=f(z)$ همدیس باشد، باید شرط $f'(z)\neq 0$ برقرار باشد.

مثال ۱: کدام یک از توابع زیر در مبدأ مختصات همدیس است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $f(z)=\bar{z}$ ۲) $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ ۳) $f(z)=\frac{1}{z}$ ۴) $f(z)=\frac{|z|^2}{z}$

پاسخ: گزینه «۲» نگاشت $\frac{1}{\bar{z}}$، ترکیب نگاشت‌های $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$ است. نگاشت $\bar{z}$ حافظ زاویه بوده اما حافظ جهت نیست و $\frac{1}{z}$ در نقطه $z_0 = 0$ حافظ زاویه است اما حافظ جهت نیست. بنابراین $\frac{1}{\bar{z}}$ با دو بار تغییر جهت هم حافظ زاویه و هم حافظ جهت می‌باشد، لذا همدیس است. برای توضیح بیشتر در مورد نگاشت $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ به محاسبه‌ی مقابل توجه کنید: (فرض کنید $z = re^{i\theta}$)

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$$

همان‌طور که می‌بینید هم جهت و هم اندازه زاویه حفظ شده است. همچنین در گزینه (۴)، $f(z) = \frac{\bar{z}z}{z} = \bar{z}$ که همان‌گونه که اشاره شد حافظ زاویه است اما حافظ جهت نیست.

مثال ۲: تبدیل $w = \sin z$ در کدام نقاط همدیس است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۳)

۱) در همه نقاط همدیس است.

۲) در همه نقاط، بجز $z = n\pi$، (n عدد صحیح)

۳) در همه نقاط، بجز $z = (n - \frac{1}{2})\pi$، (n عدد صحیح)

۴) در همه نقاط، بجز $z = (n - \frac{1}{2})\pi$، (n عدد طبیعی)

پاسخ: گزینه «۳» نگاشت $f(z) = \sin z$ در نقاطی که $f'(z) = 0$ باشد، همدیس نیست. بنابراین داریم:

$$f'(z) = \cos z = 0 \Rightarrow z = (2n-1)\frac{\pi}{2} = (n - \frac{1}{2})\pi$$

همه مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ چه مثبت و چه منفی، ریشه‌های کسینوس هستند. برای تولید همه‌ی آن‌ها، لازم است n عدد صحیح باشد.

مثال ۳: اگر تصاویر خطوط $x = a$ و $y = b$ را تحت نگاشت $w = (x^2 - y^2) + ikxy$ بدست بیاوریم و بخواهیم تصاویر آن‌ها عمود بر هم باشد، k لازم است چه مقداری باشد؟ (a و b اعدادی غیرصفر هستند.) (با کمی تغییر از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» اولاً توجه کنید که اگر نگاشت w تحلیلی باشد، هر جا که $w' \neq 0$ باشد، زاویه‌ی بین خطوط و منحنی‌ها را حفظ می‌کند. (یعنی همدیس است.) خطوط $x = a$ و $y = b$ دو خط عمود بر هم هستند و می‌دانیم اگر w تحلیلی و در $z = a + ib$، دارای مشتق مخالف صفر باشد، آن‌ها را به دو منحنی یا خطِ عمود بر هم تصویر خواهد کرد. شرط لازم برای تحلیلی بودن آن است که شرایط کوشی ریمان برقرار باشند: $u = x^2 - y^2 \;,\; v = kxy$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = kx \\ -2y = -ky \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

بنابراین $k = 2$ جواب صحیح است. دقت کنید که به ازای $k = 2$ داریم: $w = (x^2 - y^2) + 2ixy = z^2$ که نگاشتی تحلیلی است و در هر $z \neq 0$ داریم $w' \neq 0$.

راهنمایی برای پاسخگویی به تست‌های نگاشت

همان‌طور که گفتیم، نگاشت $w = f(z)$، در واقع هر نقطه در صفحه $x-y$ مانند $z = x + iy$ را به نقطه‌ای مانند $w = u + iv$ در صفحه $u-v$ تبدیل می‌کند و برای همین با جایگزینی $z = x + iy$ در $f(z)$ و همچنین قرار دادن $u + iv$ به جای w در نهایت می‌توانیم u و v را بر حسب x و y یا x و y را برحسب u و v محاسبه کرده و با توجه به نواحی، نقاط مرزی و همچنین حدود تغییرات داده شده در صفحه $x-y$، تعیین کنیم که u و v چه تغییراتی می‌کنند و نشان‌دهنده چه ناحیه‌هایی در صفحه $u-v$ می‌باشند.

توجه ۱: اکثر تست‌های نگاشت با در نظر گرفتن نقطه‌ای دلخواه به جای z در ناحیه موردنظر و پیدا کردن نقطه‌ی متناظر آن (یعنی همان w) به روش رد گزینه و سریع قابل پاسخگویی هستند.

توجه ۲: بررسی نقاط و یا خطوط روی مرز ناحیه داده شده در حل تست‌ها به ما کمک می‌کند.

ما در این کتاب پاسخ تستی برخی از سؤالات را آورده‌ایم ولی پاسخ تستی اکثر تست‌ها در کتاب حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها) آمده است. در نهایت لازم به ذکر است که ممکن است، گزینه‌ها طوری طراحی شوند که با استفاده از نکات فوق نتوان گزینه‌های غلط را حذف کرد و یا به صورت نقطه‌یابی تست را جواب داد. برای همین آشنایی با خواص هر نگاشت در حل سریع‌تر تست‌ها به ما کمک می‌کند.

منظور از روش رد گزینه در حل تست‌های نگاشت را با یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال ۴: تصویر دایره $|z - i| = 1$ تحت نگاشت $w = u + iv = \frac{i}{z}$ کدام است؟ (مکانیک ـ سراسری ۸۷)

۱) $v = \frac{1}{2}$ ۲) $u = \frac{1}{2}$ ۳) $u = -\frac{1}{2}$ ۴) $v = -\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» می‌توانیم هر نقطه‌ای که در تساوی $|z - i| = 1$ صدق می‌کند، انتخاب کنیم. بعد آن نقطه را در ضابطه‌ی نگاشت یعنی $w = \frac{i}{z}$ قرار بدهیم و سپس ببینیم w چه می‌شود. فرض کنید $z = 0 + 2i$ را انتخاب کنیم؛ در این صورت داریم:

$$w = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2} \Rightarrow u + iv = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

بدون هیچ‌گونه محاسبه و اطلاعاتی در مورد نوع نگاشت توانستیم جواب سؤال را معلوم کنیم!!

درسنامه۲: انواع نگاشت

نگاشت همانی $w=f(z)=z$

این نگاشت هر شکل را بدون تغییر منتقل می‌کند. واضح است که این نگاشت، در تمام نقاط همدیس است.

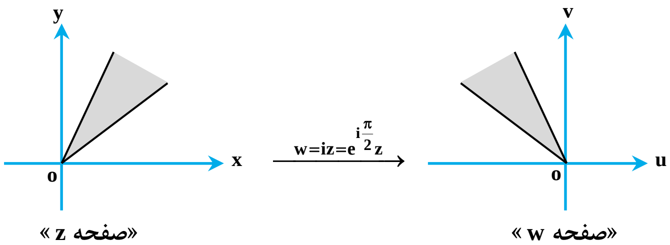
نگاشت انتقال $w=z+b$

این نگاشت که در آن $b=b_1+ib_2$ یک عدد مختلط است، هر نقطه یا شکل را در جهت بردار b و به اندازه b منتقل می‌کند. در واقع تحت این نگاشت، نقطه (x,y) از صفحه $x-y$ به نقطه $(x+b_1\ ,\ y+b_2)$ در صفحه $u-v$ منتقل می‌شود. واضح است این نگاشت نیز در تمام نقاط همدیس است.

نگاشت $w=az$

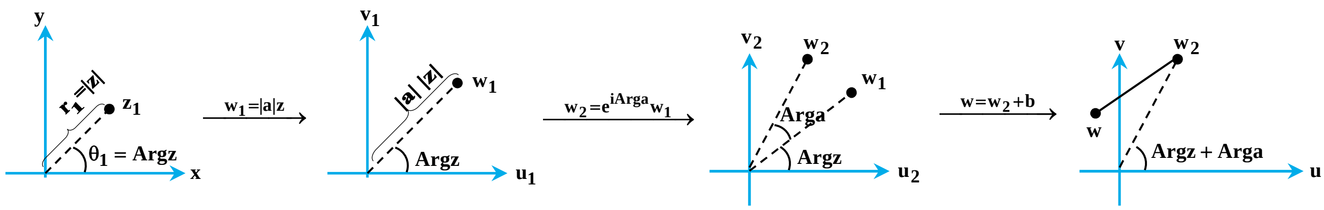
این نگاشت که در آن $a=re^{i\theta}$ عددی مختلط و مخالف صفر است، انبساط یا انقباضی به اندازه $\underline{\underline{r}}$ و دورانی به اندازه θ در هر نقطه z که قرار است منتقل شود، ایجاد می‌کند. در واقع برای رسیدن از z به $w=az$ اگر $z=r_1e^{i\theta_1}$ تعریف شود، ابتدا طول r_1 را به اندازه r (همان اندازه a) منبسط و یا منقبض می‌کنیم (اگر $|r|>1$ شکل منبسط و اگر $|r|<1$ شکل منقبض می‌شود) و سپس z را به اندازه θ (زاویه a) دوران می‌دهیم. یعنی هر نقطه در مختصات قطبی به صورت (r_1,θ_1) به نقطه‌ای به مختصات $(r.r_1\ ,\ \theta+\theta_1)$ تبدیل خواهد شد. واضح است که این نگاشت نیز همدیس است.

برای مثال در شکل مقابل نگاشت $w=iz$ که در واقع آن را به شکل $w=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ می‌نویسیم، فقط یک دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ (در جهت مثلثاتی) در شکل داده شده در صفحه‌ی $x-y$ ایجاد کرده و در اندازه شکل هیچ تأثیری نداشته است.



نگاشت خطی $w=az+b$

این نگاشت که همه‌جا همدیس است ترکیبی از دو نگاشت $w_1=az$ و $w_2=w_1+b$ می‌باشد که می‌تواند به ترتیب متوالی صورت گیرد.
مطابق شکل، تغییرات نقطه‌ای مانند z_1 که طول شعاع حامل آن از مبدأ برابر r_1 و زاویه آن با محور xها θ_1 است، تحت نگاشت $w=az+b$ به این صورت است که ابتدا توسط نگاشت $w_1=|a|z$ فاصله‌ی نقطه از مبدأ در $r=|a|$ ضرب می‌شود و سپس تحت نگاشت $w_2=e^{iArga}w_1$، به زاویه آن با محور xها به اندازه $\theta=Arga$، اضافه شده و نقطه از w_1 به w_2 منتقل می‌شود و در نهایت توسط نگاشت $w=w_2+b$ نقطه به اندازه b منتقل می‌شود.
به شکل‌های نشان داده شده برای درک بیشتر مطلب دقت کنید. (در این شکل‌ها فرض می‌کنیم $|a|>1$ و Arga مثبت است):

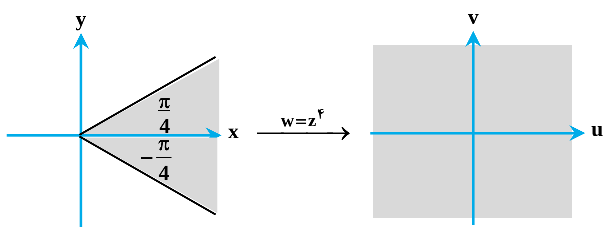


به طور خلاصه این نگاشت سه عملکرد زیر را دارد:

۱) انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ۲) دورانی به اندازه Arga ۳) انتقالی به اندازه b

نگاشت $w=z^n$

این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و بزرگتر از یک است، فاصله از مبدأ برای هر نقطه مانند z را به توان n می‌رساند و آرگومان آن را نیز n برابر می‌کند. توسط این نگاشت نقاط $-\frac{\pi}{n}\le Arg(z)\le\frac{\pi}{n}$ به نقاط $-\pi\le Arg(w)\le\pi$ تبدیل می‌گردند. در واقع توسط این نگاشت زاویه اشکال بازتر می‌گردد. این نگاشت در مبدأ همدیس نیست. قابل ذکر است که نگاشت $w=z^2$ حالت خاصی از این نگاشت می‌باشد که ابتدا آن را بررسی می‌کنیم.

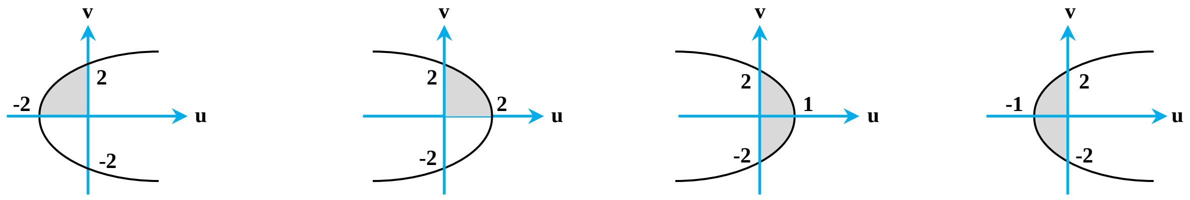


نگاشت $w=z^2$

این نگاشت هر نقطه‌ی $z=re^{i\theta}$ را به نقطه‌ی $w=r^2e^{i2\theta}$ تبدیل می‌کند. در واقع نگاشت $w=z^2$، زاویه را دو برابر کرده و اندازه را به توان ۲ می‌رساند.
این نگاشت فقط در مبدأ مختصات که مشتق آن برابر صفر است، همدیس نیست.

نکته۱: نگاشت $w=z^2$ خطوط $x=c$ را به سهمی‌های $v^2=-4c^2(u-c^2)$ و خطوط $y=d$ را به سهمی‌های $v^2=4d^2(u+d^2)$ تبدیل می‌کند.

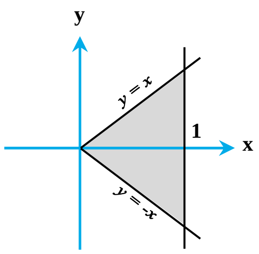
مثال۵: **مبدل مثلث محدود به سه خط $y=x$ و $y=-x$ و $x=1$ با تبدیل $w=z^2$ کدام ناحیه است؟** (مهندسی مواد ـ سال ۸۳)



(۴) (۳) (۲) (۱)

پاسخ: گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول : با ترسیم شکل ناحیه در صفحه z شکل مقابل را داریم:



ملاحظه می‌گردد $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ می‌باشد و می‌دانیم این ناحیه تحت نگاشت z^2 به $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ تبدیل خواهد شد.
فقط گزینه (۲) چنین شرایطی را دارد.

روش دوم:
$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy \Rightarrow u=x^2-y^2\ ,\ v=2xy$$
$$x=1 \Rightarrow u=1-y^2\ ,\ v=2y \Rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$$

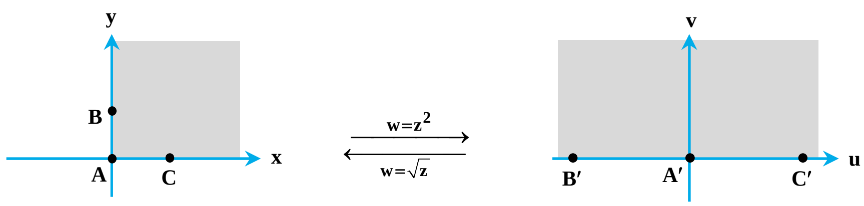
که معادله‌ی یک سهمی با رأس یک است. همین‌جا معلوم است گزینه (۲) جواب است؛ اما اگر مثلاً گزینه‌های دیگر هم یک سهمی با **رأس یک** را نمایش می‌دادند، باید سراغ بررسی خطوط دیگر به صورت زیر هم می‌رفتیم:

$$y=x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=2x^2 \end{cases} \xrightarrow{0<x<1} 0<v<2$$
$$y=-x \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=-2x^2 \end{cases} \xrightarrow{0<x<1} -2<v<0$$

$\Rightarrow$ از این دو بررسی معلوم می‌شود که $-2<v<2$ است.

نگاشت $\sqrt[n]{z}$

این نگاشت که در آن n عددی طبیعی و مخالف یک می‌باشد، هر نقطه با مختصات (r,θ) را به نقاطی به مختصات $(\sqrt[n]{r},\frac{\theta+2k\pi}{n})$ تبدیل می‌کند که در آن $k=0,1,2,\dots,n-1$ می‌باشد. (در این کتاب $k=0$ و در نتیجه شاخه اصلی در نظر گرفته می‌شود.) ملاحظه می‌کنید که این نگاشت، عکس نگاشت z^n می‌باشد و توسط آن ناحیه $-\pi\le Arg(z)\le\pi$ به نقاط $-\frac{\pi}{n}\le Arg(w)\le\frac{\pi}{n}$ تبدیل می‌شود.



نگاشت $w=\frac{1}{z}$

این نگاشت نقطه $z=re^{i\theta}$ را به نقطه $w=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ تبدیل می‌کند و به غیر از مبدأ مختصات در بقیه نقاط همدیس است. این نگاشت در واقع فاصله نقطه از مبدأ را عکس و زاویه را تغییر علامت می‌دهد و همواره توسط آن، نقاط خارج دایره واحد، به نقاط ناصفر داخل این دایره نگاشته می‌شوند و برعکس. اما نقاط روی دایره واحد به روی دایره واحد تصویر خواهند شد. در صورتی که نقطه $w=u+iv$ تصویر نقطه ناصفر $z=x+iy$ تحت تبدیل $w=\frac{1}{z}$ باشد، آنگاه روابط زیر را داریم:

درسنامه۲: انتگرال‌گیری از توابعی که تحلیلی هستند یا فقط در چند نقطه غیر تحلیلی هستند

در این قسمت سراغ انتگرال‌هایی می‌رویم که یا تابع زیر انتگرال تحلیلی است و یا در تعداد محدودی نقطه که درون مرز C قرار دارند، غیر تحلیلی است. برای ورود به بحث، ابتدا قضایای کوشی ـ گورسا را تعریف می‌کنیم.

قضیه کوشی ـ گورسا

اگر $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی منحنی ساده و بسته C تحلیلی باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 0}$$

توجه شود، انتگرال‌گیری در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) می‌باشد.

فرمول انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته C در حوزه ساده D تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه درون C باشد، آنگاه داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

این انتگرال‌گیری در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) می‌باشد. اگر z در مخرج دارای ضریب بود ابتدا از ضریب آن فاکتور بگیرید و سپس از فرمول کوشی استفاده کنید، برای مثال: $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{2z-4} = \frac{1}{2}\int_{|z|=3}\frac{e^z}{z-2}dz = \frac{1}{2}2\pi i e^2$.

مثال ۱۸: مقدار $\oint_C \frac{\sinh z}{z^2+\frac{\pi^2}{4}}dz$ کدام است وقتی‌که $C: |z-\frac{\pi}{2}i|=1$ دایره‌ای باشد که در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

۱) ۲　　۲) 2π　　۳) $2i$　　۴) πi

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» از ریشه‌های مخرج، فقط $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ درون مرز C قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن $f(z) = \frac{\sinh z}{z+i\frac{\pi}{2}}$، با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، خواهیم داشت:

$$\oint_C \frac{\sinh z}{(z-i\frac{\pi}{2})(z+i\frac{\pi}{2})}dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-i\frac{\pi}{2}}dz = 2\pi i f(i\frac{\pi}{2})$$

حالا مقدار $f(i\frac{\pi}{2})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(i\frac{\pi}{2}) = \frac{\sinh(i\frac{\pi}{2})}{i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}} = \frac{i\sin(\frac{\pi}{2})}{i\pi} = \frac{i}{i\pi} = \frac{1}{\pi}$$

بنابراین مقدار انتگرال برابر است با:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-i\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \times \frac{1}{\pi} = 2i$$

یادآوری: برای این که ببینیم نقطه‌ای مانند $z=k$ درون ناحیه $|z-z_0|=r$ قرار دارد یا نه، باید در تساوی $|z-z_0|=r$ به جای z، k قرار دهیم؛ اگر $|k-z_0|<r$ بود، نقطه درون ناحیه و اگر $|k-z_0|>r$ بود، نقطه خارج ناحیه قرار دارد.

مثال ۱۹: اگر f یک تابع تحلیلی بر دایره $|z|=2$ و درون آن باشد، مقدار انتگرال $\int_{|z|=2} z^2\bar{z}[1+f'(z)]dz$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $2\pi i$　　۲) πi　　۳) 0　　۴) $-\pi i$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در مسیر دایره‌ای $|z|=2$ داریم $z\bar{z}=|z|^2=4$ لذا: $z^2\bar{z}(1+f'(z)) = 4z(1+f'(z))$

چون f تابع تحلیلی است و دلخواه، f را تابع ثابت $f=1$ فرض می‌کنیم در این صورت $f'(z)=0$ و $\int_{|z|=2} 4z(1+f'(z))dz = 4\int_{|z|=2} z(1+0)dz = 0$

چون تابع z داخل دایره $|z|=2$ و روی آن تحلیلی است و $|z|=2$ یک مسیر همبند ساده و بسته است بنا به قضیه کوشی ـ گورسا انتگرال آن صفر خواهد شد.

مثال ۲۰: حاصل $\oint_C \frac{z^2}{z-i}\log(\frac{z+1}{z-1})dz$ در صورتی که C دایره $|z-i|=\frac{1}{2}$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، برابر کدام گزینه است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۴)

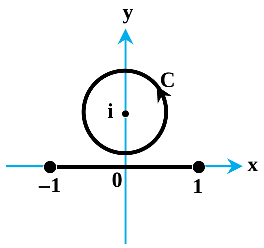
۱) $-i\pi^2$ ۲) π^2 ۳) $i\pi^2$ ۴) $-\pi^2$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید ببینیم تابع $Ln(\frac{z+1}{z-1})$، داخل و روی منحنی C تحلیلی می‌باشد یا نه!؟ می‌دانیم تابع Ln فقط روی مجموعه $\{z\,|\,Re\,z\le 0\ ,\ Im\,z=0\}$ تحلیلی نیست، لذا داریم:

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{x+1+iy}{x-1+iy}=\frac{(x+1+iy)[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

پس تابع $Ln(\frac{z+1}{z-1})$ روی مجموعه‌ی زیر تحلیلی نیست:

$$\begin{cases}x^2+y^2-1\le 0\\ -2y=0\end{cases}\xrightarrow{y=0} x^2-1\le 0\Rightarrow x^2\le 1$$



همان‌طور که در ناحیه نشان داده شده مشخص است، نقاط غیر تحلیلی تابع داخل و روی منحنی C (دایره $|z-i|=\frac{1}{2}$) نیستند. دقت کنید در این‌گونه سؤالات، **چون در گزینه‌ها مقدار داریم، نیاز به بررسی نقاط غیرتحلیلی تابع Ln نبود، چون اگر این نقاط درون ناحیه بودند، انتگرال قابل محاسبه نبود!** اما ما برای تمرین این نقاط را هم حساب کردیم. پس فقط $z=i$ تنها نقطه‌ی غیرتحلیلی درون دایره است. اگر فرض کنیم $f(z)=z^2Ln(\frac{z+1}{z-1})$، آن‌گاه انتگرال زیر را داریم که بر اساس قضیه‌ی کوشی به راحتی به جواب می‌رسیم:

$$I=\oint_C\frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i f(i)=2\pi i(i)^2 Ln(\frac{i+1}{i-1})=-2\pi i Ln[\frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}]=-2\pi i Ln(\frac{2i}{-2})=-2\pi i Ln(-i)$$

اما مقدار $Ln(-i)$ برابر است با:

$$Ln(-i)=Ln|-i|+iArctg(-i)=Ln1-i\frac{\pi}{2}=-i(\frac{\pi}{2})$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر با مقدار زیر است:

$$\mathbf{I=-2\pi i(-i\frac{\pi}{2})=-\pi^2}$$

قضیه (تعمیم قضیه کوشی برای نواحی همبند چندگانه)

فرض کنید C و C_k ها $(k=1,2,\cdots n)$ مسیرهای ساده و بسته با جهت مثبت باشند، که تمام C_k ها درون C باشند، به‌طوری که در هیچ نقطه‌ای از ناحیه با هم دارای نقطه‌ی مشترک نباشد. در این صورت داریم:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz}$$

در واقع این قضیه را می‌توان به این شکل بیان کرد که اگر چند نقطه‌ی غیر تحلیلی درون C داشتیم، می‌توانیم برای هر یک از نقاط باز هم از قضیه کوشی استفاده کنیم و در نهایت این مقادیر را با هم جمع بزنیم.

نکته۴: حالت کلی‌تر فرمول انتگرال کوشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\qquad (n=0,1,2,3,...)$$

رابطه فوق جهت محاسبه مشتق مرتبه nام تابع تحلیلی $f(z)$ نیز کاربرد دارد.

مثال ۲۱: مقدار انتگرال $I=\oint_C\frac{e^{-z}dz}{(z-1)^4}$ روی دایره C با $|z|=3$ در جهت مثبت کدام است؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۹۶)

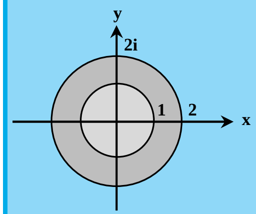
۱) $-\frac{i\pi}{6e}$ ۲) $\frac{i\pi}{6e}$ ۳) $-\frac{i\pi}{3e}$ ۴) $\frac{i\pi}{3e}$

پاسخ: گزینه «۳» طبق فرمول انتگرال کوشی در این سؤال $z_0=1$ و $f(z)=e^{-z}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$I=\frac{2\pi i}{3!}f'''(1)=\frac{2\pi i}{3!}\times(-e^{-z})\Big|_{z=1}=\frac{-2\pi i\times e^{-1}}{6}=-\frac{\pi i}{3e}$$

قضیه لوران (لورانت)

تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2i)}$ را در نظر بگیرید. این تابع به ازای تمام zها به جز دو نقطه تکین $z=1$ و $z=2i$ تحلیلی است. اگر بسط تیلور را حول $z=0$ محاسبه کنیم، این بسط برای ناحیه $|z|<1$ معتبر است.



با بسط تیلور حول $z=0$، ناحیه $|z|\geq 1$ در دسترس ما نیست و برای همین نمایش کلی‌تری معروف بـه **سری لـوران** وجـود دارد که امکان بسط در هر طوق که تابع در آن تحلیلی است را به ما می‌دهد. مثلاً برای تابع $f(z)$ سه حالت ممکن برای بسط لوران حول $z=0$ وجود دارد. یکی ناحیه $|z|>2$، یکی طوق $1<|z|<2$ و دیگری ناحیـه $|z|<1$ (کـه بسـط لـوران در ایـن ناحیه در واقع همان سری تیلور تابع $f(z)$ است) پس ما با سری لوران می‌توانیم بسط تابع را حول نقطه تکین آن بنویسیم.

هرگاه $f(z)$ در ناحیه D (مثلاً طوق $R_1<|z-z_0|<R_2$ یا دیسک $|z-z_0|<R_1$) به جز نقطه z_0 واقع در D تحلیلی باشد، آنگاه تابع $f(z)$ را می‌توان با سری لوران زیر نمایش داد:

$$\mathbf{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}}$$

در واقع با استفاده از سری لوران می‌توانیم تابع را حول نقاط تکین آن بسط دهیم کاری که با استفاده از سری تیلور ممکن نبود.

در رابطه فوق به عبارت $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}$، **مقدار اصلی سری لوران** گفته می‌شود. (چون تفاوت بسط لوران با بسط تیلور تابع f است.)

به عبارت دیگر سری لوران یک سری مرکب از توان‌های صحیح مثبت و منفی $z-z_0$ است که تـوان‌هـای مثبـت همـان سـری تیـلور حـول نقطـه $z=z_0$ می‌باشند. ضرایب سری لوران فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad (n=0,1,2,\dots)\ ,\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{(z-z_0)^{-n+1}}f(z)dz\quad (n=1,2,3,\dots)$$

البته سری لوران $f(z)$ را معمولاً به شکل زیر نیز نمایش می‌دهند:

$$\mathbf{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n}$$

که C_n از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\quad ,\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)}$$

البته در بیشتر سؤالات از روش‌های دیگری برای محاسبه ضرایب سری لوران استفاده می‌شود.

مثال ۲۲: عبارت $\dfrac{1}{1-z}$ در دو حالت، یک بار بر حسب توان‌های مثبت z و بار دیگر بر حسب توان‌های منفی z بسط دهید.

پاسخ: در حالت اول چون در ناحیه $|z|<1$ تابع تحلیلی می‌باشد، پس همان بسط تیلور تابع نوشته می‌شود. می‌دانیم بسط تیلور $\dfrac{1}{1-z}$ به صـورت $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ می‌باشد، ولی یادتان نرود در این بسط باید شرط $|z|<1$ برقرار باشد. خب حالا اگر بخواهیم بسط تابع را برای ناحیه $|z|>1$ بنویسیم، چون نقطـه $z=1$ داخـل منحنی بسته ما (هر منحنی بسته فرضی که در ناحیه $|z|>1$ رسم کنید، $z=1$ درون آن قرار می‌گیرد). می‌افتد و به دلیل این‌که تابع در $z=1$ تحلیلی نیسـت، مجبور به استفاده از بسط لوران می‌شویم.

برای نوشتن توان‌های منفی z به این شکل عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

دقت کنید چون در این حالت $|z|>1$ است، پس $\dfrac{1}{|z|}<1$ و این یعنی می‌توانیم بسط $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

با ضرب $-\dfrac{1}{z}$ در سری داریم:

$$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

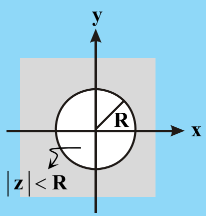
پس در ناحیه‌ای که تابع تحلیلی می‌باشد، همان بسط تیلور تابع را می‌نویسیم و در قسمت‌هایی که تابع تحلیلی نیست باید از بسط لوران استفاده کنیم.

دستورالعمل نوشتن بسط لوران برای توابع کسری

بخشی از سؤالات مبحث سری لوران، مربوط به نوشتن بسط لوران **توابع کسری** در **ناحیه‌ای مشخص** حول نقطه‌ای مانند z_0 می‌شود. اگر این صفحه را خوب مطالعه کنید، مطمئن باشید این نوع سؤالات برایتان جزو سؤالات آسان آزمون‌ها خواهند شد!

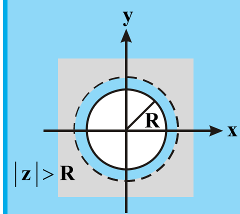
فرض کنید بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه‌ی $z = z_0$ خواسته شده باشد. به‌طور کلی در سؤالات سه نوع ناحیه به شکل زیر داده می‌شود:

۱) $|z-z_0|<R$ ۲) $|z-z_0|>R$ ۳) $R_1<|z-z_0|<R_2$



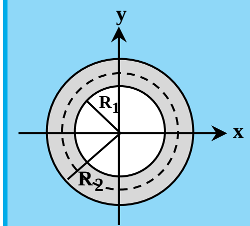
ناحیه به شکل (۱)

ابتدا می‌خواهیم به این تسلط برسید که در هر یک از این نواحی چه نوع بسطی خواهید داشت؟ فرض کنید کسر $f(z)=\frac{1}{z-k}$ و $z_0=0$ را داریم. اگر ناحیه به صورت (۱) باشد، آنگاه طبیعی است امکان ندارد مثلاً $z=k$ درون ناحیه باشد، پس قطعاً $z=k$ خارج این ناحیه قرار دارد (یعنی $|z|<|k|$)، بنابراین در این حالت همواره **بسط تیلور** و توان‌های مثبت از z خواهید داشت (مثلاً با فرض $k=2$ و $R=1$ و $z_0=0$ برای کسر $\frac{1}{z-2}$ در ناحیه $|z-0|<1$ همواره بسط تیلور داریم).



ناحیه به شکل (۲)

حالا اگر ناحیه به صورت (۲) باشد، باید حتماً $|z|>|k|$ و لذا **بسط لوران** برای تابع داریم و قطعاً توان‌های منفی z ایجاد می‌شود برای درک بهتر و دلیل این موضوع توجه کنید که هر منحنی بسته فرضی (مانند دایره نقطه‌چین) که در ناحیه مزبور رسم کنید به هر حال $z_0=0$ را در خودش دارد (مثلاً با فرض $k=2$ و $R=3$ و $z_0=0$ برای کسر $\frac{1}{z-2}$ در ناحیه $|z-0|>3$ همواره جنس بسط لورانی است).



و بالاخره پرتکرارترین ناحیه داده شده در سؤالات، به صورت (۳) می‌باشد. در این فرم باید عدد k را با R_1 و R_2 مقایسه کنیم، اگر k از R_1 کوچک‌تر یا مساوی آن باشد، یعنی $|z|>k$ ، آنگاه **بسط لوران** برای کسر $\frac{1}{z-k}$ داریم (چون که در این حالت هر منحنی بسته که در ناحیه $R_1<|z|<R_2$ رسم کنیم $z=k$ درون آن قرار می‌گیرد). و اگر k بزرگتر یا مساوی R_2 باشد، یعنی $|z|<k$، آنگاه باید برای کسر $\frac{1}{z-k}$ **بسط تیلور** بنویسیم (دقت کنید هر منحنی بسته مانند دایره خط‌چین که در ناحیه $R_1<|z|<R_2$ رسم کنید، قطعاً $z=k$ درون آن نیست). مطالب فوق برای درک تمام عیار شما از مفهوم سری لوران و چرایی ایجاد شدن توان‌های مثبت و یا منفی در هر یک از نواحی، بیان شد. اما بحث را در جمله‌ی زیر خلاصه می‌کنیم:

> همیشه $z=k$ را با $|z-z_0|$ مقایسه کنید. اگر k بزرگتر از $|z-z_0|$ بود، بسط از جنس تیلوری و اگر k کوچکتر از $|z-z_0|$ بود، بسط از جنس لورانی خواهد بود.

خُب، حالا که فهمیدیم چه وقت باید دنبال چه نوع توان‌هایی باشیم، می‌خواهیم بدانیم چگونه باید این توان‌ها را ایجاد کنیم؟!

در نوشتن بسط لوران (حول نقطه z_0) ایجاد جمله‌هایی به صورت $z-z_0$ لازم است. برای توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها به صورت چندجمله‌ای می‌باشد، باید سعی کنیم توان‌های $(z-z_0)$ را در مخرج کسر ایجاد کنیم. و در نهایت استفاده از دو بسط زیر کلید حل سؤالات می‌باشد:

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n=1+u+u^2+\cdots \quad , \quad \frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=1-u+u^2-u^3+\cdots$$

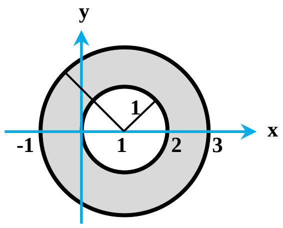
پس ما باید سعی کنیم توابعی به صورت $\frac{1}{1\pm u}$ ایجاد کنیم و چون این سری‌ها به شرط $|u|<1$ برقرار هستند، با استفاده از ناحیه‌های داده شده در صورت سؤال باید بسط را در ناحیه همگرایی بنویسیم.

در واقع در صورت سؤالات با توجه به جنس بسط، باید کسر $\frac{1}{t+k}$ را به یکی از دو فرم زیر تبدیل کنید:

$$\frac{1}{t(1-\frac{k}{t})} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{-k(1-\frac{t}{k})}$$

یعنی اگر قرار باشد به بسط لورانی برسیم، در مخرج از t و اگر قرار باشد به بسطی از جنس تیلوری برسیم، در مخرج از k فاکتور می‌گیریم. حل چند مثال موضوع را روشن می‌کند. البته یادتان باشد اگر $|z-z_0|$ داشتیم و z_0 صفر نبود، می‌توانیم از تغییر متغیر $z-z_0=t$ استفاده کنیم.

مثال ۲۳: بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$، در طوق $1<|z-1|<2$ را بنویسید.



پاسخ: ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}\Rightarrow A(z-3)+B(z-1)=z\Rightarrow (A+B)z-3A-B=z$$

$$\Rightarrow A+B=1\ ,\ -3A-B=0\Rightarrow A=\frac{-1}{2}\ ,\ B=\frac{3}{2}$$

پس $f(z)$ به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{3}{2}}{z-3}=\frac{3}{2(z-3)}-\frac{1}{2(z-1)}$$

خب حالا فرض می‌کنیم $z-1=t$ و لذا $z=t+1$، پس ناحیه به صورت $1<|t|<2$ است و f به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f=\frac{3}{2(t+1-3)}-\frac{1}{2(t+1-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t-2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{t})$$

نقاط غیرتحلیلی تابع 0 و 2 می‌شود. برای کسر $\frac{1}{t}$ چون نقطه‌ی غیرتحلیلی آن $t=0$ است و صفر **کوچکتر** از $|t|$ است، بسط لوران داریم، یعنی باید توان‌های منفی از t ایجاد کنیم، اما $\frac{1}{t}$ خودش این شرایط را داراست! پس لازم نیست عملیاتی روی آن انجام دهیم. پس سراغ $\frac{1}{t-2}$ می‌رویم. نقطه‌ی غیرتحلیلی 2 است و چون $|2|$ از $|t|$ بزرگتر است، لذا بسط برای این کسر از جنس تیلوری است.

گفتیم در این حالت باید از عدد ثابت فاکتورگیری کنیم:

$$\frac{1}{t-2}=\frac{1}{-2(1-\frac{t}{2})}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}$$

دقت کنید شرط استفاده از بسط‌های گفته شده این است که $|\frac{t}{2}|<1$، حالا ببینیم آیا این شرط برقرار است؟ با توجه به ناحیه چون $|t|<2$ لذا با تقسیم طرفین بر عدد ۲ داریم: $|\frac{t}{2}|<1$، یعنی شرط برقرار است؛ پس با خیال راحت بسط را می‌نویسیم:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n$$

پس f به صورت مقابل می‌شود:

$$f=\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n-\frac{1}{2}(\frac{1}{t})\Rightarrow f(z)=-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-1}{2})^n-\frac{1}{2(z-1)}$$

مثال ۲۴: بسط لوران (لورانت) تابع $f(z)=\dfrac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}$ به ازای $2<|z|<\infty$ کدام است؟ (مهندسی نانومواد، بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۳)

۱) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}$ ۲) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^n}$ ۳) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{z^{n+1}}$ ۴) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{z^{n+1}}$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا $f(z)$ را به مجموع کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}=\frac{2}{z}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}$$

همین‌جا خوب دقت کنید با توجه به این که $|z|>2$، پس برای هر سه کسر بسط لوران خواهیم داشت. در ناحیه‌ی $2<|z|<\infty$ خواهیم داشت $|\frac{2}{z}|<1$ و یا می‌توان گفت $|\frac{1}{z}|<1$ بنابراین غیر از کسر اول که خودش فرم سری لورانی را دارد، با فاکتورگیری از $-z$ در مخرج کسر داریم:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})-\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{2}{z}})$$

می‌دانیم که اگر $|u|<1$ باشد، داریم: $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$. بنابراین داریم:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}$$

اگر اولین جمله‌ی سری را خارج کنیم، خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{2}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}$$

مثال ۲۵: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ حول نقطه صفر در مجموعه $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$ کدام است؟

(مهندسی نانوفناوری، نانو مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$

۲) $\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$

۳) $\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$

۴) $\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا در گام اول با استفاده از تجزیه‌ی کسرها $f(z)$ را به مجموع چند کسر ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\Rightarrow f(z)=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-2}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(2-z)}$$

چون ناحیه به صورت $0<|z|<1$ است و عملاً $z_0=0$ و دیگر نیازی به تغییر متغیر $z-z_0=t$ نداریم. حالا به کسرها دقت کنید؛ نقطه‌ی غیرتحلیلی تابع $\frac{1}{2z}$ برابر با صفر است و چون صفر کوچکتر از $|z|$ لذا برای این کسر باید جنس بسط، لورانی باشد، یعنی لازم است توان منفی z ایجاد کنیم و چون خود $\frac{1}{2z}$ این شرایط را دارد با آن کاری نداریم!

برای کسر $\frac{1}{1-z}$ نقطه‌ی غیرتحلیلی $z_0=1$ است، چون عدد ۱ از $|z|$ بزرگتر است، پس جنس بسط از جنس تیلوری است و در نهایت برای کسر $\frac{1}{2-z}$ هم نقطه‌ی غیرتحلیلی $z=2$ است و چون ۲ بزرگتر از $|z|$ است و لذا جنس بسط باید از جنس تیلوری باشد.

اکنون می‌خواهیم از فرمول $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$ برای نوشتن بسط لوران استفاده کنیم. در این فرمول باید $|u|<1$ باشد. طبق صورت سؤال، در ناحیه‌ی $|z|<1$ قرار داریم. ابتدا در مورد کسر دوم به سادگی داریم $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ و نیاز به عملیات نداریم و در مورد کسر $\frac{1}{2-z}$ با فاکتورگیری از عدد ثابت داریم:

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad,\quad |\frac{z}{2}|<1$$

با جایگذاری این بسط‌ها در ضابطه‌ی $f(z)$ داریم:

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$$

خلاصه و جمع‌بندی روش نوشتن بسط لوران در توابع کسری

هر آنچه لازم بود را گفتیم، ولی برای منظم شدن ذهن شما خلاصه مطالب را مجدداً یادآوری می‌کنیم:

گام اول: ابتدا با استفاده از روش تجزیه کسرها، کسر داده شده را به کسرهای ساده تفکیک می‌کنیم.

گام دوم: اگر ناحیه به‌صورت $|z-z_0|$ باشد و $z_0\neq 0$ باشد از تغییر متغیر $z-z_0=t$ استفاده می‌کنیم تا کار محاسبه راحت‌تر باشد.

گام سوم: در کسر $\frac{1}{t-k}$ نقطه غیرتحلیلی $t=k$ است، $|k|$ را با $|t|$ مقایسه کنید اگر $|k|$ از $|t|$ **کوچکتر** باشد، بسط از جنس **لورانی** داریم و اگر $|k|$ **بزرگتر** از $|t|$ باشد، بسط از جنس تیلور است. با استفاده از دو بسط عنوان شده، بسط را برای کسرهای ساده می‌نویسیم؛ اگر دنبال بسط لوران باشیم در کسر $\frac{1}{t-k}$ از t فاکتور می‌گیریم و اگر دنبال بسط تیلور باشیم در کسر $\frac{1}{t-k}$ از $-k$ فاکتور می‌گیریم.

مثال ۲۶: در بسط $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+2)}$ در ناحیه $0<|z-1|<3$، ضریب جمله $(z-1)^2$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\frac{-1}{27}$

۲) $\frac{2}{27}$

۳) $\frac{2}{81}$

۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه «۳» سؤال را در سه گام گفته شده حل می‌کنیم:

گام اول: کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{z}{(z-1)(z+2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z+2)}\Rightarrow z=A(z+2)+B(z-1)\Rightarrow z=(A+B)z+2A-B$$

بنابراین دستگاه مقابل را داریم:

$$\begin{cases}A+B=1\\2A-B=0\ \to B=2A\end{cases}\Rightarrow A+2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{3}\ ,\ B=\frac{2}{3}$$

بنابراین $f(z)$ به صورت مقابل می‌شود:

$$f(z)=\frac{\frac{1}{3}}{z-1}+\frac{\frac{2}{3}}{z+2}$$

گام دوم: از تغییر متغیر $z-1=t$ استفاده می‌کنیم، لذا $f(z)$ برحسب t به صورت مقابل می‌شود:

$$f=\frac{1}{3}(\frac{1}{t})+\frac{2}{3}(\frac{1}{t+3})$$

گام سوم: باید بسط را در ناحیه $3 > |t| > 0$ بنویسیم. برای کسر $\frac{1}{t}$ نقطه‌ی غیرتحلیلی صفر است و چون $|t| > 0$ پس برای این کسر بسط لوران داریم، یعنی باید توان‌های منفی t ایجاد کنیم. خود $\frac{1}{t}$ این شرایط را دارد پس نیازی نداریم بر روی آن عملیات انجام دهیم.

پس سراغ $\frac{1}{t+3}$ می‌رویم برای این کسر -3 نقطه‌ی غیرتحلیلی است و چون $|-3| = 3$ از $|t|$ بزرگتر است، لذا در این قسمت بسط از جنس تیلوری است و این یعنی باید از عدد ثابت ۳ در مخرج کسر فاکتور بگیریم:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{3(1+\frac{t}{3})} = \frac{1}{3}(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}-+\cdots)$$

پس بسط به صورت زیر است:

$$f = \frac{1}{3}(\frac{1}{t}) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{9}-+\cdots) = \frac{1}{3t}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}t+\frac{2}{81}t^2-+\cdots \Rightarrow f(z) = \frac{1}{3(z-1)}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}(z-1)+\frac{2}{81}(z-1)^2-+\cdots$$

پس ضریب $(z-1)^2$ برابر با $\frac{2}{81}$ است.

مثال ۲۷: سری لوران تابع $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ در ناحیه $1 < |z| < 2$ کدام است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» ابتدا در گام اول با استفاده از روش تجزیه کسرها $f(z)$ را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

در کسر $\frac{1}{z-1}$ نقطه‌ی غیرتحلیلی $z_0 = 1$ است (یعنی همان k خودمان ۱ است!) چون $|z| > |1|$، یعنی جنس بسط برای بسط $\frac{1}{1-z}$ لـورانی اسـت. پـس دنبال توان منفی z خواهیم بود و باید از z فاکتور بگیریم. با استدلال مشابه در کسر $\frac{1}{z-2}$ باید از ۲ فاکتور بگیریم و $\frac{z}{2}$ ایجاد کنیم.

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{2(\frac{z}{2}-1)} = \frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})$$

دقت کنید با توجه به شرط صورت سؤال، چون $|z| > 1$ می‌باشد پس $\frac{1}{|z|} < 1$، و می‌توانیم بسط عبارت داخل پرانتز را بنویسیم:

$$\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

به همین ترتیب چون $|z| < 2$، پس $|\frac{z}{2}| < 1$ به راحتی مجوز استفاده از بسط معروف را برای خود صادر می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2\times 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

پس تابع $f(z)$ در طوق $1 < |z| < 2$ به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

که البته اگر بخواهیم نمایش به صورت سری لوران با اندیس یک در بیاید با قرار دادن $n-1$ به جای n داریم:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

مثال ۲۸: سری لوران تابع $1 < |z+1| < 2$ ، $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۹)

۱) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+2}}$

۳) $\frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}$

۴) $\frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به اینکه $1 < |z+1| < 2$، ابتدا کسر $\frac{1}{z^2-1}$ را به صورت مقابل تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1})$$

با فرض اینکه $t = z+1$ نتیجه می‌شود که $1 < |t| < 2$ و $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t})$ حالا خوب دقت کنید؛ در طوق $1 < |t| < 2$ می‌خواهیم سری لوران حول $t = 0$ را بنویسیم، واضح است $\frac{1}{t}$ به همین شکل فرم مدنظر ما را دارد؛ (چون $0 < |t| = 1$، نقطه غیرتحلیلی برای تابع است). حالا باید سراغ کسر $\frac{1}{t-2}$ برویم.

طبق آنچه تاکنون آموختیم چون ۲ بزرگ‌تر از $|t|$ است، بسط آن به فرم یک سری تیلوری خواهد بود، پس باید جمله‌ی $\frac{t}{2}$ را در مخرج کسر پدید آورد. با فاکتوری از ۲− در مخرج کسر داریم، $-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{t}{2}})$ تا بتوانیم بسط آن را بنویسیم:

$$\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n$$

در نتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n-\frac{1}{t})=-\frac{1}{2(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

مثال ۲۹: تابع داده شده دارای کدام سری لوران می‌باشد؟ $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)}$ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) $|z-2|<3\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}-\frac{1}{2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}\right)$

۲) $1<|z-2|<3\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}-\frac{1}{2}(-2)^k(z-2)^{k+1}\right)$

۳) $|z-2|<1\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(-1)^k(z-2)^k+\frac{1}{2}(-2)^k(z-2)^k\right)$

۴) $|z-2|>3\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}\right)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا $f(z)$ را به دو کسر ساده تفکیک می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{z-1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{z+1})$$

در گام دوم باید از تغییر متغیر $z-2=t$ استفاده کنیم، در این صورت $z=t+2$ و لذا f به شکل مقابل نمایش داده می‌شود:

$$f=\frac{1}{2}(\frac{1}{t+1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{t+3})$$

برای داشتن سری لوران باید از t در مخرج کسر کمک بگیریم:

$$f=\frac{1}{2}[(\frac{1}{t(1+\frac{1}{t})})+(\frac{1}{t(1+\frac{3}{t})})]$$

باید $|\frac{1}{t}|<1$ و $|\frac{3}{t}|<1$ باشد که اشتراک این دو به صورت $|\frac{3}{t}|<1$ است و یا $|t|>3$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{t(1+\frac{1}{t})}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{t})^k\ ,\ \frac{1}{t(1+\frac{3}{t})}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{3}{t})^k\ \Rightarrow\ \frac{1}{t(1+\frac{1}{t})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{t^{k+1}}\ ,\ \frac{1}{t(1+\frac{3}{t})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{t^{k+1}}$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}]\ ;\ |z-2|>3$$

مثال ۳۰: سری لورانت تابع $f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}$ **در ناحیه** $1<|z|<2$**، کدام است؟** (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۳)

۱) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

۲) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}$

۳) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$

۴) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با تجزیه کسری $f(z)$ داریم:

$$f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}=\frac{3}{(2-z)(z+1)}=\frac{1}{2-z}+\frac{1}{z+1}$$

انتظار داریم برای $\frac{1}{2-z}$ سری تیلور داشته باشیم، (چون ۲ از $|z|$ بزرگ‌تر است) و برای کسر $\frac{1}{z+1}$ بسط لورانی خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})+\frac{1}{z}(\frac{1}{1+\frac{1}{z}})$$

در ناحیه‌ی $1<|z|<2$ داریم: $|\frac{1}{z}|<1$ و $\frac{1}{2}<|\frac{z}{2}|<1$ و $\frac{1}{2}<$، بنابراین سری لورانت هر کدام از کسرها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

مثال ۳۱: اگر سری لوران تابع f به صورت $|z|>1$، $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ باشد، آنگاه مقدار a_2 و b_2 کدامند؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $b_2=0$ و $a_2=-1$ ۲) $b_2=0$ و $a_2=0$ ۳) $b_2=1$ و $a_2=1$ ۴) $b_2=1$ و $a_2=0$

پاسخ: گزینه «۴» با فرض اینکه $z^2=t$ و چون $|z|>1$، لذا $|z|^2>1$ و یا $|t|>1$، از طرفی $f(t)=\dfrac{1}{1+t}$ نقطه‌ی غیرتحلیلی -1 است و چون $|-1|=1$ از $|t|$ کوچکتر است، پس سری به صورت لوران است، بنابراین با فاکتورگیری از t در مخرج داریم:

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{t(1+\frac{1}{t})}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{1}{t}\cdot[1-\frac{1}{t}+(\frac{1}{t})^2+\cdots]=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\cdots\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-+\cdots$$

لذا b_1 یعنی ضریب $\dfrac{1}{z^2}$ برابر با یک است و a_2 هم برابر با صفر است.

نکته ۸: برای به دست آوردن بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}$، حول نقطه‌ی $z_0\,(z_0\neq a)$ ابتدا بسط لوران $\dfrac{1}{z-a}$ را با توجه به سری هندسی به دست می‌آوریم و سپس با مشتق‌گیری از طرفین بسط لوران $\dfrac{1}{z-a}$، به بسط لوران $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ می‌رسیم.

مثال ۳۲: اگر بدانیم که برای $|z|<1$ داریم: $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$، سری لوران $\dfrac{1}{z^2}$ برای $|z+1|<1$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots$ ۲) $1+2(z-1)+3(z-1)^2+4(z-1)^3+\cdots$

۳) $1+(z+1)+(z+1)^2+(z+1)^3+\cdots$ ۴) $1+2(z+1)+3(z+1)^2+4(z+1)^3+\cdots$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا فرض می‌کنیم $z+1=t$ لذا $z=t-1$، پس داریم: $f=\dfrac{1}{(t-1)^2}\,,\ |t|<1$

از طرفی داریم:

$$f=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots\quad |t|<1 \text{ برای}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{1}{(1-t)^2}=1+2t+3t^2+4t^3\ \Rightarrow f(z)=\frac{1}{[1-(z+1)]^2}=1+2(z+1)+3(z+1)^2+4(z+1)^3+\cdots$$

نکته ۹: هرگاه در ضابطه‌ی $f(z)$، توابع نمایی، مثلثاتی یا معکوس مثلثاتی و نظایر آن وجود داشته باشد، برای نوشتن بسط لوران $f(z)$، مستقیماً از بسط‌های مک‌لورن این توابع استفاده خواهیم کرد. دقت کنید که این بسط‌ها برای هر عدد مختلط z معتبر هستند. به همین دلیل در چنین مسائلی دیگر نواحی مختلفه داده نمی‌شود و یک سری لوران منحصر به فرد برای $f(z)$ خواهیم داشت.

مثال ۳۳: بسط سری Laurent برای تابع $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ حول نقطهٔ $z=0$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^4}{7!}-\cdots$ ۲) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{z}{18}+\dfrac{z^2}{54}-\dfrac{z^3}{162}+\cdots$ ۳) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{4}z^2-\dfrac{1}{5}z^3+\cdots$ ۴) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}z+\dfrac{13}{27}z^2-\dfrac{40}{81}z^3+\cdots$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

$$f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\cdots)=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$$

مثال ۳۴: بسط لورانت تابع $f(z)=ze^{-\frac{1}{z-2}}$ حول $z=2$، کدام است؟

(مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ـ بهداشت، ایمنی و محیط زیست ـ سراسری ۹۴)

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}$ ۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^n}$ ۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-2)^n}$

پاسخ: گزینه «۲» برای نوشتن سری لوران حول $z=2$ می‌توانیم از تغییر متغیر $t=z-2$ کمک بگیریم:

$$f(z)=ze^{-\frac{1}{z-2}}=(t+2)e^{-\frac{1}{t}}$$

حالا بسط $e^{-\frac{1}{t}}$ را می‌نویسیم:

$$(t+2)e^{-\frac{1}{t}}=(t+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{t})^n}{n!}=(t+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!t^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!t^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!t^n}$$

اکنون $t=z-2$ را جایگذاری می‌کنیم و بسط لوران f حول $z=2$ به دست می‌آید:

$$\mathbf{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n!(z-2)^n}}$$

مثال ۳۵: سری لوران تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z-\pi}$ حول نقطه $z=\pi$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۴ و مهندسی برق ـ سراسری ۸۸)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$　　۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$　　۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$　　۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

پاسخ: گزینه «۱» با تغییر متغیر $u=z-\pi$ داریم:

$$f(z)=f(u+\pi)=\frac{\sin(\pi+u)}{u}=-\frac{\sin u}{u}=-\frac{1}{u}[u-\frac{u^3}{3!}+\cdots]=-1+\frac{1}{3!}u^2-\frac{1}{5!}u^4+\cdots$$

$$=-1+\frac{(z-\pi)^2}{3!}-\frac{1}{5!}(z-\pi)^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

البته این بسط شامل توان‌های منفی نیست و به نوعی از جنس سری تیلور است. (مقدار اصلی سری لوران را ندارد.)

روش تستی: اگه توی $f(z)$، مقدار $z=\frac{\pi}{2}$ رو قرار بدیم، مساوی $-\frac{2}{\pi}$ میشه. یعنی مقدار سری هم باید تقریباً $-\frac{2}{\pi}$ بشه $(-\frac{2}{\pi}\simeq-\frac{2}{3})$. تو گزینه‌های (۳) و (۴)، اگه $z=\frac{\pi}{2}$ قرار بدیم، عدد مثبتی به دست میاد چون اولین جمله‌ی سری $+1$ هستش. پس با (۳) و (۴) خداحافظی می‌کنیم. تو گزینه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$z=\frac{\pi}{2}\ \text{در (۱) مقدار گزینه}=-1+\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{2}-\pi)^2-+\cdots=-1+\frac{\pi^2}{24}\simeq-1+\frac{10}{24}<0$$

$$z=\frac{\pi}{2}\ \text{در (۲) مقدار گزینه}=-1+\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{2}-\pi)^2-+\cdots=-1+\frac{\pi^2}{8}\simeq-1+\frac{10}{8}>0$$

پس گزینه (۱) جوابه

مثال ۳۶: در بسط لوران مقدار اصلی $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ حول $z=0$، ضریب z^2 کدام است؟

(مهندسی مکانیک سراسری ۹۲، ریاضی ـ سراسری ۸۴ و مهندسی نانوفناوری ـ سراسری ۹۵)

۱) $-\frac{11}{24}e$　　۲) $\frac{11}{24}e$　　۳) $-\frac{13}{24}e$　　۴) $\frac{13}{24}e$

پاسخ: گزینه «۲» برای نوشتن بسط لوران این عبارت حول $z=0$ ابتدا آن را به شکل نمایی می‌نویسیم:

$$f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{z}\log(1+z)}$$

اکنون از بسط لوران تابع لگاریتم استفاده می‌کنیم. طبق این بسط داریم:

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots\Rightarrow f(z)=e^{\frac{1}{z}(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots)}=e^{1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\cdots}\Rightarrow f(z)=e^1\times e^{-\frac{z}{2}}\times e^{\frac{z^2}{3}}\times\cdots$$

حالا از بسط لوران تابع نمایی استفاده می‌کنیم. طبق فرمول داریم:

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots$$

در نتیجه برای $f(z)$ خواهیم داشت:

$$f(z)=e(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2 2!}-\cdots)(1+\frac{z^2}{3}+\cdots)\times\cdots$$

در حاصل‌ضرب این پرانتزها فقط جملاتی را که در آن‌ها z^2 به‌وجود می‌آید، می‌نویسیم:

$$\text{در حاصل‌ضرب } z^2 \text{ جملات شامل}=e[1\times\frac{z^2}{3}+\frac{z^2}{2^2 2!}\times1]=e[\frac{z^2}{3}+\frac{z^2}{8}]=\frac{11}{24}ez^2$$

پس ضریب z^2 در بسط لوران $f(z)$ برابر با $\frac{11}{24}e$ است.

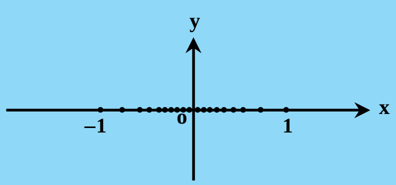
درسنامه۲: انواع نقاط تکین و محاسبه مانده

تعریف نقطه تکین

نقطه $z = z_0$ را نقطه **تکین** تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد، ولی هر **همسایگی** نقطه z_0، **شامل** نقاطی باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد. نقطه $z = z_0$ را یک نقطه **تکین تنها** برای تابع $f(z)$ می‌نامیم، اگر $f(z)$ در z_0 غیر تحلیلی ولی **یک همسایگی** از z_0 موجود باشد به طوری که $f(z)$ در **تمام نقاط** این همسایگی به جز خود z_0 تحلیلی باشد. به عنوان مثالی ساده نقطه $z_0 = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ یک نقطه تکین تنها می‌باشد، چون این تابع در نقطه $z_0 = 0$ تحلیلی نیست ولی در **تمام نقاط** به جز صفر (یعنی در هر همسایگی محذوف z_0) تحلیلی می‌باشد.

نقطه $z_0 = 0$ برای تابع $f(z) = \log z$ یک نقطه تکین است، چون تابع در $z = 0$ تحلیلی نیست. اما هر همسایگی نقطه z_0 **شامل** نقاطی است که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی است (مثلاً zهای روی محور حقیقی مثبت) اما این نقطه، **تکین تنها نیست**. چون در $z = 0$ تابع غیر تحلیلی می‌باشد، پس می‌توانیم بگوییم نقطه تکین است؛ ولی هر همسایگی حول مبدأ مختصات که در نظر گرفته شود، بالاخره شامل نقاطی روی محور حقیقی منفی است و می‌دانیم به ازای مقادیر منفی z، تابع $\log z$ تحلیلی **نیست** و این موضوع با تعریف نقطه **تکین تنها**، مطابقت ندارد. (چون ما باید بتوانیم حداقل یک همسایگی برای $z_0 = 0$ پیدا کنیم، که $f(z)$ در آنجا در تمام نقاط غیر از z_0 تحلیلی باشد.)

به عنوان مثال آخر و مثالی مهم تابع $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را در نظر بگیرید. برای این تابع نقاط تکین $z = 0$ و $z = \frac{1}{n}$ ($n \neq 0$ عددی صحیح است) هستند که به ازای $z = 0$، $\sin(\frac{\pi}{z})$ تعریف نشده است و به ازای $z = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots$، مخرج $f(z)$ برابر صفر می‌شود. اما این نقاط، **تکین تنها** هستند، چون حول تمام آن‌ها می‌توان یک همسایگی پیدا کرد که تابع در تمام آن نقاط تحلیلی باشد.



اما نقطه $z = 0$ تکین غیرتنها است چون نمی‌توان در همسایگی آن، یک همسایگی پیدا کرد که تابع در آن‌جا شامل نقاط تکین دیگری نباشد. در واقع در این تابع کلاً تکین‌ها به سمت نقطه $z = 0$ انباشته می‌شوند و به همین دلیل به این نوع تکین‌های غیر تنها، تکین‌های انباشته نیز می‌گویند.

در واقع نقطه‌ی z_0، تکین غیر تنها از نوع انباشته به حساب می‌آید، هرگاه حد دنباله‌ای از نقاط تکین برابر با z_0 شود. در مثال بالا دنباله‌ی نقاط تکین به صورت $z = \frac{1}{n}$ بوده و چون $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، لذا $z_0 = 0$ نقطه‌ی تکین انباشته است (هر چه n بیشتر می‌شود، جملات دنباله به صفر نزدیک‌تر می‌شوند) البته هر یک از جملات دنباله همان‌طور که در بالا گفتیم نقطه‌ی تکین تنها هستند.

تذکر۴: معمولاً نقاط تکین غیر تنها (انباشته) در توابعی به‌صورت فوق و هم‌چنین در نقاط شاخه‌ای توابع رادیکالی و لگاریتمی مشاهده می‌شوند.

نکته۱۰: در بعضی توابع مانند $\bar{z}$، $\operatorname{Re} z$ و $\operatorname{Im} z$، که هیچ جا تحلیلی نیستند، نقاط تکین تعریف نمی‌شوند.

تذکر۵: اگر z_0 یک نقطه تکین تنها برای $f(z)$ باشد، در این صورت $f(z)$ حول نقطه z_0 دارای بسط لوران خواهد بود.

نکته۱۱: تمام نقاط تکین تنها برای تابع $f(z)$، برای توابع $\frac{1}{\sin(f(z))}$، $\frac{1}{\cos(f(z))}$، $\frac{1}{\sinh(f(z))}$ و $\frac{1}{\cosh(f(z))}$ تکین غیر تنها (انباشته) به حساب می‌آیند.

مثال۴۲: نقاط تکین $f(z) = \cot g(\pi z)$ عبارتند از: (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۷)

۱) 0
۲) $0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{2}{\pi}, \cdots$
۳) $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
۴) $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \cdots$

پاسخ: گزینه «۳»

$$f(z) = \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \Rightarrow \sin(\pi z) = 0 \Rightarrow \pi z = k\pi \Rightarrow z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

مثال ۴۶: تعداد نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z\,\mathrm{Ln}(z^۲-z)}$، روی $|z+۲|\le ۲$ کدام است؟ (شاخه اصلی لگاریتم مدنظر است.)

(مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه «۳» نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z\,\mathrm{Ln}(z^۲-z)}$ عبارتند از ریشه‌های مخرج و نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}(z^۲-z)$. یادآوری می‌کنیم که شاخه‌ی اصلی $\mathrm{Ln}(w)$ در نقاطی غیر تحلیلی است که $\mathrm{Re}\,w\le ۰$ و $\mathrm{Im}\,w=۰$ باشد.

$$w=z^۲-z=(x+iy)^۲-(x+iy)=(x^۲-y^۲-x)+i(۲xy-y)$$

با بررسی بخش‌های حقیقی و موهومی w؛ نقاط غیر تحلیلی را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,w=x^۲-y^۲-x\le ۰\\ \mathrm{Im}\,w=۲xy-y=۰\end{cases}$$

از معادله‌ی دوم داریم $y(۲x-۱)=۰$ پس $y=۰$ یا $x=\frac{۱}{۲}$ است.

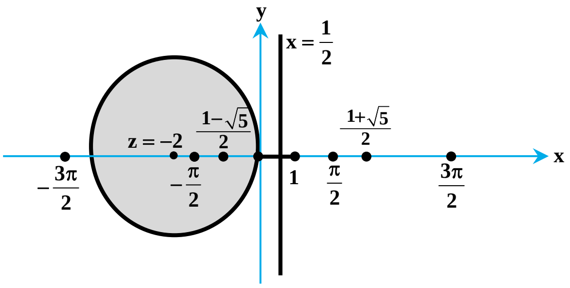
اگر $y=۰$ باشد در نامعادله‌ی بالا داریم: $x^۲-x\le ۰$ پس $x(x-۱)\le ۰$ بنابراین $۰\le x\le ۱$ است. (دقت کنید که برای $x<۰$ و $x>۱$ مقدار $x(x-۱)$ مثبت می‌شود). بنابراین نقاطی که در آن‌ها $y=۰$ و $۰\le x\le ۱$ باشد، از نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}w$ هستند.

حالت دیگر آن است که $x=\frac{۱}{۲}$ باشد. در این صورت در نامعادله‌ی اول داریم $\frac{۱}{۴}-y^۲-\frac{۱}{۲}\le ۰$ بنابراین $y^۲+\frac{۱}{۴}\ge ۰$ که همیشه برقرار است. به عبارتی $y\in\mathbb{R}$ هر عدد دلخواهی می‌تواند باشد در نتیجه همه‌ی نقاط روی خط $x=\frac{۱}{۲}$ از نقاط غیرتحلیلی $\mathrm{Ln}w$ هستند.

اکنون ریشه‌های مخرجِ $f(z)$ را نیز معین می‌کنیم.

$$\cos z=۰\Rightarrow z=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\ ;\ k=۰\,,\pm۱,\pm۲,\cdots$$

$$\mathrm{Ln}(z^۲-z)=۰\Rightarrow z^۲-z=۱\Rightarrow z^۲-z-۱=۰\xrightarrow{\Delta=۵}z=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$



در بین همه‌ی نقاط غیرتحلیلی بدست آمده؛ فقط سه نقطه‌ی $z=۰$؛ $z=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ و $z=-\frac{\pi}{۲}$ در ناحیه‌ی $|z+۲|\le ۲$ قرار دارند. دقت کنید که این ناحیه، یک دیسک به مرکز ۲- و شعاع ۲ است.

تکین برداشتنی

نقطه $z_۰$ را یک نقطه تکین برداشتنی می‌گویند هرگاه $f(z)$ در $z=z_۰$ تحلیلی نباشد، ولی بتوان آن را طوری تعریف کرد که در $z_۰$ تحلیلی شود. برای مثال نقطه $z_۰=۰$ برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z}(z\ne ۰)$ یک نقطه تکین برداشتنی است چون اگر $g(z)$ را به صورت مقابل تعریف کنیم، داریم:

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}&,\ z\ne ۰\\ ۱&,\ z=۰\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که $g(z)$ در $z=۰$ تحلیلی است. تعریف دیگری از تکین برداشتنی این است که به نقطه‌ای تکین برداشتنی می‌گوییم که بسط لوران آن شامل توان منفی $z-z_۰$ نباشد. (یعنی قسمت اصلی بسط لوران در آن وجود نداشته باشد.)

نکته ۱۲: اگر ریشه مخرج کسر، ریشه صورت کسر هم باشد و حد عبارت را در این نقطه تکین (ریشه مخرج) حساب کردیم و برابر با عددی مخالف بینهایت (∞) شد، آن‌گاه آن ریشه، تکین برداشتنی تابع است.

تکین اساسی

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **نامتناهی** از توان‌های منفی $z-z_۰$ باشد، آنگاه $z_۰$ را نقطه تکین اساسی می‌نامیم. برای مثال توابع $\sin\frac{۱}{z}$ و $e^{\frac{۱}{z}}$ دارای نقطه تکین اساسی در $z=۰$ هستند.

$$\sin\frac{۱}{z}=\frac{۱}{z}-\frac{۱}{۳!}\left(\frac{۱}{z^۳}\right)+\frac{۱}{۵!}\left(\frac{۱}{z^۵}\right)-\cdots \quad\text{و}\quad e^{\frac{۱}{z}}=۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}\left(\frac{۱}{z^۲}\right)+\cdots$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر دو تابع شامل جملاتی با توان‌های منفی z هستند و تعداد این جملات نامتناهی است.

مثال ۴۷: تابع $f(z)=(e^z-1)^{-1}-z^{-1}+2^{-1}$ از متغیر مختلط z مفروض است. می‌توان گفت که: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۵)

۱) $z=0$ یک نقطه‌ی استثنایی برداشتنی است و f یک تابع فرد است.
۲) $z=0$ یک نقطه‌ی استثنایی اساسی است و f یک تابعِ زوج است.
۳) $z=0$ یک قطب است.
۴) $z=0$ یک نقطه‌ی استثنایی برداشتنی است و f نه یک تابع زوج است و نه یک تابعِ فرد.

پاسخ: گزینه «۴» کافی است بسط لوران تابع را بنویسیم:
$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+2^{-1}$$

$$\frac{1}{e^z-1}=\xrightarrow{e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots}\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z+\frac{z^2}{2!}+\cdots}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots}\right)\xrightarrow{\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\cdots}$$

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}\left[1-\left(\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)+\left(\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2+\cdots\right]=\frac{1}{z}\left[1-\frac{z}{2!}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)z^2+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}+\frac{z}{12}+\cdots-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=+\frac{z}{12}+$$ (جملاتی دارای توان‌هایی طبیعی که این توان‌های z از ۱ بزرگترند)

چون در بسط لوران $f(z)$ توان‌های منفی z حضور ندارند، لذا نقطه‌ی $z=0$ یک نقطه‌ی تکین برداشتنی می‌باشد.

قطب

اگر بسط لوران شامل جمله‌های **متناهی** از توان‌های منفی $z-z_0$ باشد، آنگاه z_0 را یک قطب برای $f(z)$ می‌نامیم.

تعیین مرتبه قطب

با محاسبه $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ در صورتی که $m=1,2,3,\ldots$ باشد، مقداری از m که به ازای آن برای اولین بار حد فوق برابر مقداری متناهی (و البته مخالف صفر) شود را مرتبه قطب می‌نامیم. به عبارت دیگر در بسط لوران تابع، بزرگترین توان m در عبارت $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ را مرتبه قطب می‌نامیم. اگر $m=1$ باشد قطب را مرتبه اول و یا ساده می‌نامیم. برای مثال تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-2)^5}+\frac{3}{(z-2)^2}$ یک قطب ساده در $z=0$ و یک قطب مرتبه ۵ در $z=2$ دارد.

نکته ۱۳: هرگاه z_0 یک نقطه‌ی تکین برداشتنی برای تابع باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ برابر صفر می‌شود.

نکته ۱۴: قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$، نقطه تکین اساسی برای توابع $\sin(\frac{1}{f(z)})$ و $\cos(\frac{1}{f(z)})$، $e^{\frac{1}{f(z)}}$، $\sinh(\frac{1}{f(z)})$، $\cosh(\frac{1}{f(z)})$ به حساب می‌آیند.

مثال ۴۸: هرگاه $f(z)=\frac{\cos z-1}{z^4}$ ، در اینصورت $z_0=0$ قطب f با کدام مرتبه است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) فاقد قطب

پاسخ: گزینه «۲»
$$C=\lim_{z\to 0}z^m\left(\frac{\cos z-1}{z^4}\right)=\lim_{z\to 0}z^m\frac{\frac{-z^2}{2}}{z^4}=\lim_{z\to 0}\frac{-z^m}{2z^2}\xrightarrow{m=2}C=-\frac{1}{2}$$

لازم به یادآوری است مقدار m که به ازای آن برای اولین بار حد متناهی شود، مرتبه قطب است.

مثال ۴۹: قطب‌های تابع $f(z)=\frac{z}{\sinh z\cosh z}$ عبارتند از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{k\pi}{2}j$ ،k عدد صحیح و غیر صفر ۲) $\frac{k\pi}{2}j$ ،k عدد صحیح ۳) $k\pi j$ ،k عدد صحیح و غیر صفر ۴) $k\pi j$ ،k عدد صحیح

پاسخ: گزینه «۱»
$$\sinh z\cosh z=0\Rightarrow 2\sinh z\cosh z=0\Rightarrow\sinh 2z=0\Rightarrow 2z=k\pi j\Rightarrow z=\frac{k\pi j}{2}$$

توجه شود که به ازای $k=0$ مقدار $z=0$ و در نتیجه مخرج $f(z)$ نیز برابر صفر خواهد بود اما چون صورت کسر نیز در این حالت صفر می‌شود باید حد را محاسبه نمود:
$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sinh z\cosh z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sinh 2z}=1$$

پس $z=0$ نقطه تکین برداشتنی تابع می‌باشد یعنی به ازای $k=0$ قطب نداریم.

مثال ۵۰: تابع $f(z)=e^{tg\frac{1}{z}}$ در نقطه $z_0=0$ دارای چه نوع تکین است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) قطب ۲) تنهای برداشتنی ۳) تنهای اساسی ۴) غیرتنها

پاسخ: گزینه «۴» برای پاسخ به این سؤال ابتدا همه‌ی نقاط تکین این تابع را پیدا می‌کنیم. با توجه به آن که $tg(\frac{1}{z})=\dfrac{\sin(\frac{1}{z})}{\cos(\frac{1}{z})}$ است، علاوه بر $z=0$، جواب‌های معادله‌ی $\cos\frac{1}{z}=0$ نیز نقاط تکین $f(z)$ محسوب می‌شوند.

$$\cos(\frac{1}{z})=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=(2k-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\frac{2}{(2k-1)\pi}$$

پس همه‌ی نقاط دنباله‌ی $z_k=\dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ نقطه‌ی تکین $f(z)$ هستند و به وضوح داریم $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2}{(2k-1)\pi}=0$ پس $z=0$ یک نقطه‌ی تکین انباشته (غیرتنها) است.

مثال ۵۱: تابع $f(z)=\csc(\frac{1}{z+1})$ از متغیر مختلط z را در نظر بگیرید. در مورد نقاط تکین و قطب‌های تابع کدام عبارت درست است؟

(مهندسی نانوفناوری، نانومواد ـ سراسری ۹۵)

۱) بی‌نهایت قطب مکرر دارد. ۲) $z=-1$ تنها نقطه تکین تابع است.

۳) قطب ندارد و فقط یک نقطه تکین اساسی دارد. ۴) بی‌نهایت قطب ساده و یک نقطه تکین غیر تنها (تکین انباشته) دارد.

پاسخ: گزینه «۴» طبق تعریف داریم:

$$f(z)=\csc(\frac{1}{z+1})=\frac{1}{\sin(\frac{1}{z+1})}$$

ریشه‌های مخرج این کسر را به دست می‌آوریم:

$$\sin(\frac{1}{z+1})=0 \Rightarrow \frac{1}{z+1}=k\pi \Rightarrow z+1=\frac{1}{k\pi} \Rightarrow z=\frac{1}{k\pi}-1$$

به ازای هر عدد صحیح $k\in\mathbb{Z}$ نقاط $z_k=\dfrac{1}{k\pi}-1$ قطب‌های تابع $f(z)$ هستند. از طرفی $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=-1$ و نقطه‌ی $z=-1$ هم یکی از نقاط تکین $f(z)$ است. این نقطه‌ی تکین، غیرتنها است؛ زیرا حد دنباله‌ای از نقاط تکین است. هر کدام از نقاط z_k یک قطب ساده و نقطه‌ی $z=-1$ یک نقطه‌ی تکین غیرتنها است.

نکته ۱۵: هرگاه z_0 یک نقطه‌ی تکین برداشتنی برای تابع باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ برابر صفر می‌شود.

نکته ۱۶: قطب‌های تابع $\frac{1}{f(z)}$، نقطه تکین اساسی برای توابع $\sin(\frac{1}{f(z)})$ و $\cos(\frac{1}{f(z)})$، $e^{\frac{1}{f(z)}}$، $\sinh(\frac{1}{f(z)})$، $\cosh(\frac{1}{f(z)})$ به حساب می‌آیند.

دسته‌بندی نقاط تکین

برای جمع‌بندی بحث نقاط تکین در این قسمت، دسته‌بندی نقاط تکین را ارائه کرده‌ایم. اگر نقطه‌ای مانند z_0 نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ باشد، آنگاه می‌توان دسته‌بندی زیر را برای آن در نظر گرفت:

z_0 نقطه تکین $f(z)$ است. $\Rightarrow$
- z_0 نقطه‌ی تکین **غیر** تنهاست
  - یا تکین انباشته است.
  - یا تکین انشعابی است (مثل نقطه‌ی شاخه‌ای و نقاط روی شاخه)
- z_0 نقطه‌ی تکین تنهاست
  - یا z_0 قطب $f(z)$ است.
  - یا z_0 تکین اساسی است.
  - یا z_0 تکین رفع شدنی است.

صفر تابع

اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و z_0 متعلق به این حوزه باشد، آنگاه z_0 را صفر تابع می‌نامیم هرگاه $f(z_0)=0$ باشد.

مرتبه صفر: اگر z_0 یک صفر تابع $f(z)$ باشد، آنگاه کوچکترین عدد طبیعی n که به ازای آن $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ باشد، را مرتبه صفر می‌نامیم.

برای مثال تابع $f(z)=z(e^z-1)$ در $z=0$ دارای صفر مرتبه دوم است، چون $f(0)=f'(0)=0$ و $f''(0)=2\neq 0$، یعنی مشتق دوم آن مخالف صفر است.

یکی از روش‌های تعیین مرتبه صفر این است که حاصل $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ را به دست می‌آوریم و اولین مقدار n، که به ازای آن مقدار این حد متناهی و مخالف صفر شد را به عنوان مرتبه صفر در نظر بگیریم.

نکته ۱۷: نقطه z_0 قطب مرتبه nام $(n\geq 1)$ تابع $f(z)$ می‌باشد، اگر صفر مرتبه nام تابع $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ باشد. از این تعریف در مواقعی که از تعریف‌های قبلی نمی‌توانیم مرتبه قطب را تعیین کنیم، استفاده می‌کنیم.

نکته ۱۸: تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ مفروض است. (با فرض اینکه $P(z)$ و $Q(z)$ در همه جا تحلیلی باشند.) اگر z_0 صفر مرتبه‌ی n تابع $P(z)$ و صفر مرتبه‌ی m تابع $Q(z)$ باشد آنگاه:

الف) با شرط $n\geq m$، z_0 یک صفر مرتبه‌ی $(n-m)$ام تابع $f(z)$ و به عبارت دیگر z_0 تکین رفع شدنی تابع f است. (مثلاً $z=0$ برای تابع $\frac{\sin^4 z}{z^3}$ تکین برداشتنی است.)

ب) با شرط $m>n$، z_0 یک قطب مرتبه‌ی $(m-n)$ام تابع $f(z)$ است.

نکته ۱۹: هرگاه توابع $f(z)$ و $g(z)$ دارای ریشه‌ی مشترک z_0 باشند، به طوری که z_0 ریشه‌ی مرتبه‌ی n برای f و ریشه‌ی مرتبه‌ی m برای g باشد. $(m<n)$ آن‌گاه با شرط A و B مخالف صفر داریم:

۱) $Af(z)+Bg(z)$ دارای صفری از مرتبه‌ی m در z_0 است.

۲) $f(z)g(z)$ دارای صفری از مرتبه‌ی $m+n$ در z_0 است.

نکته ۲۰: توجه داشته باشید که نقطه‌ای مانند $z=z_0$ ممکن است برای تابع $f(z)$ هم نقطه‌ی تکین اساسی باشد و هم قطب (یا صفر مرتبه n) (البته به شرطی که $f(z_0)=0$ تعریف شود) در چنین حالتی در کل باید نقطه‌ی $z=z_0$ را نقطه‌ی تکین اساسی برای تابع $f(z)$ در نظر بگیریم.

به عنوان مثال: تابع $f(z)=\begin{cases} z^3 e^{\frac{1}{z}} & , \quad z\neq 0 \\ 0 & , \quad z=0 \end{cases}$ که در آن نقطه $z=0$ هم تکین اساسی است و هم صفر مرتبه‌ی ۳ است که در کل باید تکین اساسی در نظر گرفته شود.

مثال ۵۲: نقطه $z=0$ برای تابع $f(z)=\frac{1}{2+z^2-2\cosh z}$، قطب مرتبه چندم می‌باشد؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

پاسخ: گزینه «۴» با تعریف $g(z)=\frac{1}{f(z)}=2+z^2-2\cosh z$، سعی می‌کنیم مرتبه صفر تابع $g(z)$ را حساب کنیم. برای این منظور باید از تابع $g(z)$ تا مرتبه‌ای مشتق بگیریم تا مقدار مشتق آن در نقطه $z=0$ مخالف صفر شود:

$$g(z)=2+z^2-2\cosh z \Rightarrow g(0)=0$$

$$g'(z)=2z-2\sinh z \Rightarrow g'(0)=0 \quad , \quad g''(z)=2-2\cosh z \Rightarrow g''(0)=0$$

$$g'''(z)=-2\sinh z \Rightarrow g'''(0)=0 \quad , \quad g^{(4)}(z)=-2\cosh z \Rightarrow g^{(4)}(0)=-2\neq 0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه چهارم تابع $f(z)$ می‌باشد.

مثال ۵۳: نقطه $z=0$ قطب ساده کدام تابع است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\bar{z}}{z}$　　۲) $\frac{\cot z}{z}$　　۳) $\frac{\sin\frac{1}{z}}{z(z^2+1)}$　　۴) $\frac{z-\tan z}{z^4(z^2+1)}$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم که تابع $\bar{z}=x-iy$ در شرایط کوشی ریمان در هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. زیرا:

$$\begin{cases} u=x \Rightarrow u_x=1 \\ v=-y \Rightarrow v_y=-1 \end{cases} \Rightarrow u_x\neq v_y$$

درسنامه۴: محاسبه‌ی انتگرال توابع حقیقی و برخی سری‌های عددی به کمک قضیه مانده‌ها

در این قسمت به بررسی یکی از زیباترین کاربرد نظریه مانده‌ها، یعنی محاسبه‌ی انتگرال‌های معین برخی توابع حقیقی می‌پردازیم. این روش‌ها برای تمام انتگرال‌های حقیقی قابل استفاده نیستند، اما به هر حال بسیاری از این انتگرال‌ها را می‌توان با این روش‌ها حل کرد که ما آن‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم:

۱ـ محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها با توجه به مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و جایگزینی $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\quad,\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$$

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

که در نهایت انتگرال به صورت زیر قابل بیان است:

$$I=\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

مثال ۱۴۸: حاصل انتگرال حقیقی $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}-\cos\theta}$ برابر است با: (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{5}$　　۲) $\frac{\pi}{3}$　　۳) $\frac{8\pi}{3}$　　۴) $\frac{8\pi}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم $dz=ie^{i\theta}d\theta$ در نتیجه $d\theta=\frac{dz}{iz}$ است. همچنین می‌دانیم که $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}$ است.

پس این انتگرال برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}-\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{i(\frac{5}{4}z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2})}=\oint_{|z|=1}\frac{-2dz}{i(z-\frac{1}{2})(z-2)}=\oint_{|z|=1}f(z)dz$$

تنها نقطه تکین $f(z)$ در داخل دایره $|z|=1$ نقطه $z=\frac{1}{2}$ است. با استفاده از قضیه مانده‌ها، انتگرال فوق برابر است با $2\pi i\underset{z=\frac{1}{2}}{\mathrm{Res}}(f(z))$. بنابراین داریم:

$$\underset{z=\frac{1}{2}}{\mathrm{Res}}(f(z))=\frac{-2}{i(z-2)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{4}{3i}\Rightarrow\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\times\frac{4}{3i}=\frac{8\pi}{3}$$

مثال ۱۴۹: حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\sin\theta+p^2}$ با شرط $-1<p<1$ (p ثابت)، برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2\pi}{1-p^2}$　　۲) $\frac{2\pi}{1+p^2}$　　۳) $\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$　　۴) $\frac{2\pi p}{1-p^2}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}\ ,\ \sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1-\frac{2p}{2i}(z-\frac{1}{z})+p^2}\times\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz-p(z^2-1)+izp^2}=-\frac{1}{p}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-(ip+\frac{i}{p})z-1}$$

می‌توان معادله درجه دوم را حل کرد، اما با استفاده از قواعد معادله درجه دوم در مورد مجموع دو ریشه و حاصلضرب دو ریشه حل راحت‌تر است.

(**یادآوری:** در معادله درجه دوم $z^2+bz+c=0$ همواره مجموع ریشه برابر با $-b$ و حاصلضرب ریشه‌ها برابر با c است) پس می‌توان فهمید ریشه‌های مخرج $\frac{i}{p}$ و ip هستند و با توجه به اینکه $-1<p<1$ لذا فقط ip درون ناحیه $|z|=1$ واقع می‌باشد، لذا داریم:

$$I=-\frac{1}{p}\times 2\pi i\underset{z=ip}{\mathrm{Res}}f(z)=\frac{2\pi}{1-p^2}$$

■ این سؤال روش تستی و سریع دارد که در کتاب «حل سؤالات ریاضی مهندسی بدون دخالت دست! (روش رد گزینه‌ها)» آن را حل کرده‌ایم.

۲ــ محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

فرض کنیم $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای هستند و درجه مخرج **حداقل دو درجه** از درجه صورت بیشتر است.

در این صورت حاصل انتگرال به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های } f(z) \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند.})$$

یعنی در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت فوق، اول تمام قطب‌های $f(z)$ را حساب می‌کنیم، بعد فقط مانده تابع را در قطب‌هایی که **بالای محور حقیقی** قرار دارند حساب کرده و با هم جمع و در $2\pi i$ ضرب می‌کنیم.

تذکر۹: اگر تابع $f(z)$ دقیقاً **روی محور حقیقی** قطبی داشته باشد، باید مانده مربوط به آن را به جای $2\pi i$ در πi ضرب کنیم.

مثال ۱۵۰: مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ چقدر است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi^2}{9}$
۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» توجه شود در محاسبه انتگرال فقط قطب‌های بالای محور حقیقی باید منظور گردند.

یادآوری: در محاسبه مانده از این روش استفاده می‌کنیم که با فرض $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ مانده در z_0 برابر $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\Sigma \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{z^4+5z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{z^4+5z^2+4}] = 2\pi i[\frac{i^2}{4(i)^3+10i}+\frac{(2i)^2}{4(2i)^3+10(2i)}] = 2\pi i[-\frac{1}{6i}+\frac{4}{12i}] = \frac{\pi}{3}$$

مثال ۱۵۱: حاصل انتگرال $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ با شرط: $a\neq b$ ، $b>0$ ، a برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{\pi}{2ab}$
۲) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$
۳) $\frac{\pi}{2(a+b)}$
۴) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا قطب‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} z^2+a^2=0 \Rightarrow z=\pm ai \\ z^2+b^2=0 \Rightarrow z=\pm bi \end{cases}$$

فقط ai و bi بالای محور x ها هستند، لذا داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \pi i[\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}+\operatorname*{Res}_{z=bi}\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}] = \pi i[\frac{1}{2ai[(ai)^2+b^2]}+\frac{1}{2bi[(bi)^2+a^2]}] = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

مثال ۱۵۲: انتگرال ناسره $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$ برابر است با: (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۱ و مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) π
۲) 2π
۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$
۴) $\pi\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه «۳»

روش اول:

$$1+z^4=0 \Rightarrow z=e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}\ ,\ k=0,1,2,3$$

اما فقط دو ریشه $z_1=e^{\frac{\pi i}{4}}$ و $z_2=e^{\frac{3\pi i}{4}}$ بالای محور حقیقی قرار دارند، لذا داریم:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}\ ,\ f(z)=\frac{1}{1+z^4}\ ,\ I=[\frac{1}{2}\times 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f+\operatorname*{Res}_{z=z_2} f)]$$

چون مشتق مخرج به صورت $4z^3$ می‌شود، لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}} f(z)=\frac{1}{4(e^{\frac{\pi i}{4}})^3}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\ ,\ \operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}} f(z)=\frac{1}{4(e^{\frac{3\pi i}{4}})^3}=\frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi i}{4}}$$

$$\Rightarrow I=[\frac{1}{2}\times 2\pi i\times(\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi i}{4}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi i}{4}})]\Rightarrow I=\pi i\times\frac{1}{4}[\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4})+\cos(-\frac{9\pi}{4})+i\sin(-\frac{9\pi}{4})]$$

$$I=\frac{\pi i}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{\pi i}{4})(-i\sqrt{2})=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

روش دوم: طبق نکته می‌دانیم: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin(\frac{\pi}{n})}$، لذا داریم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{4\sin(\frac{\pi}{4})}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۱۵۳: حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{x^2}{1-x^4}dx$ کدام است؟ (مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۶)

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به آنکه تابع $f(x)=\frac{x^2}{1-x^4}$ زوج می‌باشد، داریم:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1-x^4}dx$$

حال حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1-x^4}dx$ را محاسبه می‌کنیم. تابع $f(z)=\frac{z^2}{1-z^4}$ دارای قطب‌های $z=\pm1$ و $z=\pm i$ می‌باشد که i بالای محور حقیقی و ۱+ و ۱− روی آن قرار دارند، پس حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{2}\left[2\pi i(\frac{(i)^2}{-4(i)^3})+\pi i(\frac{(1)^2}{-4(1)^3}+\frac{(-1)^2}{-4(-1)^3})\right]=-\frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۵۴: حاصل $I=\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا مانده‌های تابع $f(z)=\frac{1}{z^6+1}$ را به دست می‌آوریم: برای این کار باید ریشه‌های ششم عدد ۱− را حساب کنیم.

$$z^6+1=0\Rightarrow z^6=-1\xrightarrow{-1=e^{i\pi}} z=1e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{6})}$$

به ازای مقادیر مختلف k از صفر تا ۵ داریم:

$$z=e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{3\pi}{6}},\ e^{i\frac{5\pi}{6}},e^{i\frac{7\pi}{6}},e^{i\frac{9\pi}{6}},e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

از بین قطب‌های فوق فقط قطب‌های $e^{i\frac{\pi}{6}}$، $e^{i\frac{3\pi}{6}}$ و $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ بالای محور حقیقی قرار دارند (به زوایای $\frac{\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ که در ربع اول و دوم قرار دارند، دقت کنید) خب حالا مانده تابع را در این سه نقطه حساب می‌کنیم. با توجه به ضابطه f یعنی $f(z)=\frac{1}{z^6+1}$، بهترین راه استفاده از روش سوم می‌باشد. اگر از مخرج مشتق بگیریم به شکل $\frac{1}{6z^5}$ می‌شود، پس داریم:

$$\text{مانده در } e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{6(e^{i\frac{\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{6}[\cos(\frac{-5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6})]=\frac{1}{6}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})$$

$$\text{مانده در } e^{i\frac{3\pi}{6}}=\frac{1}{6(e^{i\frac{3\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{5\pi}{2}}=\frac{1}{6}[\cos(\frac{-5\pi}{2})+i\sin(\frac{-5\pi}{2})]=\frac{1}{6}(0-i)$$

$$\text{مانده در } e^{i\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{6(e^{i\frac{5\pi}{6}})^5}=\frac{1}{6}e^{-i\frac{25\pi}{6}}=\frac{1}{6}[\cos(-\frac{25\pi}{6})+i\sin(\frac{-25\pi}{6})]=\frac{1}{6}[\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}]$$

$$\text{مجموع مانده‌ها}=\frac{1}{6}[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}+0-i+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}]=-\frac{i}{3}\Rightarrow I=2\pi i\times(-\frac{i}{3})=\frac{2\pi}{3}$$

دقت کنید، حاصل فوق برابر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$ می‌باشد و چون بازه انتگرال‌گیری در صورت تست از صفر تا ∞ است، لذا باید عبارت فوق در عدد $\frac{1}{2}$ ضرب شود، یعنی $\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2}=I$.

۳ـ محاسبه انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx$

فرض کنیم $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند و درجه مخرج **حداقل یک درجه** از درجه صورت بیشتر و a عددی حقیقی و بزرگتر از صفر است. در این صورت حاصل انتگرال به صورت زیر قابل محاسبه است:

$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx=\mathrm{Re}[2\pi i$ (مجموع مانده‌های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند)$]$

$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx=\mathrm{Im}[2\pi i$ (مجموع مانده‌های تابع $f(z)e^{iaz}$ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند)$]$

تذکر ۱۰: اگر تابع $f(z)$، **دقیقاً روی محور حقیقی** قطبی داشته باشد، باید مانده مربوط به آن را به جای $2\pi i$ در πi ضرب کنیم.

مثال ۱۵۵: مقدار انتگرال حقیقی و ناسره: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{x^4+5x^2+4}dx$ کدام است؟ (مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{6}(2e^{-4}-e^{-8})$
۲) $\frac{\pi}{6}(e^{-4}-e^{-8})$
۳) $\frac{\pi}{6}(2e^{-4}+e^{-8})$
۴) $\frac{\pi}{6}(e^{-4}+e^{-8})$

پاسخ: گزینه «۱» طبق روش محاسبه انتگرال‌های ناسره به کمک قضیه مانده‌ها می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{x^4+5x^2+4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 4x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=\mathrm{Re}\{2\pi i[\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z^2+4)}+\underset{z=2i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z^2+4)}]\}$$

$$=\mathrm{Re}\{2\pi i[\frac{e^{i4z}}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i}+\frac{e^{i4z}}{(z^2+1)(z+2i)}\Big|_{z=2i}]\}=\mathrm{Re}\{2\pi i[\frac{e^{-4}}{6i}-\frac{e^{-8}}{12i}]\}=\frac{\pi}{6}(2e^{-4}-e^{-8})$$

مثال ۱۵۶: انتگرال $\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2(1+x^2)}dx$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\pi}{4}(1+e^{-2})$
۲) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$
۳) $\frac{\pi}{4}(1+e^{2})$
۴) $\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{e})$

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{1+x^2}$$

انتگرال اول که به راحتی با استفاده از اطلاعات ریاضی عمومی (۱) پاسخ داده می‌شود و به نظر می‌رسد از اطلاعات ریاضی مهندسی باید در حل انتگرال دوم استفاده کنیم. ابتدا تکلیف انتگرال اول را معلوم کنیم:

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}[\mathrm{Arctg}\,x]_{0}^{\infty}=\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}(\infty)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

اما برای حل انتگرال دوم، باید مانده‌های تابع $f(z)=\frac{e^{i2z}}{1+z^2}$ را در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند، حساب کنیم. قطب‌های تابع $f(z)$ برابر $z=\pm i$ می‌باشند که فقط $z=i$ بالای محور حقیقی قرار دارد و لذا داریم:

$$z=i \text{ مانده در } =\lim_{z\to i}[(z-i)\frac{e^{i2z}}{(z-i)(z+i)}]=\lim_{z\to i}\frac{e^{i2z}}{z+i}=\frac{e^{i2(i)}}{i+i}=\frac{e^{-2}}{2i}$$

با توجه به اینکه بازه‌ی انتگرال از ۰ تا ∞ داده شده، لذا باید ضریب $\frac{1}{2}$ در $2\pi i$ ضرب شود. لذا حاصل انتگرال برابر $2\pi i\times(\frac{1}{2}\times\frac{e^{-2}}{2i})=\frac{\pi e^{-2}}{2}$، می‌شود و چون خود صورت سؤال ضریب $\frac{1}{2}$ پشت انتگرال قرار داده، پس $I_2=\frac{\pi e^{-2}}{4}$ خواهد بود. پس داریم:

$$I=I_1-I_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$$

نکته۲۷: انتگرال‌های $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$ و همچنین $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$، هر کدام بخش‌هایی از انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$ می‌باشند، در واقع داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx=2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ در قطب‌هایی که بالای محور حقیقی قرار دارند.})$$

واضح است $\operatorname{Re}[I]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx$ و $\operatorname{Im}[I]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$ می‌باشد. (مطابق معمول، مانده‌های مربوط به قطب‌های حقیقی باید در πi ضرب شوند.)

مثال ۱۶۰: حاصل عبارت $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}i$ ۳) $\frac{\pi}{e}$ ۴) $\frac{\pi}{e}i$

پاسخ: گزینه «۳» نقطه $z=i$ نقطه تکین در نیم صفحه بالایی است پس داریم: $B=\operatorname{Res}_{z=i}(f(z)e^{iz})$

از طرفی $f(z)e^{iz}=\frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}$ که در آن $\varphi(z)=\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$ و با توجه به اینکه $z=i$ یک قطب مرتبه ۲ تابع $f(z)e^{iz}$ است. لذا داریم:

$$\varphi'(z)=\frac{e^{iz}(i(z+i)-2)}{(z+i)^3}\Rightarrow B_1=\varphi'(i)=\frac{-4}{8i^3e}=\frac{1}{2ie}\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx=2\pi i(\frac{1}{2ie})=\frac{\pi}{e}$$

مثال ۱۶۱: اگر $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x-1}dx$ و $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-1}dx$، آنگاه مقدار $I_1\times I_2$ کدام است؟

۱) $-2\pi\sin 1+2\pi\cos 1$ ۲) $-\pi\sin 1+\pi\cos 1$ ۳) $-\frac{\pi^2}{2}\sin 2$ ۴) $-\pi^2\sin 2$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید مقادیر هر یک از انتگرال‌های I_1 و I_2 را حساب کنیم، دقت کنید برای هر دو انتگرال $f(z)=\frac{1}{z-1}$ در نظر گرفته می‌شود و $z=1$ قطب روی محور حقیقی محسوب می‌شود، یعنی مانده $f(z)e^{iz}$ باید در πi ضرب شود. ابتدا انتگرال $f(x)e^{ix}$ را حل می‌کنیم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx=\pi i(z=1 \text{ در } \frac{e^{iz}}{z-1} \text{ مانده عبارت})=\pi i(e^{i\times 1})=\pi i(\cos 1+i\sin 1)=(i\pi\cos 1-\pi\sin 1)$$

اکنون داریم:

$$\left.\begin{array}{l}I_1=\operatorname{Re}I=-\pi\sin 1\\ I_2=\operatorname{Im}I=\pi\cos 1\end{array}\right\}\Rightarrow I_1\times I_2=-\pi^2\sin 1\cos 1\xrightarrow{\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a} I_1\times I_2=-\frac{\pi^2}{2}\sin 2$$

نکته۲۸: برای همگرایی $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos ax dx$ (یا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin ax dx$)، لازم است قطب‌های **حقیقی** تابع $\frac{p(z)}{q(z)}\cos az$ (یا $\frac{p(z)}{q(z)}\sin az$)، **رفع شدنی** یا حداکثر از **مرتبه یک** باشند. به عبارتی وقتی $q(z_0)=0$ می‌شود باید z_0 ریشه‌ی ساده (مرتبه یک) $q(z)$ باشد. واضح است اگر مثلاً z_0 ریشه‌ی مرتبه دوم $q(z)$ باشد، در صورتی انتگرال همگراست که z_0 ریشه‌ی صورت کسر هم باشد.

برای مثال انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست؛ زیرا $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی صورت و مخرج است و قطب رفع شدنی محسوب می‌شود. انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-1}dx$ نیز همگراست؛ چون $x=1$ ریشه‌ی ساده (مرتبه یک) مخرج است. همچنین انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{(4\pi^2-x^2)^2}dx$ همگراست، زیرا با آن که 2π ریشه‌ی مرتبه‌ی دو برای مخرج است، اما ریشه‌ی مرتبه‌ی یک صورت هم هست و این یعنی $x=2\pi$ یک قطب مرتبه‌ی یک محسوب می‌شود و به همگرایی لطمه‌ای نمی‌زند. اما انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x-1)^2}dx$ واگراست؛ زیرا $x=1$ قطب مرتبه‌ی دو حقیقی است. پس اگر مخرج کسر یک ریشه‌ی حقیقی از مرتبه‌ی دو داشته باشد، باید این عدد ریشه‌ی صورت هم باشد. (ریشه‌ها بر هم منطبق باشند.)

توجه: در برخی از منابع، گفته شده که ریشه‌های حقیقی مخرج کسر، حتی اگر مرتبه اول هم هستند، حتماً باید ریشه‌ی صورت کسر هم باشند که این حکم صحیح نیست.

تمرین: حاصل انتگرال‌های $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{4\pi^2-x^2}dx$ و $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{(4\pi^2-x^2)^2}dx$ رابیابید. **جواب:** $I_1=0$ و $I_2=\frac{1}{8\pi}$

نکته۲۹: در بعضی تست‌ها از عبارت «مقدار اصلی کوشی» که آن را با **P.V** نشان می‌دهند استفاده می‌شود. همین‌قدر بدانید که در تمام انتگرال‌های حقیقی، در صورتی که همگرا باشند، همان فرمول‌هایی که گفته شد در واقع مقدار اصلی کوشی را نیز محاسبه می‌کنند.

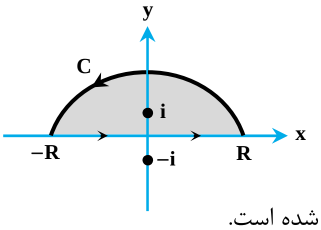
۴ـ محاسبه نوع دیگری از انتگرال‌های حقیقی

اگر انتگرالی جزو سه نوع انتگرال حقیقی که تا حالا بررسی کردیم، نبود، در این دسته قرار می‌گیرد. در حل این نوع انتگرال‌ها باید ابتدا یک $f(z)$ مناسب انتخاب کنیم و سپس با انتخاب یک مسیر مناسب برای انتگرال‌گیری و تفکیک انتگرال‌ها در مسیرهای مختلف و همچنین حذف بعضی از این انتگرال‌ها سعی کنیم، محاسبات را ساده کرده و سپس با استفاده از قضیه مانده‌ها حاصل $\int_C f(z)dz$ را حساب کنیم و مقدار به دست آمده را مساوی انتگرال‌های تفکیک شده قرار دهیم.

مثال ۱۶۲: حاصل انتگرال حقیقی $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ را حساب کنید.

☑ **پاسخ:** برای ورود به بحث، یک انتگرال ساده را مثال می‌زنیم که می‌دانیم با استفاده از فرمول‌های ریاضی عمومی به راحتی برابر $I=[\text{Arc}\,\text{tg}x]_{-\infty}^{\infty}=\pi$ می‌شود.

اما در مبحث توابع مختلط روش حل دیگری ارائه می‌شود که برای حل انتگرال‌های پیچیده‌ای که در ریاضی عمومی در مقابل آن‌ها عاجز هستیم، بسیار توانمند و مفید است. خب حالا برویم سراغ حل این انتگرال، می‌توانیم این انتگرال را چنین بنویسیم:



$$I=\int_C\frac{dz}{z^2+1}$$

که C مسیری از $-\infty$ تا $+\infty$ در طول محور xها است. اما مشکل اینجاست برای استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها، C باید یک مسیر بسته باشد، بنابراین به جای I، انتگرال مقابل را جایگزین می‌کنیم:

$$I'=\oint_C\frac{dz}{z^2+1}$$

که C مسیری از $-\infty$ تا $+\infty$ نیست، بلکه مسیر بسته‌ای از $-R$ تا $+R$ است که با یک نیم‌دایره در جهت مثلثاتی بسته شده است.

خب حالا برویم سراغ قضیه مانده‌ها. تابع زیر انتگرال دارای قطب‌های مرتبه‌ی اول $z=+i$ و $z=-i$ می‌باشد که از این دو قطب فقط $z=+i$ درون مسیر بسته‌ی C قرار دارد، بنابراین با استفاده از قضیه مانده‌ها داریم:

$$I'=2\pi i\,\underset{z=i}{\text{Res}}(f(z))=2\pi i\lim_{z\to i}[(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}]=\pi$$

اما ما مقدار I را می‌خواهیم، برای این منظور I' را می‌توان به شکل مقابل نوشت:

$$I'=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}$$

با توجه به اینکه $I'=\pi$، لذا داریم:

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

بازه‌های انتگرال‌گیری باید $-\infty$ تا $+\infty$ شود، برای همین R را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

حالا باید تکلیف انتگرال دوم را معلوم کنیم. برای این منظور از تعریف کران ML استفاده می‌کنیم. با توجه به نامساوی مثلث داریم:

$$|z^2+1|\geq||z|^2-1|=R^2-1\Rightarrow|\frac{1}{z^2+1}|\leq\frac{1}{R^2-1}\Rightarrow|f(z)|\leq\frac{1}{R^2-1}$$

اگر عبارت برحسب R، برابر M در نظر گرفته شود، با توجه به این که طول کمان C_R برابر $L=\pi R$ است، خواهیم داشت:

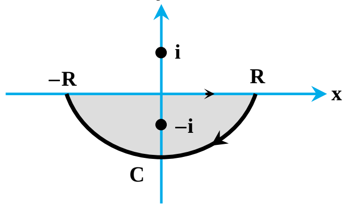
$$|\int_{C_R}\frac{dz}{z^2+1}|\leq(\frac{1}{R^2-1})\pi R$$

که در $R\to\infty$ عبارت سمت راست نامساوی برابر صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$I+0=\pi\ \Rightarrow\ \mathbf{I=\pi}$$

توضیح ۱: دقت کنید، مسیر بسته‌ی C را به شکل زیر نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم:

در این صورت با توجه به جهت نشان داده شده که ساعت‌گرد شده، علامت منفی اضافه می‌شود و داریم:



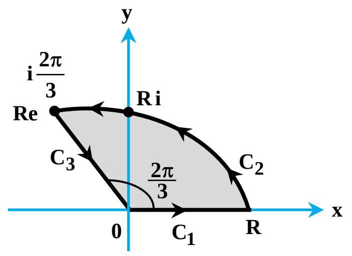
$$I'=-2\pi i\,\underset{z=-i}{\text{Res}}(f(z))=-2\pi i[\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z+i)(z-i)}]=\frac{-2\pi i}{-2i}=\pi$$

با ادامه‌ی حل مانند آن‌چه در بالا انجام شد، به نتیجه‌ی یکسان $I=\pi$ می‌رسیم. بنابراین در حل چنین مسائلی مسیر را به صورت نیم‌دایره‌ای در نظر می‌گیریم که بالای محور یا پائین محور حقیقی باشد. این کار به دلیل کاهش حجم محاسبات می‌باشد.

توضیح ۲: انتگرال فوق را به غیر از روش «ریاضی عمومی» با استفاده از نکته‌ی گفته شده راجع به انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$، به راحتی می‌توانیم جواب دهیم. در واقع آن دستورالعمل‌ها براساس همین روش‌های تعیین مسیر به دست آمده‌اند و شما تمام انتگرال‌هایی که با ساختار آن دستورالعمل‌ها همخوانی دارند، با همان روش‌ها حل کنید. اما چرا اینجا این روش را آموزش دادیم؟ به این دلیل که برخی انتگرال‌ها هستند که با آن دستورالعمل‌ها قابل پاسخگویی نیستند.

مثال ۱۶۳: مقدار انتگرال $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$



پاسخ: گزینه «۳» در ابتدا ممکن است فکر کنیم با همان فرمول گفته شده برای انتگرال‌هایی به شکل کلی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$، می‌توانیم تست را جواب دهیم ولی به کران پائین انتگرال توجه کنید (باید $-\infty$ باشد که بتوانیم از فرمول گفته شده استفاده کنیم) در ضمن این تابع زوج هم نیست که بتوانیم انتگرال را روی $(-\infty,\infty)$ حل کرده و جواب را نصف کنیم. پس مجبوریم از مسیر استفاده کنیم. برای حل این انتگرال مسیر روبرو را در نظر می‌گیریم:

این مسیر قطاعی به رأس صفر و زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{3}$ است و علت انتخاب این زاویه این است که تعداد کمتری قطب داخل مسیر قرار بگیرد و محاسبات کوتاهتر شود وگرنه می‌توانستیم زاویه‌ی مرکزی را مثلاً 2π نیز انتخاب کنیم. خب باید ابتدا نقاط تکین تابع $f(z)=\frac{1}{z^3+1}$ را حساب کنیم:

$$1+z^3=0 \Rightarrow z^3=-1 \xrightarrow{-1=e^{i\pi}} z_k=e^{(\frac{2k\pi+\pi}{3})}\ ,\ k=0,1,2 \Rightarrow z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}\ ,\ z_2=e^{\pi i}=-1\ ,\ z_3=e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

از سه قطب ساده فوق، فقط قطب $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$، داخل مسیر نشان داده شده قرار می‌گیرد. مسیر C متشکل از سه قسمت زیر است:

C_1 که واقع بر قسمت مثبت محور xها است، C_2 که قسمتی از کمان دایره است و C_3 که قطعه خط واصل از نقطه $Re^{\frac{2\pi}{3}i}$ تا 0 می‌باشد.

بر روی مرز C_3 با فرض $z=xe^{\frac{2\pi}{3}i}$ که در آن x از R تا صفر تغییر می‌کند، داریم:

$$z=xe^{\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow dz=e^{\frac{2\pi}{3}i}dx \quad , \quad f(z)=f(xe^{\frac{2\pi}{3}i})=\frac{1}{1+(xe^{\frac{2\pi}{3}i})^3}=\frac{1}{1+x^3}$$

پس انتگرال $\oint_C f(z)dz$ به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\oint_C f(z)dz=\int_0^R\frac{dx}{1+x^3}+\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^3}+\int_R^0\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{1+x^3}dx$$

از بین انتگرال‌های فوق مقدار انتگرال وسط صفر است و برای اثبات آن به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$\left|z^3+1\right|\geq\left||z|^3-1\right|=R^3-1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z^3+1}\right|\leq\frac{1}{R^3-1} \Rightarrow |f(z)|\leq\frac{1}{R^3-1}$$

حالا از فرمول کران بالا برای انتگرال (یا همان فرمول ML) کمک می‌گیریم. با توجه به طول کمان در مسیر C_2 داریم:

$$L=\text{شعاع}\times\text{زاویه مرکزی}=R\times\frac{2\pi}{3} \quad , \quad M=\frac{1}{R^3-1} \Rightarrow \left|\int_{C_2}f(z)dz\right|\leq(\frac{1}{R^3-1})(\frac{2\pi}{3}R)=\frac{2\pi R}{3(R^3-1)}$$

با توجه به مسیر انتخاب شده و بازه‌ی انتگرال‌گیری $R\to\infty$، بنابراین داریم:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi R}{3(R^3-1)}=0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}(\int_{C_2}f(z)dz)=0$$

توضیح: یک روش دیگر برای اثبات صفر بودن انتگرال $\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^3}$ این است که $z=Re^{i\theta}$ در نظر بگیریم و در آن صورت $dz=Rie^{i\theta}d\theta$ که θ از 0 تا $\frac{2\pi}{3}$ تغییر می‌کند که انتگرال به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^3}=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{1+R^3e^{3i\theta}}$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، انتگرال فوق به سمت صفر می‌رود.

حالا که تکلیف انتگرال دوم معلوم شد، سراغ انتگرال سوم می‌رویم. با قرار دادن ∞ به جای R، انتگرال به صورت $\int_\infty^0\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1+x^3}dx$، نوشته می‌شود و می‌دانیم $\int_\infty^0$ به صورت $-\int_0^\infty$ نیز قابل نمایش است، لذا داریم:

$$\oint_C f(z)dz=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}-e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}=(1-e^{\frac{2\pi}{3}i})\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3} \qquad (1)$$

از طرفی برای انتگرال $\oint_C f(z)dz$ با توجه به قضیه مانده‌ها و توجه به اینکه فقط قطب $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ داخل ناحیه قرار دارد، داریم:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(z=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ در } f(z)=\frac{1}{z^3+1} \text{ مانده}) = 2\pi i(\frac{1}{3z^2})\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}} \qquad (2)$$

با توجه به تساوی (۱) و (۲) داریم:

$$(1-e^{\frac{2\pi}{3}i})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3}ie^{-\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}[\frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}]$$

$$\frac{2\pi i}{3}[\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{\pi i}{3}}(e^{-\frac{\pi i}{3}}-e^{\frac{\pi i}{3}})}] = \frac{2\pi i}{3}[\frac{e^{-\frac{3\pi i}{3}}}{-2i\sin(\frac{\pi}{3})}] = \frac{2\pi i}{3}(\frac{-1}{-2i\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

پس حاصل این انتگرال $I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ است.

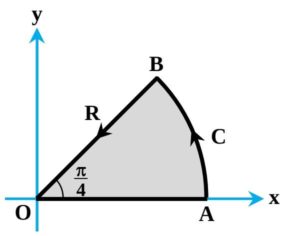
حالت کلی این مثال به صورت زیر می‌باشد و حفظ آن خالی از لطف نیست!

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \; ; \; n=2,3,\ldots}$$

مثال ۱۶۴: **حاصل $I=\int_0^\infty \sin x^2 dx$ کدام است؟ (در حل سؤال از تساوی $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، استفاده کنید)**

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ ۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۴) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

پاسخ: گزینه «۱» مسیر انتگرال‌گیری را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:



برای حل این سؤال باید حاصل انتگرال $\oint_C e^{iz^2}dz$ را حساب کنیم. یک حدس برای انتخاب این انتگرال به دلیل تساوی مقابل است: $e^{ix^2}=\cos x^2+i\sin x^2$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، تابع زیر انتگرال هیچ نقطه‌ی تکینی در مرز داده شده ندارد، لذا $\oint_C e^{iz^2}dz=0$

حالا با تفکیک این انتگرال داریم: $\int_{OA} e^{iz^2}dz+\int_{AB} e^{iz^2}dz+\int_{BO} e^{iz^2}dz=0$

اما روی OA داریم $z=x$ (از $x=0$ تا $x=R$)، روی AB داریم $z=Re^{i\theta}$ (از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$) و بالاخره روی BO داریم: $z=xe^{\frac{\pi}{4}i}$. (از $x=R$ تا $x=0$). بنابراین انتگرال‌ها را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(e^{2i\theta})}(iRe^{i\theta}d\theta)+\int_R^0 e^{ix^2(e^{\frac{\pi}{2}i})}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta+\int_R^0 e^{i(x^2)(i)}.e^{\frac{\pi}{4}i}dx=0 \qquad (*)$$

خب حالا حد عبارات فوق را وقتی $R\to\infty$ را حساب می‌کنیم. قدر مطلق انتگرال دوم از سمت راست به شکل زیر حساب می‌شود:

$$|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(iR^2\cos 2\theta-R^2\sin 2\theta)}.iRe^{i\theta}d\theta| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}Rd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R}{e^{R^2\sin 2\theta}}d\theta$$

در عبارات فوق $0\le 2\theta\le\frac{\pi}{2}$، بنابراین $\sin 2\theta\ge 0$ و بنابراین وقتی $R\to\infty$ مقدار این انتگرال صفر است.

پس معادله (*) در $R\to\infty$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx+\int_\infty^0 e^{-x^2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})dx=0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

طبق صورت سؤال انتگرال سمت راست برابر $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ است و لذا داریم:

$$\int_{۰}^{+\infty}(\cos x^{۲}+i\sin x^{۲})dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را برابر قرار دهیم، داریم:

$$\int_{۰}^{\infty}\sin x^{۲}dx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\right)\quad,\quad\int_{۰}^{\infty}\cos x^{۲}dx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\right)$$

توضیح ۱: انتگرال‌های فوق به انتگرال‌های «فرنل» معروف هستند که در بحث تفرق امواج ظاهر می‌شوند.

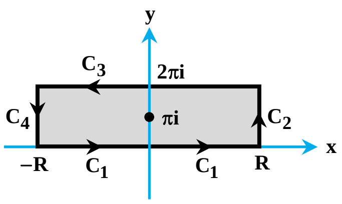
توضیح ۲: همان‌طور که در چند مثال اخیر دیدید معمولاً وقتی زیر انتگرال $f(x^n)$ داریم، مسیر انتخابی قطاعی با زاویه‌ی مرکزی $\frac{۲\pi}{n}$ است. مثلاً برای $\frac{۱}{x^{۲}+۱}$، چون $n=۲$ است، مسیر قطاعی با زاویه‌ی مرکزی $\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ بود.

مثال ۱۶۵: با انتگرال‌گیری از تابع مختلط $f(z)=\frac{e^{az}}{۱+e^{z}}$ ($۰<a<۱$ ثابت) روی کرانه مستطیل $|x|<R$، $۰\le y\le ۲\pi$، در جهت مثلثاتی، و سپس میل دادن $R\to\infty$، مقدار $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ ساخت و تولید ـ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ ۲) $\frac{۲\pi}{\sin(\pi a)}$ ۳) $\frac{\pi}{\sinh(\pi a)}$ ۴) $\frac{۲\pi}{\sinh(\pi a)}$

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید $f(z)=\frac{e^{az}}{۱+e^{z}}$ و از f در مسیر زیر انتگرال می‌گیریم:

تابع تحت انتگرال یک قطب $z=\pi i$ در مسیر داده شده دارد، لذا داریم:



$$\underset{z=\pi i}{Res}(f(z))=\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{a\pi i}\Rightarrow\oint_{C}f(z)dz=-۲\pi ie^{a\pi i}$$

حالا باید این انتگرال را در چهار مسیر مختلف نمایش دهیم. دقت کنید $z=x+iy$ است، لذا معادله‌ی منحنی‌ها به شکل زیر است:

۱) برای $C_۱$ به ازای $x=-R$ تا $x=R$ واضح است $y=۰$ بنابراین $z=x$

۲) برای $C_۲$ به ازای $y=۰$ تا $y=۲\pi$ واضح است $x=R$ بنابراین $z=R+iy$

۳) برای $C_۳$ به ازای $x=R$ تا $x=-R$ واضح است $y=۲\pi$ بنابراین $z=x+i۲\pi$

۴) برای $C_۴$ به ازای $y=۲\pi$ تا $y=۰$ واضح است $x=-R$ بنابراین $z=-R+iy$

حالا به راحتی انتگرال‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx+\int_{۰}^{۲\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{۱+e^{R+iy}}(idy)+\int_{+R}^{-R}\frac{e^{a(x+i۲\pi)}}{۱+e^{x+i۲\pi}}dx+\int_{۲\pi}^{۰}\frac{e^{a(-R+iy)}}{۱+e^{-R+iy}}(idy)=۰\qquad(*)$$

انتگرال‌های دوم و چهارم وقتی $R\to\infty$ برابر صفر می‌شوند، زیرا برای انتگرال دوم داریم:

$$\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{۱+e^{R+iy}}\right|=\left|\frac{e^{aR}}{۱+e^{R+iy}}\right|\le\frac{e^{aR}}{e^{R}-۱}\qquad(۱)$$

در مخرج کسر قسمت آخر نامساوی به صورت زیر استدلال کردیم:

$$|e^{R+iy}+۱|\ge|e^{R+iy}|-|۱|=e^{R}-۱$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، عبارت سمت راست نامساوی (۱) صفر می‌شود و لذا طبق فرمول ML انتگرال صفر می‌شود.

به همین طریق برای انتگرال چهارم داریم:

$$\left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{۱+e^{-R+iy}}\right|=\frac{e^{-aR}}{|e^{-R+iy}+۱|}\le\frac{e^{-aR}}{۱-e^{-R}}$$

واضح است وقتی $R\to\infty$، آنگاه عبارت سمت راست نامساوی صفر می‌شود و در نتیجه حاصل انتگرال نیز صفر می‌شود. خب حالا تساوی $(*)$ به شکل زیر ساده می‌شود:

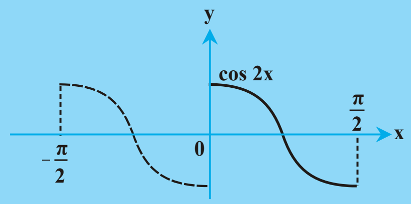
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{a(x+i۲\pi)}}{۱+e^{x+i۲\pi}}dx=-۲\pi ie^{a\pi i}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{ax}.e^{i۲\pi a}}{۱+e^{x}.e^{i۲\pi}}dx=-۲\pi ie^{a\pi i}$$

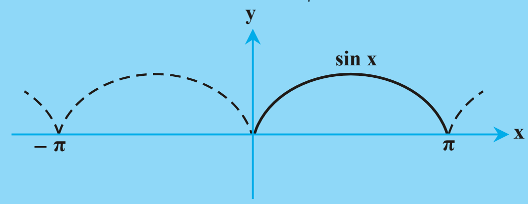
با فاکتورگیری از $e^{۲a\pi i}$ توجه و به این که $e^{i۲\pi}=۱$ و تغییر در بازه‌ی انتگرال دوم، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx-e^{۲a\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=-۲\pi ie^{a\pi i}\Rightarrow(۱-e^{۲a\pi i})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=-۲\pi ie^{a\pi i}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=\frac{-۲\pi ie^{a\pi i}}{۱-e^{۲a\pi i}}=\frac{-۲\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}=\frac{\pi}{\frac{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}{۲i}}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

نکته مهم ۱: اگر بازه‌ی تعریف تابع $f(x)$ متقارن نباشد (مثلاً به فرم $-a<x<a$ نباشد)، برای تشخیص زوج یا فرد بودن نمودار $f(x)$ لازم است آن را در بازه‌ی داده شده رسم کنید و سپس با تکرار همان نمودار به صورت متناوب، زوج یا فرد بودن نمودار $f(x)$ را مشخص کنید. در مورد توابعی مثل $\sin ax$ و $\cos ax$ که دوره‌ی تناوب ذاتی آنها $\frac{2\pi}{a}$ است، اگر بازه‌ی داده شده به اندازه‌ی دوره تناوب ذاتی باشد، (حتی اگر بازه شکل متقارن نداشته باشد)، نیازی به رسم شکل نیست (مثلاً $\sin x$ در بازه‌ی $0<x<2\pi$ تعریف شده باشد). یا اگر مثلاً $\sin x$ یا $\cos x$ در بازه‌های $-\pi<x<\pi$ و یا $0<x<2\pi$ داده شده باشند، لازم نیست شکل را رسم کنیم؛ چون منطبق بر همان خاصیت ذاتی خود خواهند بود. یعنی $\cos x$ زوج و $\sin x$ فرد خواهد بود. در غیر این صورت، باید زوج یا فرد بودن نمودار این توابع را با رسم شکل تشخیص دهید. برای مثال اگر تابع متناوب $f(x)=\cos 2x$ را در بازه‌ی $0<x<\frac{\pi}{2}$ داده باشند، با رسم شکل می‌بینیم که $f(x)$ فرد خواهد بود. در مثالی دیگر، اگر تابع $f(x)=\sin x$ را در بازه‌ی $0<x<\pi$ داده باشند، با رسم نمودار می‌بینیم که $f(x)$ زوج است. در واقع وقتی $\sin x$ را در بازه $(0,\pi)$ داریم، برای رسم باید همین‌طور در بازه‌هایی به طول π در سمت چپ و راست محور همان نمودار را کپی کنیم همین موضوع برای $\cos 2x$ در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ هم صادق است.





نکته مهم ۲: در بعضی مسائل و برخی کتب سری فوریه، هر تابع مانند $f(x)$ را که با دوره تناوب $T=2L$ متناوب است، به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\qquad (2)$$

توجه شود اگر در سؤالی تعریف فوق عنوان شود، ضرایب a_n و b_n مانند فرمول‌های قبل محاسبه می‌گردد ولی مقدار a_0 با این تفاوت که عدد ۲ از مخرج کسر پشت انتگرال آن حذف می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

توجه شود در این کتاب تعریف (۱) که در ابتدای همین درسنامه گفتیم، حاکم است، و تنها در مسائلی که صریحاً تعریف (۲) عنوان شود، می‌توان از فرمول فوق استفاده کرد.

بسط‌های نیم‌دامنه‌ای (سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی)

معمولاً در کاربردهای عملی به مسائلی بر می‌خوریم که مقدار یک تابع در بازه $[0,L]$ مشخص است و در عین حال بسط مثلثاتی تابع در این بازه مدنظر ما می‌باشد. برای همین لازم است تابع را در فواصل دیگر طوری تعریف کرد که اولاً متناوب باشد و در ضمن در بازه $[0,L]$ همان مقدار داده شده را داشته باشد. یعنی می‌توان تابع را در فاصله‌ی $[-L,L]$ به روش‌های مختلف گسترش داد و تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ را بدست آورد.

در واقع این توابع به علت این که متناوب نیستند، دارای سری فوریه نیز نمی‌باشند. ولی با سری فوریه یک تابع که معمولاً ازگسترش زوج و یا فرد توابع فوق حاصل شده‌اند، می‌توانند متناظر قرار گیرند. برای این منظور از توابع کمکی استفاده می‌کنیم: اگر $f_1(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & , \quad 0\le x\le L\\ f(-x) & , \quad -L\le x\le 0\end{cases}\quad ,\quad T=2L$$

(یعنی قسمت دیگر f در بازه $(-L,0)$ را طوری تعریف می‌کنیم که f زوج شود)

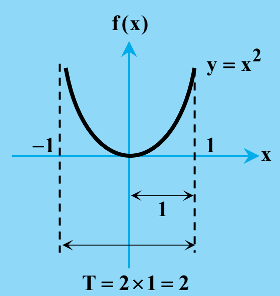
آنگاه $f_1(x)$ یک گسترش زوج برای تابع $f(x)$ است و اگر $f_2(x)$ به صورت زیر تعریف شود:

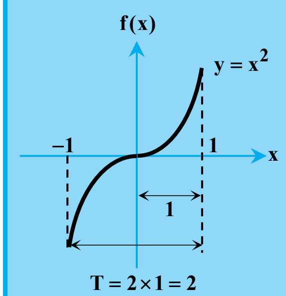
$$f_2(x)=\begin{cases}f(x) & , \quad 0\le x< L\\ -f(-x) & , \quad -L\le x\le 0\end{cases}$$

(یعنی قسمت دیگر f در بازه $(-L,0)$ را طوری تعریف می‌کنیم که f فرد شود)

آنگاه $f_2(x)$ گسترش فرد تابع $f(x)$ نامیده می‌شود.

برای درک بهتر موضوع، به تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2$ که در بازه‌ی $0\le x<1$ تعریف شده، توجه کنید که آن را می‌توان به دو صورت فرد یا زوج گسترش داد.





بنابراین بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)$، $0\le x\le L$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x\ ,\ a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx\ ,\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

و بسط نیم‌دامنه سینوسی تابع f به صورت مقابل بیان می‌گردد:

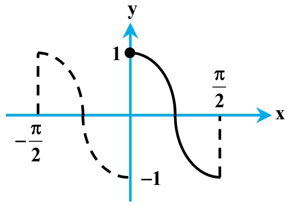
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\ ,\ b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

بدیهی است در توابعی که به صورت زوج گسترش می‌یابند، ضرایب b_n و در توابعی که به صورت فرد گسترش می‌یابند، ضرایب a_n و a_0 برابر صفر می‌باشند.

مثال ۳۶: سری فوریه تابع $f(x)=\cos(2x)$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ با دوره تناوب $\frac{\pi}{2}$ چگونه است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۹۰)

۱) سینوسی ۲) کسینوسی ۳) سینوسی ـ کسینوسی ۴) سری فوریه ندارد.

پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید در این گونه سؤالات که طراح خودش نوع بسط را معلوم نکرده است، باید در بازه‌هایی به طول دوره تناوب، نمودار را تکرار کنیم و ببینیم فرم بسط تابع به چه شکل خواهد شد. واضح است شکل به صورت مقابل است و لذا سری فوریه آن سینوسی خواهد بود.



مثال ۳۷: ضریب جمله $\cos 5\pi x$ در بسط نیم‌دامنه کسینوسی تابع $f(x)=x$, $0<x<1$ برابر کدام گزینه است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{4}{25\pi^2}$ ۲) $\frac{4}{25\pi^2}$ ۳) $-\frac{4}{5\pi^2}$ ۴) $\frac{4}{5\pi^2}$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه $L=1$ است، لذا داریم:

$$a_5=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(\frac{5\pi x}{1})dx$$

حاصل انتگرال با استفاده از روش جدول به راحتی حساب می‌شود:

مشتق	انتگرال
x	$\cos(5\pi x)$
1	$\oplus\ \frac{1}{5\pi}\sin(5\pi x)$
0	$\ominus\ -\frac{1}{25\pi^2}\cos(5\pi x)$

$$\Rightarrow a_5=2[\frac{x}{5\pi}.\sin 5\pi x+\frac{1}{25\pi^2}\cos 5\pi x]_0^1 \Rightarrow a_5=\frac{2}{25\pi^2}[-1-1]=-\frac{4}{25\pi^2}$$

مثال ۳۸: ضریب $\sin 5x$ در سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=\sin^2 x$ در فاصله $0<x<\pi$، کدام است؟ (مواد و متالورژی ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{-8}{105\pi}$ ۲) $\frac{4}{105\pi}$ ۳) $\frac{8}{105\pi}$ ۴) $\frac{-4}{105\pi}$

پاسخ: گزینه «۱» با یک سؤال معمولی از بحث سری فوریه روبه‌رو هستیم که بیشتر بحث انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی در آن مهم است:

$$f(x)=\sin^2 x \quad , \quad 0<x<\pi$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx \quad , \quad L=\pi$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\sin(nx)dx$$

ضریب $\sin 5x$ همان b_5 است، لذا داریم:

$$b_5=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\sin 5x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin 5x dx=\frac{1}{\pi}[\int_0^\pi \sin 5x dx-\int_0^\pi \cos 2x\sin 5x dx]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^\pi \sin 5x dx-\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin 7x+\sin 3x)dx]=\frac{1}{\pi}[-\frac{1}{5}\cos 5x\Big|_0^\pi+\frac{1}{14}\cos 7x\Big|_0^\pi+\frac{1}{6}\cos 3x\Big|_0^\pi]=\frac{1}{\pi}(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3})=\frac{-8}{105\pi}$$

مثال ۳۹: سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)=\sin(\alpha x)$ ($0<\alpha<1$ ثابت)، $0\le x\le\pi$ ، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha\pi}-\frac{2\alpha\cos(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2-\alpha^2}$

۲) $\frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\frac{2\alpha\cos(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2-\alpha^2}$

۳) $\frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha\pi}-\frac{2\alpha\cos(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2-\alpha^2}$

۴) $\frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\frac{2\alpha\cos(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2-\alpha^2}$

پاسخ: «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست» برای محاسبه سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)$، باید ضرایب a_0 و a_n را محاسبه کنیم.

$$f(x)=\sin(\alpha x)\ ;\ 0\le x\le\pi \quad , \quad L=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\alpha x)dx=-\frac{1}{\alpha\pi}\cos(\alpha x)\Big|_0^\pi=-\frac{1}{\alpha\pi}(\cos(\alpha\pi)-1)=\frac{1}{\alpha\pi}(1-\cos(\alpha\pi))$$

(البته با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه‌ی a_0 نبود)

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(\alpha x)\cos(nx)dx$$

اکنون با استفاده از رابطه تبدیل حاصل‌ضرب به حاصل‌جمع در مثلثات خواهیم داشت:

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}[\sin(\alpha+n)x+\sin(\alpha-n)x]dx = \frac{1}{\pi}[\int_0^\pi \sin(\alpha+n)xdx+\int_0^\pi \sin(\alpha-n)xdx]$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{\alpha+n}\cos(\alpha+n)x\Big|_0^\pi - \frac{1}{\alpha-n}\cos(\alpha-n)x\Big|_0^\pi]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{\alpha+n}(\cos(\alpha\pi+n\pi)-1)-\frac{1}{\alpha-n}(\cos(\alpha\pi-n\pi)-1)]$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{\alpha+n}(\cos(\alpha\pi)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}-\sin(\alpha\pi)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}-1)-\frac{1}{\alpha-n}(\cos(\alpha\pi)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}+\sin(\alpha\pi)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}-1)]$$

$$= \frac{1}{\pi}[(-1)^n\cos(\alpha\pi)(-\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{\alpha-n})+(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n})] = \frac{1}{\pi}[\frac{2\alpha(-1)^n\cos(\alpha\pi)}{n^2-\alpha^2}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}] = \frac{2\alpha}{\pi(n^2-\alpha^2)}[(-1)^n\cos(\alpha\pi)-1]$$

بنابراین سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)$ برابر می‌شود با:

$$f(x) = a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{1-\cos(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(n^2-\alpha^2)}[(-1)^n\cos(\alpha\pi)-1]\cos(nx)$$

مثال ۴۰: برای تابع $f(x)=x\cos x$ ، $0<x<\pi$، سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه را در نظر می‌گیریم. سه جمله اول این سری، کدام است؟

(مهندسی مکانیک و هوافضا ـ دکتری ۹۴)

۱) $-\frac{2}{\pi}+\pi\cos x-\frac{20}{9\pi}\cos 2x$

۲) $-\frac{2}{\pi}+\cos x-\frac{20}{9\pi}\cos 2x$

۳) $-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{10}{9\pi}\cos 2x$

۴) $-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{20}{9\pi}\cos 2x$

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به این که در پاسخ به این سؤال چند بار انتگرالِ $\int x\cos(kx)dx$ را نیاز داریم، ابتدا آن را به روش جدول حل می‌کنیم.

x	cos(kx)
۱	$\frac{1}{k}\sin(kx)$
۰	$-\frac{1}{k^2}\cos(kx)$

$$\int x\cos(kx)dx = \frac{x}{k}\sin(kx)+\frac{1}{k^2}\cos(kx)$$

در سری فوریه‌ی کسینوسی، $b_n=0$ است. a_0 و a_n را محاسبه می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{2}{2L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi x\cos xdx$$

در فرمول به دست آمده به ازای $k=1$ داریم:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}[x\sin x+\cos x]\Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi}$$

ضریب a_n را با استفاده از فرمول مثلثاتیِ $\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x]$ به دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{2}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx$$

حال به ازای $n\neq 1$ می‌توانیم از فرمول به دست آمده با روش جدول استفاده کنیم. به ازای $k=n+1$ و $k=n-1$ داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi}[\frac{x}{n+1}\sin(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\cos(n+1)x+\frac{x}{n-1}\sin(n-1)x+\frac{1}{(n-1)^2}\cos(n-1)x]\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)^2}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)^2}]$$

اگر $n=2m-1>1$ فرد باشد، به وضوح $a_{2m-1}=0$ است. اما برای اعداد زوج $n=2m$ داریم:

$$a_{2m} = \frac{-2}{\pi}[\frac{1}{(2m+1)^2}+\frac{1}{(2m-1)^2}]$$

با جایگذاری $m=1$ داریم $a_2=-\frac{20}{9\pi}$. مقدار a_1 را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos xdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{\pi}[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x]\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}] = \frac{\pi}{2}$$

سه جمله‌ی اول از سری فوریه‌ی کسینوسی عبارتند از:

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x = -\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{20}{9\pi}\cos 2x$$

مثال۴۱: سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع f را بنویسید هرگاه در ناحیه‌ای که f غیرصفر است تعریف آن به صورت:

$f(x)=H(-x)-2H(1-x)+H(2-x)$ باشد که در آن $H(x)=\begin{cases}1\,, & x>0\\ 0\,, & x<0\end{cases}$. (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۲) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۳) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m-1}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

۴) $f(x)\sim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{m}}{\pi(2m-1)}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» مهم‌ترین قسمت حل این سؤال، به دست آوردن ضابطه‌ی $f(x)$ است. دقت کنید طبق صورت سؤال $H(u)=\begin{cases}1 & ; u>0\\ 0 & ; u<0\end{cases}$،

بنابراین در بازه $x<0$ مقدار $H(-x)$ برابر با یک است (چون $u=-x>0$)، مقدار $-2H(1-x)$ در بازه $x<0$ برابر با $-2=-2\times1$ است $(x<0\ \Rightarrow u=1-x>0)$ و بالاخره مقدار $H(2-x)$ برابر با $\underline{1}$ است $(x<0\ \Rightarrow u=2-x>0)$ و لذا برای $x<0$ ضابطه‌ی $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=1-2\times1+1=0$$

به همین ترتیب اگر مقدار $f(x)$ را در بازه‌های مختلف حساب کنیم، ضابطه‌ی $f(x)$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -1 & 0<x<1\\ +1 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x\ ,\ a_0=0\ ,\ L=2$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\int_0^1(-1)\times\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 1\times\cos\frac{n\pi x}{2}dx=(-\frac{2}{n\pi})(\sin\frac{n\pi}{2})+(-\frac{2}{n\pi})(\sin\frac{n\pi}{2})=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

به ازای nهای زوج $a_n=0$ و به ازای nهای فرد $n=2m-1$، $a_n=-\frac{4(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi}$ می‌باشد.

مثال۴۲: در سری فوریه سینوسی $f(x)=[x]+1;0<x<\frac{\pi}{2}$، ضریب $\sin 5x$ کدام است؟([ ] بیانگر جزء صحیح است) (هوافضا و نفت ـ سراسری ۹۷)

۱) $\frac{-2}{5\pi}[3+\cos10]$

۲) $\frac{2}{5\pi}[3+\cos10]$

۳) $\frac{-2}{5\pi}[1+\cos10]$

۴) $\frac{2}{5\pi}[1+\cos10]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$f(x)=[x]+1\qquad;\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

ضریب $\sin 5x$ همان b_5 است، لذا ابتدا باید فرمول مربوط به ضرایب b_n را بنویسیم. لذا داریم:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\qquad,\qquad L=\frac{\pi}{2}$$

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([x]+1)\sin(2nx)dx$$

بنابراین ضریب b_5 برابر می‌شود با:

$$b_5=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}([x]+1)\sin10xdx=\frac{4}{\pi}[\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x]\sin10xdx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin10xdx}_{I_2}]=\frac{4}{\pi}(I_1+I_2)\qquad(*)$$

حال به محاسبه جداگانه انتگرال‌های I_1 و I_2 می‌پردازیم. در انتگرال I_1 به دلیل وجود عبارت $[x]$ مجبوریم که کران بالایی انتگرال را به‌صورت زیر بشکنیم. بنابراین داریم:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x]\sin10xdx=\int_0^1[x]\sin10xdx+\int_1^{\frac{\pi}{2}}[x]\sin10xdx$$

$$\begin{cases}0<x<1\ \Rightarrow[x]=0\\ 1\le x<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow[x]=1\end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$I_1=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sin 10x\,dx=\frac{-1}{10}\cos 10x\,\Big|_1^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{10}(\cancelto{-1}{\cos 5\pi}-\cos 10)=\frac{1}{10}(1+\cos 10)$$

انتگرال I_2 نیز به راحتی قابل محاسبه است و داریم:

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 10x\,dx=\frac{-1}{10}\cos 10x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{10}(\cancelto{-1}{\cos 5\pi}-\cancelto{1}{\cos 0})=\frac{1}{5}$$

بنابراین از رابطه $(*)$ داریم:

$$b_5=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{10}(1+\cos 10)+\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\cos 10\right)=\frac{4}{10\pi}(3+\cos 10)=\frac{2}{5\pi}(3+\cos 10)$$

مثال ۴۳: تابع f در بازهٔ $0<x<L$ فقط دارای یک نقطهٔ ناپیوستگی در $c\in(0,L)$ است به قسمتی که قبل از آن خطی است و بعد از آن نیز خطی می‌باشد و $f'(0^+)=f'(L^-)$. در این صورت ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه این تابع کدام هستند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۶)

۱) $a_n=\dfrac{2L}{(n\pi)^2}[f'(c^-)-f'(c^+)]$

۲) $a_n=\dfrac{2}{n\pi}[f(c^-)-f(c^+)]$

۳) $a_n=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi c}{L}[f(c^-)-f(c^+)]+\dfrac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-1)f'(0^+)$

۴) $a_n=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi c}{L}[f(c^-)-f(c^+)]+\dfrac{2L}{(n\pi)^2}\cos\dfrac{n\pi c}{L}[f'(c^-)-f'(c^+)]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|c} f(x) & \cos\frac{n\pi x}{L} \\ \hline f'(x)\ ^{+} & \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L} \\ f''(x)\ ^{-} & -(\frac{L}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{L} \\ + & \\ \cdots\ \vdots & \cdots \end{array}$$

$$a_n=\left[\frac{2}{n\pi}(\sin\frac{n\pi x}{L})f(x)\right]_0^{c^-}+\left[\frac{2}{n\pi}(\sin\frac{n\pi x}{L})f(x)\right]_{c^+}^{L}+\left[\frac{2L}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{L})f'(x)\right]_0^{c^-}+\left[\frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos\frac{n\pi x}{L})f'(x)\right]_{c^+}^{L}$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c^-)-f(c^+)]+\frac{2L}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi c}{L}[f'(c^-)-f'(c^+)]-\frac{2L}{(n\pi)^2}f'(0^+)+\frac{2L}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)f'(L^-)$$

چون $f(x)$ قبل و بعد از نقطه $x=c$ خطی است بنابراین مقدار $f'(x)$ بعد و قبل از $x=c$ یک مقدار ثابت است و همچنین چون $f'(L^-)=f(0^+)$ است، لذا نتیجه می‌گیریم که این مقدار ثابت در دو طرف $x=c$ برابر است. بنابراین داریم:

$$f'(c^-)=f'(c^+)=f'(0^+)=f'(L^-)$$

بنابراین a_n به صورت مقابل ساده می‌شود:

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{L}[f(c^-)-f(c^+)]+\frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi-1)f'(0^+)$$

نکته۱۱: سری فوریه توابع $A\sin ax$ و $B\cos ax$ در دوره تناوب این توابع برابر خود آنها می‌باشد. بنابراین هرگاه به توابعی برخورد کنیم که قسمتی از آن شامل عبارات فوق باشد، می‌توانیم سری فوریه بقیه تابع را محاسبه کنیم و نتیجه را با آن قسمت از تابع که سری فوریه‌اش خودش است، جمع کنیم. برای مثال سری فوریه تابعی که با شرایط زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=x+\sin 6x+\cos x\quad,\quad -\pi<x<\pi\ ,\ T=2\pi$$

برابر است با:

$$f(x)=\sin 6x+\cos x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

دقت شود در این فرآیند ممکن است توابع مثلثاتی هم داده شوند که با انجام روابط مثلثاتی بر روی آنها بتوان بدون انتگرال‌گیری بسط فوریه را نوشت.

مثال ۴۴: هر گاه بسط فوریه یک تابع تناوبی برای دوره‌ی تناوب $T = 2\pi$ به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

باشد، مقدار b_3 برای $f(x) = (\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{2})^2$ کدام خواهد بود؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2} + \sin x - \frac{1}{2})^2$$

$$= (\frac{\cos 2x}{2} + \sin x)^2 = \frac{\cos^2 2x}{4} + \sin^2 x + \sin x \cos 2x = \frac{1+\cos 4x}{8} + \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

ملاحظه می‌گردد ضریب $\sin 3x$ یا همان b_3 برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۴۵: سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \cos^2 \pi x$ در نیم دامنه $[0,1]$ کدام است؟

(مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی ـ مهندسی داروسازی و مهندسی نانو مواد ـ سراسری ۸۶)

۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x$ ۲) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos n\pi x}{2(n^2+1)}$ ۳) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{2(n^2+1)}$ ۴) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{2(n^2+1)}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x) = \cos^2 \pi x = \frac{1+\cos 2\pi x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x$$

مثال ۴۶: سری فوریه‌ی تابع $f(x) = 4\sin x \cos^2 x$ کدام است؟ (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۶)

۱) $\sin x - \sin 3x$ ۲) $\sin x + \sin 3x$ ۳) $2\sin x - 3\sin 3x$ ۴) $2\sin x + 3\sin 3x$

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است ضابطه تابع را ساده کنیم:

$$f(x) = 4\sin x \cos^2 x = 4\sin x(\frac{1+\cos 2x}{2}) = 2\sin x + 2\sin x \cos 2x = 2\sin x + \sin 3x - \sin x = \sin x + \sin 3x$$

روش تستی: با توجه به آنکه $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ می‌باشد، با جایگذاری $\frac{\pi}{2}$ در گزینه‌ها مشخص می‌شود که تنها گزینه (۲) برابر صفر می‌شود.

مثال ۴۷: در نمایش سری فوریه تابع $f(t) = \sin^2 t \cos 2t$ (که با دوره تناوب $T = 2\pi$ متناوب است) به شکل $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$

کدام مقادیر صحیح هستند؟

۱) $a_0 = -\frac{1}{4}$ و $a_2 = \frac{1}{2}$ و $a_4 = -\frac{1}{4}$ ۲) $a_0 = 8$ و $a_2 = 2$ و $a_4 = 4$

۳) $a_0 = 4$ و $a_2 = 2$ و $a_4 = 4$ ۴) $a_0 = -\frac{1}{2}$ و $a_2 = \frac{1}{2}$ و $a_4 = -\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$f(t) = \sin^2 t \cos 2t = (\frac{1-\cos 2t}{2})(\cos 2t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos^2 2t = \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}[\frac{1+\cos 4t}{2}] = \underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}}}_{\frac{a_0}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{a_2}\cos 2t \underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}}}_{a_4}\cos 4t$$

مثال ۴۸: هرگاه تابع f در بازه $[\circ,\pi]$ فرد باشد و $f(x)=3x^2+\sin 4x$ آن گاه ضریب $\sin 4x$ در سری فوریه مثلثاتی f در بازه $[-\pi,\pi]$، کدام است؟

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون و مهندسی نانو مواد، بیوتکنولوژی و داروسازی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{2-3\pi}{2}$ ۲) $-\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{2+3\pi}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» کافیست ضریب $\sin 4x$ در سری فوریه‌ی تابع $y=3x^2$ را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ پیدا کنیم. اگر این ضریب را b_4 بنامیم، ضریب $\sin 4x$ در سری فوریه‌ی $f(x)$ برابر است با $1+b_4$. برای محاسبه‌ی b_4 با توجه به زوج بودن $y=3x^2$ داریم:

$$b_4=\frac{2}{\pi}\int_\circ^\pi 3x^2\sin 4x\,dx$$

با کمک جدول جزء به جزء خواهیم داشت:

$3x^2$	$\sin 4x$
$6x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
6	$-\frac{1}{16}\sin 4x$
$\circ$	$\frac{1}{64}\cos 4x$

$$\Rightarrow b_4=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{4}x^2\cos 4x+\frac{6}{16}x\sin 4x+\frac{6}{64}\cos 4x\right)\Big|_\circ^\pi=-\frac{3\pi}{2}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$1+b_4=1-\frac{3\pi}{2}=\frac{2-3\pi}{2}$$

مثال ۴۹: اگر $\circ\le t\le 2\pi$ ، $f(t)=\sin^5 t$، آنگاه مقدار b_5 کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $-\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه «۲» بهتر است از فرمول‌های مثلثاتی کمک بگیریم:

$$\sin^5 t=(\sin^2 t)(\sin^3 t)=\sin^2 t[\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t]=\frac{3}{4}\sin^3 t+(\frac{1-\cos 2t}{2})(-\frac{1}{4}\sin 3t)=\frac{3}{4}[\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t]-\frac{1}{8}\sin 3t+\frac{1}{8}\sin 3t\cos 2t$$

$$=\frac{9}{16}\sin t-\frac{3}{16}\sin 3t-\frac{1}{8}\sin 3t+\frac{1}{8}[\frac{1}{2}(\sin t+\sin 5t)]\Rightarrow \sin^5 t=\frac{10}{16}\sin t-\frac{5}{16}\sin 3t+\frac{1}{16}\sin 5t$$

تذکر ۴: توابع مثلثاتی دارای یک دوره‌ی تناوب ذاتی هستند. اما در برخی سؤالات، یک بازه برای این‌گونه توابع توسط طراح سؤال داده می‌شود. برای مثال می‌دانیم که $\sin^3 t$ دوره‌ی تناوب ذاتی $T=2\pi$ را دارد. حالا ممکن است بخواهیم سری فوریه‌ی این تابع را با همین دوره‌ی تناوب یا با یک دوره‌ی تناوب دیگر بنویسیم. اگر دوره‌ی تناوب داده شده، همان دوره‌ی تناوب ذاتیِ یا مضرب صحیحی از دوره تناوب ذاتی آن تابع باشد، می‌توانیم از فرمول‌های مثلثاتی برای یافتن سری فوریه استفاده کنیم. معمولاً در این حالت سری فوریه از چند جمله‌ی متناهی تشکیل می‌شود و اغلب ضرایب به جز چند ضریب ابتدایی، صفر می‌شوند. برای مثال برای تابع $f(t)=\sin^3 t$ در بازه $\circ\le t\le 2\pi$، می‌توان از رابطه‌ی $\sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ استفاده کرد. (چون دوره تناوب تابع $\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ هم برابر با 2π است.) اما برای همین تابع (یعنی $f(t)=\sin^3 t$) در بازه‌ی $\circ\le t\le\pi$، نمی‌توان از رابطه‌ی یاد شده استفاده کرد. (چون دوره تناوب تابع $\sin^3 t$ طبق تعریفی که انجام شده برابر با π است، اما دوره تناوب $\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$ برابر با 2π است. و یا به عبارت دیگر دوره تناوب در این حالت مضرب صحیحی از 2π نیست: $(\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2})$

توجه: تا حالا روش‌های تشریحی محاسبه‌ی سری فوریه را گفتیم، حالا نوبت ارائه روش‌های تستی است که آن‌ها را به صورت دسته‌بندی شده ارائه می‌دهیم.

شرایط وجود سری فوریه

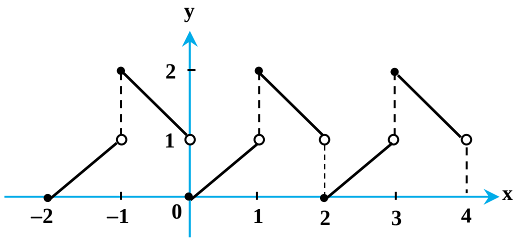
حقیقت آن است که هیچ شرط **لازم و کافی** برای آن که دقیقاً چه توابعی سری فوریه دارند، تاکنون پیدا نشده است! در عمل دسته‌ی بزرگی از توابع دارای سری فوریه هستند که به آن‌ها توابع انتگرال‌پذیر لبگ می‌گویند.

اما در درس ریاضیات مهندسی، ما خود را به توابعی محدود می‌کنیم که در محاسبات مهندسی ظاهر می‌شوند. این توابع اغلب خوش رفتار هستند. به این معنی که ناپیوستگی‌های آن‌ها تحت کنترل قرار دارند. برای آنکه دقیق‌تر وارد بحث شویم به قضیه‌ی زیر دقت کنید:

قضیه: هرگاه تابع حقیقی $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ با دوره‌ی تناوب $T=2L$ فقط در تعدادی متناهی از نقاط ناپیوسته باشد و در هر نقطه x حد راست و چپ آن موجود باشد، (البته ممکن است، برابر نباشند) می‌گوییم f تابعی تکه‌ای پیوسته است، که هر تابع با این شرایط دارای سری فوریه است.

مثال ۷۲: تابع زیر را با دوره تناوب $T=2$ در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 3-x & 1\le x<2\end{cases}$$



این تابع در همه‌ی نقاط بازه‌ی $[0,2]$ به جز نقاط $x=0,1,2$ پیوسته است. اما در این نقاط هم حدود چپ و راست آن موجود و متناهی است.

$$f(1^-)=1\ ,\ f(1^+)=2\ ,\ f(2^-)=1\ ,\ f(2^+)=0\ ,\ f(0^+)=0\ ,\ f(0^-)=1$$

بنابراین این تابع، تکه‌ای پیوسته است و سری فوریه دارد.

مثال ۷۳: توابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ را بر بازه‌ی $(0,1)$ در نظر بگیرید. این توابع با آن که فقط در یک نقطه $(x=0)$ ناپیوستگی دارند، اما تکه‌ای پیوسته محسوب نمی‌شوند. زیرا $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\sin(\frac{1}{0^+})=\sin\infty$ یعنی حد راست $f(x)$ در صفر، بی‌کران می‌شود و حد راست $g(x)$ در صفر وجود ندارد.

اگر تابع $f(x)$ دارای شرایط قضیه‌ی فوق باشد، به طور ذاتی ویژگی‌هایی پیدا می‌کند که به صورت زیر خلاصه می‌شود:

الف) عددی مانند $M>0$ وجود دارد که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)|<M$، به عبارتی تابع f کران‌دار خواهد بود.

ب) تعداد نقاط بیشینه و کمینه‌ی مطلق f در هر بازه‌ی کران‌دار، متناهی است.

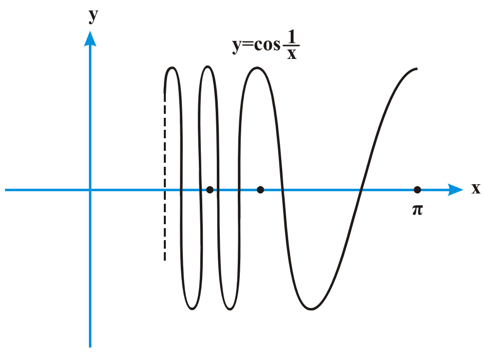
ج) تعداد ناپیوستگی‌های f در هر بازه‌ی کران‌دار، متناهی است.

توجه: همه موارد فوق، شرط کافی برای وجود سری فوریه هستند نه شرط لازم. یه این معنی که اگر تابعی این شرایط را داشته باشد، وجود سری فوریه‌ی آن تضمین شده است. اما اگر در این شرایط صدق نکند، ممکن است سری فوریه داشته یا نداشته باشد. شرایط بالا را شرایط دیریکله می‌نامند.

نکته ۱۲: توابع متناوبی که در بازه‌ی $(0,L)$ به صورت $\sin\frac{c}{x^b}$ یا $\cos\frac{c}{x^b}$ برای اعداد ثابت $c\neq0$ و $b>0$ تعریف شوند، دارای بی‌شمار نقطه‌ی بیشینه و کمینه بوده و تکه‌ای پیوسته نیستند.

مثال ۷۴: برای نمونه تابع $y=\cos\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $0<x<\pi$ بررسی می‌کنیم. نقاط بیشینه و کمینه‌ی این تابع عبارتند از؛ ریشه‌های مشتق آن:

$$y'=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=0\Rightarrow\frac{1}{x}=n\pi\Rightarrow x=\frac{1}{n\pi}$$



در هر نقطه از دنباله‌ی $x_n=\frac{1}{n\pi}$ یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق داریم. تعداد این نقاط، نامتناهی است. این تابع در فاصله‌ی $(0,\pi)$ بی‌شمار نوسان دارد. نمودار آن مانند فنری است که لحظه به لحظه فشرده‌تر می‌شود. بنابراین این تابع ویژگی (ب) را ندارد.

نکته ۱۳: توابع به فرم $f(x)=x^a\sin\frac{c}{x^b}$ و $f(x)=x^a\cos\frac{c}{x^b}$ به ازای هر $a>0$ تکه‌ای پیوسته‌اند و در فاصله‌ی $(-L,L)$ سری فوریه دارند. اما اگر $b>0$ و $a\le0$ باشد؛ ضمن آن‌که حد چپ و راست آن‌ها در $x=0$ وجود ندارد، سری فوریه هم ندارند. ضمناً این توابع در حالتی که $b\ge a>0$ باشد، تکه‌ای پیوسته هستند، اما تکه‌ای هموار نیستند. این توابع دارای سری فوریه‌اند اما سری فوریه‌ی آن‌ها به $f(x)$ همگرا نیست. در حالتی که $a>b>0$ باشد، تابع $f(x)$ تکه‌ای هموار است و سری فوریه‌ای دارد که به $f(x)$ همگراست. به عنوان مثال، تابع $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ سری فوریه دارد اما سری فوریه‌اش به $f(x)$ همگرا نیست. تابع $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ سری فوریه‌ای دارد که به $f(x)$ همگراست.

مثال ۷۵: تابع $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ را در محدوده $-\pi<x<\pi$ در نظر بگیرید، در این صورت می‌توان گفت این تابع: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۳)

۱) دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون دارای ناپیوستگی در محدوده است.

۲) دارای بسط کسینوسی فوریه در محدوده است چون تابع زوج می‌باشد.

۳) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تابع نوسانی (پریودیک) نیست.

۴) در محدوده دارای بسط فوریه نمی‌باشد چون تعداد حداکثر و حداقل آن محدود نمی‌باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق متن درس، تابع $f(x)=x^a\sin(\frac{1}{x^b})$ برای $a>0$ تکه‌ای پیوسته است، بنابراین تابع $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$ تکه‌ای پیوسته است و دارای سری فوریه خواهد بود. این تابع حاصل‌ضرب دو تابع فرد است، بنابراین زوج خواهد بود و در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ دارای بسط فوریه‌ی کسینوسی است. البته شرط همگرا بودن سری فوریه به تابع $f(x)$ آن است که $a>b>0$ باشد، بنابراین سری فوریه‌ی $x\sin\frac{1}{x}$ به این تابع همگرا نیست. اگر طراح سؤال، بحث همگرایی را مطرح می‌کرد، جواب آن بود که سری فوریه وجود دارد، اما به تابع $f(x)$ همگرا نیست.

توجه داشته باشید که تعداد اکسترمم‌های $f(x)$ نامتناهی است، اما این باعث نمی‌شود که سری فوریه وجود نداشته باشد. اگر تعداد اکسترمم‌ها متناهی باشد، سری فوریه حتماً وجود دارد. اگر تعداد اکسترمم‌ها نامتناهی باشد به این معنی نیست که دیگر سری فوریه وجود ندارد و باید به سایر ویژگی‌های تابع توجه کنیم.

قضیه دیریکله

اگر تابع متناوب f بر بازه $[-L \text{ و } L]$ تکه‌ای هموار باشد، یعنی f و f' هر دو تکه‌ای پیوسته باشند، آنگاه مقدار سری فوریه تابع در هر نقطه‌ی x_0، برابر میانگین حد چپ $[f(x_0^-)]$ و حد راست $[(f(x_0^+)]$ در آن نقطه خواهد بود:

$$\text{مقدار سری فوریه در نقطه‌ی } x_0 = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

واضح است که اگر x_0 نقطه‌ی **پیوستگی** تابع باشد، آن‌گاه داریم $f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x)$ و در نتیجه داریم:

$$\text{مقدار سری فوریه تابع در نقطه } x_0 = f(x_0)$$

مثال ۷۶: مقدار سری فوریه متناظر با تابع متناوب: $L=\pi$, $f(x)=2x^4+3x-1\,,\,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$، کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi^2+12\pi-8}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2-8}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2-8}{8}$ ۴) $\frac{\pi^2+12\pi-8}{4}$

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

تابع $f(x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است. طبق قضیه دیریکله، در این نقطه مقدار سری فوریه برابر است با:

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}^-)+f(\frac{\pi}{2}^+)}{2}=\frac{f(+\frac{\pi}{2})+f(-\frac{\pi}{2})}{2}$$

طبق صورت سؤال $L=\pi$ است بنابراین $T=2\pi$ خواهد بود در نتیجه داریم:

$$f(\frac{\pi}{2}^+)=f((\frac{\pi}{2}-2\pi)^+)=f(-\frac{3\pi}{2}^+)$$

اما طراح سؤال در مورد ضابطه‌ی f در $-\frac{3\pi}{2}$ هیچ اطلاعی نداده است. حالا فرض کنیم اشتباه تایپی رخ داده است و منظور طراح سؤال $T=2L=\pi$ بوده است. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^4}{8}+\frac{3\pi}{2}-1 \\ f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^4}{8}-\frac{3\pi}{2}-1 \end{cases} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})+f(-\frac{\pi}{2})=2(\frac{\pi^4}{8}-1)$$

بنابراین مقدار سری فوریه در $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است با:

$$\frac{\pi^4}{8}-1=\frac{\pi^4-8}{8}$$

توضیح: در صورت اصلاح گزینه‌ها، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه

در این قسمت می‌خواهیم ارتباط سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه با ناپیوستگی تابع و مشتقات تابع را بررسی کنیم.

اگر **خودِ تابع $f(x)$**، حداقل یک نقطه‌ی **ناپیوستگی** داشته باشد، حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعتی نظیر $\frac{C}{n}$ (C عددی حقیقی است) به صفر همگرا می‌شود و آن یکی ضریب هم **نمی‌تواند** با سرعت کمتر از $\frac{C}{n}$ به صفر همگرا شود.

به همین ترتیب اگر **$f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته باشد**، آن‌وقت حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعتی نظیر $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شود و آن یکی ضریب هم **نمی‌تواند** با سرعت کمتر از $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا شود. به طور کلی اگر $f(x)$ تا $f^{k-1}(x)$ (یعنی مشتق مرتبه «$k-1$ام») پیوسته باشد و **$f^{(k)}(x)$ ناپیوسته** باشد، آن‌وقت حداقل یکی از a_nها یا b_nها با سرعت $\frac{C}{n^{k+1}}$ به صفر همگرا می‌شود و ضریب دیگر هم نمی‌تواند با سرعت کمتر از $\frac{C}{n^{k+1}}$ به صفر همگرا شود.

برای مثال؛ در تابع $f(x)=|\sin x|$، چون $f(x)$ در بازه $0<x<2\pi$ پیوسته و $f'(x)$ ناپیوسته است، سرعت همگرایی یکی از ضرایب حداقل $\frac{C}{n^2}$ می‌شود، و یا مثلاً برای تابع $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & ;\ 0\le x<1\\ 3-x & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}$، چون خودِ تابع پیوسته، ولی مشتق آن ناپیوسته است، پس ضرایب سری فوریه حداقل با سرعت $\frac{C}{n^2}$ به صفر همگرا می‌شوند. به ضابطه‌ی مشتق این تابع دقت کنید:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & ;\ 0\le x\le 1\\ -1 & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید در $x=1$ مشتق تابع ناپیوستگی دارد.

تذکر۵: سرعت همگرایی ضرایب سری فوریه در صورتی قابل بررسی است که تابع $f(x)$، کران‌دار و قطعه‌ای پیوسته باشد. برای مثال تابع ضربه $\delta(x)$، در $x=0$ بی‌کران است و قطعه‌ای پیوسته نخواهد بود. از طرفی ضرایب فوریه‌ی این تابع، ثابت $\frac{1}{\pi}$ هستند و اصلاً به صفر همگرا نمی‌شوند بنابراین مطالب فوق برای تابع ضربه صدق نمی‌کند.

مثال۷۹: می‌دانیم یک تابع متناوب دارای ضرایب فوریه به صورت $b_n=\frac{2}{\sqrt{(n^2-1)^2+4n^2}}$, $a_n=\frac{2n}{\sqrt{(n^2-1)^2+4n^2}}$ است، در مورد پیوستگی تابع و مشتقات این تابع چه می‌توان گفت؟

☑ **پاسخ:** ضریب a_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n}$ و b_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^2}$ کاهش می‌یابد. بنابراین حداقل سرعت یعنی $\frac{C}{n}$ را در نظر می‌گیریم و طبق توضیحات، واضح است این تابع دارای ناپیوستگی است و در ناپیوستگی‌هایش به وضوح مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال۸۰: می‌دانیم یک تابع متناوب دارای ضرایب سری فوریه به صورت $b_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n^2+1}}$, $a_n=\frac{1}{(2n-1)\sqrt{n^2+1}}$ است، در مورد پیوستگی تابع و مشتقات این تابع چه می‌توان گفت؟

۱) خودِ تابع ناپیوسته است و طبیعتاً مشتق‌های آن موجود نیستند.
۲) خودِ تابع پیوسته است ولی مشتق اول آن ناپیوسته است.
۳) خودِ تابع و مشتق اول آن پیوسته هستند، ولی مشتقات مرتبه‌ی دو و بالاتر از آن، وجود ندارند.
۴) خودِ تابع و مشتق‌های اول و دوم آن پیوسته هستند، ولی مشتقات مرتبه‌ی سه و بالاتر از آن، وجود ندارند.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ضریب a_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^2}$ و ضریب b_n با سرعتی معادل $\frac{C}{n^3}$ کاهش پیدا می‌کند، بنابراین ضریب $\frac{C}{n^2}$ را در نظر می‌گیریم (یعنی حداقل سرعت را در نظر می‌گیریم) پس خودِ تابع پیوسته است، ولی مشتق اول آن پیوسته نیست.

مثال۸۱: در بسط تابع پریودیک $f(x)$ به سری فوریه، ضرایب a_n و b_n با روابط $(n\neq 0)$ $b_n=\frac{4\pi n(1-e^{-1})}{1+4\pi n^2}$, $a_n=\frac{2(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}$ به دست آمده‌اند، کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۷۴)

۱) تابع $f(x)$ و مشتقات مرتبه اول و دوم آن پیوسته بوده ولی مشتقات مرتبه بالاتر آن ناپیوسته‌اند.
۲) عبارات داده شده برای a_n و b_n نمی‌توانند بیانگر ضرایب فوریه برای یک تابع پریودیک باشد.
۳) تابع $f(x)$ حداقل دارای یک نقطه انفصال در پریود اصلی خود می‌باشد.
۴) ضرایب فوریه به تنهایی نمی‌توانند پیوسته یا ناپیوسته بودن تابع پریودیک را مشخص نمایند.

☑ **پاسخ :** گزینه «۳» با توجه به اینکه یکی از ضرایب فوریه (یعنی b_n) با سرعتی مانند $\frac{c}{n}$ به صفر میل می‌کند، لذا طبق مطالب بیان شده تابع باید دارای حداقل یک نقطه ناپیوستگی باشد.

مثال ۸۶: سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x\ ,\ 0\le x\le\pi\\ x-\frac{3\pi}{2}\ ,\ \pi<x\le 2\pi\end{cases}$، کدام است؟ (مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$ ۲) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\cos(2k-1)x$ ۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$ ۴) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» خُب سؤال دکتری سراسری، اونم مکانیک! اما کَلَکْ زدن که دکتری یا ارشد نمی‌فهمه همه‌رو به یه چشم نگاه میکنه اولاً تابع پیوسته است، بنابراین گزینه (۲) نمی‌تونه صحیح باشه! (چون سرعت همگرایی اون‌رو به صورت $\frac{C}{2k-1}$ داده و گفتیم جملاتی به فرم $\frac{C}{2k-1}$ تو ضرایب سری فوریه‌ی توابعی که ناپیوسته هستن، باید دیده بِشه.) ثانیاً به ازای $x=2\pi$، مقدار تابع $f(x)$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ میشه، حالا باید ببینیم تو کدوم گزینه اگه به جای x، 2π قرار بِدیم، حاصل سری نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ میشه!؟ تو همه‌ی گزینه‌ها عبارت $\cos(2k-1)x$ داریم که این مقدار تو $x=2\pi$، برابر با $\underline{1}$ میشه، پس کافیه حاصل سری‌های عددی گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رو بررسی کنیم:

$$x=2\pi \text{ مقدار گزینه (۱) به ازای } =\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}=\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}\right)\simeq\frac{4}{\pi^2}<1\Rightarrow \text{غلط}$$

$$x=2\pi \text{ مقدار گزینه (۳) به ازای } =\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\simeq\frac{2}{\pi}<1\Rightarrow \text{غلط}$$

$$x=2\pi \text{ مقدار گزینه (۴) به ازای } =\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\simeq\frac{4}{\pi}\Rightarrow \text{نزدیک به } \frac{\pi}{2}$$

پس گزینه (۴) جوابه (البته با دونستن $\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{(2u-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ هم می‌شد این سؤال رو حل کرد.)

مثال ۸۷: ضرایب سری فوریه a_n تابع متناوب زیر با دوره تناوب 2π برای nهای بسیار بزرگ $(n\to\infty)$ با چه توانی از n متناسب‌اند؟

(مهندسی برق و مکانیک ـ دکتری ۹۷)

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2 x, |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

۱) n^{-4} ۲) n^{-3}

۳) n^{-2} ۴) n^{-1}

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» سؤال را می‌توان به روش تشریحی حل کرد ولی دنبال روش کوتاه و مفهومی هستیم.

در این روش باید به بررسی پیوستگی تابع و مشتق آن پرداخته شود. ابتدا به بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ می‌پردازیم.

اثبات پیوستگی تابع $f(x)$ در نقاط $x=\pm\frac{\pi}{2}$:

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ حد راست تابع در نقطه } =\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(0)=0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ حد چپ تابع در نقطه } =\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos^2 x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ مقدار تابع در نقطه } =f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است. حال به بررسی پیوستگی تابع در نقطه $x=-\frac{\pi}{2}$ می‌پردازیم:

$$x=-\frac{\pi}{2} \text{ حد راست تابع در نقطه } =\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\cos^2 x=0$$

$$x=-\frac{\pi}{2} \text{ حد چپ تابع در نقطه } =\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}(0)=0$$

$$x=-\frac{\pi}{2} \text{ مقدار تابع در نقطه } =f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

تابع $f(x)$ در نقطه $x=-\frac{\pi}{2}$ نیز پیوسته می‌باشد. (البته اگر مسلط به رسم نمودار باشید کار بررسی پیوستگی بسیار ساده‌تر انجام می‌گیرد)

بنابراین چون تابع $f(x)$ در همه‌جا پیوسته است، لذا تا اینجای کار ضابطه a_n باید به صورت $\frac{c}{n^2}$ باشد. در نتیجه گزینه (۴) قطعاً غلط است. از طرفی به دلیل وجود عامل صفرکننده $\cos x$ در ضابطه مشتق تابع $f(x)$، حاصل مشتق چپ و راست تابع در نقاط $x=\pm\frac{\pi}{2}$ برابر با صفر می‌باشد و نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع $f(x)$ نیز در همه‌جا پیوسته است. لذا داریم:

$$a_n=\frac{c}{n^2}\Rightarrow a'_n=-\frac{c}{n^3}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه a_n تابع متناوب $f(x)$ برای n های بسیار بزرگ $(n\to+\infty)$ با عبارت n^{-3} متناسب هستند.

وجود تقارن مخفی

بعضی توابع تقارن مخفی دارند، به این معنی که اگر یک عدد ثابت مانند k به ضابطه تابع اضافه شود، آنگاه تابع دارای تقارن فرد می‌شود. مثلاً اگر تابع $f(x)$ تابعی نه زوج و نه فرد باشد، و تابع $f(x)-k$ تابعی فرد شود، آنگاه سری فوریه تابع جدید به شکل زیر است:

$$f(x)-k=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\xrightarrow{\text{با انتقال } k \text{ به سمت راست داریم}}f(x)=k+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

در واقع در این حالت مقدار k همان a_0 در بسط فوریه $f(x)$ می‌باشد. دقت کنید اگر از این نکته استفاده نکنیم، باید تمام ضرایب را جداگانه حساب کنیم.

مثال۸۸: اگر تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x)=\frac{L}{2}-x$، $-\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}$، با دوره تناوب $T=L$، تعریف شده باشد، آنگاه سری فوریه آن کدام است؟

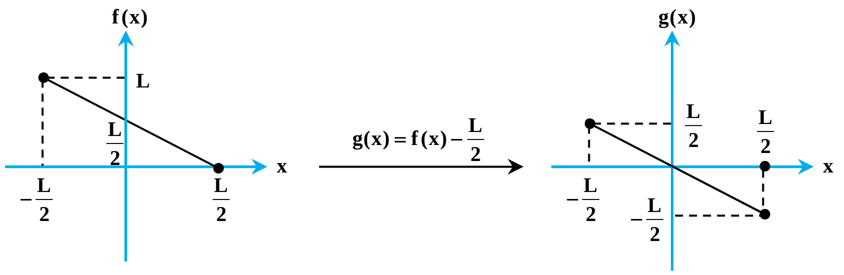
۱) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۲) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$

۳) $\frac{L}{2}-\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

۴) $\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{L}x$

پاسخ : گزینه «۲» تابع $f(x)$ دارای تقارن مخفی است، زیرا اگر تابع $f(x)$ را به اندازه $\frac{L}{2}$ به سمت پایین انتقال دهیم، دارای تقارن فرد می‌شود که در شکل زیر نشان داده شده است:



و

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\frac{L}{2}-x\\ g(x)&=f(x)-\frac{L}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(x)=-x$$

برای به دست آوردن سری فوریه $f(x)$، باید تمام ضرایب سری فوریه را به دست آوریم، ولی با استفاده از $g(x)$ که تقارن فرد دارد می‌توانیم به روش ساده‌تر به سری فوریه $f(x)$ برسیم. به این صورت که ابتدا سری فوریه $g(x)$ را به دست می‌آوریم سپس مقدار $\frac{L}{2}$ را به آن اضافه می‌کنیم که سری فوریه $f(x)$ حاصل می‌شود. چون $g(x)$ فرد است، بنابراین فقط باید ضرایب b_n را به دست آوریم:

$$b_n=\frac{2}{\frac{L}{2}}\int_0^{\frac{L}{2}}(-x)\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx=\frac{4}{L}\left[\left(\frac{xL}{2n\pi}\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)-\frac{L^2}{(2n\pi)^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}}\Rightarrow b_n=\frac{4}{L}\left[\frac{L^2}{4n\pi}\cos n\pi\right]=\frac{L}{n\pi}(-1)^n$$

بنابراین داریم:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{2n\pi}{L}x$$

می‌توانیم با استفاده از سری فوریه $g(x)$، سری فوریه $f(x)$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$g(x)=f(x)-\frac{L}{2}\Rightarrow f(x)=g(x)+\frac{L}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{L}{2}+\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x$$

فصل ششم

« معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی »

درسنامه۱: مسائل اشتروم ـ لیوویل و روش تفکیک متغیرها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در این درسنامه ابتدا با مفاهیم و تعاریف ابتدایی «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» آشنا می‌شویم. در ادامه مسائل اشتروم لیوویل را بررسی کرده و در نهایت یکی از مهم‌ترین مباحث این فصل یعنی «حل معادلات به روش تفکیک متغیرها» را آموزش می‌دهیم.

مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در حل برخی مسائل ساده فیزیکی یا علوم مهندسی به یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) برخورد می‌کنیم. در واقع این مسائل ساده عموماً فقط وابسته به **یک متغیر**، مثلاً متغیر زمان (t) و یا متغیر مکان (x) هستند. اما بسیاری از مسائل متنوع و مهم مهندسی و فیزیکی بـه **دو یا چند متغیر** بستگی دارند. مسائلی در زمینه‌ی دینامیک سیالات، ژئوفیزیک (انتشار موج زلزله‌ای)، انتقال حرارت، آیرودینامیک، علوم نور، مهندسی نفت، مکانیک کوانتوم و نظریه‌های الکترومغناطیسی، نمونه‌هایی از این مسائل هستند که در تجزیه و تحلیل آن‌ها به «معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی» (PDE) برخورد می‌کنیم. در واقع هر معادله شامل یک تابع مجهول (مانند u) که حداقل دارای دو متغیر مستقل و مجزا (مثلاً x و t) و مشتقات جزئی u نسبت به دو متغیر x و t باشد را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم. برای مثال هر یک از معادلات زیر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی محسوب می‌شوند:

۱) $u_x + u_y = x^2 + y^2 + 1$ ، ۲) $u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} - u_t = 2$

ملاحظه می‌کنید معادله‌ی (۱)، دارای دو متغیر مستقل و معادله‌ی (۲)، دارای (۴) متغیر مستقل است. لازم به ذکر است که به **مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله** «مرتبه معادله‌ی مشتق جزئی» گفته می‌شود که با این تعریف معادله (۱) مرتبه اول و معادله (۲) مرتبه دوم محسوب می‌شود.

اگر معادله شامل تابع مجهولی مانند u و مشتقات نسبی آن از درجه اول (توان یک) باشد، و آن‌ها با تابع دیگری ترکیب نشده باشند (مثلاً $\sin(u)$ نداشته باشیم) و توابع برحسب u در یکدیگر ضرب نشده باشند، معادله را **خطی** می‌گوییم. مهم‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل که ما با آن‌ها در این فصل برخورد می‌کنیم، معادلات مرتبه دوم هستند. صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی **خطی مرتبه دوم** نسبت به دو متغیر به فرم زیر است:

$$\mathbf{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G}$$

که در آن A، B، ... و G ممکن است به x و y بستگی داشته باشند، ولی به u و مشتق‌های u بستگی ندارند. هر معادله مرتبه دوم را که به فرم این معادله نیست، یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم **غیرخطی** می‌نامیم. هرگاه فقط A و B و C عدد ثابت باشند یا به x و y بستگی داشته باشند نه به u یا مشتق‌های u، معادله را **شبه خطی** می‌نامیم. تفاوت معادله شبه خطی با معادله‌ی خطی در آن است که در معادلات شبه خطی D، E، F و G ممکن است به u یا مشتق‌های u بستگی داشته باشند. (مثلاً معادله‌ی $2u_{xx} + u^2 y u_x = 0$ شبه خطی است). در معادله‌ی فوق اگر $G = 0$ معادله را **همگن** و اگر $G \neq 0$ آن را **ناهمگن** می‌نامیم.

مثال۱: کدام‌یک از معادلات دیفرانسیل جزئی زیر خطی محسوب می‌گردند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۲)

(a) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (b) $x^2\frac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ (c) $w\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = rst$ (d) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$

۱) a و b و d ۲) a و b ۳) a ۴) a و c

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ضریب w در کنار $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ باعث خطی نبودن معادله شده است.

مثال ۲: کدام‌یک از این چهار معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای دو متغیره، خطی است؟ (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۸)

۱) $u_{xxx}+u_{xyy}+\log u=0$ ۲) $u_{xxx}+u_{xyy}+\log x=0$ ۳) $u_x+uu_y=0$ ۴) $uu_x-2xyu_y=0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گزینه‌ی دوم معادله‌ی دیفرانسیل جزئی خطی از مرتبه‌ی ۳ است، در گزینه‌ی ۱ عامل $\log u$ باعث غیرخطی شدن آن شده است، در گزینه‌ی سوم عامل uu_y باعث غیرخطی بودن آن شده و در گزینه‌ی چهارم نیز عامل uu_x باعث غیرخطی شدن معادله شده است.

مثال ۳: این مسأله‌ی مقادیرِ اولیه با مقادیر آغازی (initial value problem) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'''+y''-y'+y=\cos x & 0\le x<\infty \\ y(0)=-1 \quad y'(0)=4 & y''(0)=3 \end{cases}$$

اگر y جواب مسأله‌ی فوق باشد، آنگاه $y'''(0)$ برابر است با: (دکتری برق ـ دانشگاه آزاد سال ۸۵)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» کافی است که $x=0$ قرار دهیم و در معادله جایگذاری کنیم. با توجه به مقادیر اولیه داده شده برای y'', y', y، مقدار $y'''(0)$ بـه دسـت می‌آید:

$$\xrightarrow{x=0} y'''(0)+y''(0)-y'(0)+y(0)=\cos(0) \xrightarrow{\text{با توجه به معلومات صورت سوال}} y'''(0)+3-4-1=1 \Rightarrow y'''(0)=3$$

گفتیم که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارای تنوع زیادی هستند. مهم‌ترین و مطرح‌ترین آن‌ها به صورت زیر است: ($c>0$ عددی ثابت است)

۱) $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ (معادله‌ی موج در یک بعد)

۲) $u_t-c^2u_{xx}=0$ (معادله‌ی حرارت در یک بعد)

۳) $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ (معادله‌ی پواسون در دو بعد)

۴) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (معادله‌ی لاپلاس در سه بعد)

۵) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})-\frac{1}{c^2}(\frac{\partial u}{\partial t})=0$ (معادله‌ی حرارت در دو بعد در مختصات قطبی)

۶) $u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})$ (معادله‌ی موج در دو بعد)

۷) $u_{xx}+u_{yy}=0$ (معادله‌ی لاپلاس در دو بعد)

۸) $u_{tt}=u_{xx}+\alpha u_t+\beta u$ معادله‌ی تلگراف (α و β ثابت)

همان‌طور که در تمام معادلات بالا مشخص است، پاسخ مسأله یعنی u، به بیش از یک متغیر بستگی دارد (مثلاً در معادله‌ی (۱) و (۲) پاسخ مسأله بـه x و t بستگی دارد کـه در آن‌ها x متغیـر مکـان و t متغیـر زمـان اسـت.) در برخـی معـادلات ماننـد معـادلات (۳) و (۴) متغیرهـای مسأله فقـط از نـوع مکانی (x,y,z) هستند، و بالاخره همان‌طور که در معادله‌ی (۵) می‌بینید، این معادلات با توجه به شرایط هندسی مسأله ممکن است در مختصات قطبی، استوانه‌ای، کروی و ... مطرح شوند.

در حل این‌گونه سؤالات باید توجه کنید که چون در روند حل با یک معادله دیفرانسیل روبه‌رو می‌شویم، پاسخ‌ها کلی و به همراه پارامتر ثابت بدست مـی‌آینـد (که مقادیر ثابت در مسائل با توجه به محدودیت‌ها بدست می‌آیند.) و یا گاهی اوقات برای مسأله با مشتقات جزئی تعداد جواب‌ها و حتی نوع تـابع جـواب کـاملاً متفاوت بدست می‌آید. برای مثال هر یک از توابع $e^x\cos y$ ، $e^y\sin x$ ، x^2-y^2 ، $Ln(x^2+y^2)$ و xy جواب معادله‌ی $u_{xx}+u_{yy}=0$ هستند. (می‌توانید با مشتق‌گیری از هر یک از توابع داده شده و قرار دادن آن در معادله صحت این ادعا را بررسی کنید!) در واقع وقتی ما با یک مسـأله مهندسـی یـا فیزیکـی و یـا نظایر آن روبه‌رو هستیم، معمولاً باید به جواب «یکتا» برسیم (فرض کنید قرار باشد درجه حرارت یک نقطه در یک سنسور و یا کلیـد کنترلـی دقیقـاً یـک عـدد ثابت باشد، در این وضعیت حتماً لازم است شرایط را طوری تعریف کنیم که جواب یکتا و برابر با همان درجه حرارت خواسته شده باشد.)

هرگاه تعداد شرایط مرزی و محدودیت‌ها برابر تعداد مشتقات جزئی گرفته شده باشد، به جواب یکتا خواهیم رسید. در غیر این صورت، ثابت‌هـای دلخـواهی در جواب هستند که مقدارشان نامعلوم است. برای مثال معادله‌ی (۱) به دو شرط مرزی برای x و دو شرط مرزی برای t نیاز دارد تا به جـواب یکتـا برسـد. معادله‌ی (۲) به یک شرط مرزی برای t و دو شرط مرزی برای x نیاز دارد تا به جواب یکتایی برسد.

برای درک بهتر بحث، فرض کنید معادله‌ی حرارت در یک بعد به صورت مقابل تعریف شده باشد: $c^2u_{xx}=u_t$ ، (c عددی ثابت است)

پاسخ این مسأله تابعی مانند $u(x,t)$ است، به عبارت دیگر درجه حرارت در لحظه‌ی t و در نقطه‌ی x توسط تابع $u(x,t)$ مشخص خواهد شد. چون مسأله دارای یک بعد مکانی (یعنی x) است و زمان (یعنی t) مثبت است، به نظر می‌رسد ناحیه بررسی مسأله $0\le x\le L$ و $t\ge 0$ باشد. در واقـع مـا دنبـال پیـدا کردن درجه حرارت در هر نقطه‌ی x از یک میله با طول L و در لحظه‌ی دلخواه t هستیم. این مسأله با این شرایط تعداد زیادی جواب دارد کـه در معادلـه صدق می‌کنند. اما اگر بخواهیم مسأله دارای **پاسخ یکتا** باشد، باید محدودیت‌هایی برای مسأله در نظر گرفته شود. این محدودیت‌ها باید در $x=0$ ، $x=L$ و $t=0$ تعریف شده باشند. (چون مسأله در ناحیه $0\le x\le L$ و $t\ge 0$ مطرح است.) مقادیر درجـه حـرارت در $x=L$ و $x=0$ (یعنـی $u(L,t)$ و $u(0,t)$) به **شرایط مرزی** و یا به عبارت دیگر به **شرایط مکانی** موسوم هستند (زیرا x متغیر مکانی است) و مقدار درجه حرارت در لحظه‌ی $t=0$ ، (یعنی $u(x,0)$) **شرط اولیه** نامیده می‌شود. خُب حالا با این شرایط مسأله، انتظار داریم به پاسخ یکتا برسیم. چرا؟ چون شرایط و محدودیت‌ها برای این معادله کافی هستند (در این سؤال مشتق نسبت به x از مرتبه ۲ و مشتق نسبت به t از مرتبه ۱ است، پس نسبت به x باید ۲ شرط و نسبت به t باید یک شرط داشته باشیم).

لازم به ذکر است مسائلی از این قبیل را گاهی «**مسائل مقدار مرزی ـ مقدار اولیه**» و یا به طور خلاصه‌تر «**مسائل مقدار مرزی**» نامگذاری می‌کنند.

انواع شرایط مرزی

محدودیت‌ها (یا همان شرایط مرزی) در مسائل، معمولاً در حالت‌های مختلف داده می‌شود که مهم‌ترین آن‌ها در ریاضیات مهندسی به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

شرط دیریکله: چنانچه شرایط مرزی فقط بر حسب **مقدار تابع** مجهول بر روی میدان مکان داده شده باشد، آن را شرط دیریکله گویند.

برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از یک شرط دیریکله است: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

شرط دیریکله بیان می‌کند که؛ مقدار تابع در برخی از مرزها، ثابت است. برای نمونه در مسأله‌ی انتقال حرارت، اگر ابتدای میله را در مخلوط آب و یخ قرار دهیم، دما در آن نقطه همواره صفر است، یعنی شرط به صورت $u(0,t) = 0$ نوشته می‌شود.

شرط نیومن: اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار **مشتق تابع** مجهول (در جهت بردار نرمال بر روی میدان مکان) داده شده باشد، آن را شرط نیومن گویند. برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از شرط نیومن است: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

به عنوان یک مثال از نظر فیزیکی عایق بودن مرزها در مسأله‌ی انتقال حرارت شرط نیومن را ایجاد می‌کند.

شرط روبین (مخلوط): اگر شرایط مرزی در قسمت‌هایی از مرز بر حسب **مقدار تابع** و در قسمت‌های دیگر بر حسب **مقدار مشتق تابع** داده شده باشد، آن را شرط مرزی روبین گویند. برای مثال شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ نمونه‌ای از شرط روبین است: $u(0,t) = u_x(L,t) = 0$

شرط تناوبی: اگر تفاضل مقدار تابع در دو سر بازه (بازه‌ای متناهی) و همچنین تفاضل مقدار مشتق تابع در دو سر بازه (بازه‌ای متناهی) داده شده باشد، شرط مرزی را متناوب گویند. مثلاً دو شرط مقابل $(0 \le x \le L)$ تناوبی هستند: $u(0,t) - u(L,t) = 0 \ , \ u_x(0,t) - u_x(L,t) = 0$

و یا برای بازه‌ی $-L \le x \le L$ شرایط زیر نمونه‌ای از شرط تناوبی محسوب می‌شوند:

$$u(-L,t) - u(L,t) = 0 \ , \ u_x(-L,t) - u_x(L,t) = 0$$

برای نمونه، میله‌ای به طول L را در نظر بگیرید که منبع حرارتی (مانند شمع) دقیقاً وسط آن قرار داده شود. ابتدا و انتهای میله فاصله‌ای یکسان از منبع حرارتی دارند. بنابراین در هر لحظه‌ی t، مقدار دما (u) و تغییرات دمایی (u_x) در این دو نقطه یکسان است. یعنی داریم:

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) \ , \ u(0,t) = u(L,t)$$

تذکر ۱: دقت کنید لزومی ندارد حتماً شرایط مرزی برابر با صفر باشند، کافیست مقداری معلوم باشند و همانطور که گفتیم مثال‌های فوق فقط نمونه‌هایی از این شرایط هستند.

شرط کران‌داری: چنانچه میدان بی‌کران باشد، شرایط مرزی در بی‌نهایت به صورت حدی بیان می‌شود:

شرط $|u(a,t)| < M$ را شرط کران‌داری می‌نامیم که در آن $M > 0$ عددی ثابت است. این شرط معمولاً برای مسائلی مطرح می‌شود که بازه، نامتناهی یا نیمه متناهی است. شرط مقابل نمونه‌ای از شرط کران‌داری است: $0 < x < \infty \ , \ |u(\infty,t)| < M$

شرط کران‌داری نیز مفهوم فیزیکی دارد. برای نمونه فرض کنید یک میله‌ی مسی به طول L را به طور دائم تحت تأثیر حرارت قرار دهیم $u(x,t)$ دمای نقطه‌ی x را در لحظه‌ی t بیان می‌کند. اگر به مقدار زیاد از ابتدای میله دور شویم، دما نمی‌تواند به بی‌نهایت میل کند؛ زیرا میله‌ی مسی ظرفیت گرمایی محدودی دارد. در اینجا M می‌تواند نقطه‌ی ذوب مس در نظر گرفته شود.

نکته ۱: اگر u_1، u_2، u_3، ... و u_n پاسخ‌های یک معادله دیفرانسیل خطی و همگن باشند، در این صورت هر ترکیب خطی از آن‌ها هم جواب‌های این معادله خواهد بود. به عبارت دیگر: $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ که c_1 تا c_n همگی ضرایب ثابت هستند، نیز جواب معادله می‌باشد.

مسائل اشتروم ـ لیوویل عادی

در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پس از انجام عملیاتی کوتاه به مسائل اشتروم ـ لیوویل برخورد می‌کنیم. برای همین قبل از شروع آموزش روش‌های حل این نوع معادلات، لازم است با مسائل اشتروم ـ لیوویل آشنا شویم. اگر یادتان باشد در درس معادلات دیفرانسیل برای حل یک معادله درجه دوم خطی و همگن به دو شرط اولیه نیاز داشتید؛ یکی مقدار تابع در یک نقطه و دیگری مقدار مشتق تابع در همان نقطه. در اینجا ما شرایط مرزی برای معادله در نظر می‌گیریم؛ یعنی شرایطی که در نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی مورد بررسی برای مقادیر تابع و مقادیر مشتق تابع مجهول، تحمیل می‌شوند.

هر مسأله با شرایط زیر را یک مسأله اشتروم ـ لیوویل می‌نامند:

$$\begin{cases} (f(x)y')' + [g(x) + \lambda h(x)]y = 0 \quad , \quad a < x < b \\ \left.\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{دو شرط مکانی} \end{cases}$$

در این مسأله α_1، α_2، β_1 و β_2 اعداد ثابت هستند که α_1 و α_2 با هم و همچنین β_1 و β_2 با هم، به صورت هم‌زمان صفر نیستند. λ یک پارامتر ثابت، $f(x)$ یک تابع حقیقی مثبت در فاصله $[a,b]$ و $h(x)$ یک تابع حقیقی مثبت معلوم با نام **تابع وزن** است. برای تضمین وجود جواب باید توابع $f(x)$ و $f'(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند. به ازای یک انتخاب مفروض از مقدار λ، $y_\lambda(x)$ یک **تابع ویژه** (مخالف صفر) وابسته به λ نامیده می‌شود. این ثابت λ، **مقدار ویژه** این مسأله نام دارد. توجه کنید که تابع ثابت $y = 0$ هم در معادله و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند. این جواب را **جواب بدیهی** می‌گوییم در واقع منظورمان از **توابع ویژه** معادله همان جواب‌های **نابدیهی** هستند.

مثال ۴: مقادیر و توابع ویژه مسأله مقابل کدام است؟

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \ , \ y'(1) = y(2) = 0$$

۱) $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2(\ln 2)^2})^2 \ , \ \cos(\frac{2n-1}{2(\ln 2)^2}\ln^2 x)$

۲) $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2\ln 2})^2 \ , \ \cos(\frac{2n-1}{2\ln 2}\pi \ln x)$

۳) $\lambda_n = (\frac{n-1}{2(\ln 2)^2}\pi)^2 \ , \ \cos(\frac{n-1}{2(\ln 2)^2}\pi \ln^2 x)$

۴) $\lambda_n = (\frac{n-1}{2\ln 2}\pi)^2 \ , \ \cos(\frac{n-1}{2\ln 2}\pi \ln x)$

پاسخ : گزینه «۲» ابتدا توجه کنید که معادله‌ی داده شده به صورت زیر است:

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

یعنی معادله‌ی اویلر است. حالا سه حالت برای λ در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $\lambda = 0$: در این صورت $x^2y'' + xy' = 0$ و در نتیجه $y = c_1 + c_2\ln x$ و چون $y'(1) = 0$، لذا $c_2 = 0$ و بنابراین $y = c_1$ و چون $y(2) = 0$ است، پس c_1 هم برابر با صفر است و به جواب بدیهی $y = 0$ رسیدیم. پس در این حالت تابع ویژه نداریم.

حالت دوم: اگر $\lambda = -k^2 < 0$ (k عددی حقیقی و مثبت است) در این صورت داریم:

$$x^2y'' + xy' - k^2y = 0 \Rightarrow y = c_1x^k + c_2x^{-k}$$

با توجه به شرایط $y'(1) = 0$ و $y(2) = 0$ داریم:

$$\begin{cases} c_1k - c_2k = 0 \\ c_1 2^k + c_2 2^{-k} = 0 \end{cases}$$

دترمینان ضرایب برابر $k(2^{-k} + 2^k) \neq 0$ و مخالف صفر است. بنابراین تنها جواب دستگاه، $c_1 = c_2 = 0$ بوده و باز هم تابع ویژه‌ای بدست نمی‌آید.

حالت سوم: اگر $\lambda = k^2 > 0$، آن‌گاه معادله‌ی مقابل را داریم:

$$x^2y'' + xy' + k^2y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به جواب معادله‌ی اویلر}} y = c_1\cos(k\ln x) + c_2\sin(k\ln x) \Rightarrow y' = -c_1(\frac{k}{x})\sin(k\ln x) + c_2(\frac{k}{x})\cos(k\ln x)$$

با توجه به شرط $y'(1) = 0$، از معادله‌ی مشتق می‌فهیم $c_2 = 0$، بنابراین داریم: $y = c_1\cos(k\ln x)$، حالا با توجه به شرط $y(2) = 0$، داریم:

$$c_1\cos(k\ln 2) = 0 \Rightarrow k\ln 2 = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_n = \frac{2n-1}{2\ln 2}\pi$$

توجه کنید که اگر $c_1 = 0$ باشد، به جواب $y = 0$ می‌رسیم و تابع ویژه‌ای به دست نمی‌آید. پس فرض کرده‌ایم $c_1 \neq 0$ باشد. بنابراین برای $n = 1,2,3,\dots$ داریم:

$$\begin{cases} \lambda_n = k_n^2 = (\frac{2n-1}{2\ln 2}\pi)^2 & \text{: مقادیر ویژه} \\ \cos(\frac{2n-1}{2\ln 2}\pi \ln x) & \text{: توابع ویژه} \end{cases}$$

مثال ۵: مقادیر و توابع ویژه مسأله اشتروم ـ لیوویل مقابل را حساب کنید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \ , \ 0 < x < L \\ y(0) = 0 \ , \ y(L) + hy'(L) = 0 \ , \ (h > 0 \text{ عددی ثابت است}) \end{cases}$$

پاسخ : برای صرفه‌جویی در زمان و کاغذ! فقط حالتی که منجر به بدست آمدن توابع و مقادیر ویژه می‌شود، یعنی $\lambda = k^2 > 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$y'' + k^2y = 0 \Rightarrow y = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx) \xrightarrow{y(0)=0} c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2\sin(kx)$$

حالا سراغ شرط دوم می‌رویم:

$$y(L) + hy'(L) = 0 \Rightarrow c_2\sin(kL) + hkc_2\cos(kL) = 0$$

برای این که جواب غیر صفر داشته باشیم، باید $c_2 \neq 0$ باشد، لذا داریم:

$$\sin(kL) + hk\cos(kL) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(kL) = -hk \xrightarrow{k=\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}L) = -h\sqrt{\lambda}$$

مقادیر ویژه (یا همان λ_nها) برای این مسأله ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند که دارای بی‌نهایت جواب است. در واقع نقاط تلاقی منحنی‌های $\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}L)$ و $-h\sqrt{\lambda}$ باید حساب شوند. هر چند نیاز به توضیح نیست، اما توابع ویژه برای این مسأله به صورت $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ است.

سؤال دانشجو: چرا برای $\lambda < 0$ مقدار ویژه‌ای به دست نمی‌آید؟

پاسخ: با فرض $\lambda = -k^2$ $(k > 0)$ به معادله‌ی $y'' - k^2y = 0$ می‌رسیم که جواب آن $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$ است. با جایگذاری شرایط مرزی، به تساوی $e^{2kL} = \frac{1-hk}{1+hk}$ می‌رسیم. توان e مثبت است؛ پس سمت چپ بزرگ‌تر از یک است. در حالی که کسر سمت راست کوچک‌تر از یک است بنابراین تساوی به وجود آمده غیر ممکن است.

جواب دالامبر معادله موج

یک روش دیگر برای حل معادله موج، خصوصاً در مسائلی که مقدار جواب در نقطه‌ای خاص سؤال می‌شود، روش دالامبر است. ابتدا معادله‌ی موج متناهی را بررسی می‌کنیم. برای معادله موج $u_{tt}=c^2u_{xx}$ در صورتی که $u(x,0)=f(x)$ و $u_t(x,0)=g(x)$، در فاصله $0\le x\le L$ با شرط مرزی همگن (شرایط مرزی صفر) جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$

معمولاً در محاسبه‌ی فوق به دوره تناوب توابع f و g و همچنین به دانستن نوع گسترش توابع f و g نیاز پیدا می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی نوع گسترش و دوره تناوب فرق می‌کند. بنابراین ابتدا این موارد را آموزش می‌دهیم.

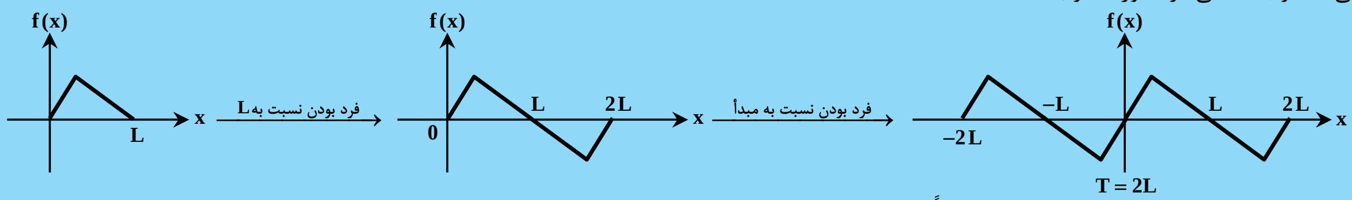
نوع گسترش توابع f و g با توجه به شرایط مرزی معادله موج: با توجه به نوع شرایط مرزی، دوره تناوب و گسترش توابع f و g فرق می‌کند که نکات زیر به خوبی این موضوع را روشن می‌کند:

۱) اگر در $x=0$ یا $x=L$، شرایط روی u باشد، باید f و g را نسبت به $x=0$ یا $x=L$ گسترش فرد دهیم.

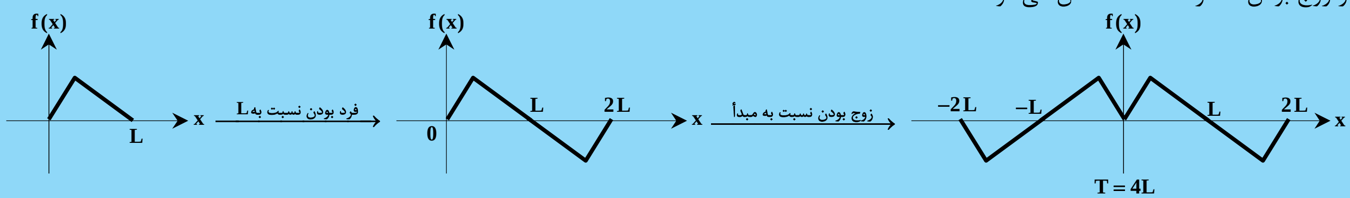
۲) اگر در $x=0$ یا $x=L$ شرایط روی u_x باشد، باید f و g را نسبت به $x=0$ یا $x=L$ گسترش زوج دهیم.

۳) در حالتی که هر دوی شرایط مرزی بر حسب u و یا هر دوی آن‌ها بر حسب u_x باشند، دوره تناوب $2L$ در نظر گرفته می‌شود. اما اگر شرایط مرزی یکی بر حسب u و دیگری بر حسب u_x داده شود، دوره تناوب برابر $4L$ در نظر گرفته می‌شود.

در واقع هرگاه هر دو شرط مرزی روی u باشند، توابع f و g نسبت به $x=0$ و نسبت به $x=L$ فرد هستند؛ بنابراین نمودارهای f و g در بازه‌ی $[L,2L]$ قرینه‌ی نمودارهای خود در بازه‌ی $[0,L]$ است. همچنین نمودار g و f را در بازه‌ی $[-2L,0]$ قرینه‌ی نمودار آن در فاصله‌ی $[0,2L]$ در نظر می‌گیریم تا یک دوره تناوب کامل حاصل شود. پس دوره‌ی تناوب $T=2L$ است (مطابق شکل زیر). همین حالت زمانی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشند رخ می‌دهد و باعث می‌شود دوره تناوب $T=2L$ باشد.



اما اگر دو شرط مرزی متفاوت داشته باشیم، مثلاً اگر شرایط مرزی به‌صورت $u_x(0,t)=u(L,t)=0$ باشد، چون در $x=0$ شرایط مرزی روی u_x و در $x=L$ شرایط مرزی روی u است، لذا گسترش تابع f نسبت به $x=0$ زوج و نسبت به $x=L$ فرد است. ابتدا نمودار f در بازه $[0,L]$ رسم می‌شود؛ سپس نمودار f در فاصله‌ی $[L,2L]$ با توجه به فرد بودن f نسبت به نقطه‌ی $x=L$، قرینه‌ی آن است. در نهایت نمودار f در بازه‌ی $[-2L,0]$ با استفاده از زوج بودن f در $x=0$ مشخص می‌شود.



اگر به نمودار دقت کنید دیگر دوره‌ی تناوب $2L$ نیست بلکه $T=4L$ است.

۴) اگر $0<x<\infty$ باشد، آنگاه با توجه به شرط مرزی در $x=0$، توابع f و g را گسترش زوج یا فرد می‌دهیم. اگر $u(0,t)=0$ باشد، توابع f و g را گسترش فرد و اگر $u_x(0,t)=0$ باشد، توابع f و g را گسترش زوج می‌دهیم.

۵) در مسأله‌ی موج نامتناهی، چون $-\infty<x<+\infty$ است، لذا نیازی به گسترش f و g نداریم و جواب دالامبر برای تمام x ها صادق است.

روش جبری: در حل دالامبر معادله‌ی موج می‌توانیم از روش دیگری که من آن را روش جبری می‌نامم نیز استفاده کنیم (لازم به ذکر است که در طول سال‌های گذشته برای اولین بار در حوزه کتاب‌های کمک آموزشی در کشور، بنده این روش را مدون و شیوه‌های به کار بردن آن را ارائه کردم).

جواب دالامبر معادله‌ی موج در این روش به صورت زیر قابل بیان است که در این معادله $G(x)=\int_0^x g(x)dx$ است.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

نمادهای f^* و G^* برای گسترش توابع f و G استفاده شده‌اند. مقدار f^* در بازه‌ی $0<x<L$ برابر با خودِ $f(x)$ است و در سایر نقاط با توجه به گسترش زوج یا فرد f به دست می‌آید، همین وضعیت را بین G^* و G داریم. در این کتاب بیشتر از روش جبری مسائل را حل می‌کنیم، چون اگر به آن مسلط شوید، بسیار آسان‌تر و قابل فهم‌تر است.

تذکر مهم: روش جبری در مسائلی که **هر دو شرط مرزی بر روی u_x است،** فقط در شرایطی خاص منجر به جواب صحیح می‌شود و بنابراین در برخی مسائل که هر دو شرط مرزی روی u_x است، باید از همان روش انتگرال کمک بگیریم. اما در سایر شرایط مرزی می‌توانید با استفاده از روش جبری سریع‌تر به جواب برسید و دیگر لازم نیست از روش انتگرال استفاده کنید.

دستورالعمل حل دالامبر معادله موج به روش جبری

در این قسمت روش حل مسائلی را شرح می‌دهیم که جواب معادله موج همگن و متناهی در نقطه‌ای خاص سؤال شده است.

گام اول: ابتدا فرمول $u(x,t)$ را برحسب f^* و G^* تشکیل داده و به جای x، t و c مقدار موردنظر مسأله را قرار دهید. توجه داشته باشید اگر در مسأله‌ای مثلاً $g(x)$ صفر بود، دیگر نیازی نیست کروشه دوم (کروشه شامل G^*) را بنویسید.

گام دوم: حالا باید مقادیر $f^*()$ و $G^*()$ را حساب کنیم. (دقت کنید عمداً داخل پرانتزها چیزی ننوشتم، چون برای هر مسأله بسته به مقادیر x، t و c فرق می‌کند).

برای این منظور، ابتدا دقت کنید که عدد داخل پرانتزها در بازه‌ای که در صورت مسأله برای x تعیین شده قرار دارد یا نه؟ بنابراین دو حالت زیر را داریم:

الف) عدد داخل پرانتزها درون بازه قرار دارد: اگر این عدد در بازه قرار داشت، بـه راحتـی مقـادیر $f^*()$ و $G^*()$ را تعیـین کنیـد (در ایـن حالـت بـه جای f^* و G^* می‌توانید f و G را لحاظ کنید).

ب) عدد داخل پرانتزها درون بازه قرار ندارد: اگر عدد داخل پرانتز در بازه داده شده برای x قرار نداشت چه‌کار کنیم؟ خُب اینجاست کـه ابتـدا بایـد از دوره تناوب کمک بگیریم؛ در واقع با اضافه یا کم کردن دوره تناوب یا مضربی از دوره تناوب کاری می‌کنیم که عدد داخل پرانتز سر به‌راه شـود! یعنـی ایـن عدد درون بازه داده شده برای x در صورت سؤال قرار گیرد. توجه داشته باشید که معمولاً در این حالت دوره تناوب به تنهایی نمی‌تواند عبارت داخل پرانتز را سر به راه کند؛ و باید از نوع گسترش f^* و g^* هم برای این منظور کمک بگیریم. دقت داشته باشید که در روش جبری منظور از گسترش فرد ایـن اسـت که $f^*(-a)=-f^*(a)$ و منظور از گسترش زوج f این است که $f^*(a)=f^*(-a)$ و این‌ها همان تعاریفی هستند که برای توابع زوج و فرد از دبیرستان بلد هستیم! (این تعریف زوج یا فرد بودن برای تابع G^* هم صادق است).

تذکر بسیار مهم: حواستان باشد همان‌طور که گفتیم، هر جا شرط مرزی روی u بود، باید f و g را گسترش فرد و وقتی هر دو شرط مرزی روی u_x بـود، باید f و g را گسترش زوج دهیم. این موضوع برای حفظ کردن راحت است و به ذهن بسپارید؛ فقط دقت داشته باشید که برای G^* ماجرا بـرعکس اسـت، یعنـی اگر g قرار است گسترش فرد یابد، باید G^* را تابعی زوج در نظر بگیرید و اگر g قرار است گسترش زوج یابد، باید G^* را تابعی فرد در نظر بگیرید.

توجه مهم: دقت کنید حدود ۵۰درصد سؤالات طرح شده از معادله‌ی موج همگن، به حل دالامبر معادله‌ی موج در نقطه‌ای خاص مربوط مـی‌شـود و چـون روش تستی برای حل اینگونه سؤالات وجود ندارد، این بخش هم با مثال‌های زیادی همراه شده و هم انواع مختلف این نوع سؤالات در ایـن قسـمت بررسـی شده است.

مثال ۷۴: اگر تابع $u(x,t)$ جواب مسأله $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=x(1-x)\ ,\ 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0\ ,\ t\ge 0\end{cases}$ باشد، آنگاه $u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) صفر   ۳) $-\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ : گزینه «۴» سؤال را به دو روش، یکبار با استفاده از فرمول شامل انتگرال و بار دوم با استفاده از روش جبری حل می‌کنیم:

روش اول: با توجه به اینکه $f(x)=0$ و $c=1$ است، لذا جواب دالامبر معادله موج به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds\ \Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}g(s)ds=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}g(s)ds$$

توجه شود تابع $g(x)$ در فاصله $0\le x\le 1$ به صورت $x(1-x)$ تعریف شده است و در این انتگرال به مقدار تابع $g(x)$ در فاصلـه $[-\frac{1}{2},1]$ نیـاز داریـم. پـس باید با انجام عملیاتی به هدف خود برسیم. در واقع مشکل ما نداشتن ضابطه‌ی $g(x)$ در بازه $[-\frac{1}{2},0)$ است؛ پس برای شـروع، بـازه انتگـرال‌گیـری را بـه دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}g(s)ds+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}g(s)ds$$

تکلیف انتگرال دوم که معلوم است؛ چون بازه ۰ تا ۱ است، می‌توانیم به جای g همان ضابطه‌ی آن یعنی $x(1-x)$ را قرار دهیم؛ اما برای رفع مشکل انتگـرال اول از خاصیت زوج بودن نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم (دقت کنید شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است، پس g گسترش زوج نسبت به $x=0$ را داراست) اما وقتی تابعی مانند $g(s)$ نسبت به $x=0$ گسترش زوج داشته باشد، همواره رابطه‌ی $\int_{-a}^{0}g(s)ds=\int_{0}^{a}g(s)ds$ را خواهیم داشت، پس انتگرال اول برابر بـا $\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(s)ds$ است، پس داریم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(s)ds+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}g(s)ds$$

خُب حالا می‌توانیم با خیال راحت به جای g ضابطه‌ی آن یعنی $x(1-x)$ را در هر دو انتگرال جایگزین کنیم:

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{1}{2}}x(1-x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx]=\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{1}{2}[\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}-\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}]+\frac{1}{2}[\frac{(1)^2}{2}-\frac{(1)^3}{3}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{8}-\frac{1}{24}]+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}(\frac{3-1}{24})+\frac{1}{2}(\frac{3-2}{6})=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

روش دوم: ابتدا فرمول را نوشته و به جای x عدد $\frac{1}{4}$ و به جای t عدد $\frac{3}{4}$ قرار می‌دهیم، دقت کنید که $f(x)=0$ و بنابراین نوشتن آن در فرمول لازم نیست.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\times 1}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]\Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[G^*(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})-G^*(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})]$$

$$\Rightarrow u(\frac{1}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{2}[G^*(1)-G^*(-\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}[G^*(1)+G^*(\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})]=\frac{1}{8}$$

توجه کنید که $G(x)=\int_0^x g(x)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$، از طرفی با توجه به این که شرایط مرزی در $x=0$، روی u_x است، لذا g گسترش زوج نسبت بـه $x=0$ را دارد و لذا $G^*(x)$ گسترش فرد نسبت به $x=0$ را داراست. لذا در محاسبات فوق $G(\frac{1}{2})=-G(-\frac{1}{2})$ در نظر گرفته شده است.

توضیح مهم: دقت کنید در برخی مسائل مانند این مثال، باید مقادیر G^* و f^* در نقاط ابتدا و انتهای بازه داده شده برای x حساب شود. در اینگونه مسائل اگر f^* و G^* پیوسته بودند، مشکلی ایجاد نمی‌شود و با جایگذاری به جواب می‌رسیم (مانند همین سؤال که $G^*(1)$ را حساب کردیم). ولی اگر f^* و یا G^* ناپیوسته بودند، باید میانگین حد چپ و حد راست تابع ناپیوسته در نقطه‌ی مورد نظر حساب شود.

مثال۷۵: از روی معادله موج زیر مقدار $u(1,3)$ کدام است؟

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}\ ,\ 0<x<4\ ,\ t>0\\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=x(4-x)\ ,\ 0\le x\le 4\\ u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases}$$

۱) $-\frac{22}{3}$
۲) $-\frac{11}{6}$
۳) $-\frac{11}{3}$
۴) $\frac{33}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اولاً توجه کنید که در این سؤال $f(x)$ برابر با صفر است و لـذا نوشـتن کروشـه اول نیـازی نیسـت و فقـط کروشـه شـامل G^* را می‌نویسیم. از طرفی در این سؤال $c=2$، $x=1$ و $t=3$ است. لذا داریم:

$$u(1,3)=\frac{1}{2\times 2}[G^*(1+2\times 3)-G^*(1-2\times 3)]=\frac{1}{4}[G^*(7)-G^*(-5)]$$

خُب، همان‌طور که می‌بینید اعداد داخل پرانتز $\underline{-5}$ و $\underline{7}$ هستند؛ اما ضابطه‌ی g در بازه $[0,4]$ اعتبار دارد. پس نمـی‌تـوانیم مسـتقیم از جایگـذاری اسـتفاده کنیم. باید این اعداد را داخل بـازه $[0,4]$ بیـاوریم. ابتـدا سـراغ دوره تنـاوب مـی‌رویـم؛ چـون هـر دو شـرط مـرزی روی u اسـت، پـس دوره تنـاوب برابـر با $T=2\times 4=8$ است. می‌توانیم دوره تناوب را به عدد داخل پرانتز اضافه و یا از آن کم کنیم و حاصل تغییری نخواهد کرد، لذا داریم:

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G^*(7-8)-G^*(-5+8)]=\frac{1}{4}[G^*(-1)-G^*(3)]$$

عدد داخل پرانتز دوم، $\underline{3}$ شد، پس با آن مشکلی نداریم (چون داخل بازه $[0,4]$ قرار دارد) اما عدد داخـل پرانتـز اول $\underline{-1}$ اسـت، پـس هنـوز مشـکل داریـم. اینجاست که باید به گسترش G^* توجه کنیم؛ چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس گسترش g فرد و لذا گسترش G زوج است و این یعنی می‌توانیم بگوییم $G^*(-1)=G^*(1)$، بنابراین رابطه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G^*(1)-G^*(3)]$$

همان‌طور که می‌بینید، هر دو عدد داخل پرانتز درون بازه $[0,4]$ قرار دارند، بنابراین مـی‌تـوانیم بـا خیـال راحـت از ضـابطه‌ی $G(x)$ اسـتفاده کنـیم؛ ابتـدا ضابطه‌ی $G(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$G(x)=\int_0^x x(4-x)dx=[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^x=2x^2-\frac{x^3}{3}$$

$$u(1,3)=\frac{1}{4}[G(1)-G(3)]=\frac{1}{4}[(2\times 1^2-\frac{1^3}{3})-(2\times 3^2-\frac{3^3}{3})]=\frac{1}{4}(\frac{5}{3}-9)=\frac{1}{4}(\frac{-22}{3})=-\frac{11}{6}$$

مثال۸۱: پاسخ معادله زیر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۶)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad,\quad 0<x<\pi\quad,\quad t>0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)=0$$
$$u(x,0)=\cos 3x$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\quad,\quad 0<x<\pi$$

۱) $u(x,t)=\cos 3t\sin 3x$

۲) $u(x,t)=\cos 3t\cos 3x$

۳) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos nt\sin nx$ و $n=0,1,2$ که در آن $A_n\neq 0$

۴) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos nt\cos nx$ و $n=0,1,2$ که در آن $A_n\neq 0$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: از حل دالامبر معادله‌ی موج استفاده می‌کنیم، در ایـن مثـال $c=1$، $g(x)=0$ و $f(x)=\cos 3x$ اسـت. در ضـمن $G(x)=\int_0^x g(x)dx=0$ است. پس داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]=\frac{1}{2}[\cos 3(x+t)+\cos 3(x-t)]$$
$$=\frac{1}{2}[\cos 3x\cos 3t-\sin 3x\sin 3t+\cos 3x\cos 3t+\sin 3x\sin 3t]=\cos 3x\cos 3t$$

روش تستی: شرط مرزی $u(x,0)=\cos 3x$ میگه؛ برو تو گزینه‌ها به جای t عدد صفر قرار بِده، هر کدوم حاصلش $\cos 3x$ نشد، غلطه! پس گزینـه‌هـای (۱)، (۳) و (۴) همگی به اتفاق غلطن! و اجباراً گزینهٔ (۲) جوابه

مثال۸۲: جواب مسأله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای موج یک بعدی
$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ 0<x<L\ ,\ t>0\\ u(x,0)=|x-\frac{L}{2}|\ ,\ 0\le x\le L\ ,u_t(x,0)=x(L-x)\\ u(0,t)=0\ ,\ u(L,t)=0\ ,t\ge 0\end{cases}$$
در نقطه $x=\frac{L}{2}$ و در لحظه $t=\frac{5L}{2}$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۸)

۱) $L(1+\frac{L^2}{6})$

۲) $\frac{L}{2}(1-\frac{L^2}{6})$

۳) $\frac{L}{2}(1+\frac{L^2}{6})$

۴) $L(1-\frac{L^2}{6})$

☑ **پاسخ:** «هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست» جواب دالامبر معادله موج در روش جبری چنین است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

در این سؤال $c=1$، $f(x)=|x-\frac{L}{2}|$ و $g(x)=x(L-x)$ است. لذا داریم:

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx=\int_0^x x(L-x)dx=\frac{x^2}{2}L-\frac{x^3}{3}$$

$$u(\frac{L}{2},\frac{5L}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{2}+\frac{5L}{2})+f^*(\frac{L}{2}-\frac{5L}{2})]+\frac{1}{2}[G^*(\frac{L}{2}+\frac{5L}{2})-G^*(\frac{L}{2}-\frac{5L}{2})]=\frac{1}{2}[f^*(3L)+f^*(-2L)]+\frac{1}{2}[G^*(3L)-G^*(-2L)]$$

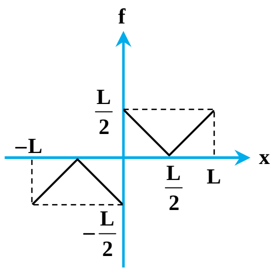
با توجه به این که هر دو شرط مرزی روی u هستند، دوره تناوب $T=2L$ است. لذا داریم:

$$u(\frac{L}{2},\frac{5L}{2})=\frac{1}{2}[f^*(3L-2L)+f^*(-2L+2L)]+\frac{1}{2}[G^*(3L-2L)-G^*(2L-2L)]=\frac{1}{2}[f^*(L)+f^*(0)]+\frac{1}{2}[G^*(L)-G^*(0)]$$

با توجه به این که $f(x)=|x-\frac{L}{2}|$ و $G(x)=\frac{x^2L}{2}-\frac{x^3}{3}$، لذا داریم:

$$u(\frac{L}{2},\frac{5L}{2})=\frac{1}{2}[|L-\frac{L}{2}|+|-\frac{L}{2}|]+\frac{1}{2}[\frac{L^2}{2}L-\frac{L^3}{3}]=\frac{1}{2}[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}]+\frac{1}{2}[\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}]=\frac{L}{2}+\frac{1}{2}[\frac{L^3}{6}]=\frac{L}{2}(1+\frac{L^2}{6})$$

تذکر مهم: حل فوق بر اساس کلید سازمان سنجش و تفکر طراح (که گزینه (۳) را جواب اعلام کرده بود) ارائه شد، اما توجه داشته باشید ما یک موضوع را نادیده گرفتیم و آن این که در محاسبات نهایی $f(0)$ و $f(L)$ را محاسبه کردیم و می‌دانیم این دو نقطه، روی مرز هستند و بـا توجـه بـه شـکل، f در ایـن نقاط ناپیوسته است و باید مجموع حد چپ و راست آن محاسبه شود:



$$f(0)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\frac{L}{2}+(-\frac{L}{2})}{2}=0$$
$$f(L)=\frac{f(L^+)+f(L^-)}{2}=\frac{(-\frac{L}{2})+\frac{L}{2}}{2}=0$$

بنابراین فقط قسمت دوم جواب دالامبر حساب می‌شود که در محاسبات $\frac{L^3}{12}$ به دست آمد و بنابراین جواب صحیح در این تست وجود ندارد.

مثال۸۳: فرض کنیم $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0\,,\,0<x<L\,,\,t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\frac{L}{2}-\left|x-\frac{L}{2}\right|\,,\,u_t(x,0)=x(L-x)\,,\,0\le x\le L \\ u(0,t)=0=u(L,t)\end{cases}$، در این صورت مقدار $u(\frac{L}{4},\frac{3L}{2a})$ کدام است؟

(مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $-\frac{11L^3}{96a}$ ۲) $-\frac{11L^3}{192a}$ ۳) $\frac{11L^3}{192a}$ ۴) $\frac{11L^3}{96a}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جواب دالامبر معادله موج در روش جبری داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2a}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

که در آن: $G(x)=\int_0^x g(x)dx$ و $G^*(x)$ گسترش زوج و f^* گسترش فرد تابع f در نظر گرفته می‌شود. در مورد این مسأله داریم:

$$f(x)=\frac{L}{2}-|x-\frac{L}{2}|\quad,\quad g(x)=x(L-x)\quad,\quad 0\le x\le L\quad,\quad c=a\quad,\quad T=2L$$

$$G(x)=\int_0^x(xL-x^2)dx=(\frac{x^2L}{2}-\frac{x^3}{3})$$

$$\Rightarrow u(\frac{L}{4},\frac{3L}{2a})=\frac{1}{2}\{f^*[\frac{L}{4}+a(\frac{3L}{2a})]+f^*[\frac{L}{4}-a(\frac{3L}{2a})]\}+\frac{1}{2a}\{G^*[(\frac{L}{4})+a(\frac{3L}{2a})]-G^*[\frac{L}{4}-a(\frac{3L}{2a})]\}$$

$$u(\frac{L}{4},\frac{3L}{2a})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{4}+\frac{3L}{2})+f^*(\frac{L}{4}-\frac{3L}{2})]+\frac{1}{2a}[G^*(\frac{L}{4}+\frac{3L}{2})-G^*(\frac{L}{4}-\frac{3L}{2})]$$

یادآوری: مقادیر توابع f و g در بازه‌ی $0<x<L$ داده شده‌اند، اما همان‌طور که می‌بینید، مقادیر داخل پرانتزها (جلوی f^* و G^*) در این بازه قرار ندارند. بنابراین با استفاده از دوره تناوب تابع سعی می‌کنیم مقادیر را در بازه‌ی ۰ تا L بیاوریم. دقت کنید دوره تناوب تابع $T=2L$ است و لذا داریم:

$$u(\frac{L}{4},\frac{3L}{2a})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{4}+2L-\frac{L}{2})+f^*(\frac{L}{4}-2L+\frac{L}{2})]+\frac{1}{2a}[G^*(\frac{L}{4}+2L-\frac{L}{2})-G^*(\frac{L}{4}-2L+\frac{L}{2})]$$

$$=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{4}-\frac{L}{2})+f^*(\frac{L}{4}+\frac{L}{2})]+\frac{1}{2a}[G^*(\frac{L}{4}-\frac{L}{2})-G^*(\frac{L}{4}+\frac{L}{2})]=\frac{1}{2}[f^*(-\frac{L}{4})+f^*(\frac{3L}{4})]+\frac{1}{2a}[G^*(-\frac{L}{4})-G^*(\frac{3L}{4})]$$

$$f(x)=\frac{L}{2}-|x-\frac{L}{2}|\Rightarrow\begin{cases} f(-\frac{L}{4})=-(\frac{L}{2}-|\frac{L}{4}-\frac{L}{2}|)=-(\frac{L}{2}-\frac{L}{4}) \\ f(\frac{3L}{4})=\frac{L}{2}-|\frac{3L}{4}-\frac{L}{2}|=\frac{L}{2}-\frac{L}{4}\end{cases}\Rightarrow$$ جمع این دو عبارت صفر است.

از طرفی عبارت دوم برابر مقدار زیر است:

$$G^*(-\frac{L}{4})=G(\frac{L}{4}) \text{ و } G^*(\frac{3L}{4})=G(\frac{3L}{4})$$

$$G(x)=(\frac{x^2L}{2}-\frac{x^3}{3})$$

$$G(\frac{L}{4})=(\frac{(\frac{L}{4})^2\times L}{2}-\frac{(\frac{L}{4})^3}{3})=(\frac{L^3}{32}-\frac{L^3}{192})=(\frac{5L^3}{192})\quad,\quad G(\frac{3L}{4})=[\frac{(\frac{3L}{4})^2\times L}{2}-\frac{(\frac{3L}{4})^3}{3}]=[\frac{9L^3}{32}-\frac{27L^3}{192}]=[\frac{27L^3}{192}]$$

بنابراین داریم:

$$u(\frac{L}{4},\frac{3L}{2a})=\frac{1}{2a}[G^*(-\frac{L}{4})-G^*(\frac{3L}{4})]=\frac{1}{2a}[(\frac{5L^3}{192})-(\frac{27L^3}{192})]=\frac{1}{2a}[\frac{-22L^3}{192}]=\frac{-11L^3}{192a}$$

نکته: از آنجا که قسمت اول $u(x,t)$ که شامل f^*ها است، اصلاً a ندارد. با توجه به این که تمامی گزینه‌ها a دارد، معلوم می‌شود حاصل آن صفر خواهد بود. در این صورت حجم محاسبات ما کمتر می‌شود.

مثال ۸۴: با توجه به معادله موج زیر، مقدار $u(\frac{۳}{۸},۳)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \ , \ ۰<x<۱ \ , \ t>۰ \\ u(x,۰)=(۱-x)^۳ \ , \ ۰\le x\le ۱ \\ u_t(x,۰)=(۱-x)^۲ \ , \ ۰\le x\le ۱ \\ u_x(۰,t)=u(۱,t)=۰ \end{cases}$$

۱) $-\frac{۹}{۵۱۲}$ ۲) $-\frac{۴۸۵}{۱۵۳۶}$

۳) $\frac{۹}{۵۱۲}$ ۴) $-\frac{۴۸۵}{۷۶۸}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به اینکه $x=\frac{۳}{۸}$، $t=۳$ و $c=۱$ لذا داریم:

$$u(\frac{۳}{۸},۳)=\frac{۱}{۲}[f*(\frac{۳}{۸}+۳\times۱)+f*(\frac{۳}{۸}-۳\times۱)]+\frac{۱}{۲\times۱}[G*(\frac{۳}{۸}+۳\times۱)-G*(\frac{۳}{۸}-۳\times۱)]$$

حالا چون اعداد داخل پرانتز در بازه $(۰,۱)$ قرار ندارند، لذا از دوره تناوب کمک می‌گیریم؛ چون یک شرط روی u و شرط دیگر روی u_x است، بنابراین دوره تناوب برابر با $۴L$ یعنی $T=۴\times۱=۴$ است، پس داریم:

$$u(\frac{۳}{۸},۳)=\frac{۱}{۲}[f*(\frac{۳}{۸}+۳-۴)+f*(\frac{۳}{۸}-۳+۴)]+\frac{۱}{۲}[G*(\frac{۳}{۸}+۳-۴)-G*(\frac{۳}{۸}-۳+۴)]$$

$$\Rightarrow u(\frac{۳}{۸},۳)=\frac{۱}{۲}[f*(\frac{۳}{۸}-۱)+f*(\frac{۳}{۸}+۱)]+\frac{۱}{۲}[G*(\frac{۳}{۸}-۱)-G*(\frac{۳}{۸}+۱)]=\frac{۱}{۲}[f*(-\frac{۵}{۸})+f*(۱+\frac{۳}{۸})]+\frac{۱}{۲}[G*(-\frac{۵}{۸})-G*(۱+\frac{۳}{۸})] \ , \ (*)$$

حالا خوب دقت کنید؛ ابتدا تکلیف $f*(-\frac{۵}{۸})$ و $G*(-\frac{۵}{۸})$ را معلوم می‌کنیم؛ چون شرط مرزی در $x=۰$ روی u_x است، پس f و g هر دو باید نسبت به $x=۰$ گسترش زوج یابند. بنابراین $f*$ گسترش زوج و $G*$ گسترش فرد (برعکس g) نسبت به $x=۰$ دارد:

$$f*(-\frac{۵}{۸})=f*(\frac{۵}{۸}) \text{ و } G*(-\frac{۵}{۸})=-G*(\frac{۵}{۸})$$

خُب مشکل این دو تا حل شد؛ اما برای $f*(۱+\frac{۳}{۸})$ و $G*(۱+\frac{۳}{۸})$ چه تدبیری داریم؟ دقت کنید در مسائل قبل نیازی به گسترش نسبت به $x=L$ (برای این سؤال $x=۱$) نداشتیم و اکثر گسترش‌ها نسبت به $x=۰$ بود. اما این سؤال کمی فرق می‌کند؛ چون نتوانستیم با دوره تناوب مقادیر داخل پرانتز را به بازه $(۰,۱)$ بیاوریم. بنابراین از گسترش نسبت به $x=۱$ هم باید کمک بگیریم. چون در $x=۱$ شرط مرزی روی u است، پس $f*$ نسبت به $x=۱$ گسترش فرد و $G*$ نسبت به $x=۱$ گسترش زوج دارد. لذا داریم:

$$f*(۱+\frac{۳}{۸})=-f*(۱-\frac{۳}{۸})=-f*(\frac{۵}{۸}) \ , \ G*(۱+\frac{۳}{۸})=G*(۱-\frac{۳}{۸})=G*(\frac{۵}{۸})$$

یادآوری: وقتی تابعی مانند $h(x)$ نسبت به خط $x=\alpha$ فرد باشد، $h(\alpha+x)=-h(\alpha-x)$ و اگر نسبت به خط $x=\alpha$ زوج باشد $h(\alpha+x)=h(\alpha-x)$ می‌باشد. برای این‌که رابطه یادتان نرود همیشه توجه کنید که وقتی $\alpha=۰$ باید به همان تعریف زوج و فرد که از دبیرستان یادتان هست، برسید.

حالا برگردیم به ادامه‌ی حل سؤال؛ با جایگزین کردن مقادیر به‌دست آمده در رابطه‌ی * داریم:

$$u(\frac{۳}{۸},۳)=\frac{۱}{۲}[f*(\frac{۵}{۸})-f*(\frac{۵}{۸})]+\frac{۱}{۲}[-G*(\frac{۵}{۸})-G*(\frac{۵}{۸})]=\frac{۱}{۲}[-۲G*(\frac{۵}{۸})]=-G*(\frac{۵}{۸})$$

حالا کافی است $-G^*(\frac{۵}{۸})$ حساب شود:

$$g(x)=(۱-x)^۲ \Rightarrow G(x)=\int_۰^x(۱-x)^۲dx=[-\frac{۱}{۳}(۱-x)^۳]_۰^x=-\frac{۱}{۳}(۱-x)^۳+\frac{۱}{۳}$$

بنابراین داریم:

$$u(\frac{۳}{۸},۳)=-G^*(\frac{۵}{۸})=\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۵}{۸})^۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۸})^۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}[\frac{۲۷}{۵۱۲}-۱]=-\frac{۴۸۵}{۱۵۳۶}$$

توجه مهم: در بسیاری از کتاب‌ها ضابطه‌ی $G(x)$ به صورت $G(x)=\int g(x)dx$ نوشته می‌شود؛ یعنی از $g(x)$ انتگرال گرفته و ضابطه $G(x)$ تعیین می‌شود. اما این موضوع در برخی از مسائل به **غلط علمی** منجر می‌شود، برای همین ما در این کتاب انتگرال معین $g(x)$ را حساب می‌کنیم؛ یعنی می‌نویسیم: $G(x)=\int_۰^x g(x)dx$. مثلاً در این مثال اگر $G(x)=\int(۱-x)^۲dx$ می‌نوشتیم به ضابطه‌ی $G(x)=-\frac{۱}{۳}(۱-x)^۳$ می‌رسیدیم (یعنی جمله‌ی دوم یا همان عدد $\frac{۱}{۳}$ وجود نداشت) که منجر به رسیدن به جواب غلط (یعنی گزینه ۳) می‌شد.

مثال ۸۵: در مسأله مقدار اولیه ـ کرانه‌ای (مرزی) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases} 2x & , 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1-x & , \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \ , \ 0\le x\le 1 \\ u_x(0,t)=0=u(1,t), t\ge 0 \end{cases}$، مقدار $u(x,t)$ را در نقطه $x=\frac{1}{2}$ و در لحظه $t=7$ حساب کنید: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا $u(\frac{1}{2},7)$ را تشکیل می‌دهیم؛ توجه کنید که چون $g(x)=0$ پس لازم نیست کروشه دوم را بنویسیم:

$$u(\frac{1}{2},7)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+7\times 1)+f^*(\frac{1}{2}-7\times 1)]$$

در این سؤال $T=4\times 1=4$ است (چون یک شرط مرزی روی u و شرط مرزی دیگر روی u_x است)، بنابراین با اضافه کردن (و کم کردن) دو برابر دوره تناوب داریم:

$$u(\frac{1}{2},7)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+7-2\times 4)+f^*(\frac{1}{2}-7+2\times 4)]=\frac{1}{2}[f^*(-\frac{1}{2})+f^*(1+\frac{1}{2})]$$

حالا توجه کنید که شرط مرزی در $x=0$ روی u_x است، پس f^* باید نسبت به $x=0$ گسترش زوج داشته باشد، بنابراین داریم: $f^*(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$

اما برای تعیین تکلیف $f^*(1+\frac{1}{2})$ باید به گسترش f^* نسبت به $x=1$ دقت کنیم، چون در $x=1$ شرط مرزی روی u است، لذا f^* نسبت به $x=1$ گسترش فرد دارد، لذا داریم:

$$f^*(1+\frac{1}{2})=-f^*(1-\frac{1}{2})=-f^*(\frac{1}{2})$$

بنابراین داریم:

$$u(\frac{1}{2},7)=\frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2})-f^*(\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}\times 0=0$$

مثال ۸۶: برای پاسخ مسئله $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, t>0 \\ u(x,0)=\sin x \ , \ u_t(x,0)=\cos x \\ u_x(0,t)=0 \ , \ u(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$، حاصل عبارت $u(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$، کدام است؟ (مهندسی برق و مکانیک ـ دکتری ۹۷)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» حل دالامبر معادله‌ی موج باز هم مدنظر طراحان است: $L=1 \ , \ c^2=1 \Rightarrow c=1 \ , \ f(x)=\sin x \ , \ g(x)=\cos x$

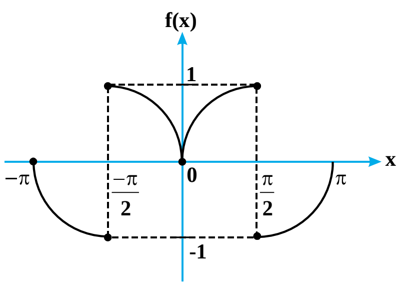
با توجه به این که $x=\frac{\pi}{4}$، $t=\frac{\pi}{2}$ و $c=1$ است، لذا داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2c}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

$$u(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})+f^*(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})]+\frac{1}{2}[G^*(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})-G^*(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})]$$

$$\Rightarrow u(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{3\pi}{4})+f^*(-\frac{\pi}{4})]+\frac{1}{2}[G^*(\frac{3\pi}{4})-G^*(-\frac{\pi}{4})] \quad (*)$$

چون یک شرط مرزی بر روی u و شرط مرزی دیگر بر روی u_x داده شده است، بنابراین دوره تناوب برابر با $T=4L=4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$ است. برای درک بهتر به شکل مقابل توجه کنید:



ابتدا تکلیف $f^*(-\frac{\pi}{4})$ و $G^*(-\frac{\pi}{4})$ را معلوم می‌کنیم. چون شرط مرزی در $x=0$ بر روی u_x است، بنابراین توابع f و g را نسبت به خط $x=0$ گسترش زوج می‌دهیم. در نتیجه نسبت به خط $x=0$، f^* گسترش زوج و G^* گسترش فرد (برعکس g) می‌یابد. لذا داریم:

$$f^*(-\frac{\pi}{4})=f^*(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad G^*(-\frac{\pi}{4})=-G^*(\frac{\pi}{4})$$

حال باید برای محاسبه $G^*(\frac{\pi}{4})$ ضابطه تابع $G(x)$ را به‌دست آوریم. بنابراین خواهیم داشت: $G(x)=\int_0^x g(k)d(k)=\int_0^x \cos k dk=\sin x$

بنابراین داریم: $G^*(-\frac{\pi}{۴})=-G^*(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حال به سراغ محاسبه $f^*(\frac{۳\pi}{۴})$ و $G^*(\frac{۳\pi}{۴})$ می‌رویم. در این سؤال چون نمی‌توانیم که با استفاده از دوره تناوب مقادیر داخل پرانتز را به بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ بیاوریم، بنابراین از گسترش نسبت به خط $x=\frac{\pi}{۲}$ نیز باید کمک بگیریم. چون در $x=\frac{\pi}{۲}$ شرط مرزی بر روی u داده شده است، بنابراین f^* نسبت به خط $x=\frac{\pi}{۲}$ گسترش فرد و G^* نسبت به خط $x=\frac{\pi}{۲}$ گسترش زوج (برعکس g) می‌یابد. لذا داریم:

$$f^*(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴})=-f^*(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=-f^*(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad G^*(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴})=G^*(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=G^*(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حال با قرار دادن مقادیر به‌دست آمده در رابطه (*) داریم:

$$u(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲}[\underbrace{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}_{=۰}]+\frac{۱}{۲}[\frac{\sqrt{۲}}{۲}-(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})]=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تذکر مهم: همان‌طور که قبلاً گفتیم، روش جبری دالامبر، در تمامی مسائل غیر از حالتی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشند، قابل استفاده است. البته اگر هر دو شرط مرزی روی u_x بود و مسأله جزو دو حالت زیر بود، هنوز هم می‌توان از روش جبری کمک گرفت؛ اما اگر مسأله جزو دو حالت زیر نبود، ناگزیر باید از فرمول شامل انتگرال برای محاسبه‌ی قسمت دوم فرمول دالامبر استفاده کنید.

الف) در مسائلی که $g(x)=k$ تابع ثابت است، باز هم می‌توان از روش جبری مسأله را حل کرد. توجه نمایید که در این حالت با استفاده از ضابطه‌ی $G(x)=kx$ حاصل کروشه‌ی دوم همواره برابر با $G(x+ct)-G(x-ct)=۲kct$ است.

ب) در مسائلی که $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه‌ی $[۰,L]$ باشند یا فقط با استفاده **از گسترش فرد** G **نسبت به** $x=۰$**، بدون استفاده از دوره تناوب** بتوانیم این نقاط را به بازه‌ی $[۰,L]$ منتقل کنیم، باز هم روش جبری قابل استفاده است.

مثال‌های بعد، مطلب را به خوبی آموزش می‌دهند. اما قبل از آن به یادآوری زیر توجه کنید:

یادآوری: اگر تابع $g(s)$ نسبت به $x=۰$ زوج باشد، آن‌گاه می‌توان گفت $\int_{-a}^{۰}g(s)ds=\int_{۰}^{a}g(s)ds$ و اگر تابع $g(s)$ نسبت به $x=۰$ فرد باشد، آن‌گاه می‌توان گفت: $\int_{-a}^{۰}g(s)ds=-\int_{۰}^{a}g(s)ds$. در همین فرمول‌ها اگر همه‌ی حدود را با L جمع کنید، روابط مربوط به نقطه‌ی L را پیدا می‌کنید. یعنی اگر $g(s)$ نسبت به L زوج باشد، داریم: $\int_{L-a}^{L}g(s)ds=\int_{L}^{L+a}g(s)ds$ و اگر $g(s)$ نسبت به L فرد باشد، داریم: $\int_{L-a}^{L}g(s)ds=-\int_{L}^{L+a}g(s)ds$.

(توجه کنید که تا سال ۹۴ سؤالی که هر دو شرط مرزی روی u_x باشد، مطرح نشده است، اما احتمال طرح آن در سال‌های آینده وجود دارد.)

مثال ۸۷: در مسأله زیر، مقدار $u(\frac{\pi}{۲},\frac{۱}{۲})$ برابر با چند است؟ (sin ۴ برحسب رادیان می‌باشد.)

$$\begin{cases}u_{tt}-۴u_{xx}=۰\quad;\quad ۰<x<\pi\\ u(x,۰)=۳\cos x\,;\quad u_t(x,۰)=۱-\cos ۴x\\ u_x(۰,t)=u_x(\pi,t)=۰\end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{۸}\sin(۴)-\frac{۱}{۲}$
۲) $۱-\frac{۱}{۴}\sin ۴$
۳) $\frac{۱}{۸}\sin(۴)+\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۸}\sin(۴)+\frac{۱}{۲}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در این سؤال $x=\frac{\pi}{۲}$، $t=\frac{۱}{۲}$ و $c=۲$ است، با محاسبه‌ای ساده می‌توان فهمید مقادیر $x+ct$ و $x-ct$ هر دو در بازه $[۰,\pi]$ قرار دارند. پس می‌توان از روش جبری کمک گرفت. به راحتی با جایگزینی داریم:

$$u(\frac{\pi}{۲},\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}[f^*(\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}\times ۲)+f^*(\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}\times ۲)]+\frac{۱}{۲\times ۲}[G^*(\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}\times ۲)-G^*(\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}\times ۲)]=\frac{۱}{۲}[f^*(\frac{\pi}{۲}+۱)+f^*(\frac{\pi}{۲}-۱)]+\frac{۱}{۴}[G^*(\frac{\pi}{۲}+۱)-G^*(\frac{\pi}{۲}-۱)]$$

همان‌طور که می‌بینید اعداد $\frac{\pi}{۲}-۱$ و $\frac{\pi}{۲}+۱$ هر دو در بازه $(۰,\pi)$ قرار دارند، بنابراین حتی لازم نیست از دوره تناوب کمک بگیریم. حالا دقت کنید که طبق صورت سؤال $f(x)=۳\cos x$ و $g(x)=۱-\cos ۴x$، لذا $G(x)=\int_{۰}^{x}g(x)dx=(x-\frac{\sin ۴x}{۴})$ است، بنابراین داریم:

$$u(\frac{\pi}{۲},\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}[۳\cos(\frac{\pi}{۲}+۱)+۳\cos(\frac{\pi}{۲}-۱)]+\frac{۱}{۴}[(\frac{\pi}{۲}+۱-\frac{۱}{۴}\sin ۴(\frac{\pi}{۲}+۱))-(\frac{\pi}{۲}-۱-\frac{۱}{۴}\sin ۴(\frac{\pi}{۲}-۱))]$$

می‌دانیم که $\sin ۴(\frac{\pi}{۲}-۱)=\sin(۲\pi-۴)=\sin(-۴)=-\sin ۴$ و $\sin ۴(\frac{\pi}{۲}+۱)=\sin(۲\pi+۴)=\sin ۴$ است.

همچنین $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$ و $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$. پس داریم:

$$u(\frac{\pi}{۲},\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}[\underbrace{-\sin ۱+\sin ۱}_{\text{صفر}}]+\frac{۱}{۲\times ۲}[۲-\frac{۱}{۲}\sin ۴]=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}\sin(۴)$$

نکته۵: گاهی اوقات در مسائلی که هر دو شرط مرزی روی u_x نیست، به اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ توجه کنید؛ اگر این اختلاف مضربی صحیح از دوره تناوب باشد، آن‌گاه بدون محاسبه می‌توانید بگویید حاصل کروشه دوم صفر است و فقط باید کروشه اول در فرمول دالامبر محاسبه شود. در ضمن حاصل کروشه اول هم همواره برابر $f^*(x+ct)$ می‌شود؛ یعنی فقط کافیست در ضابطه $f^*(x)$ به جای x مقدار $x+ct$ را جایگزین کرده و سپس با استفاده از دوره تناوب و گسترش تابع f همانند سایر مسائل جواب را تعیین کنیم.

مثال۹۰: در مسأله مقدار اولیه مرزی موج یک بعدی زیر، که در آن $h(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته است، مقدار $u(\frac{1}{3},\frac{13}{a})$ کدام است؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۹۳)

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad t>0 \\ u(x,0)=0 \quad , \quad u_t(x,0)=h(x) \quad , \quad 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad , \quad t>0 \end{cases}$$

۱) -1
۲) 0
۳) 1
۴) نمی‌توان گفت، چون تابع $h(x)$ مقدارش داده نشده است.

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به این که در این سؤال شرایط مرزی هر دو بر روی u هستند، لذا دوره تناوب $T=2L=2\times 1=2$ است و چون $f(x)=0$، لذا کافیست $G(x)=\int h(x)\,dx$ را گسترش دهیم. هر دو شرط مرزی در $x=0$ و $x=1$ روی u هستند، پس $h(x)$ در $x=0$ و $x=1$ گسترش فرد دارد یعنی $G(x)$ در این نقاط گسترش زوج دارد.

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}[G^*(x+at)-G^*(x-at)]$$

$$u(\frac{1}{3},\frac{13}{a})=\frac{1}{2a}[G^*(\frac{1}{3}+a\times\frac{13}{a})-G^*(\frac{1}{3}-a\times\frac{13}{a})]=\frac{1}{2a}[G^*(\frac{1}{3}+13)-G^*(\frac{1}{3}-13)]$$

اما می‌دانیم دوره تناوب تابع $T=2$ می‌باشد، پس هر مضرب صحیحی از T را می‌توان از آرگومان‌ها کم یا زیاد کرد:

$$G^*(\frac{1}{3}+13)=G^*(\frac{1}{3}+13-13\times 2)=G^*(\frac{1}{3}-13)\ \Rightarrow u(\frac{1}{3},\frac{13}{a})=\frac{1}{2a}[G^*(\frac{1}{3}-13)-G^*(\frac{1}{3}-13)]=0$$

روش ساده‌تر: دقت کنید که با توجه به متن کتاب در این سؤال اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ برابر با $(\frac{1}{3}+13)-(\frac{1}{3}-13)=26$ است و چون ۲۶ مضربی صحیح از دوره تناوب است، پس با توجه به شرایط مرزی قطعاً می‌توان گفت مقدار کروشه دوم شامل G صفر است و حاصل برابر با $f^*(x+ct)$ است و چون f برای تمام مقادیر صفر است، لذا بدون محاسبه هم می‌شود گفت حاصل صفر است. دقت کنید که اگر هر دو شرط مرزی روی u_x بود، آنوقت نمی‌شد محاسبات فوق را کرده و یا از نکته اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ استفاده کنیم؛ در آن صورت جواب بستگی به تابع $h(x)$ داشت!

مثال۹۱: مقدار $u(\frac{1}{3},\frac{13}{2})$ از روی معادله موج زیر کدام است؟ ($g(x)$ تابع تکه‌ای پیوسته است.)

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 \ ,\ 0<x<1 \ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1-x \ ,\ u_t(x,0)=g(x) \ ,\ 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \ ,\ t>0 \end{cases}$$

۱) 0
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{1}{3}$
۴) نمی‌توان گفت چون $g(x)$ نامشخص است.

پاسخ: گزینه «۳» در این سؤال $x=\frac{1}{3}$، $c=2$ و $t=\frac{13}{2}$ است. ابتدا توجه کنید که اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ برابر مقدار زیر است:

$$(x+ct)-(x-ct)=(\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{2})-(\frac{1}{3}-2\times\frac{13}{2})=13-(-13)=26=13\times 2=13\times(\text{دوره تناوب})$$

چون اختلاف موردنظر مضرب صحیحی از دوره تناوب شد، لذا با توجه به نکته قبل می‌توان گفت که گزینه (۴) غلط است (چون حاصل کروشه دوم همواره صفر است و مهم نیست ضابطه‌ی $g(x)$ چه باشد.) پس فقط کافی است $f^*(x+ct)$ حساب شود. لذا داریم:

$$u(\frac{1}{3},\frac{13}{2})=f^*(\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{2})=f^*(\frac{1}{3}+13)=f^*(\frac{40}{3})=f^*(14-\frac{2}{3})=f^*(-\frac{2}{3})$$

چون هر دو شرط مرزی روی u است، پس f باید نسبت به $x=0$ گسترش فرد داشته باشد؛ لذا $f^*(-\frac{2}{3})=-f^*(\frac{2}{3})$، پس داریم:

$$u(\frac{1}{3},\frac{13}{2})=-f(\frac{2}{3})=-(1-\frac{2}{3})=-\frac{1}{3}$$

توجه: دقت داشته باشید که اگر مثلاً در این سؤال هر دو شرط مرزی روی u_x بود، آن وقت دیگر **نمی‌شد گفت**: حاصل کروشه دوم صفر است و حاصل به $g(x)$ بستگی ندارد؛ بلکه حاصل به $g(x)$ هم بستگی داشت و گزینه (۴) جواب سؤال بود.

مثال ۹۲: برای مسأله مقدار اولیه مرزی: (موضع اولیه)

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, 0<x<L, t>0 \\ u_t(x,0)=0, u(x,0)=\begin{cases} x, 0\le x\le \frac{L}{2} \\ L-x, \frac{L}{2}<x\le L\end{cases} \\ u(0,t)=0=u(L,t)\end{cases}$$

، موج یک بعدی بر قطعه خط $0\le x\le L$، مقدار $u(\frac{L}{2},\frac{nL}{a})$، در نقطه $x=\frac{L}{2}$ و $t=\frac{nL}{a}$، کدام است؟ (n عدد صحیح نامنفی) (مکانیک ـ دکتری ۹۲)

۱) $\frac{La}{2}$ ۲) $(-1)^n\frac{L}{2a}$ ۳) $(-1)^n\frac{L}{2}$ ۴) $(-1)^{n-1}\frac{L}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به حل دالامبر معادله موج در روش جبری برای این سؤال داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0\le x<\frac{L}{2} \\ L-x & ; \quad \frac{L}{2}\le x<L\end{cases}, \; g(x)=0 \;, c=a \Rightarrow u(\frac{L}{2},\frac{nL}{a})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{2}+a(\frac{nL}{a}))+f^*(\frac{L}{2}-a(\frac{nL}{a}))]=\frac{1}{2}[f^*(\frac{L}{2}+nL)+f^*(\frac{L}{2}-nL)]$$

با توجه به این که شرایط مکانی مسأله از نوع دیریکله است، لذا باید تابع $f(x)$ را که فقط دربارهٔ $0\le x\le L$ تعریف شده، گسترش فرد دهیم.
از طرفی چون دوره تناوب $2L$است، پس اگر n زوج باشد، nL ضریبی از دوره تناوب خواهد بود. در نتیجه برای nهای زوج خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} f^*(\frac{L}{2}+nL)&=f(\frac{L}{2})=L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2} \\ f^*(\frac{L}{2}-nL)&=f(\frac{L}{2})=\frac{L}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow u(\frac{L}{2},\frac{nL}{a})=\frac{1}{2}[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}]=\frac{L}{2} \qquad (1)$$

و اگر n عددی فرد باشد، آن‌وقت باز هم $(n-1)$ ضریبی از دوره تناوب است، لذا داریم:

$$f^*(\frac{L}{2}+nL)=f(\frac{L}{2}+L+(n-1)L)=f(\frac{3L}{2})=-f(2L-\frac{3L}{2})=-f(\frac{L}{2})=-\frac{L}{2}$$

$$f^*(\frac{L}{2}-nL)=f(\frac{L}{2}-L+(1-n)L)=f(-\frac{L}{2})=-f(\frac{L}{2})=-\frac{L}{2} \Rightarrow u(\frac{L}{2},\frac{nL}{a})=\frac{1}{2}[\frac{-L}{2}-\frac{L}{2}]=\frac{-L}{2} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow u(\frac{L}{2},\frac{nL}{a})=(-1)^n\frac{L}{2}$$

تذکر: برای راحتی کار می‌توانستیم در صورت سؤال و گزینه‌ها فرض کنیم $n=1$، در این صورت به جواب $-\frac{L}{2}$ می‌رسیدیم. در گزینه‌ها، تنها گزینه (۳) می‌باشد که مقدار آن به ازای $n=1$، برابر $-\frac{L}{2}$ می‌شود.

توجه: در متن کتاب گفتیم هرگاه اختلاف $(x+ct)-(x-ct)$ برابر با دوره تناوب یا مضربی از آن شد، حاصل $u(x,t)$ همواره برابر با $f^*(x+ct)$ است، بنابراین در این سؤال از همان ابتدا معلوم بود که حاصل برابر با $f^*(\frac{L}{2}+nL)$ است. در واقع با دانستن این موضوع، دیگر نیاز به عملیات روی $f^*(\frac{L}{2}-nL)$ و جمع کردن آن با $f^*(\frac{L}{2}+nL)$ و تقسیم بر ۲ کردن آن نداشتیم!

مثال ۹۳: جواب مسأله مقدار اولیه ـ مرزی

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & , 0<x<L \\ u(x,0)=g(x) & , u_t(x,0)=h(x) \\ u(0,t)=0 & , u_x=(L,t)=0\end{cases}$$

در لحظه $t=2KL$, $k\in\mathbb{N}$ (عدد طبیعی)، کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $-g(x)$ ۲) $(-1)^kg(x)$ ۳) $g(x)$ ۴) 0

پاسخ: گزینه «۲» از حل دالامبر معادله‌ی موج به روش جبری استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $H(x)=\frac{1}{c}\int h(x)dx$ باشد. در این مثال $c=1$ است.
شرایط $u(0,t)=0$ و $u_x(L,t)=0$ نشان می‌دهند که دوره‌ی تناوب $4L$ است. اگر فرض کنیم H^* و g^* گسترش‌های موردنظر باشند، داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[g^*(x+t)+g^*(x-t)]+\frac{1}{2}[H^*(x+t)-H^*(x-t)]$$

حالت اول: اگر $t = ۲kL$ و $k = ۲n$ زوج باشد، داریم: $t = ۴nL$ که مضربی از دوره‌ی تناوب است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} H^*(x \pm t) = H^*(x \pm ۴nL) = H(x) \\ g^*(x \pm t) = g^*(x \pm ۴nL) = g(x) \end{cases}$$

بنابراین در این نقطه داریم:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[g(x) + g(x)] + \frac{۱}{۲}[H(x) - H(x)] = g(x)$$

حالت دوم: اگر $t = ۲kL$ و $k = (۲n+۱)$ فرد باشد داریم $t = ۴nL + ۲L$ پس در این حالت داریم: $H^*(x \pm t) = H^*(x \pm ۴nL \pm ۲L) = H^*(x \pm ۲L)$

و با استفاده از دوره‌ی تناوب $۴L$ داریم: $H^*(x - ۲L) = H^*(x + ۲L - ۴L) = H^*(x + ۲L)$. در نتیجه $H^*(x + ۲L) - H^*(x - ۲L) = ۰$ خواهد بود.

$$g^*(x + t) = g^*(x + ۴nL + ۲L) = g^*(x + ۲L)$$

$$g^*(x - t) = g^*(x - ۴nL - ۲L) = g^*(x - ۲L)$$

با توجه به این که $۴L$ دوره تناوب است، و g در $x = ۰$ گسترش فرد دارد، می‌توان نوشت:

$$g^*(x + ۲L) = g^*(x - ۲L) = -g(x)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[-g^*(x) - g^*(x)] = -g(x)$$

نتیجه آن است که جواب همواره $(-۱)^k g(x)$ است و علامت آن بستگی به زوج یا فرد بودنِ k دارد.

$$\mathbf{u(x,۲kL) = (-۱)^k g(x)}$$

ملاحظاتی مفهومی درباره‌ی حل دالامبر معادله موج متناهی

وقتی معادله‌ی موج متناهی را با روش دالامبر حل می‌کنیم، جواب $u(x,t)$ بستگی به این دارد که $x + ct$ و $x - ct$ در کدام محدوده قرار می‌گیرند. اگر $x + ct$ و $x - ct$ هر دو در بازه‌ی $(۰,L)$ باشند، نیازی به گسترش توابع f و g نداریم، زیرا در این بازه، f^* با f و g^* با g برابر است. اما در سایر حالات باید به نحوه‌ی گسترش f و g نسبت به $x = ۰$ و $x = L$ توجه کنیم. گاهاً مشاهده شده که طراح سؤال بدون مشخص کردن محدوده‌ی $x \pm ct$ ضابطه‌ی $u(x,t)$ را خواسته است که در این صورت با فرض $۰ < x \pm ct < L$ مسأله را حل می‌کنیم.

مثال ۹۴: جواب دالامبر (D'Alembert) معادله موج $u_{tt} = c^۲ u_{xx}$ همراه با شرایط: $u(۰,t) = u(L,t) = ۰, u(x,۰) = e^x, u_t(x,۰) = e^x$ عبارتست از:

(مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ سراسری ۸۸)

۱) $u(x,t) = e^x(\cosh ct + \frac{۱}{c}\sinh ct)$

۲) $u(x,y) = e^x(\cosh ct + \sinh ct)$

۳) $u(x,t) = e^x(\frac{۱}{c}\cosh ct + \sinh ct)$

۴) $u(x,t) = \frac{e^x}{c}(\cosh ct + \sinh ct)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» متأسفانه این سؤال هم کمی دارای اشکال است، ولی با توجه به توضیحات داده شده ظاهراً نظر طراح این بوده که جواب را در حالتی که $x \pm ct$ هر دو در بازه‌ی $(۰,L)$ هستند، پیدا کنیم. ابتدا براساس نظر طراح سؤال را حل می‌کنیم و در پایان فرم صحیح‌تر را توضیح می‌دهیم.

از حل دالامبر موج به روش جبری استفاده می‌کنیم. در این مثال داریم $f(x) = u(x,۰) = e^x$ و $g(x) = u_t(x,۰) = e^x$. بنابراین $G(x)$ برابر است با:

$$G(x) = \int_۰^x g(x)dx = \int_۰^x e^x dx = e^x - ۱$$

اگر f^* و G^* گسترش‌های f و G باشند، خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{۱}{۲c}[G^*(x+ct) - G^*(x-ct)]$$

اگر فرض کنیم $x + ct$ و $x - ct$ هر دو در بازه‌ی $(۰,L)$ باشند، خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[e^{x+ct} + e^{x-ct}] + \frac{۱}{۲c}[e^{x+ct} - ۱ - e^{x-ct} + ۱] = e^x[\frac{e^{ct} + e^{-ct}}{۲}] + \frac{۱}{c}e^x[\frac{e^{ct} - e^{-ct}}{۲}] = e^x(\cosh ct + \frac{۱}{c}\sinh ct)$$

توضیح: در حقیقت جواب این معادله در بازه‌های مختلف، به صورت متفاوتی به دست می‌آید. شرایط مرزی $u(۰,t) = u(L,t) = ۰$ نشان می‌دهند که f^* و g^* نسبت به هر دو نقطه‌ی $x = ۰$ و $x = L$ فرد هستند. اکنون دو حالت خواهیم داشت:

حالت اول: اگر $x + ct$ و $x - ct$ هر دو در بازه‌ی $(۰,L)$ باشند، یعنی داشته باشیم $۰ < x - ct < x + ct < L$، آن‌گاه همان‌طور که نشان دادیم $u(x,t) = e^x(\cosh ct + \frac{۱}{c}\sinh ct)$ است.

حالت دوم: اگر $x+ct$ در بازه‌ی $(0,L)$ و $x-ct$ در بازه‌ی $(-L,0)$ باشد، آن‌گاه $f^*(x+ct)$ با $f(x+ct)$ و $G^*(x+ct)$ با $G(x+ct)$ برابر است؛

اما برای محاسبه‌ی $f^*(x-ct)$ از فرد بودن f^* نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت: $f^*(x-ct)=-f^*(ct-x)$

همچنین برای محاسبه‌ی $G^*(x-ct)$ از زوج بودن G^* نسبت به $x=0$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت: $G^*(x-ct)=G^*(ct-x)$

بنابراین در این حالت جواب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)-f(ct-x)]+\frac{1}{2c}[G(x+ct)-G(ct-x)]=\frac{1}{2}[e^{x+ct}-e^{ct-x}]+\frac{1}{2c}[e^{x+ct}-1-e^{ct-x}+1]$$

$$\Rightarrow u(x,t)=e^{ct}\sinh x+\frac{e^{ct}}{c}\sinh x=(1+\frac{1}{c})e^{ct}\sinh x$$

به این ترتیب ضابطه‌ی $u(x,t)$ به این صورت نوشته می‌شود:

$$u(x,t)=\begin{cases} e^x(\cosh ct+\frac{1}{c}\sinh ct)\ ,\ 0<x-ct<x+ct<L \\ (1+\frac{1}{c})e^{ct}\sinh x\ ,\ -L<x-ct<0<x+ct<L \end{cases}$$

ما ضابطه‌ی $u(x,t)$ را برای یک دوره‌ی تناوب آن نوشته‌ایم. توجه داشته باشید که $x+ct$ همواره مثبت است و نیازی نیست حالت $-L<x-ct<x+ct<0$ را در نظر بگیریم.

نکته ۶: گاهی اوقات نحوه‌ی گسترش توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=0$ و $x=L$ با ویژگی‌های ذاتی این توابع یکسان است. برای مثال نمودار تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{L}x$ نسبت به $x=0$ و $x=L$ فرد است، حالا اگر شرایط مرزی معادله موج به صورت $u(0,t)=u(L,t)=0$ باشند، باید $f(x)$ را در $x=0$ و $x=L$ به صورت فرد گسترش دهیم، اما تابع $f(x)$ خودش هم نسبت به این نقاط فرد است بنابراین $f^*(x)$ با $f(x)$ برابر می‌شود و در این حالت خاص جواب $u(x,t)$ که از روش دالامبر به دست می‌آوریم برای همه‌ی نواحی یکسان خواهد بود.

مثال ۹۵: پاسخ عمومی معادله‌ی موج متناهی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx}-u_{tt}=0\ ,\ 0<x<L\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin\frac{\pi}{L}x\ ,\ u_t(x,0)=-\sin\frac{\pi}{L}x\ ,\ x>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}$$

۱) $(\cos\frac{\pi}{L}t-\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۲) $(\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۳) $(\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

۴) $\frac{L}{\pi}(\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$

پاسخ: گزینه «۱» توابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{L}x$ و $g(x)=-\sin\frac{\pi}{L}x$ نسبت به نقاط $x=0$ و $x=L$ فرد هستند، به همین دلیل مقدار f^* و g^* در همه‌ی نواحی با f و g برابر می‌شود. در نتیجه می‌توانیم جواب این معادله‌ی موج را برای همه‌ی نواحی مختلف به صورت زیر به دست آوریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+\frac{1}{2}[G(x+t)-G(x-t)]$$

$$G(x)=\int_0^x g(x)dx=-\int_0^x\sin\frac{\pi}{L}xdx=\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi}{L}x\Big|_0^x=\frac{L}{\pi}(\cos\frac{\pi}{L}x-1)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ و $G(x)$ خواهیم داشت:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{L}(x+t)+\sin\frac{\pi}{L}(x-t)]+\frac{L}{2\pi}[\cos\frac{\pi}{L}(x+t)-1-\cos\frac{\pi}{L}(x-t)+1]$$

با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t+\sin\frac{\pi}{L}t\cos\frac{\pi}{L}x+\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}t\cos\frac{\pi}{L}x]$$

$$+\frac{L}{2\pi}[\cos\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}x\sin\frac{\pi}{L}t-\cos\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi}{L}t-\sin\frac{\pi}{L}x\sin\frac{\pi}{L}t]\Rightarrow u(x,t)=(\cos\frac{\pi}{L}t-\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi}{L}t)\sin\frac{\pi}{L}x$$

البته توجه کنید که اگر ما نمی‌توانستیم از ابتدا تشخیص دهیم که نمودارهای f و g با نمودارهای f^* و g^* یکسان می‌شوند، بدون استفاده از نکته ذکر شده هم می‌توانستیم از روش معمولی دالامبر (مانند مسائل قبلی) استفاده کنیم و با توجه به گسترش زوج یا فرد f و g به جواب برسیم.