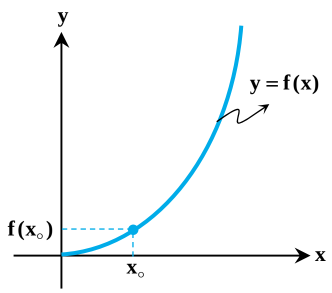
درسنامه: مفهوم مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری

در این درسنامه ابتدا مشتق را تعریف می‌کنیم و سپس انواع فرمول‌های مشتق‌گیری را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

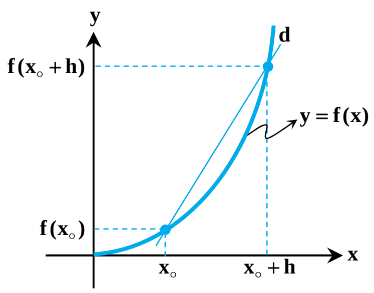
تعبیر هندسی و تعریف مشتق



از ریاضیات دبیرستان و حتی ریاضیات دوره راهنمایی می‌دانیم اگر مختصات دو نقطه از یک خط را داشته باشیم، می‌توانیم شیب آن خط را تعیین کنیم. مثلاً اگر دو نقطه‌ی (a,b) و (c,d) از یک خط را داشته باشیم، آن‌گاه از فرمول $\frac{d-b}{c-a}=$ شیب، می‌توان شیب خط را تعیین کرد.

خُب، حالا به شکل مقابل و نمودار $y=f(x)$ دقت کنید:

اگر یک نقطه به طول $x_\circ$ روی آن باشد، آن‌گاه واضح است عرض این نقطه بر روی منحنی، برابر با $f(x_\circ)$ می‌شود. حالا فرض کنید می‌خواهیم شیب خط عبوری از $x_\circ$ را در این نقطه تعیین کنیم. همان‌طور که گفتیم، مجبوریم یک نقطه‌ی دیگر روی این منحنی انتخاب کرده تا با داشتن دو نقطه از این خط، شیب را تعیین کنیم. یک نقطه به فاصله‌ی h از نقطه‌ی $x_\circ$ را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی مؤلفه‌ی طول، برای نقطه‌ی دوم به‌صورت «$x_\circ+h$» است. این نقطه در شکل دوم نشان داده شده است:

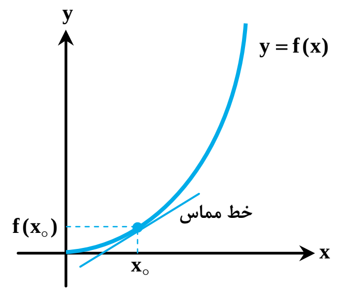


واضح است عرض این نقطه $f(x_\circ+h)$ خواهد شد. خُب اگر مطابق شکل مقابل، خطی مانند d را رسم کنیم، آن‌گاه شیب خط d به‌صورت زیر بدست می‌آید:

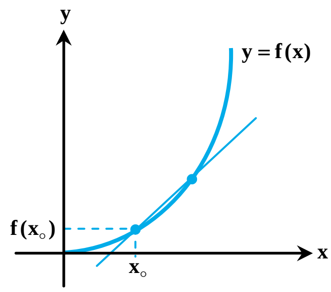
$$\text{شیب خط } d=\frac{\text{عرض نقطه‌ی اول} - \text{عرض نقطه‌ی دوم}}{\text{طول نقطه‌ی اول} - \text{طول نقطه‌ی دوم}}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط } d=\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{x_\circ+h-x_\circ}=\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

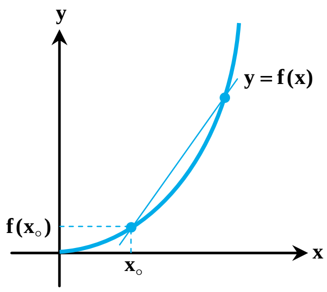
حالا اگر بخواهیم شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ را حساب کنیم، آیا می‌توان گفت شیب خط مماس، با شیب خط d، برابر است؟! معلوم است که نه! چون d اساساً خط مماس بر منحنی نیست. برای اینکه بتوان خط d را به یک خط مماس تبدیل کرد، باید چه کار کرد؟ باید نقطه‌ی دوم، خیلی خیلی زیاد به نقطه‌ی اول، نزدیک شود. همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینید، وقتی نقطه‌ی دوم به نقطه‌ی اول نزدیک شود، خط d به خط مماس شبیه‌تر می‌شود و همان‌طور که در شکل سمت راست می‌بینید، وقتی نقطه‌ی دوم بر نقطه‌ی اول منطبق می‌شود، دقیقاً خط d به خط مماس تبدیل شده است.



$h\simeq\circ$ شده، دو نقطه بر هم منطبق شده‌اند و خط مماس بدست آمده است.



h کوچکتر شده، دو نقطه به هم نزدیک می‌شوند و به به خط مماس نزدیک شده‌ایم.



h نسبت به نمودار بالا کمی کوچکتر شده ولی به خط مماس نرسیده‌ایم.

در واقع همان‌طور که در شکل‌های بالا مشخص است، باید h خیلی خیلی به صفر نزدیک شود. به عبارت ریاضی، باید h به سمت صفر میل کند. در واقع باید حالتی اتفاق بیفتد که این دو نقطه تقریباً بر هم منطبق شوند. پس می‌توان گفت «شیب خط مماس» بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\text{شیب خط مماس بر منحنی } f(x) \text{ در نقطه‌ی } x_\circ = \lim_{h\to\circ}\left(\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}\right)}$$

خُب به نظر شما، به جای «شیب خط مماس» بهتر نیست کلمه‌ی دیگری را جایگزین کنیم!؟ پیشنهاد کلمه‌ی «مشتق» چطور است؟ فکر می‌کنم خوب است! پس حالا تعریف مشتق در یک نقطه را ارائه می‌دهیم:

$$\boxed{\text{مشتق تابع } y=f(x) \text{ در نقطه‌ی } x_\circ = \lim_{h\to\circ}\left(\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}\right)}$$

اما به نظر می‌رسد بهتر است به جای عبارت سمت چپ، واژه‌ی کوتاه‌تر و از آن مهم‌تر ریاضی‌وار قرار دهیم (تا در محاسبات مجبور نباشیم، تمام عبارت سمت چپ را بنویسیم)!! معمولاً $f'(x_\circ)$ و یا به عبارت دیگر، $y'(x_\circ)$ یعنی مشتق در نقطه‌ی $x_\circ$ در کتاب‌ها به کار می‌رود. البته $\frac{dy}{dx}$ نیز به جای $f'(x)$ به کار می‌رود.

نکته۱: اگر به شکل‌ها و توضیحات قبلی دقت کنید، متوجه می‌شوید که $x_\circ$ یک نقطه‌ی ثابت است؛ اما h (یعنی فاصله‌ی $x_\circ$ تا نقطه‌ی دوم در حال تغییر است و به سمت صفر میل می‌کند. اگر نقطه‌ی دوم را با $x = x_\circ + h$ نشان بدهیم، وقتی h به سمت صفر می‌رود، نقطه x به $x_\circ$ نزدیک می‌شود. به عبارتی وقتی h به سمت صفر میل کند، آن‌گاه x به سمت $x_\circ$ میل خواهد کرد (این موضوع با نوشتن $x - x_\circ = h$ واضح‌تر است). پس می‌توانیم در تعریف مشتق به جای $x_\circ + h$ از متغیر x و همچنین به جای h از $x - x_\circ$ استفاده کنیم و به جای $h \to \circ$، بگوییم $x \to x_\circ$ و شکل دیگری از تعریف مشتق را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\boxed{f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}\right)}$$

تعریف فوق، بیشتر از تعریف قبلی (تعریف اول که شامل h بود) در حل سؤالات کاربرد دارد.

تذکر۱: برای آن‌که $f'(x_\circ)$ عدد حقیقی باشد، یعنی تابع $f(x)$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، باید حد فوق وجود داشته باشد. حالا به مخرج کسر در این حد توجه کنید، مخرج کسر به سمت صفر می‌رود. اگر صورت به صفر میل نکند، مقدار حد $\pm\infty$ خواهد شد. پس برای مشتق‌پذیر بودن $f(x)$ در $x_\circ$ باید صورت کسر هم به سمت صفر میل کند. این نتیجه می‌دهد که باید $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$ باشد. اما این، همان تعریف پیوستگی است. پس برای مشتق‌پذیر بودن $f(x)$ در $x_\circ$ لازم است $f(x)$ در $x_\circ$ پیوسته باشد. در ضمن یادتان باشد در صورتی می‌توان گفت تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$، مشتق‌پذیر است که علاوه بر پیوستگی در همسایگی $x_\circ$، حد فوق موجود و مقداری حقیقی داشته باشد.

مثال۱: فرض کنید به ازای هر $x > ۲$، این رابطه برای تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ برقرار باشد: $۵x - ۱۰ < f(x) - f(۲) < ۲x^۲ - ۳x - ۲$. در این صورت مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰　　۲) ۵　　۳) ۲　　۴) ۲−

پاسخ: گزینه «۲» نامساوی داده شده در صورت سؤال برای هر $x > ۲$ برقرار است. اگر طرفین نامساوی را بر $x - ۲$ تقسیم کنیم، جهت نامساوی‌ها عوض نمی‌شود؛ زیرا $x - ۲ > ۰$ است. با انجام این کار می‌توانیم کسر $\frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$ که تعریف مشتق $f'(۲)$ است را بین دو کسر دیگر قرار دهیم و سپس با استفاده از قضیه‌ی ساندویچ $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$ را حساب کنیم:

$$\frac{۵x - ۱۰}{x - ۲} < \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} < \frac{۲x^۲ - ۳x - ۲}{x - ۲} \Rightarrow \lim_{x \to ۲^+} \frac{۵(x - ۲)}{x - ۲} \le \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} \le \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x^۲ - ۳x - ۲}{x - ۲}$$

ذکر این نکته ضروری است که وقتی از طرفین یک نامساوی حد می‌گیریم، نامساوی اکید ($<$) به نامساوی معمولی ($\le$) تبدیل می‌شود. در سمت چپ واضح است که $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{۵(x - ۲)}{x - ۲} = ۵$ در سمت راست فرم مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ رخ می‌دهد و با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال مقدار حد معلوم می‌شود:

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x^۲ - ۳x - ۲}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۴x - ۳}{۱} = ۵$$

بنابراین متوجه شدیم که $f'(۲^+) = ۵$ در صورت سؤال، مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x)$ ذکر شده است، پس مشتق‌های چپ و راست با هم برابرند و می‌توان نتیجه گرفت که $f'(۲) = ۵$.

مثال۲: فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y روابط $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{f(x)}{x} = ۱$ و $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^۲y + xy^۲$ برقرار باشد:

الف) $f(\circ)$ را پیدا کنید.　　ب) $f'(\circ)$ را پیدا کنید.　　ج) $f'(x)$ را پیدا کنید.

پاسخ: از جمله مسائلی که از تعریف مشتق در حل آن‌ها استفاده می‌شود، سؤالاتی است که ارتباطی بین $f(x)$، $f(y)$ و $f(x + y)$ دیده می‌شود. دقت کنید در این سؤال، سه خواسته مطرح شده که هر سه قسمت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف) با قرار دادن $x = \circ$ و $y = \circ$ در تساوی داده شده داریم:

$$f(\circ + \circ) = f(\circ) + f(\circ) + \circ \Rightarrow f(\circ) = ۲f(\circ) \Rightarrow f(\circ) = \circ$$

ب) برای محاسبه‌ی $f'(\circ)$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(\circ) = \lim_{x \to \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x}$$

در قسمت (الف) دیدیم که $f(\circ) = \circ$، بنابراین داریم:

$$f'(\circ) = \lim_{x \to \circ} \frac{f(x)}{x} = ۱$$

ج) برای محاسبه‌ی $f'(x)$ می‌توانیم از تساوی داده شده در صورت سؤال استفاده کرده و $f(x + h)$ را بدست آوریم. کافی است به جای y در این تساوی h قرار دهیم تا فرم کلی آن شبیه آنچه باشد که قبلاً دیده‌ایم:

$$f(x + h) = f(x) + f(h) + x^۲h + xh^۲$$

حالا می‌توانیم کسر $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ را تشکیل دهیم و با محاسبه‌ی حد، وقتی $h \to \circ$، ضابطه‌ی $f'(x)$ را تعیین کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to \circ} \frac{[f(x) + f(h) + x^۲h + xh^۲] - f(x)}{h} = \lim_{h \to \circ} \frac{f(h) + x^۲h + xh^۲}{h} = \lim_{h \to \circ} \left(\frac{f(h)}{h} + x^۲ + xh\right)$$

واضح است که $\lim\limits_{h \to \circ} xh = \circ$ و طبق صورت سؤال $\lim\limits_{h \to \circ} \frac{f(h)}{h} = ۱$. در نتیجه داریم:

$$f'(x) = ۱ + x^۲$$

مشتق چپ و راست

الف) تابع f در $x = x_0$ مشتق راست دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد: $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب) تابع f در $x = x_0$ مشتق چپ دارد هرگاه حد مقابل وجود داشته باشد: $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

اگر تابعی در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق راست و چپ باشد و این دو مشتق با هم مساوی باشند، می‌گوییم تابع در نقطه x_0 دارای مشتق است $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ (عکس مطلب فوق نیز صادق است).

مثال ۳: اگر $f(x)=\begin{cases} x^3 & ; \ x>1 \\ 0 & ; \ x=1 \\ (x-1)^2 & ; \ x<1 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $A = \lim\limits_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t})$ با کدام برابر است؟

۱) $A = -f'(1^-) = 0$　　۲) $A = f'(1^+) = 3$　　۳) $A = f'(1^-) = 0$　　۴) $A = -f'(1^+) = -3$

پاسخ: گزینه «۱» از تغییر متغیر $x = 1-\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $\frac{1}{t} = 1-x$ پس $t = \frac{1}{1-x}$ است. وقتی t به سمت $+\infty$ میل می‌کند، $\frac{1}{t}$ مقدار مثبتی دارد اما به صفر میل می‌کند؛ پس $x = 1-\frac{1}{t}$ همواره کوچکتر از یک است اما به یک نزدیک می‌شود؛ به عبارتی داریم $x \to 1^-$.

$$A = \lim_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t}) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{1-x} = -\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{x-1}$$

حالا با توجه به آن‌که $f(1) = 0$ است می‌توانیم به جای $f(x)$ در صورت کسر $f(x)-f(1)$ قرار دهیم و این کسر را به تعریف مشتق چپ تبدیل کنیم:

$$A = -\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -f'(1^-) \Rightarrow A = -f'(1^-)$$

تا اینجا متوجه شدیم که حد خواسته شده برابر با قرینه‌ی مشتق چپ در $x = 1$ است.

البته برای محاسبه‌ی مقدار این حد باید ضابطه‌ی $f(x)$ را برای $x < 1$ در آن قرار دهیم:

$$A = -\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -\lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = -\lim_{x\to1^-}(x-1) = 0$$

با جمع‌بندی نتایج بدست آمده خواهیم داشت:

$$A = \lim_{t\to+\infty} tf(1-\frac{1}{t}) = -f'(1^-) = 0$$

مثال ۴: اگر $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}x & ; \ |x|\le1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(x)+\frac{x-1}{2} & ; \ |x|>1 \end{cases}$، آن‌گاه در مورد $f'(-1)$ و $f'(1)$ کدام گزینه صحیح است؟ ($\operatorname{sgn}x$ تابع علامت است.)

۱) $f'(-1)$ وجود ندارد و $f'(1) = \frac{1}{2}$ است.　　۲) $f'(-1)$ وجود ندارد و $f'(1) = 1$ است.

۳) $f'(-1)$ و $f'(1)$ هر دو وجود ندارند.　　۴) مشتق راست در نقطه‌ی $x = -1$، دو برابر مشتق چپ در نقطه‌ی $x = 1$ است.

پاسخ: گزینه «۱» برای آن که ضابطه f را بهتر ببینیم، نامساوی $|x| \le 1$ و $|x| > 1$ را به‌صورت باز شده می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & ; \ -1\le x\le1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(x)+\frac{x-1}{2} & ; \ x>1 \text{ یا } x<-1 \end{cases}$$

توجه کنید که برای اعداد مثبت $\operatorname{sgn}(x) = 1$ و برای اعداد منفی $\operatorname{sgn}(x) = -1$ است. مشتق چپ و راست را در $x = 1$ حساب کنیم:

$$f'(1^+) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2} \ , \ f'(1^-) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{4}}{x-1} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{x\to1^-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

پس $f'(1) = \frac{1}{2}$ است. اکنون مشتق چپ و راست را در $x = -1$ حساب کنیم:

$$\left.\begin{aligned} f'(-1^+) &= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}}{x+1} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \\ f'(-1^-) &= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}+\frac{\pi}{4}}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(-1^+) \ne f'(-1^-) \Rightarrow$$

$f'(-1)$ وجود ندارد.

رابطه‌ی بین مشتق و پیوستگی

اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_۰$ دارای مشتق باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x_۰$ پیوسته است. البته پیوستگی در یک نقطه شرط **لازم** برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است ولی شرط کافی نمی‌باشد. به عبارت دیگر عکس قضیه فوق صادق نیست، یعنی اگر تابعی در نقطه $x_۰$ پیوسته باشد، دلیل بر مشتق‌پذیری تابع در نقطه $x_۰$ **نخواهد بود**. برای مثال تابع $y=|x|$ در $x=۰$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال۵: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+a & , \ x\le ۱\\ b\sqrt[۳]{x} & , \ x>۱\end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است، مقدار $\dfrac{۲b-a}{۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

پاسخ : گزینه «۲» چون تابع در نقطه $x=۱$ مشتق‌پذیر است، لذا پیوسته نیز خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)\Rightarrow ۱+a=b \qquad (۱)$$

و چون تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، لذا مشتق چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند و خواهیم داشت:

$$f'(x)=\begin{cases}۱ & ; \ x\le ۱\\ \dfrac{b}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} & ; \ x>۱\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{۳}=۱\Rightarrow b=۳\xrightarrow{(۱)}a=۲\Rightarrow \frac{۲b-a}{۲}=۲$$

رابطه‌ی بین مشتق چپ یا راست و پیوستگی تابع مشتق: اگر حد $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f'(x_۰^+)$ وجود دارد و $f'(x_۰^+)=\lim\limits_{x\to x_۰^+} f'(x)$. در این صورت می‌گوییم تابع مشتق، مشتق راست متناهی در $x_۰$ دارد، در نتیجه دارای پیوستگی راست نیز می‌باشد و اگر حد $\lim\limits_{x\to x_۰^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f'(x_۰^-)$ نیز وجود دارد $(f'(x_۰^-)=\lim\limits_{x\to x_۰^-} f'(x))$ و می‌گوییم تابع مشتق، دارای مشتق چپ متناهی است و تابع مشتق دارای پیوستگی چپ است.

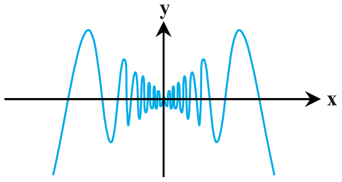
نقاط مشتق‌ناپذیر توابع

در این قسمت می‌خواهیم انواع نقاط مشتق‌ناپذیر را بررسی کنیم. برای درک بهتر، آن‌ها را به طور جداگانه دسته‌بندی کرده و برای هر یک مثال مخصوص به خودش را نیز آورده‌ایم:

۱ـ اگر تابع در همسایگی نقطه‌ای تعریف نشده باشد، آن‌گاه تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. مثلاً تابع $f(x)=\sqrt[۴]{x}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه‌ی $x_۰=۰$ مشتق‌ناپذیر است؛ چون در همسایگی چپ صفر، تعریف نشده است.

۲ـ اگر تابع در نقطه‌ای ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases}x^۴+۱ & ; \ x>۱\\ ۲ & ; \ x=۱\\ x^۴-۱ & ; \ x<۱\end{cases}$، در نقطه‌ی $x=۱$ پیوستگی راست دارد، ولی پیوستگی چپ ندارد و این یعنی تابع پیوسته نیست و در نتیجه $f(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$، مشتق‌پذیر نیز نمی‌باشد.

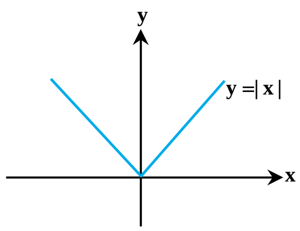
۳ـ اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=x_۰$ پیوسته باشد، ولی حد $\lim\limits_{x\to x_۰}\left(\dfrac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}\right)$ موجود نباشد، آن‌گاه باز هم می‌توان گفت تابع در نقطه‌ی $x=x_۰$ مشتق‌ناپذیر است. برای مثال تابع $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{۱}{x} & ; \ x\neq ۰\\ ۰ & ; \ x=۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطه‌ی $x_۰=۰$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، چون داریم:



$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x\sin\frac{۱}{x}}{x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\sin\frac{۱}{x}\right)\Rightarrow$$ حد وجود ندارد.

۴ـ هرگاه مشتقات چپ و راست تابع $y=f(x)$ در $x_۰$ **موجود** و برابر با **عددی حقیقی** بوده ولی با هم **مساوی نباشند**، در این صورت در آن نقطه تابع مشتق ندارد و خط مماس بر $f(x)$ وجود ندارد و فقط دو نیم مماس چپ و راست می‌توان بر منحنی رسم کرد. به چنین نقاطی، **نقاط زاویه‌دار** می‌گویند. در این حالت دو «نیم‌مماس» داریم که زاویه‌ی بین آن‌ها متغیر و بین ۰ تا ۱۸۰ درجه است.

برای مثال به تابع $y=|x|$ دقت کنید؛ این تابع در نقطه‌ی $x_۰=۰$ مشتق‌ناپذیر است و همان‌طور که در شکل می‌بینید، در این نقطه، زاویه‌دار یا به عبارت دیگر «گوشه‌دار» است.



$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{|x|-۰}{x-۰}\right)\Rightarrow\begin{cases}f'(۰^+)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\left(\dfrac{x}{x}\right)=۱\\ f'(۰^-)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\left(\dfrac{-x}{x}\right)=-۱\end{cases}\Rightarrow f'(۰^+)\neq f'(۰^-)$$

مثال ۱۲: فرض کنید $f(x)=\sin^2(\frac{1}{2}\mathrm{Arccos}\,x)\ ;\ |x|\le 1$، در این صورت $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» محاسبه مستقیم مشتق طولانی است و چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. ابتدا تابع f را به کمک فرمول $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1-\cos(\mathrm{Arc}\cos x)}{2}=\frac{1-x}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2}$$

مثال ۱۳: اگر $f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$، آن‌گاه حاصل $f(x)+(x-1)f'(x)$ را بدست آورید.

پاسخ: ابتدا $(x-1)f(x)$ را تشکیل می‌دهیم؛ در سمت راست از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)=(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)=(x^8-1)(x^8+1)$$

$$\Rightarrow (x-1)f(x)=x^{16}-1$$

حالا اگر از طرفین تساوی مشتق بگیریم، داریم:

$$1\times f(x)+(x-1)f'(x)=16x^{15}\ \Rightarrow f(x)+(x-1)f'(x)=16x^{15}$$

استفاده از لگاریتم در مشتق‌گیری

از خواص لگاریتم می‌توان در مشتق‌گیری استفاده کرد. برای این منظور، معمولاً از سه خاصیت زیر استفاده می‌کنیم (در روابط زیر، u و v توابعی بر حسب x هستند):

۱) $\mathrm{Ln}(u)^v=v\mathrm{Ln}u$ ۲) $\mathrm{Ln}(\frac{u}{v})=\mathrm{Ln}u-\mathrm{Ln}v$ ۳) $\mathrm{Ln}(uv)=\mathrm{Ln}u+\mathrm{Ln}v$

این نوع مسائل معمولاً در دو نوع زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) مشتق توابعی به‌صورت $y=u(x)^{v(x)}$:

در این‌گونه توابع باید ابتدا از خاصیت $\mathrm{Ln}u^v=v\mathrm{Ln}u$ استفاده کنیم. برای این منظور، از طرفین Ln می‌گیریم تا در سمت راست، تابعی شامل Ln ایجاد شود، یعنی داریم:

$$y=u^v\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}u^v\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=v\mathrm{Ln}u$$

حالا از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم. در سمت چپ، می‌دانیم مشتق Lny به‌صورت $\frac{y'}{y}$ است و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{y'}{y}=v'\mathrm{Ln}u+\frac{u'}{u}\times v\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } y}\boxed{y'=y[v'\mathrm{Ln}u+\frac{u'}{u}\times v]}$$

مثال ۱۴: با فرض $y=x^x$ مقدار مشتق این تابع در $x=e$ برابر است با: (از سؤالات پایان ترم دانشگاه MIT)

۱) e ۲) e^{e-1} ۳) $2e^e$ ۴) e^e

پاسخ: گزینه «۳» در این مثال $\begin{cases}u=x\\u'=1\end{cases}$, $\begin{cases}v=x\\v'=1\end{cases}$ می‌باشند. پس داریم:

$$y'=x^x(\mathrm{Ln}x+1)\Rightarrow y'(e)=e^e(\mathrm{Ln}e+1)=2e^e$$

۲) محاسبه مشتق توابعی که به‌صورت ضرب و تقسیم عبارت‌های زیادی هستند:

در این‌گونه سؤالات معمولاً از دو خاصیت مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Ln}(\frac{u}{v})=\mathrm{Ln}u-\mathrm{Ln}v\ ,\ \mathrm{Ln}uv=\mathrm{Ln}u+\mathrm{Ln}v$$

البته از تساوی $\mathrm{Ln}u^a=a\mathrm{Ln}u$، نیز معمولاً در حین محاسبات بهره می‌بریم (a عددی ثابت است).

مثال ۱۵: مشتق تابع $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ را حساب کنید.

پاسخ: واضح است روشی که ابتدا به نظر می‌رسد این است که از قاعده‌ی مشتق توابع کسری استفاده کنیم، اما اگر از لگاریتم کمک بگیریم، داریم:

$$\mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}(x+1)^2-\mathrm{Ln}(x+2)^3(x+3)^4\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=2\mathrm{Ln}(x+1)-[3\mathrm{Ln}(x+2)+4\mathrm{Ln}(x+3)]$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{y'}{y}=2(\frac{1}{x+1})-3(\frac{1}{x+2})-4(\frac{1}{x+3})\ \Rightarrow y'=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}[\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}]$$

مثال ۱۶: مشتق تابع $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ را حساب کنید.

پاسخ: ابتدا از طرفین Ln می‌گیریم و سپس از خواص Ln استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}[\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}]^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}[\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}]\ \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\frac{1}{3}\mathrm{Ln}x(x^2+1)-\frac{1}{3}\mathrm{Ln}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \text{Lny} = \frac{1}{3}\text{Lnx} + \frac{1}{3}\text{Ln}(x^2+1) - \frac{2}{3}\text{Ln}(x-1) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x}) + \frac{1}{3}(\frac{2x}{x^2+1}) - \frac{2}{3}(\frac{1}{x-1})$$

y را در طرفین ضرب می‌کنیم و در سمت راست معادل آن برحسب x را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow y' = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}[\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{2}{3(x-1)}]$$

مشتقات مراتب بالاتر

اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌وقت مشتقش، یعنی y' نیز یک تابع است. بنابراین ممکن است خود y' هم مشتق داشته باشد که اگر مشتق داشت آن را با y'' نشان می‌دهیم. y'' را مشتق دوم y می‌نامند، زیرا مشتقِ مشتقِ y است. طبیعی است مشتق سوم را می‌توان با y''' نشان داد که مشتق تابع y'' است. می‌توان این فرآیند را پی‌درپی تا جایی که مشتق‌ها وجود داشته باشند، تکرار کرد. اما اگر مثلاً بخواهیم مشتق مرتبه بیستم را نشان دهیم، باید چه نمایشی را انتخاب کنیم؟ مثلاً ۲۰ تا علامت «پریم» بالای y بگذاریم؟! طبیعی است که نمایش دست و پاگیر و نازیبایی است! برای همین برای نشان‌دادن مرتبه مشتق از مشتق مرتبه سوم به بعد، عدد مرتبه مشتق را بالای y داخل پرانتز می‌نویسند. حواستان باشد که، این عدد را با توان اشتباه نگیرید! مثلاً برای نمایش مشتق مرتبه سوم به جای y'''، می‌توانیم از $y^{(3)}$ استفاده کنیم و یا برای مشتق مرتبه بیستم تابع $y = f(x)$ می‌توانیم $y^{(20)}$ بنویسیم و به طور کلی برای نمایش مشتق مرتبه nام تابعی مانند $y = f(x)$، می‌توانیم از نمایش‌های $y^{(n)}$ یا $\frac{d^{(n)}y}{dx^n}$ استفاده کنیم.

مثال ۱۷: اگر $y = x\text{Lnx}$ آن‌گاه $y^{(5)}$ را حساب کنید. ($x > 0$)

پاسخ:

$$y' = 1 \times \text{Lnx} + \frac{1}{x} \times x = \text{Lnx} + 1 \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} + 0 \Rightarrow y''' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y^{(4)} = -(\frac{0 - 2x}{x^4}) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \frac{0 - 3x^2 \times 2}{(x^3)^2} = \frac{-6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$$

مثال ۱۸: اگر $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$، آن‌گاه ضابطه‌ی y'' را بدست آورید.

پاسخ: ابتدا با توجه به قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب دو عبارت، y' را حساب می‌کنیم:

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$$

$$y' = [e^{\sin x}]'\cos(\sin x) + e^{\sin x}[\cos(\sin x)]' = \cos x e^{\sin x}\cos(\sin x) - e^{\sin x}\cos x \sin(\sin x) = e^{\sin x}\cos x[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)]$$

اکنون حاصل‌ضرب سه تابع را داریم. یک بار دیگر قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب را استفاده کرده و مشتق دوم را حساب می‌کنیم:

$$y'' = [e^{\sin x}]'\cos x[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)] + e^{\sin x}[\cos x]'[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)] + e^{\sin x}\cos x[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)]' =$$

$$= \cos x e^{\sin x}\cos x[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)] + e^{\sin x}(-\sin x)[\cos(\sin x) - \sin(\sin x)] + e^{\sin x}\cos x[-\cos x \sin(\sin x) - \cos x \cos(\sin x)]$$

مثال ۱۹ (سخت): اگر f تابعی چندجمله‌ای و غیرصفر باشد و در تساوی $f'(x^2)f''(x) - 4 = 4f(x)$ صدق کند، آن‌گاه مقدار $f(\sqrt{1396})$ کدام است؟

۱) ۱۳۹۴   ۲) ۱۳۹۵   ۳) ۱۳۹۶   ۴) ۱۳۹۷

پاسخ: گزینه «۲» طبق صورت سؤال $f(x)$ یک چندجمله‌ای غیرصفر است. ابتدا با استفاده از تساوی $f'(x^2)f''(x) - 4 = 4f(x)$ درجه‌ی $f(x)$ را تشخیص می‌دهیم. فرض کنیم $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد. در این صورت $f'(x)$ از درجه‌ی $n-1$ و $f''(x)$ از درجه‌ی $n-2$ است. وقتی در $f'(x)$ به جای x ها، x^2 قرار می‌دهیم، درجه‌اش دو برابر می‌شود. بنابراین $f'(x^2)$ از درجه‌ی $2(n-1)$ است. همچنین وقتی دو چندجمله‌ای در هم ضرب می‌شوند، درجه‌ی آن‌ها با هم جمع می‌شود (مثلاً حاصل‌ضرب یک چندجمله‌ای درجه‌ی دو و یک چندجمله‌ای درجه‌ی سه برابر با یک چندجمله‌ای از درجه‌ی پنج است). پس $f'(x^2)f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $2(n-1) + (n-2)$ است. حالا که درجه‌ی همه‌ی عبارات را تشخیص دادیم به تساوی $f'(x^2)f''(x) - 4 = 4f(x)$ توجه کنید. درجه‌ی چندجمله‌ای‌ها در دو طرف تساوی باید برابر باشد، پس داریم:

$$2(n-1) + (n-2) = n \Rightarrow 2n - 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

حالا فهمیدیم $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است. پس می‌توان نوشت: $f(x) = ax^2 + bx + c$، بنابراین $f'(x) = 2ax + b$ و $f''(x) = 2a$ است. در تابع $f'(x)$ به جای x اگر x^2 را قرار دهیم، خواهیم داشت: $f'(x^2) = 2ax^2 + b$. حالا تساوی داده شده در صورت سؤال را بازنویسی می‌کنیم:

$$f'(x^2)f''(x) - 4 = 4f(x) \Rightarrow (2ax^2 + b)(2a) - 4 = 4ax^2 + 4bx + 4c \Rightarrow 4a^2x^2 + 2ab - 4 = 4ax^2 + 4bx + 4c$$

ضریب جملات متشابه در دو طرف تساوی باید با هم برابر باشند. برای مثال ضریب x^2 در سمت راست $4a$ و در سمت چپ $4a^2$ است، پس $4a^2 = 4a$ خواهد بود. به همین ترتیب ضریب x و جمله‌ی ثابت در دو طرف تساوی با هم برابرند:

$$\begin{cases} \text{ضریب } x^2 \text{ در دو طرف تساوی} & \Rightarrow 4a^2 = 4a \\ \text{ضریب } x \text{ در دو طرف تساوی} & \Rightarrow 0 = 4b \\ \text{جمله‌ی ثابت در دو طرف تساوی} & \Rightarrow 2ab - 4 = 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ یا } a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

اما $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است؛ پس ضریب x^2 یعنی a نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین $a = 1$ است. با در نظر گرفتن $a = 1$، $b = 0$ و $c = -1$ ضابطه‌ی $f(x)$ به‌صورت $f(x) = x^2 - 1$ است.

$$x = \sqrt{1396} \Rightarrow f(\sqrt{1396}) = 1396 - 1 = 1395$$

محاسبه‌ی مشتق مرتبه n ام

برای محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی n ام برخی توابع، خصوصاً وقتی n عددی بزرگ است، مشتق‌گیری‌های متوالی اصلاً کار عاقلانه‌ای نیست و اصولاً حجم محاسبات و زمان بسیار طولانی را می‌طلبد و این موضوع نه در سؤالات پایان ترم دانشگاهی و نه در آزمون‌های چهارگزینه‌ای، یک عمل منطقی است. خُب راهکار چیست؟ تنها پیشنهادی که می‌توان داد این است که مشتق مرتبه‌های اول، دوم و سوم را حساب کنیم و سپس سعی کنیم قانون حاکم بین مرتبه و تغییرات تابع مشتق را تشخیص دهیم. مثال زیر موضوع را کامل روشن می‌کند.

مثال ۲۰: مشتق مرتبه n ام تابع $y=\frac{1}{x}$ را حساب کنید.

پاسخ: همان‌طور که گفتیم، ابتدا لازم است مشتق‌های مرتبه اول، دوم و سوم را حساب کنیم:

$$y'=\frac{0-1\times 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}=(-1)^1\frac{1}{x^{1+1}}\quad,\quad y''=-\frac{0-2x\times 1}{(x^2)^2}=\frac{2}{x^3}=(-1)^2\frac{2}{x^{2+1}}\quad,\quad y'''=\frac{0-3x^2\times 2}{(x^3)^2}=\frac{-6}{x^4}=(-1)^3\frac{6}{x^{3+1}}$$

خُب تا این‌جا می‌توان گفت مرتبه‌ی مشتق، با توان x در مخرج ارتباط دارد؛ یعنی توان x در مخرج کسر به‌صورت «مرتبه مشتق ۱+» است. همچنین توان (-1) نیز با مرتبه‌ی مشتق مرتبط است. به این شکل که توان (-1) دقیقاً برابر با مرتبه مشتق است. اما در صورت کسر چه ارتباطی می‌توان کشف کرد؟ با نگاهی به مشتقات اول و دوم ممکن است خیلی ذوق زده بگویید؛ مرتبه مشتق، دقیقاً در صورت کسر وجود دارد! اما با نگاهی به‌صورت کسرِ مشتقِ مرتبه سوم متوجه این تصور غلط خواهید شد! دنبال یک ارتباط بین عدد ۳ (مرتبه مشتق) و عدد ۶ باشید. منطقی‌ترین ارتباط که در مشتق‌های مرتبه اول و دوم هم برقرار است، این است که ۶ را به‌صورت !۳ بنویسیم و بگوییم در تمام این سه مشتق، «فاکتوریل عددِ مرتبه مشتق» در صورت کسر قرار دارد (عدد ۱ در y' را به‌صورت !۱ و عدد ۲ در y'' را به‌صورت !۲ بنویسید).

بنابراین مشتق مرتبه n ام به‌صورت زیر است:

$$y^{(n)}(x)=(-1)^{\overset{\text{مرتبه‌ی مشتق}}{\boxed{n}}}\,\frac{\overset{\text{فاکتوریل مرتبه‌ی مشتق}}{\boxed{n!}}}{x^{\underset{\text{مرتبه‌ی مشتق}}{\boxed{n}}+1}}$$

مثال ۲۱: مشتق مرتبه دهم تابع $y=e^{3x}$ کدام است؟

۱) e^{3x} ۲) $10e^{3x}$ ۳) $(e^{3x})^{10}$ ۴) $3^{10}e^{3x}$

پاسخ: گزینه «۴» آن چیزی که در بدست آوردن مشتق مراتب بالاتر مهم است، حدس زدن می‌باشد. به روند زیر توجه کنید:

$$y=e^{3x}\Rightarrow y^{(1)}=3^1e^{3x}\quad,\quad y^{(2)}=3\times 3e^{3x}=3^2e^{3x}\quad,\quad y^{(3)}=3^2\times 3e^{3x}=3^3e^{3x}$$

همان‌طور که می‌بینید، e^{3x} در تمام مشتق‌ها وجود دارد و به نسبت مرتبه‌ی مشتق، عدد ۳ به توان همان مرتبه رسیده است. پس به راحتی می‌توان حدس زد، مشتق مرتبه دهم به شکل $y^{(10)}=3^{10}e^{3x}$ خواهد بود و دیگر لازم نیست ۱۰ بار مشتق بگیریم.

مثال ۲۲: مشتق دهم تابع با ضابطه $f(x)=x\sin x$ کدام است؟

۱) $x\sin x+10\cos x$ ۲) $10\cos x-x\sin x$ ۳) $10x-x\sin x$ ۴) $\sin x+x\cos x$

پاسخ : گزینه «۲» با توجه به آن که مشتق دهم را می‌خواهیم، بهتر است به مشتق‌های مرتبه‌ی زوج توجه کنیم. در مشتق‌های مرتبه‌ی زوج جملات ظاهر شده عبارتند از $\cos x$ و $x\sin x$. علامتِ آن‌ها یکی در میان عوض شده است. مثلاً در مشتق دوم $-x\sin x$ داریم و در مشتق چهارم $+x\sin x$. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم، در مشتق دهم باید $-x\sin x$ داشته باشیم. حالا به جمله‌ی $\cos x$ دقت کنید. ضریب این جمله علاوه بر تغییر علامت، هر بار دو برابر می‌شود. در مشتق دوم، $+2\cos x$ داریم. در مشتق چهارم $-4\cos x$، پس در مشتق ششم $+6\cos x$ خواهیم داشت و به همین ترتیب در مشتق دهم باید $10\cos x$ داشته باشیم؛ پس $y^{(10)}=10\cos x-x\sin x$ است.

$$y=x\sin x\Rightarrow\begin{cases}y^{(1)}=\sin x+x\cos x\\ y^{(2)}=2\cos x-x\sin x\\ y^{(3)}=-3\sin x-x\cos x\\ y^{(4)}=-4\cos x+x\sin x\end{cases}$$

توجه: البته این‌گونه مشتق‌ها که حاصل‌ضرب دو عبارت هستند با دستور لایب‌نیتز محاسبه می‌شوند که در صفحات بعدی توضیح خواهیم داد.

تذکر ۷: روش مبتنی بر پیدا کردن ارتباط بین مشتقات، یک روش کلی برای محاسبه‌ی مشتق n ام توابع می‌باشد، اما ممکن است این فرآیند در برخی توابع با محاسبات پیچیده‌تر توأم باشد و از آن مهم‌تر تشخیص ارتباط بین مرتبه‌ی مشتق و تابع مشتق سخت باشد. برای همین فرمول مشتق n ام توابع معروف را به شکل زیر دسته‌بندی کرده و ارائه می‌کنیم (عشقِ فرمول‌ها حفظ کنند!).

۱) مشتق n ام تابع هموگرافیک به شکل کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad\neq bc)$ به‌صورت $y^{(n)}=n!\times(-c)^{n-1}\cdot\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}$ می‌باشد.

مثال ۲۳: مشتق مرتبه دهم تابع $y=\frac{3x+1}{2x+1}$ به ازای $x=-\frac{3}{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}(10!)$ ۲) $\frac{1}{4}(10!)$ ۳) $\frac{1}{2}(10!)$ ۴) $-\frac{1}{2}(10!)$

فرمول لایب‌نیتز

اگر u و v، توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه nام برحسب متغیر x باشند، آن‌گاه مشتق مرتبه nام برای uv از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v^{(0)}$$

که به طور خلاصه آن را به‌صورت مقابل می‌توان نوشت:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

یادآوری: ترکیب r از n را به‌صورت $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و حاصل آن برابر با $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ است.

یک روش برای حفظ کردن فرمول لایب‌نیتز این است که وقتی مشتق می‌گیریم؛ در عبارت شامل uv، مرتبه مشتق، بـرای u از صفر و مرتبـه مشـتق بـرای v از مرتبه مشتقی که دنبال آن هستیم، شروع می‌شود و جمله به جمله به مرتبه مشتق u یک واحد اضافه و از مرتبه مشتق v یک واحد کم می‌شود و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تـا مرتبـه مشـتق u برابـر بـا مرتبـه مشـتق خواسـته شـده و مرتبـه مشـتق v برابـر بـا صـفر شـود. همـین‌طـور در ضـریب عبـارت uv همـواره ترکیب $\binom{\text{مرتبه مشتق}}{0}$ را برای جمله‌ی اول داریم و بدون این‌که مرتبه مشتق تغییر کند، در هر جمله یک واحد به قسمت پایینی اضافه می‌شود.

مثال ۳۲: مشتق مرتبه دهم $y=(x^3+x+1)e^x$ در $x=0$ کدام است؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۷۳۱ ۳) ۷۱۹ ۴) ۷۲۹

پاسخ : گزینه «۲» قرار می‌دهیم $u=x^3+x+1$ و $v=e^x$، در این صورت داریم:

$$y^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}u^{(k)}v^{(10-k)}=\binom{10}{0}(x^3+x+1)e^x+\binom{10}{1}(3x^2+1)e^x+\binom{10}{2}(6x)e^x+\binom{10}{3}(6)e^x+0+0+\cdots+0$$

$$\Rightarrow y^{(10)}(0)=\frac{10!}{0!(10-0)!}\times e^0+\frac{10!}{1!(10-1)!}\times e^0+\frac{10!}{2!(10-2)!}\times(0)+\frac{10!}{3!(10-3)!}\times 6\times e^0=1+10+0+720=731$$

در این مثال، از جمله‌ی چهارم به بعد مشتق $u=x^3+x+1$ برابر صفر می‌شود. همچنین دقت کنید که مشتق e^x از هر مرتبه e^x است.

مثال ۳۳: مشتق مرتبه پنجم تابع $y=x^2\sin x$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه Harvard)

۱) $x^2\sin x-10x\sin x+20\cos x$
۲) $x^2\cos x+10x\sin x-20\cos x$
۳) $x^2\sin x+10x\sin x-20\cos x$
۴) $x^2\cos x-10x\sin x+20\cos x$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا قرار می‌دهیم $u=x^2$ و $v=\sin x$ در این صورت واضح است که به ازای $k>2$ مقدار $u^{(k)}=0$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$y^{(5)}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}u^{(k)}v^{(5-k)}=\binom{5}{0}x^2(\cos x)+\binom{5}{1}(2x)(\sin x)+\binom{5}{2}(2)(-\cos x)=x^2\cos x+10x\sin x-20\cos x$$

در محاسبات فوق، $\cos x$ در جمله‌ی اول، مشتق مرتبه پنجم $v=\sin x$ می‌باشد، همچنین $\sin x$ در جمله‌ی دوم، مشتق مرتبه چهارم $v=\sin x$ و بالأخره در جمله‌ی سوم $-\cos x$ مشتق مرتبه سوم $v=\sin x$ می‌باشد.

مشتق‌گیری ضمنی

معادلات بی‌شماری وجود دارند که شامل دو متغیر x و y هستند. در بعضی از آن‌ها، بدست آوردن یکی برحسب دیگری، کار راحتی اسـت. در واقـع همـان معـادلاتی کـه تاکنون مشتق آن‌ها را محاسبه کردیم، از جمله‌ی این موارد بودند. اما در برخی از آن‌ها نمی‌توان فرمول صریحی که مثلاً y را برحسب x بیان کند، به آسانی پیدا کرد. مثلاً به معادله‌ی $x^2-xy+y^3=1$ توجه کنید؛ در این معادله پیدا کردن فرمول صریحی که y را بر حسب x بیان کند، آسان نیست؛ چون باید یک معادله‌ی درجه سـوم را برحسب y حل کنیم. به عنوان یک مثال دیگر توجه کنید که اوضاع در برخی از معادلات مثل $xy+\sin y+x^2=1$ وخیم‌تر هم می‌شود! چون در این مثال اساساً نمی‌توان فرمول صریحی برحسب x بدست آورد! سؤالی که پیش می‌آید، این اسـت کـه: «در ایـن‌گونـه توابـع، مشـتق را چطـور حسـاب کنـیم؟» جـواب ایـن سـؤال، اسـتفاده از «مشتق‌گیری ضمنی» است. فرض کنیم تمام اجزای معادله‌ی دو متغیره‌ای شامل x و y و اعداد ثابت را به یک طرف تساوی آورده و مساوی صـفر قـرار دهـیم. یعنـی بـه حالت $f(x,y)=0$ برسیم؛ در این صورت y'_x (یعنی مشتق y نسبت به x) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } x \text{ با فرض این‌که } y \text{ عددی ثابت باشد}}{\text{مشتق } f \text{ نسبت به } y \text{ با فرض این‌که } x \text{ عددی ثابت باشد}}$$

برای مثال، y' برای معادله‌ی $x^3-y^3=3x+1$ به این‌صورت حساب می‌شود؛ باید در صورت کسر فرض کنیم y عددی ثابت است (که می‌دانـیم مشـتقش صـفر است) و مشتق نسبت به x را حساب کنیم و به همین ترتیب برای مخرج کسر باید فرض کنیم x عددی ثابت است (که مـی‌دانـیم مشـتقش صـفر اسـت) و مشـتق نسبت به y را حساب کنیم. توجه داشته باشید که چه در صورت و چه در مخرج کسر (یعنی چه y عدد ثابت فرض شود و چه x)، مشتق عدد ثابت هم صفر است و ما برای نشان دادن این موضوع به جای مشتق عددِ ثابت در مخرج و در صورت، صفر قرار داده‌ایم که البته می‌توانستیم کلاً ننویسیم!

$$f(x,y)=0 \Rightarrow x^3-y^3-3x-1=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{3x^2-0-3-0}{0-3y^2-0-0}=\frac{3(x^2-1)}{3y^2}=\frac{x^2-1}{y^2}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1)\ y-x^2y+xy=1 \Rightarrow y'=-\frac{(-2xy)+y}{1-x^2+x}=\frac{y-2xy}{x^2-x-1}$$

$$2)\ y+\sin(xy)+\cos(xy)=0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x=y\cos xy-y\sin xy \\ f'_y=1+x\cos xy-x\sin xy \end{cases} \Rightarrow y'_x=-\frac{y\cos xy-y\sin xy}{1+x\cos xy-x\sin xy}$$

مثال ۳۴: با فرض این‌که y تابعی از x است، مشتق تابع $\mathrm{Arctg}y-y+x=0$ کدام است؟

۱) $y'=1+y^2$ ۲) $y'=1+y^{-2}$ ۳) $y'=1-y^{+2}$ ۴) $y'=1-y^{-2}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$y'=-\frac{1}{\frac{1}{1+y^2}-1}=\frac{-1}{\frac{-y^2}{1+y^2}}=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1 \Rightarrow y'=1+y^{-2}$$

مثال ۳۵: فرض کنید $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$ در این صورت $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2y-1}$ ۲) $\frac{-1}{2y-1}$ ۳) $\frac{1}{2y+1}$ ۴) $\frac{-1}{2y+1}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^2=x+\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}_{\text{این، همان عبارت داده شده در صورت سؤال یعنی } y \text{ است.}} \Rightarrow y^2=x+y \Rightarrow y^2-x-y=0 \Rightarrow y'=-\frac{-1}{2y-1}=\frac{1}{2y-1}$$

مثال ۳۶: اگر $x=y+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cdots}}}$، آن‌گاه $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (جمله‌ها همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

۱) $\frac{2x-y}{x}$ ۲) $\frac{y-2x}{x}$ ۳) $\frac{2x-y}{y}$ ۴) $\frac{y-2x}{y}$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا به عبارت توجه کنید؛ عبارت داده شده در مخرج کسر همان x است.

$$x=y+\cfrac{1}{\underbrace{\boxed{y+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{y+\cdots}}}}_{x}} \Rightarrow x=y+\frac{1}{x}\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x} x^2=xy+1 \Rightarrow x^2-xy-1=0 \xrightarrow{\text{استفاده از مشتق‌گیری ضمنی}} \frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y}{-x}=\frac{2x-y}{x}$$

مثال ۳۷: اگر $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\cdots}}}$، آن‌گاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید. (جمله‌ها در توان تا بی‌نهایت ادامه دارد و $\cos x$ مثبت است)

پاسخ: با توجه به این‌که تابعی توانی برحسب x داریم، ابتدا از طرفین Ln می‌گیریم. دقت کنید تمام عباراتی که در توان هستند، پس از Ln گرفتن به پشت Ln منتقل می‌شوند:

$$\mathrm{Ln}y=\mathrm{Ln}\cos x^{\cos x^{\cos x^{\cdots}}} \Rightarrow \mathrm{Ln}y=\cos x^{\cos x^{\cdots}}\times \mathrm{Ln}\cos x$$

خُب عبارت پشت Ln همان y است، لذا داریم:

$$\mathrm{Ln}y=y\mathrm{Ln}\cos x \Rightarrow \mathrm{Ln}y-y\mathrm{Ln}\cos x=0$$

حالا با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\sin x}{\cos x}\times y}{\frac{1}{y}-\mathrm{Ln}\cos x}=-\frac{y^2\mathrm{tg}x}{1-y\mathrm{Ln}\cos x}$$

نکته ۴: در برخی مسائل بدون توجه به فرمول و بدون این‌که یک‌بار x را ثابت و بار دیگر y را ثابت فرض کنیم، می‌توانیم بگوییم x متغیر است و y تابع آن و برحسب x مشتق بگیریم و مشتق y را y' بنامیم. مثلاً در مسأله‌ای که ابتدا حل کردیم، داریم:

$$x^3-y^3-3x-1=0 \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} 3x^2-3y^2\times y'-3=0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 3} x^2-y^2y'-1=0 \Rightarrow y^2y'=x^2-1 \Rightarrow y'=\frac{x^2-1}{y^2}$$

این روش بیشتر در محاسبات مشتقات مرتبه دوم و بالاتر توابع ضمنی کاربرد دارد و شاید گاهی اوقات محاسبات را ساده‌تر کند.

مثال ۴۲: از رابطه $xy^{2}-x^{2}+y=5$ مقدار $\frac{d^{2}x}{dy^{2}}$ در نقطه $(1,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{2}$ ۲) $\frac{23}{2}$ ۳) $\frac{31}{4}$ ۴) $\frac{61}{4}$

پاسخ : گزینه «۴» ابتدا با مشتق‌گیری ضمنی، $\frac{dx}{dy}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'_y}{f'_x}=-\frac{2xy+1}{y^{2}-2x}$$

حالا یک‌بار دیگر از طرفین مشتق می‌گیریم. دقت کنید که در این مثال، بر خلافِ همیشه x تابعی بر حسب y است:

$$\frac{d^{2}x}{dy^{2}}=-\frac{2[x'y+x\times1][y^{2}-2x]-[2y-2x'][2xy+1]}{(y^{2}-2x)^{2}}$$

نیازی به محاسبه‌ی بیشتر نداریم. با جایگذاری $(x,y)=(1,2)$ در مشتقِ اول داریم: $\frac{dx}{dy}=-\frac{4+1}{4-2}=-\frac{5}{2}$ پس $x'=-\frac{5}{2}$ است. حالا با جایگذاری این مقادیر در مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^{2}x}{dy^{2}}=-\frac{2[-5+1][4-2]-[4+5][4+1]}{(4-2)^{2}}=\frac{61}{4}$$

مثال ۴۳: از رابطه $x=\frac{y^{2}}{2-y}$ مقدار $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ در نقطه $y=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $-\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $-\frac{4}{27}$

پاسخ : گزینه «۲»

$$x=\frac{y^{2}}{2-y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{2y(2-y)-(-1)(y^{2})}{(2-y)^{2}}=\frac{4y-y^{2}}{(2-y)^{2}}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(2-y)^{2}}{4y-y^{2}}\Rightarrow\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\frac{2(2-y)(-y')(4y-y^{2})-(4y'-2yy')\times(2-y)^{2}}{(4y-y^{2})^{2}}$$

از طرفی چون $y'=\frac{(2-y)^{2}}{4y-y^{2}}$، لذا به ازای $y=1$، $y'(1)=\frac{(2-1)^{2}}{4\times1-1^{2}}=\frac{1}{3}$، با جایگذاری این مقدار در ضابطه y'' داریم:

$$y''(1)=\frac{d^{2}y}{dx^{2}}(1)=\frac{[2(2-1)(-\frac{1}{3})(4\times1-1^{2})]-[(4\times(\frac{1}{3})-2\times1(\frac{1}{3}))(2-1)^{2}]}{(4\times1-1^{2})^{2}}=\frac{-2-\frac{2}{3}}{3^{2}}=\frac{-\frac{8}{3}}{9}=-\frac{8}{27}$$

تذکر ۸: استفاده ناشیانه از فرمول مشتق‌گیری ضمنی بعضاً ممکن است نتایج غلطی به بار آورد! مثلاً فرض کنید معادله‌ی $x^{2}+y^{2}=-1$ را داده باشند و از ما بخواهند مشتق بگیریم. اگر ما به راحتی بنویسیم: $y'_x=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$، اشتباه کرده‌ایم! چون چنین منحنی‌ای اصلاً وجود خارجی ندارد! پس نمی‌توان از آن مشتق گرفت (در معادله‌ی داده شده، مجموع یک عبارت مثبت در سمت چپ، برابر با عددی منفی شده است!).

مثال ۴۴: با توجه به معادله $x^{4}+y^{4}=x^{2}y^{2}$ کدام گزاره حاصل می‌شود؟

۱) $y'=\frac{2x^{3}+xy^{2}}{x^{2}y+2y^{3}}$ ۲) $y'=\frac{2x^{3}-xy^{2}}{x^{2}y-2y^{3}}$ ۳) $y'=\frac{xy^{2}-2x^{3}}{2y^{3}-x^{2}y}$ ۴) مشتق وجود ندارد.

پاسخ : گزینه «۴» با یک مشتق‌گیری ضمنی خیلی ساده روبه‌رو هستیم!؟

$$x^{4}+y^{4}=x^{2}y^{2}\Rightarrow x^{4}+y^{4}-x^{2}y^{2}=0\Rightarrow y'=-\frac{4x^{3}-2xy^{2}}{4y^{3}-2yx^{2}}\Rightarrow y'=\frac{-2x^{3}+xy^{2}}{2y^{3}-x^{2}y}$$

امیدوارم گزینه (۳) را انتخاب نکرده باشید! چرا که تنها نقطه‌ای که در معادله منحنی صدق می‌کند، نقطه $(0,0)$ است، یعنی $x=y=0$ و تابع در این نقطه نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا شرط لازم برای مشتق‌گیری آن است که تابع در یک همسایگی نقطه مربوطه تعریف شده باشد که در مورد رابطه داده شده در صورت سؤال نقطه‌ی $(0,0)$ یک نقطه‌ی تنها می‌باشد.

نکته ۶: هرگاه با تبدیل x به y و y به x معادله‌ی $f(x,y)$ تغییری نکند، یعنی $f(x,y)=f(y,x)$ معلوم می‌شود که f'_y با تبدیل x به y و y به x در ضابطه‌ی f'_x بدست می‌آید. مثلاً وقتی $f(x,y)=Ln(x^{2}+xy+y^{2})$ باشد، می‌دانیم $f'_x=\frac{2x+y}{x^{2}+xy+y^{2}}$ حالا در همین کسر، x و y را به یکدیگر تبدیل می‌کنیم و $f'_y=\frac{2y+x}{y^{2}+yx+x^{2}}$ بدست می‌آید. این موضوع یک نتیجه‌ی مهم دارد. در نقاطی که به صورت (a,a) باشند مثل نقطه‌ی $(1,1)$ یا $(-2,-2)$ خواهیم داشت: $f'_x(a,a)=f'_y(a,a)$.

مثال ۸۴: اگر $y = x - x^{۲}$، نسبت تغییرات $y^{۲}$ به تغییرات $x^{۲}$ کدام است؟

۱) $۲x^{۲}+۱$ ۲) $۲x^{۲}-۳x$ ۳) $۱+۲x^{۲}-۳x$ ۴) $۱-۲x^{۲}-۲x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» ابتدا $y^{۲}$ را به شکل مقابل حساب می‌کنیم: $y^{۲}=(x-x^{۲})^{۲}=x^{۲}+x^{۴}-۲x^{۳}$

با در نظر گرفتن $f(x)=x^{۲}+x^{۴}-۲x^{۳}$ و $g(x)=x^{۲}$ داریم:

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{۲x+۴x^{۳}-۶x^{۲}}{۲x}=\frac{۲x}{۲x}+\frac{۴x^{۳}}{۲x}-\frac{۶x^{۲}}{۲x}=۱+۲x^{۲}-۳x$$

مثال ۸۵: اگر $x=y^{۳}+y$، نسبت تغییر y به تغییر $\sqrt{۵x+۶}$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

۱) $۰/۳$ ۲) $۰/۴$ ۳) $۰/۵$ ۴) $۰/۶$

☑ **پاسخ :** گزینه «۲» اگر فرض کنیم $g(x)=\sqrt{۵x+۶}$، آن‌گاه نسبت تغییر y به $\sqrt{۵x+۶}$ برابر $\frac{y'_x}{g'_x}$ تعریف می‌شود؛ پس داریم:

$$g(x)=\sqrt{۵x+۶}\Rightarrow g'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۶}}\xlongequal{x=۲}\frac{۵}{۲\sqrt{۱۶}}=\frac{۵}{۸}$$

از طرفی برای محاسبه y'_x بهتر است x'_y را حساب کرده و آن‌گاه با توجه به رابطه $y'_x=\frac{۱}{x'_y}$ مقدار y'_x را معلوم کنیم:

$$x=y^{۳}+y\Rightarrow x'_y=۳y^{۲}+۱\Rightarrow y'_x=\frac{۱}{۳y^{۲}+۱}$$

$$x=y^{۳}+y\xrightarrow{x=۲}y^{۳}+y=۲\Rightarrow y=۱\Rightarrow y'_x=\frac{۱}{۳(۱)^{۲}+۱}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{نسبت تغییرات}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۸}}=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$$

چند نکته تکمیلی در مورد مشتق

۱) مشتق تابع زوج و مشتق‌پذیر، تابعی فرد و مشتق یک تابع فرد و مشتق‌پذیر، تابعی زوج است.

مثال ۸۶: اگر $f(x)=x\sin x$ و $g(x)=\log(۲x+\sqrt{۴x^{۲}+۱})$ آن‌گاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ تابعی زوج است.

۲) $f'(x)$ تابعی فرد و $g'(x)$ نیز تابعی فرد است.

۳) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ تابعی فرد است.

۴) $f'(x)$ تابعی زوج و $g'(x)$ نیز تابعی زوج است.

☑ **پاسخ :** گزینه «۱» $f(x)$ تابعی زوج و $g(x)$ تابعی فرد است بنابراین مشتق $f(x)$ تابعی فرد و مشتق $g(x)$ تابعی زوج است.

مثال ۸۷: مشتق مرتبه‌ی یازدهم تابع $y=\frac{۱۶}{x^{۲}-۴}$ در نقطه‌ی $x=۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱!}{۲^{۱۲}}$ ۲) $-\frac{۱۱!}{۲^{۱۰}}$ ۳) $-\frac{۱}{۲^{۱۲}}$ ۴) ۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع $y(x)$ زوج است، بنابراین $y'(x)$ فرد است، $y''(x)$ زوج است و به همین ترتیب مشتق‌های مرتبه‌ی زوج آن، زوج هستند و مشتق‌های مرتبه‌ی فرد آن، فرد هستند. پس $y^{(۱۱)}(x)$ تابعی فرد است. از طرفی می‌دانیم که هر تابع فرد که در $x=۰$ تعریف شده باشد، در این نقطه مقدارش صفر است. پس $y^{(۱۱)}(۰)=۰$ است.

مثال ۸۸: $f(x)$ تابعی زوج و در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر است. فرض کنید که $f'(۱)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{[f(x)]^{۱۳۹۶}-[f(۱)]^{۱۳۹۶}}{x^{۱۳۹۶}-۱}=$ در این صورت مقدار حد $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{[f(x)]^{۱۳۹۵}-[f(-۱)]^{۱۳۹۵}}{x^{۱۳۹۵}+x^{۱۳۹۶}}$ کدام است؟

۱) ۲×۱۳۹۵ ۲) -۲×۱۳۹۵ ۳) -۲×۱۳۹۶ ۴) ۲×۱۳۹۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» برای راحتی بیشتر، حدهای مطرح شده را A و B می‌نامیم:

$$A=\lim_{x\to ۱}\frac{[f(x)]^{۱۳۹۶}-[f(۱)]^{۱۳۹۶}}{x^{۱۳۹۶}-۱}\quad;\quad B=\lim_{x\to -۱}\frac{[f(x)]^{۱۳۹۵}-[f(-۱)]^{۱۳۹۵}}{x^{۱۳۹۵}+x^{۱۳۹۶}}$$

هر دوی آن‌ها فرم مبهم $\frac{۰}{۰}$ دارند، پس می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم:

$$\begin{cases}A=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱۳۹۶[f(x)]^{۱۳۹۵}f'(x)}{۱۳۹۶x^{۱۳۹۵}}=f(۱)^{۱۳۹۵}f'(۱)\\[2ex] B=\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۱۳۹۵[f(x)]^{۱۳۹۴}f'(x)}{۱۳۹۵x^{۱۳۹۴}+۱۳۹۶x^{۱۳۹۵}}=\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۱۳۹۵[f(-۱)]^{۱۳۹۴}f'(-۱)}{۱۳۹۵-۱۳۹۶}=-۱۳۹۵[f(-۱)]^{۱۳۹۴}f'(-۱)\end{cases}$$

حالا به اطلاعات داده شده در صورت سؤال توجه می‌کنیم. طبق آن‌ها، $f'(1)=2$ و $A=2$ است.

$$A=[f(1)]^{1395}f'(1)=2 \Rightarrow [f(1)]^{1395}\times 2=2 \Rightarrow f(1)=1$$

برای محاسبه‌ی B به مقدار $f(-1)$ و $f'(-1)$ نیاز داریم. $f(x)$ تابعی زوج است، در نتیجه $f(-1)=f(1)$ پس $f(-1)=1$. مشتقِ تابع زوج، تابعی فرد می‌شود، بنابراین $f'(x)$ فرد است. پس $f'(-1)=-f'(1)$ یعنی $f'(-1)=-2$. حالا می‌توانیم مقدار B را حساب کنیم:

$$B=-1395[f(-1)]^{1394}f'(-1)=-1395\times 1\times(-2)=2\times 1395$$

۲) اگر توابع f و g در نقطه x_0 مشتق‌پذیر **نباشند**، ممکن است توابع $f+g$ ، $f.g$ و fog در x_0 مشتق‌پذیر باشند. برای مثال توابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x|$ هیچ کدام در نقطه $x_0=0$ مشتق‌پذیر نیستند ولی $f.g=x^2$ در $x_0=0$ مشتق دارد.

در حالت کلی می‌توان گفت اگر یکی از توابع مشتق‌پذیر و دیگری مشتق‌ناپذیر باشد، $(f\pm g)$ قطعاً مشتق‌پذیر **نخواهد بود.**

۳) اگر f و g هر دو مشتق‌پذیر باشند، $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ نیز مشتق‌پذیرند.

برای مثال دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را که در نقطه $x_0=0$ مشتق‌پذیرند در نظر بگیرید، می‌بینیم که تابع $f+g$ نیز در $x_0=0$ مشتق‌پذیر است.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & ; x\ge 0\\ -x^2 & ; x<0\end{cases}\ ,\ g(x)=\begin{cases}x^2+1 & ; x\ge 0\\ 2x^2+1 & ; x<0\end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}3x^2+1 & ; x\ge 0\\ x^2+1 & ; x<0\end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=x$$

۴) مشتق یک تابع متناوب با دوره تناوب T، متناوب با همان دوره تناوب T می‌باشد.

چه زمانی لازم است از تعریف مشتق استفاده کنیم؟

برای محاسبه‌ی $f'(x_0)$ همیشه می‌توانیم از تعریف مشتق استفاده کنیم. با وجود این، واضح است که این کار پر دردِسر و در برخی سؤالات، توأم با محاسبات پیچیده است. و همان‌طور که می‌دانید استفاده از قواعد مشتق‌گیری سریع‌تر و راحت‌تر است. برای مثال اگر در تابع $f(x)=x^2$ بخواهیم $f'(1)$ را حساب کنیم، ایرادی ندارد که از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

البته با توجه به قواعد مشتق‌گیری همه می‌دانیم که مشتق تابع $f(x)=x^2$ به‌صورت $f'(x)=2x$ است و در نتیجه $f'(1)=2$ خواهد بود. پس لازم نبود با استفاده از تعریف مشتق وقت خود را تلف کنیم.

ولی گاهی اوقات مجبور می‌شویم از طریق تعریف مشتق مقدار $f'(x_0)$ را بدست آوریم. این زمانی رخ می‌دهد که ضابطه‌ی $f(x)$ برای $x=x_0$ با ضابطه‌ی آن در نواحی $x>x_0$ و $x<x_0$ یکسان نباشد. مثلاً به تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & ; x\ne 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ توجه کنید. می‌خواهیم $f'(x)$ را در $x=0$ محاسبه کنیم. با دقت به ضابطه‌ی $f(x)$ متوجه می‌شویم که ضابطه‌ی آن در $x=0$ با ضابطه‌ی آن برای نقاط $x>0$ و $x<0$ (یعنی همان $x\ne 0$) فرق دارد. در خود نقطه‌ی $x=0$ داریم $f(0)=0$، اما برای $x>0$ و $x<0$ (یعنی $x\ne 0$) داریم $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$. این نشان می‌دهد که برای محاسبه‌ی $f'(0)$ حق نداریم از قواعد معمولی مشتق‌گیری استفاده کنیم بلکه باید از طریق تعریف مشتق مقدار آن را تعیین کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

در محاسبه‌ی این حد دقت کنید که $\cos\frac{1}{x}$ کران‌دار است (چون بین ۱- تا ۱+ قرار دارد) و از طرفی $\lim_{x\to 0}x=0$ است؛ به همین خاطر حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی $x\cos\frac{1}{x}$ به سمت صفر می‌رود. (هرگاه $\cos(\pm\infty)$ یا $\sin(\pm\infty)$ به وجود آید حد وجود ندارد؛ مگر آن که یک عامل صفرشونده در این جملات ضرب شده باشد که فرم $0\times\cos(\pm\infty)$ یا $0\times\sin(\pm\infty)$ را ایجاد کند) پس با استفاده از تعریف مشتق متوجه شدیم که $f'(0)=0$ است.

مثال ۸۹: در تابع $f(x)=\begin{cases}x\lfloor x+1\rfloor & ; x<2\\ 4 & ; x=2\\ x\lfloor x\rfloor & ; x>2\end{cases}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) $f'(2)=1$ ۲) $f'(2)=4$ ۳) $f'(2)=2$ ۴) $f(x)$ در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا از پیوستگی $f(x)$ در $x=2$ اطمینان پیدا می‌کنیم: $f(2^-)=2\lfloor 2^-+1\rfloor=4$ ، $f(2)=4$ ، $f(2^+)=2\lfloor 2^+\rfloor=4$ پس f در $x=2$ پیوسته است. حالا می‌خواهیم $f'(2)$ را بدست آوریم، اما تابع $f(x)$ در $x=2$ و $x>2$ و $x<2$ ضابطه‌ی یکسانی ندارد. پس مجبوریم از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & ; x>0\\ 0 & ; x=0\\ -2x & ; x<0\end{cases}$$

حالا تابع سه ضابطه‌ای $f'(x)$ را در اختیار داریم. می‌خواهیم مشتق آن را در $x=0$، یعنی $f''(0)$ را محاسبه کنیم. باید از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

در این‌جا هم اگر $x>0$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=2x$ است و اگر $x<0$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=-2x$ می‌شود. پس داریم:

$$\begin{cases}f''(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=2\\ f''(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x}=-2\end{cases}\Rightarrow$$ $f''(0)$ وجود ندارد.

تذکر: همان‌طور که در مثال بالا متوجه شدید، پیوسته بودنِ $f'(x)$ در $x=0$، دلیل وجود $f''(0)$ نمی‌شود. در واقع این موضوعی بدیهی است که هیچ‌گاه نباید از پیوسته بودن یک تابع، وجود مشتقِ آن را نتیجه بگیریم.

مثال ۹۴ (سخت): اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x\text{Ln}2}-\frac{1}{2^x-1} & ; x\neq 0\\ \frac{1}{2} & ; x=0\end{cases}$، آن‌گاه مقدار $f'(0)$ کدام است؟ (از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه MIT)

۱) $-(\frac{\text{Ln}2}{12})^2$ ۲) $-\frac{\text{Ln}2}{12}$ ۳) $\frac{\text{Ln}2}{12}$ ۴) وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در $x=0$ ضابطه‌ی $f(x)$ عوض شده است، بنابراین لازم است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x\text{Ln}2}-\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2^x-1)-2x\text{Ln}2-x\text{Ln}2(2^x-1)}{2x^2\text{Ln}2(2^x-1)}$$

این حد فرم مبهم $\frac{0}{0}$ را داراست. با توجه به این‌که $x=0$ ریشه‌ی چندگانه‌ی مخرج است (در مخرج عوامل $x.x.(2^x-1)$ را داریم که هر سه عامل در $x=0$ صفر می‌شوند)، می‌توان حدس زد که محاسبه حد احتیاج به استفاده مکرر از قاعده‌ی هوپیتال دارد که قطعاً کار مشکل و زمان‌بری است. بـه همین علت از بسط مک‌لورنِ 2^x کمک می‌گیریم تا محاسبات ساده‌تر شوند. اگر بسط مک‌لورن 2^x را نمی‌دانید، ایرادی ندارد! می‌توانید از بسط مک‌لورن e^x به این صورت استفاده کنید:

$$2^x=e^{\text{Ln}2^x}=e^{x\text{Ln}2}=1+x\text{Ln}2+\frac{(x\text{Ln}2)^2}{2!}+\cdots$$

ضمناً با تغییر متغیر $t=x\text{Ln}2$ عبارات را ساده‌تر می‌نویسیم، چون $x\to 0$، پس $t\to 0$:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{2(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)-2t-t(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots)}{\frac{2}{\text{Ln}2}t^2(t+\frac{t^2}{2}+\cdots)}\xrightarrow{\text{انجام محاسبات}}f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{12}t^4+\cdots}{\frac{2}{\text{Ln}2}(t^3+\frac{t^4}{2}+\cdots)}$$

اکنون چون $t\to 0$، لذا از قانون کمترین درجه استفاده می‌کنیم. کوچکترین درجه‌ای که در صورت و مخرج داریم t^3 است. بنابراین داریم:

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{6}t^3}{\frac{2}{\text{Ln}2}t^3}=-\frac{\text{Ln}2}{12}$$

بررسی توابعی به فرم کلی $f^a(x)\sin\frac{c}{g^b(x)}$ و $f^a(x)\cos\frac{c}{g^b(x)}$ ($a\in\mathbb{R}$ و $b>0$)

توابع به فرم $f^a(x)\sin\frac{c}{g^b(x)}$ و $f^a(x)\cos\frac{c}{g^b(x)}$ به علت ویژگی‌هایی که دارند مورد توجه طراحان سؤال در آزمون‌های مختلف قرار دارنـد. در ایـن قسـمت ابتدا به‌صورت مفهومی و گام به گام این توابع را بررسی می‌کنیم و در پایان به یک جمع‌بندی می‌رسیم که با توجه به اعـداد ثابـت a و b بتـوانیم پیوسـته بـودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های آن‌ها را تشخیص دهیم.

می‌دانیم که چندجمله‌ای‌ها و توابع $\sin x$ و $\cos x$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیرند. بنابراین تابعی مانند $y=x^3\cos x^2$ همه‌جا پیوسته و مشتـق‌پـذیر اسـت. امـا اگر $b>0$ و a دلخواه باشد، تابع $y=x^a\cos\frac{c}{x^b}$ در $x=0$ تعریف شده نیست. فرض کنید مقدار تابع در $x=0$ را بـه‌صـورت جداگانـه تعریـف کنـیم. در ایـن صورت به تابع دو ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^a\cos\frac{c}{x^b} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ می‌رسیم که پیوسته بودن یا مشتق‌پذیر بودن آن در $x=0$ نیاز به بررسی دارد. اگر بـه جـای x از

جمع‌بندی: می‌خواهیم شرط لازم و کافی برای پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های توابع به فرم زیر را به‌صورت خلاصه بیان کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-x_0|^a\cos\dfrac{c}{|x-x_0|^b} & ; x\neq x_0\\ 0 & ; x=x_0\end{cases}\quad \text{یا}\quad f(x)=\begin{cases}|x-x_0|^a\sin\dfrac{c}{|x-x_0|^b} & ; x\neq x_0\\ 0 & ; x=x_0\end{cases}$$

در این توابع حتماً $b>0$ است؛ زیرا اگر b منفی باشد با یک تابع معمولی که در x_0 پیوسته و مشتق‌پذیر است سر و کار داریم و چیزی برای بررسی باقی نمی‌ماند. وجود یا عدم وجود قدرمطلق تأثیری بر جواب ما ندارد. همچنین توابع سینوس و کسینوس در این نتایج مشابه هم هستند:

الف) شرط آن مشتق kام وجود داشته باشد: $a>k(1+b)-b$

ب) شرط آن‌که مشتق kام پیوسته باشد: $a>k(1+b)$

ج) شرط آن‌که مشتق kام کران‌دار باشد: $a\geq k(1+b)$

در روابط (ب) و (ج) اگر $k=0$ قرار دهید شرط پیوسته بودن و کران‌دار بودنِ $f(x)$ هم بدست می‌آید. در واقع مشتقِ صفرم، یعنی خود تابع $f(x)$.

تذکر ۹: در توابعی که به‌صورت $h(x)=\begin{cases}f^{\alpha}(x)\sin\dfrac{c}{g^{\beta}(x)} & ; x=x_0\\ 0 & ; x\neq x_0\end{cases}$ هستند، برای بررسی پیوسته بودن، مشتق‌پذیر بودن و سایر ویژگی‌های $h(x)$ در نقطه‌ی $x=x_0$ بهترین کار آن است که از تجزیه یا هم‌ارزی‌ها استفاده کنیم و عامل $(x-x_0)$ را ایجاد کنیم. آن‌گاه می‌توانیم با دقت به توان این عامل در $f(x)$ و $g(x)$ از همان جمع‌بندی فوق استفاده کرده و مسأله را به سرعت حل کنیم. برای مثال به تابع $h(x)=\begin{cases}(x^2-2x+1)^3\cos\dfrac{1}{\sin^2(x-1)} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$ توجه کنید.

می‌خواهیم در $x=1$ ویژگی‌های $h(x)$ را بررسی کنیم. در $x=1$ می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin(x-1)\simeq x-1$ استفاده کنیم. بنابراین $\sin^2(x-1)\simeq(x-1)^2$. همچنین با توجه به اتحاد داریم: $(x^2-2x+1)=(x-1)^2$، پس $(x^2-2x+1)^3=(x-1)^6$ است. پس می‌توانیم $h(x)$ را به‌صورت $h(x)=\begin{cases}(x-1)^6\cos\dfrac{1}{(x-1)^2} & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$ بنویسیم. حالا از جمع‌بندی بالا کمک می‌گیریم؛ در این مثال $a=6$ و $b=2$ است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ نامساوی‌های $a>1\times(1+b)-b$ و $a>1\times(1+b)$ برقرارند، پس $h'(x)$ در $x=1$ موجود و پیوسته است. نامساوی $a>2\times(1+b)-b$ هم برقرار است، پس $h''(1)$ وجود دارد. اما نامساوی $a>2\times(1+b)$ برقرار نیست؛ پس $h''(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است.

مثال ۹۶: در مورد تابع $h(x)=\begin{cases}(x-\sin x)^2\cos\dfrac{1}{x^4} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $h'(x)$ در $x=0$ موجود است، اما پیوسته نیست.

۲) $h'(x)$ در $x=0$ پیوسته است، اما $h''(x)$ در $x=0$ وجود ندارد.

۳) $h''(x)$ در $x=0$ وجود دارد، اما ناپیوسته است.

۴) $h''(x)$ در $x=0$ پیوسته و کران‌دار است.

پاسخ: گزینه «۲» در مورد تابع $x-\sin x$ می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم. می‌دانیم که $\sin x\simeq x-\dfrac{x^3}{3!}$، بنابراین $x-\sin x\simeq\dfrac{x^3}{6}$ است. پس می‌توانیم $h(x)$ را به این شکل بنویسیم:

$$h(x)=\begin{cases}(\frac{1}{6}x^3)^2\cos\dfrac{1}{x^4} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}\Rightarrow h(x)=\begin{cases}\frac{1}{36}x^6\cos\dfrac{1}{x^4} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

پس با توجه به مطالبی که در جمع‌بندی گفتیم، در این سؤال $a=6$ و $b=4$ است. به ازای $k=1$، نامساوی‌های زیر همه برقرار هستند:

$$a>1\times(1+b)-b\quad,\quad a>1\times(1+b)\quad,\quad a\geq 1\times(1+b)$$

پس $h'(x)$ در $x=0$ موجود، پیوسته و کران‌دار است. برای تحقیق در مورد $h''(0)$ باید همین نامساوی‌ها به ازای $k=2$ برقرار باشند:

$$a>2\times(1+b)-b\quad,\quad a>2\times(1+b)\quad,\quad a\geq 2\times(1+b)$$

در این مثال $a=6$ و $b=4$ است پس نامساوی $a>2\times(1+b)-b$ برقرار نیست، یعنی $h''(0)$ اصلاً وجود ندارد. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۹۷: تابع $f(x)$ با این ضابطه داده شده است: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x}+(x-1)^3\sin(\dfrac{\pi}{x-1}) & ; x\neq 0,1\\ 0 & ; x=0,1\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

(از سؤالات ریاضی عمومی دانشگاه Berkely)

۱) تابع f' در $x=0$ و $x=1$ موجود و پیوسته است.

۲) تابع f در $x=0$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.

۳) تابع f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر است، اما f' در $x=0$ پیوسته نیست.

۴) تابع f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر است، اما f' در $x=1$ پیوسته نیست.

پاسخ: گزینه «۳» این تابع مجموعی از دو تابع $x^2\sin\dfrac{\pi}{x}$ و $(x-1)^3\sin(\dfrac{\pi}{x-1})$ است که اولی در $x=0$ نیاز به بررسی دارد و دومی در $x=1$ باید بررسی شود. همه‌ی گزینه‌ها در مورد وجود یا پیوسته بودن $f'(x)$ هستند، پس با در نظر گرفتن $k=1$ و مرور این نتایج، کار را آغاز می‌کنیم.

مثال ۴: نیمه‌عمر یک ماده‌ی رادیواکتیو که از قانون زوال مواد رادیواکتیو پیروی می‌کند، ۳/۶۴ روز است. ۳۰۰ گرم از این ماده داده شده است. اگر m، جرم باقی‌مانده پس از ۱/۸۲ روز باشد آن‌گاه کدام عبارت صحیح است؟

۱) $m<۲۲۵$ گرم است.　۲) مقدار m دقیقاً ۲۵۵ گرم است.　۳) $m>۲۲۵$ گرم است.　۴) مقدار m دقیقاً ۱۵۰ گرم است.

پاسخ: گزینه «۱» فرض کنید $m(t)$ جرم باقی‌مانده از این ماده پس از t روز باشد. می‌دانیم $m(t)=m(۰)e^{kt}$. طبق صورت سؤال (گرم) $m(۰)=۳۰۰$.

برای تعیین مقدار k از نیمه عمر این ماده استفاده می‌کنیم:
$$T=۳/۶۴\ \text{(نیمه عمر)} \Rightarrow -\frac{Ln۲}{k}=۳/۶۴ \Rightarrow k=-\frac{Ln۲}{۳/۶۴}$$

با جایگذاری $m(۰)$ و k در فرمول $m(t)$ خواهیم داشت: $m(t)=m(۰)e^{kt} \Rightarrow m(t)=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۳/۶۴}t}$. به ازای $t=۱/۸۲$ داریم:
$$m(۱/۸۲)=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۳/۶۴}\times ۱/۸۲}=۳۰۰e^{-\frac{Ln۲}{۲}}$$

می‌دانیم که $e^{Ln۲}=۲$، در نتیجه $\frac{۱}{\sqrt{۲}}=e^{-\frac{Ln۲}{۲}}=۲^{-\frac{۱}{۲}}$ است:
$$m(۱/۸۲)=۳۰۰\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۳۰۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۳۰۰\sqrt{۲}}{۲}=۱۵۰\sqrt{۲}$$

از آن‌جا که $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، داریم:
$$m(۱/۸۲)=۱۵۰\times ۱/۴\simeq ۲۱۰<۲۲۵$$

مثال ۵: نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین، ۲۱ در هزار این جمعیت است. اگر این نسبت دائماً برقرار باشد، با گذشت چند سال این جمعیت دو برابر می‌شود؟ $(Ln۲=۰/۶۹)$

۱) ۴۶　۲) ۵۲　۳) ۵۲/۵　۴) ۵۷/۵

پاسخ: گزینه «۴» میزان افزایش جمعیت برابر با اختلاف تولدها و فوت‌ها در آن جمعیت است.

نرخ تولد در این جمعیت $k_۱=\frac{۲۱}{۱۰۰۰}$ و نرخ فوت در آن $k_۲=\frac{۹}{۱۰۰۰}$ است. پس این جمعیت در حال افزایش است و نرخ رشد آن برابر است با:
$$k=\frac{۲۱}{۱۰۰۰}-\frac{۹}{۱۰۰۰}=\frac{۱۲}{۱۰۰۰}$$

اگر جمعیت اولیه را با $y(۰)$ نشان دهیم، پس از t سال جمعیت برابر است با $y(t)=y(۰)e^{kt}$. فرض کنید پس از T سال جمعیت دو برابر شود در این صورت داریم:
$$y(T)=۲y(۰) \Rightarrow y(۰)e^{kT}=۲y(۰) \Rightarrow e^{kT}=۲ \Rightarrow kT=Ln۲ \Rightarrow T=\frac{Ln۲}{k}=\frac{Ln۲}{\frac{۱۲}{۱۰۰۰}}=\frac{۰/۶۹}{۰/۰۱۲}=۵۷/۵$$

با گذشت $T=۵۷/۵$ سال این جمعیت به دو برابر مقدار اولیه‌اش خواهد رسید. البته می‌توانستیم مستقیماً از فرمول $T=\frac{Ln۲}{k}$ هم به جواب برسیم. ولی ما سؤال را کامل حل کردیم تا اگر فرمول یادتان نبود، روند کلی حل را بدانید!

آهنگ‌های وابسته

در این قسمت می‌خواهیم مهم‌ترین مطلب این درسنامه را آموزش دهیم. اگر قرار باشد از این درسنامه سؤال طرح شود، معمولاً بیشترین انتخاب طراحان، مطالب این قسمت خواهد بود (هر چند از مبحث «رشد و زوال» نیز سؤالاتی در آزمون‌ها هر چند سال یکبار طرح می‌شود).

در برخی سؤالات، علاوه بر این که دو کمیت مختلف با هم توسط یک فرمول مرتبط هستند، هر دوی آن‌ها نیز تابعی از یک متغیر سوم (معمولاً زمان) هستند. در این‌گونه سؤالات، معمولاً آهنگ تغییر هریک از دو کمیت نسبت به متغیر سوم سؤال می‌شود. برای حل این‌گونه سؤالات روال کار این است که معادله‌ای پیدا کنیم که این دو کمیت را به هم مربوط می‌کند و سپس با استفاده از قاعده‌ی زنجیری از دو طرف این معادله نسبت به متغیر سوم مشتق بگیریم و به یک معادله می‌رسیم که آهنگ کمیت‌های اصلی را به هم مرتبط می‌کند. در مثال بعد این روش را با هم یاد می‌گیریم و در ادامه یک دستورالعمل برای حل این‌گونه سؤالات ارائه می‌دهیم:

مثال ۶: بالنی کروی را از هوا پر می‌کنیم. به طوری که حجم آن با آهنگ $۱۰۰(\frac{cm^۳}{s})$ زیاد می‌شود. وقتی که قطر بالن ۵۰cm است، شعاع بالن با چه آهنگی بزرگ می‌شود؟

پاسخ: ابتدا دو کمیت اصلی را شناسایی و برای آن‌ها نماد مناسب را انتخاب کرده و با یک فرمول این دو کمیت را به هم مرتبط می‌کنیم. واضح است حجم بالن (v) و قطر آن (و به عبارت دیگر شعاع آن r) هر دو بر اساس کمیت سومی به نام زمان (t) تغییر می‌کنند. اما ارتباط بین v و r چیست؟ همه می‌دانیم حجم یک کره برابر است با $v=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$. خُب حالا از طرفین این رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم: (از مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.)
$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}.\frac{dr}{dt}=۴\pi r^۲(\frac{dr}{dt})$$

ما دنبال $\frac{dr}{dt}$ هستیم، لذا داریم:
$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۴\pi r^۲}(\frac{dv}{dt})$$

از صورت مسأله می‌دانیم $\frac{dv}{dt}=۱۰۰(\frac{cm^۳}{s})$ و $r=۲۵cm$، لذا داریم:
$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۴\pi(۲۵)^۲}\times ۱۰۰(\frac{cm}{s})=\frac{۱}{۲۵\pi}(\frac{cm}{s})$$

دستورالعمل حلِ مسائل آهنگ‌های وابسته

برای حل این‌گونه سؤالات مراحل زیر را به‌صورت گام به گام انجام دهید:

گام اول: ابتدا مسأله را با دقت بخوانید و متغیرها را با حروف نام‌گذاری کنید. سعی کنید حروف اول متغیرها انتخاب شود. مثلاً V برای حجم، L برای طول، t برای زمان و ... .

گام دوم: معادله‌ای شامل دو کمیت اصلی مرتبط به هم بنویسید که هر دو وابسته به پارامتر سوم (معمولاً زمان) هستند. ممکن است معادله را بلد باشید و یا مجبور باشید با رسم شکل به معادله دلخواه برسید. شاید در برخی سؤالات مثلاً سه متغیر داشته باشیم که هر سه تای آن‌ها، وابسته به یک متغیر چهارم (معمولاً زمان) باشند. در این‌گونه سؤالات، دنبال رابطه‌ای (معمولاً با استفاده از فرمول‌های هندسی) باشید که از آن سه مورد، یکی را حذف کند (یعنی یکی از آن سه مورد را برحسب دو متغیر دیگر مشخص کند).

گام سوم: از طرفین معادله نسبت به متغیر مستقل (متغیری که تمام کمیت‌ها به آن وابسته هستند و همان‌طور که گفتیم معمولاً زمان است) مشتق زنجیری بگیرید.

گام چهارم: در مرحله‌ی آخر، مفروضات مسأله را جایگزین کنید و جواب مسأله را معین کنید.

مثال ۷: **نقطه‌ای بر خم $y^۲ = x^۳$ چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش $r(t)$ از مبدأ مختصات در صفحه با آهنگ ثابت ۲ واحد در ثانیه زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که نقطه متحرک دارای طول ۲ می‌باشد، مقدار $\frac{dx}{dt}$ چند واحد بر ثانیه است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

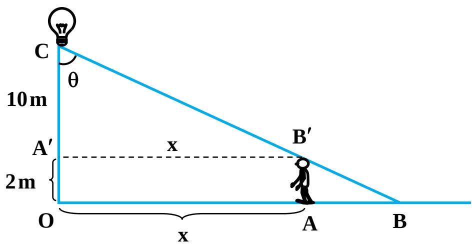
پاسخ : گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که فاصله‌ی هر نقطه به مختصات (x,y)، برابر با $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است و به عبارت دیگر رابطه‌ی $r^۲ = x^۲+y^۲$ را داریم. حالا سؤال را خوب مطالعه کنید. آهنگ افزایش فاصله، یعنی $\frac{dr}{dt}$ برابر با ۲ واحد در ثانیه داده شده و مقدار $\frac{dx}{dt}$ از ما خواسته شده است. پس باید معادله‌ای بین r و x داشته باشیم. همان‌طور که می‌بینید بر اساس رابطه‌ی $r^۲ = x^۲+y^۲$ معادله‌ای بین r، x و y داریم. یعنی y اضافی است! پس باید آن را برحسب r یا x بنویسیم. در ابتدای سؤال y برحسب x داده شده، پس می‌توان به جای $y^۲$ در رابطه $x^۳$ قرار داد و بنابراین رابطه به شکل $r^۲ = x^۲+x^۳$ تبدیل می‌شود.

حالا همه چی آماده مشتق‌گیری زنجیری نسبت به t شده است و بنابراین داریم:
$$۲r\frac{dr}{dt} = ۲x\frac{dx}{dt}+۳x^۲\frac{dx}{dt} \quad (*)$$

در مرحله‌ی آخر جایگذاری‌ها را انجام می‌دهیم؛ به ازای $x=۲$، مقدار $r=۲\sqrt{۳}$ (با جایگزینی در رابطه $r^۲=x^۲+x^۳$) بدست می‌آید، که با جایگذاری مقادیر r و x در رابطه $(*)$ داریم:
$$۲\times۴\sqrt{۳} = ۲\times۲\frac{dx}{dt}+۳(۲)^۲\frac{dx}{dt} \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = ۱۶(\frac{dx}{dt}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{\text{واحد}}{\text{ثانیه}})$$

تذکر ۲: هرگاه آهنگ تغییر کمیتی در حال **کاهش** باشد، علامت آن را **منفی** و هرگاه آهنگ تغییر کمیتی در حال **افزایش** باشد، علامت آن را **مثبت** در نظر می‌گیریم. مثلاً اگر دنبال آهنگ تغییر مقدار نشت آب از یک مخزن باشیم، در روابط باید علامت آن را منفی منظور کنیم. البته ممکن است در خودِ سؤال، طراح بپرسد. آهنگ نشت چقدر است؟ و در گزینه‌ها مقادیر را مثبت در نظر بگیرد. در این حالت‌ها خیلی نگران نشوید! چون طراح سؤال، مفهوم منفی بودن را در کلمه‌ی «نشت» عنوان کرده است و بنابراین، مثبت بودن اعداد در گزینه‌ها اشکالی ندارد.

مثال ۸: **مردی با قد $۲m$ با تندی $۱(\frac{m}{s})$ به سوی یک تیر چراغ برق که لامپ آن در ارتفاع $۱۲(m)$ از زمین نصب شده است، حرکت می‌کند. اگر مطابق شکل θ زاویه بین تیر چراغ برق و یک شعاع نورانی از چراغ برای این فرد باشد، سرعت تغییر θ وقتی این مرد در فاصله‌ی ۲۰ متری از تیر چراغ برق قرار دارد، چند درجه است؟**



۱) $-\frac{۱۸}{۵۰}$ ۲) $-\frac{۱۸}{۵}$ ۳) $-\frac{۱۸}{۵\pi}$ ۴) $-\frac{۱۸}{۵۰\pi}$

پاسخ: گزینه «۳» اگر صورت سؤال را دقیق بخوانیم متوجه می‌شویم که $\frac{d\theta}{dt}$ را از ما خواسته است. اما سؤال چه اطلاعاتی را به ما داده است؟ قد این مرد و ارتفاع لامپ تا زمین را داریم، همچنین تندی یعنی $\frac{dx}{dt}=۱(\frac{m}{s})$ را هم داریم. از دادن $\frac{dx}{dt}$ و خواستن $\frac{d\theta}{dt}$ در صورت سؤال می‌توان فهمید که باید دنبال رابطه‌ای بین θ و x باشیم. ابتدا فرض کنیم x فاصله‌ی مرد تا پای تیر باشد، مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{A'B'C}$ رابطه‌ی $tg\theta = \frac{x}{۱۰}$ را داریم، به عبارتی $x = ۱۰\,tg\theta$. با مشتق‌گیری از طرفین معادله نسبت به متغیر t داریم:
$$\frac{dx}{dt} = ۱۰\times\frac{d(tg\theta)}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = ۱۰(\frac{۱}{\cos^۲\theta})\frac{d\theta}{dt}$$

چون دنبال $\frac{d\theta}{dt}$ هستیم، لذا بهتر است $\frac{d\theta}{dt}$ در یک طرف تساوی باشد، یعنی رابطه را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:
$$\frac{d\theta}{dt}=(\frac{\cos^{۲}\theta}{۱۰})\frac{dx}{dt}\quad,\quad(*)$$

خُب مسأله گفته وقتی مرد در فاصله‌ی ۲۰ متری قرار دارد، یعنی وقتی $x=۲۰m$، آهنگ تغییرِ θ یا همان $\frac{d\theta}{dt}$ چقدر است؟ پس باید رابطه‌ای بین θ و x هم پیدا کنیم، یعنی $\cos^{۲}\theta$ را برحسب x بنویسیم. می‌توان در مثلث $A'B'C$، مقدار $\cos\theta$ را به راحتی حساب کرد:
$$\cos\theta=\frac{|A'C|}{|B'C|}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰^{۲}+x^{۲}}}$$

با جایگزینی مقدار $\cos\theta$ در تساوی (*) داریم:
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱}{۱۰}(\frac{۱۰۰}{۱۰۰+x^{۲}})\frac{dx}{dt}=(\frac{۱۰}{۱۰۰+x^{۲}})\frac{dx}{dt}$$

حالا به راحتی با جایگزینی مقادیر معلوم داریم:
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱۰}{۱۰۰+(۲۰)^{۲}}\times(-۱)=-\frac{۱۰}{۵۰۰}=-\frac{۱}{۵۰}(\frac{rad}{s})$$

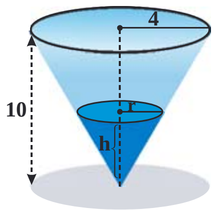
همان‌طور که می‌بینید جواب برحسب رادیان بر ثانیه است، زیرا ضمن استفاده از فرمول $\frac{d(tg\theta)}{d\theta}=\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$، تلویحاً فرض کرده بودیم θ برحسب رادیان بر ثانیه است؛ البته به محض یافتن جواب می‌توان آن را به‌صورت مقابل به درجه تبدیل کرد:
$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=-\frac{۱۸}{۵\pi}\ (\text{درجه})$$

توضیح: چون x با نزدیک شدن فرد به تیر چراغ برق کاهش می‌یابد، بنابراین آن را با علامت منفی در رابطه وارد کردیم.

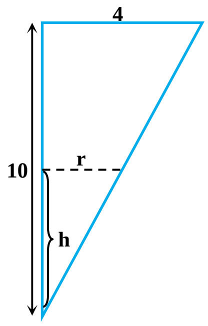
مثال ۹: آب با سرعت ۵ مترمکعب در دقیقه از یک منبع مخروطی شکل که قطر قاعده‌اش ۸ و عمقش ۱۰ متر و رأس آن متوجه پایین است، خارج می‌شود. سرعت افت سطح آب در لحظه‌ای که عمق آب منبع ۶ متر می‌شود، چند متر بر دقیقه است؟

۱) ۱۴۴π　　۲) $\frac{۱۲۵}{۱۴۴\pi}$　　۳) $\frac{۱۴۴\pi}{۱۲۵}$　　۴) $\frac{۱۴۴}{۱۲۵\pi}$

پاسخ : گزینه «۲» در ابتدای سؤال گفته شده «آب با سرعت ۵ مترمکعب در دقیقه ...» کلمه‌ی «مکعب» به ما می‌گوید با حجم سر و کار داریم. پس حجم آب را v در نظر می‌گیریم و تا این‌جا می‌دانیم که $\frac{dv}{dt}=-۵(\frac{m^{۳}}{min})$. در انتهای سؤال، سرعت افت سطح آب، یعنی سرعت افتِ ارتفاع خواسته شده است؛ اگر ارتفاع آب را h در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم که $\frac{dh}{dt}$ خواسته‌ی سؤال است. پس باید رابطه‌ای بین h و v پیدا کنیم. می‌دانیم اگر ارتفاع آب در مخروط h باشد، حجم آب درون مخروط $v=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ می‌باشد. همان‌طور که می‌بینید $r^{۲}$ مزاحم است! (چون ما دنبال رابطه‌ای بین v و h هستیم) پس باید r را برحسب h یا v بنویسیم. اگر به شکل دقت کنیم، در سمت راست آن مثلثی داریم که برای وضوح بیشتر، در شکل زیر آن را دوباره رسم کرده‌ایم. طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{r}{۴}=\frac{h}{۱۰}\Rightarrow r=\frac{۲}{۵}h$$



با جایگزین کردن r برحسب h در فرمول حجم داریم:
$$v=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{۲}{۵}h)^{۲}h=\frac{۴\pi}{۷۵}h^{۳}$$

حالا اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، رابطه بین تغییرات ارتفاع (سرعت افت سطح آب) و تغییرات حجم (سرعت خروج آب) بدست می‌آید:
$$\frac{dv}{dt}=\frac{۴\pi}{۷۵}(۳h^{۲})\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{۴\pi}{۲۵}h^{۲}(\frac{dh}{dt})$$

با توجه به این‌که در صورت تست، سرعت خروج آب برابر $\frac{dv}{dt}=-۵(\frac{m^{۳}}{min})$ و ارتفاع $h=۶$ داده شده است، لذا سرعت افت سطح آب برابر است با:
$$-۵=\frac{۴\pi}{۲۵}(۶^{۲})\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=-\frac{۱۲۵}{۱۴۴\pi}\ (\text{متر بر دقیقه})$$

توضیح: همان‌طور که می‌بینید گزینه‌ها علامت منفی ندارند؛ چون در واقع طراح سؤال علامت منفی را در گزینه‌ها حذف و کلمه «افت» را در متن سؤال جایگزین کرده است.

مثال ۱۰: یک مخزن آب به شکل مخروط مستدیر قائمی است که رأس آن به طرف پایین و ارتفاع آن ۱۰ متر و شعاع قاعده آن ۱۵ متر است. آب با سرعت ثابت ۱ متر مکعب در دقیقه از انتهای مخزن خارج و با سرعت n متر مکعب در دقیقه وارد آن می‌شود. n چقدر باشد تا سطح آب در لحظه‌ای که عمق آن ۲ متر است، با سرعت ۴ متر در دقیقه در حال بالا آمدن باشد؟

۱) $۱۸\pi+۱$　　۲) ۱۸π　　۳) $۳۶\pi+۱$　　۴) ۳۶π

پاسخ: گزینه «۳» بهتر است تمرکز خود را به جمله‌های دوم و سوم متن داده شده معطوف سازیم. دنبال چه چیزی هستیم؟ **سرعت افزایش حجم آب** مورد سؤال است که خودش شامل دو بخش است؛ یک قسمت سرعت افزایش حجم آب ورودی (n) و یک قسمت سرعت کاهش حجم آب خروجی (که گفته شده سرعت آن ۱ مترمکعب در دقیقه است). در واقع $\frac{dV}{dt}$ باید مشخص شود که با توجه به توضیحات فوق، تساوی $\frac{dV}{dt}=n-۱$ را خواهیم داشت. همان‌طور که از صورت سؤال مشخص است، دنبال پیدا کردن n هستیم که برای رسیدن به آن باید $\frac{dV}{dt}$ تعیین شود. حالا ببینیم چه چیزهایی داده شده است؟ آهنگ وابسته

مثال ۵: معادلات مماس بر منحنی $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ در نقطه‌های تلاقی با محور طول‌ها را بدست بیاورید.

پاسخ : باید نقاط تلاقی منحنی با محور طول‌ها را بدست آوریم. برای این منظور منحنی را با خط $y=0$ قطع می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} y=(x-1)(x-2)(x-3) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow A(1,0) \\ x_2=2 \rightarrow B(2,0) \\ x_3=3 \rightarrow C(3,0) \end{cases}$$

برای بدست آوردن شیب توجه داریم که مشتق‌گیری با عامل صفر داریم و با استفاده از این قاعده داریم:

$$\rightarrow \begin{cases} m_1=y'(1)=(1-2)(1-3)=2 \rightarrow y-0=2(x-1) \rightarrow y=2x-2 \\ m_2=y'(2)=(2-1)(2-3)=-1 \rightarrow y-0=-1(x-2) \rightarrow y=-x+2 \\ m_3=y'(3)=(3-1)(3-2)=2 \rightarrow y-0=2(x-3) \rightarrow y=2x-6 \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید سه خط بر این منحنی در نقطه‌ی تماس با محور طول‌ها، مماس است.

مثال ۶: ضریب زاویه خط مماس به منحنی پارامتری $\begin{cases} x=t^2+3t-8 \\ y=2t^2-2t-5 \end{cases}$ در نقطه $A(2,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{7}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ : گزینه«۲» مقدار y'_x برابر است با $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4t-2}{2t+3}$. حال مقادیر متناظر t در نقطه $A(2,-1)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t^2+3t-8=2 \\ 2t^2-2t-5=-1 \end{cases} \Rightarrow t=2 \ (\text{ریشه مشترک دو معادله}) \Rightarrow m=y'_x(2)=\frac{4(2)-2}{2(2)+3}=\frac{6}{7}$$

مثال ۷: خط مماس بر سهمی $x^2=16y$ ، بر خط $2x+4y+7=0$ ، عمود است. این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -48 ۲) ۱۶ ۳) ۴۸ ۴) -16

پاسخ: گزینه «۴» خط مماس بر سهمی، بر خط $2x+4y+7=0$ عمود است. با توجه به این‌که دو خط عمود بر هم، شیب‌هایشان عکس و قرینه یکدیگر است، پس شیب خط مماس برابر ۲ است. حال به منظور یافتن نقطه تماس و در نتیجه معادله مماس، ابتدا باید شیب را به کمک مشتق ضمنی تعیین کنیم:

$$x^2-16y=0 \Rightarrow f'(x)=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{-16}=\frac{x}{8} \Rightarrow 2=\frac{x}{8} \Rightarrow x=16 \Rightarrow 16^2=16y \Rightarrow y=16$$

پس مختصات نقطه تماس $(16,16)$ و $m=2$ است، لذا معادله‌ی خط مماس به‌صورت مقابل نوشته می‌شود: $y-16=2(x-16)$

برای این‌که محل برخورد آن با محور y ها را بدانیم، لازم است به جای x های معادله‌ی خط مماس صفر قرار دهیم: $y-16=2(0-16) \Rightarrow y=-16$

مثال ۸: شیب خط مماس بر منحنی $y=tg^{-1}(\frac{2+3tgx}{3-2tgx})$ ، در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{4}$ ، چند برابر شیب خط قائم در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ بر روی همین منحنی است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) -1

پاسخ: گزینه «۴» طبیعی است برای پیدا کردن شیب باید ابتدا مشتق را حساب کنیم، اما اگر بخواهیم از فرمول‌های عادی این مشتق را حساب کنیم، کاری زمان‌بر و توأم با محاسبات نسبتاً طولانی است. در توابعی به فرم کلی $y=tg^{-1}(\frac{a\mp b}{1\pm ab})$ همیشه باید به فکر ساده‌سازی باشید؛ اما شکل ظاهری این سؤال با فرم کلی کمی فرق دارد که می‌توان به راحتی آن را به فرم کلی نزدیک کرد. ابتدا توجه کنید که با تقسیم صورت و مخرج عبارت درون پرانتز بر ۳ داریم: $y=tg^{-1}(\frac{\frac{2}{3}+tgx}{1-\frac{2}{3}tgx})$

اگر فرض کنیم $tg\alpha=\frac{2}{3}$ ، لذا داریم: $y=tg^{-1}(\frac{tg\alpha+tgx}{1-tg\alpha tgx})=tg^{-1}(tg(\alpha+x)) \Rightarrow y=\alpha+x$

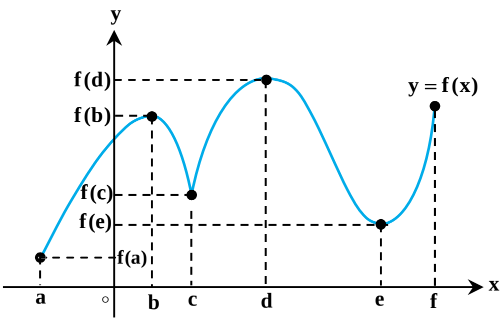
خُب حالا اگر از y نسبت به x مشتق بگیریم، به راحتی واضح است $\frac{dy}{dx}=1$ و این یعنی شیب خط مماس در هر نقطه از منحنی y برابر با ۱ و شیب خط قائم در هر نقطه روی منحنی y برابر با ۱- است. یعنی فرقی نمی‌کند شیب مماس (یا قائم) در چه نقطه‌ای خواسته شده باشد، در هر صورت مقدار ثابت است. در واقع صورت سؤال سعی در گمراه کردن شما و کمی در فکر فرو بردن شما پس از رسیدن به تساوی $\frac{dy}{dx}=1$ را دارد.

توضیح بیشتر: طبق تعریف، مقدار خروجیِ tg^{-1} باید در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار داشته باشد. بنابراین وقتی می‌نویسیم $y=tg^{-1}(tg(\alpha+x))=\alpha+x$ یک نتیجه‌ی ضمنی آن این است که $-\frac{\pi}{2}\le\alpha+x\le\frac{\pi}{2}$ است. اما در این مثال این موضوع اهمیتی نداشت.

درسنامه ۴: نقاط اکسترمم و نقطه‌ی عطف

در این درسنامه می‌خواهیم چند مورد از مهم‌ترین کاربردهای مشتق را بررسی کنیم. مفاهیمی مانند تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق، تعریف تقعر و روش‌های بدست آوردن نقطه عطف و بررسی توابع صعودی و نزولی از مهم‌ترین مواردی هستند که در این درسنامه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف ماکزیمم و مینیمم نسبی (موضعی)



برای درک بهتر این بحث، به شکل مقابل دقت کنید:
به نقطه‌ی $(b, f(b))$ توجه کنید. این نقطه اگرچه بالاترین نقطه روی منحنی نیست، اما از نقاط مجاور خود بالاتر است، به این‌گونه نقاط، **ماکزیمم نسبی** (موضعی) می‌گویند. به همین ترتیب نقاط $(c, f(c))$ و $(e, f(e))$ اگرچه پایین‌ترین نقاط روی منحنی نیستند، اما از نقاط مجاور خود پایین‌تر هستند، به این‌گونه نقاط **مینیمم نسبی** (موضعی) گفته می‌شود. در مورد نقاط $(a, f(a))$ و $(d, f(d))$ در قسمت بعد توضیح خواهیم داد. اما قبل از آن، تعریف دقیق‌تر و مفهومی‌تری را از نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم:

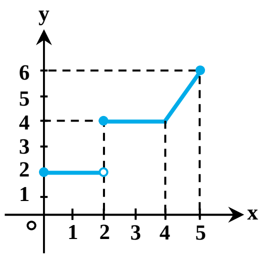
تعریف: تابع f در نقطه‌ای به طول c دارای ماکزیمم نسبی است به شرطی که به ازای هر x به قدر کافی نزدیک به c (یعنی به ازای هر x در همسایگی c) نامساوی $f(c) \geq f(x)$ برقرار باشد. در این‌صورت به مقدار $f(c)$ ماکزیمم f گفته می‌شود. به همین ترتیب f در c مینیمم نسبی دارد به شرطی که به ازای تمام x های واقع در همسایگی c، نامساوی $f(c) \leq f(x)$ برقرار باشد. در این صورت به مقدار $f(c)$ مینیمم f گفته می‌شود.

توجه ۱: دقت کنید نقطه‌ای مانند $(a, f(a))$ نمی‌تواند مینیمم نسبی نامگذاری شود، چون همان‌طور که گفتیم تعریف مینیمم نسبی در هر نقطه مستلزم این است که مقادیر تابع در طرفین آن نقطه معلوم باشد و آن نقطه پایین‌تر از آن‌ها قرار گرفته باشد. در واقع ماکزیمم و مینیمم نسبی، فقط در نقاط درونی بازه تعریف می‌شوند و به هیچ‌وجه نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند ماکزیمم و مینیمم نسبی باشند.

توجه ۲: به مقادیر ماکزیمم و مینیمم مقادیر اکسترمم نیز گفته می‌شود. در واقع وقتی نوشته می‌شود «اکسترمم»، ما نمی‌دانیم منظور چیست؟ یعنی ممکن است مینیمم و یا ماکزیمم مدنظر نویسنده باشد.

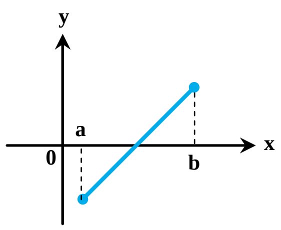
تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق

به وضعیت نمودار $y = f(x)$ در شکل قبل در بازه $[a, f]$ توجه کنید. نقطه‌ی $(a, f(a))$ از هر نقطه‌ای در نمودار این تابع (در بازه داده شده) پایین‌تر است. به این نقطه **مینیمم مطلق** می‌گویند. به همین ترتیب نقطه‌ی $(d, f(d))$ از هر نقطه‌ای در نمودار این تابع (در بازه داده شده) بالاتر است، به این نقطه **ماکزیمم مطلق** می‌گویند. در واقع در حوزه تعریف تابع $y = f(x)$، بیشترین و کمترین مقدار عرض تابع به ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع نامیده می‌شوند. معمولاً در مسائل، وقتی Max و یا Min مطلق مطرح می‌شود که بازه مشخص شده باشد. توجه داشته باشید که نقطه‌ی $(d, f(d))$ در عین حال، ماکزیمم نسبی هم می‌تواند لقب بگیرد، چون از تمام نقاط همسایگی خود نیز بالاتر است. اما همان‌طور که گفتیم نقطه‌ی $(a, f(a))$ نمی‌تواند مینیمم نسبی لقب بگیرد، چون در سمت چپ آن، وضعیت نقاط معلوم نیست، یعنی همسایگی کاملی در حول این نقطه نداریم.

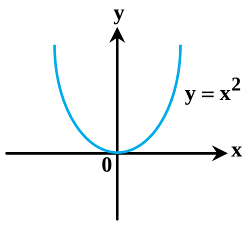


به عنوان یک مثال دیگر، همان‌طور که در شکل می‌بینید، نقطه‌ای به طول $x = 5$ و عرض $y = 6$، ماکزیمم **مطلق** تابع است؛ چون عرض آن از تمام مقادیر نمودار بیشتر است. نقطه $(0, 2)$ مختصات نقطه مینیمم **مطلق** تابع است، چون عرض آن برابر ۲ است و دیگر هیچ نقطه‌ای نداریم که عرضش از عدد ۲ کمتر باشد. اما نقطه $(4, 4)$ مختصات نقطه مینیمم **نسبی** تابع می‌باشد، چون اگر به نقاط نزدیک به آن توجه کنیم، عرض این نقطه با نقاط سمت چپ آن برابر و از نقاط سمت راست آن کمتر است. اما این نقطه، مینیمم مطلق نیست زیرا نقاطی با عرض کمتر از ۴ نیز در این نمودار وجود دارند. دقت کنید تفاوت دو نقطه $(0, 2)$ و $(4, 4)$ در این است که برای نقطه $(0, 2)$ می‌توانیم بگوییم عرض این نقطه از عرض تمام نقاط نمودار کمتر است و برای همین واژه مینیمم مطلق را برای این نقطه به کار می‌بریم.

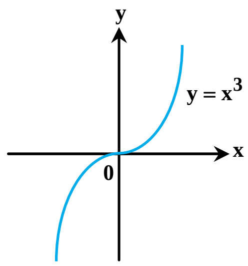
تذکر۱: یک تابع ممکن است ماکزیمم و مینیمم نسبی نداشته باشد، ولی ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشد (شکل ۱) و یا ممکن است تابعی مینیمم داشته باشد، ولی ماکزیمم نداشته باشد (شکل ۲) و یا ممکن است کلاً ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق نداشته باشد (شکل ۳).



شکل (۱)
نقطه b طول ماکزیمم مطلق
و نقطه a طول مینیمم مطلق است
و تابع ماکزیمم و مینیمم نسبی ندارد.

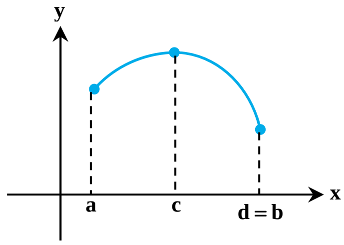


شکل (۲)
مینیمم نسبی و مطلق f برابر
با $f(0) = 0$ است و این تابع ماکزیمم ندارد.

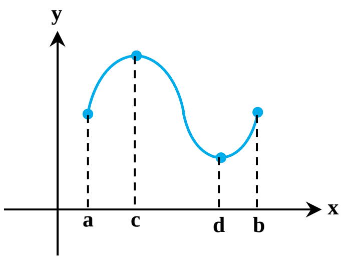


شکل (۳)
تابع $y = x^3$ ماکزیمم و مینیمم مطلق
و حتی نسبی ندارد.

قضیه: اگر f تابعی **پیوسته** روی بازه **[a,b]** باشد، آن‌وقت، f یک ماکزیمم مطلق مانند $f(c)$ و یک مینیمم مطلق مانند $f(d)$ دارد، که در این‌جا c و d اعدادی در بازه‌ی $[a,b]$ هستند و ممکن است همان نقاط a یا b باشند. به عنوان مثال، به شکل‌های زیر توجه کنید:



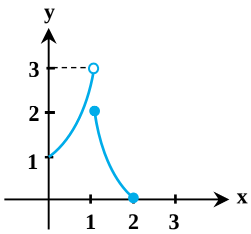
c طول ماکزیمم مطلق و d (یا همان b) طول مینیمم مطلق و نسبی است.



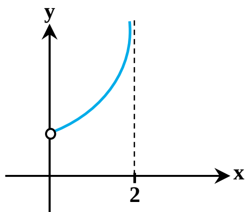
c طول نقطه ماکزیمم مطلق و d طول نقطه‌ی مینیمم مطلق است.

دقت کنید در قضیه فوق، شرط پیوسته بودن f و بسته بودن بازه $[a,b]$، شرط‌های ضروری برای وجود اکسترمم مطلق هستند. برای مثال به دو شکل مقابل توجه کنید. این تابع روی بازه بسته $[۰,۲]$ تعریف شده، اما پیوسته نیست. برای همین نمی‌توان انتظار داشت حتماً قضیه فوق برقرار باشد. همان‌طور که در شکل (۱) می‌بینید، این تابع مقدار مینیممی برابر با $f(۲)=۰$ دارد اما مقدار ماکزیمم ندارد (اشتباه نکنید، ۳ ماکزیمم نیست، چون این تابع، مقادیر به دلخواه نزدیک به ۳ را می‌گیرد، اما هیچ‌گاه واقعاً برابر با ۳ نمی‌شود). در شکل دوم، تابع در بازه $(۰,۲)$ پیوسته است، اما نه مقدار ماکزیمم دارد و نه مقدار مینیمم (این که ماکزیمم ندارد که روشن است، اما ممکن است تصور شود ۱ مینیمم است. دقت کنید که تابع به اندازه‌ی دلخواه به ۱ نزدیک می‌شود، اما هیچ‌گاه ۱ نمی‌شود). پس باز هم نمی‌توان گفت این مثال قضیه فوق را نقض کرده است. چون بازه $(۰,۲)$ بسته نیست.

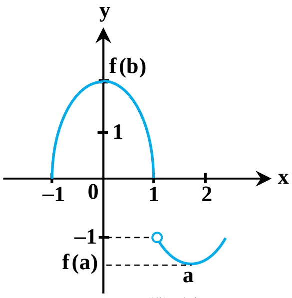
و بالاخره در پایان لازم است تأکید کنیم که عکس قضیه فوق برقرار نیست؛ یعنی ممکن است تابعی ناپیوسته باشد، اما هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق داشته باشد. شکل (۳) این مورد را تأیید می‌کند که $f(a)$ و $f(b)$ به ترتیب مینیمم و ماکزیمم مطلق هستند.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

نحوه تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی

تا این‌جا با مفهوم نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آشنا شدید. حالا می‌خواهیم بدانیم این نقاط چگونه تعیین و مشخص می‌شوند؟ در واقع می‌خواهیم نحوه‌ی بدست آوردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع را با هم مرور کنیم. برای تعیین نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) یک تابع، ابتدا باید نقاطی را انتخاب کنیم که این نقاط شرط لازم را برای احراز پست «نقاط اکسترمم» دارند؛ این نقاط را «نقاط بحرانی» می‌نامیم.

تعریف نقاط بحرانی: به نقاطی از دامنه $f(x)$ که در آن‌ها مشتق وجود ندارد و یا اگر مشتق وجود دارد، برابر با صفر است، نقاط بحرانی می‌گویند.

خُب پس از تعیین نقاط بحرانی (انتخاب کاندیدهای نقاط اکسترمم) باید فرآیند بررسی و انتخاب نهایی را انجام دهیم. تا ببینیم کدام‌یک از این نقاط بحرانی ماکزیمم و کدام‌یک مینیمم و حتی کدام‌یک نه ماکزیمم و نه مینیمم هستند. برای این بررسی و انتخاب نهایی، آزمون‌هایی وجود دارد که ابتدا به «آزمون اول» اشاره می‌کنیم:

مثال ۱: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{۳}{۵}}(۴-x)$ را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا $x^{\frac{۳}{۵}}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و بعد مشتق می‌گیریم (البته می‌توانیم برای مشتق‌گیری از قاعده مشتق حاصل‌ضرب هم استفاده کنیم):

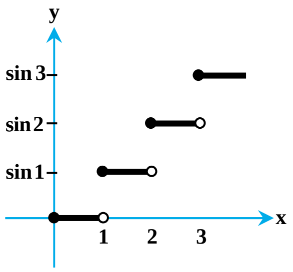
$$f(x)=۴x^{\frac{۳}{۵}}-x^{\frac{۸}{۵}} \Rightarrow f'(x)=۴\times\frac{۳}{۵}x^{\frac{۳}{۵}-۱}-\frac{۸}{۵}x^{\frac{۸}{۵}-۱}=\frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}-\frac{۸}{۵}x^{\frac{۳}{۵}}=\frac{۱۲}{۵x^{\frac{۲}{۵}}}-\frac{۸x^{\frac{۳}{۵}}}{۵} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱۲-۸x}{۵x^{\frac{۲}{۵}}}$$

واضح است به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ مشتق برابر با صفر است و به ازای $x=۰$ مشتق وجود ندارد، پس دو نقطه $x=۰$ و $x=\frac{۳}{۲}$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

مثال ۱۳ (سخت): اگر $f(x)=\sin\lfloor x\rfloor$ و $g(x)=\begin{cases}|x+۱| & ; |x|\le ۱\\ \sin(\pi x) & ; ۱<|x|\le ۲\end{cases}$، آن‌گاه در مورد $f(x)$ و $g(x)$ کدام گزینه درست است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) تابع $f(x)$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۱ و مینیمم مطلق برابر با صفر است.
۲) تابع $f(x)$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۲ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.
۳) تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطه بحرانی و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلق برابر با ۱ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.
۴) تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطه بحرانی و $g(x)$ دارای ماکزیمم مطلقی برابر با ۲ و مینیمم مطلقی برابر با صفر است.

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم که در فاصله‌ی بین دو عدد صحیح m و $m+۱$ خواهیم داشت $\lfloor x\rfloor=m$. به عبارت دقیق‌تر وقتی $m\le x<m+۱$ باشد داریم $f(x)=\sin\lfloor x\rfloor=\sin(m)$. پس در این بازه $f(x)$ مقدار ثابتی دارد و $f'(x)=۰$ است. البته در اعداد صحیح یعنی در $x=m$ تابع $f(x)$ ناپیوسته است و $f'(m)$ وجود ندارد.



در شکل مقابل بخشی از نمودار $f(x)$ را نشان داده‌ایم (البته با این فرض که x برحسب درجه باشد، نمودار رسم شده است). با توجه به این توضیحات متوجه می‌شویم که در اعداد صحیح $f'(m)$ وجود ندارد و در سایر نقاط $f'(x)=۰$ است. پس هر عدد حقیقی، یک نقطه‌ی بحرانی برای $f(x)$ است. اکنون به تابع $g(x)$ توجه کنید. نامساوی $|x|\le ۱$ نشان‌دهنده‌ی ناحیه‌ی $-۱\le x\le ۱$ است. نامساوی $۱<|x|\le ۲$ دو قسمت را نشان می‌دهد که یکی از آن‌ها $۱<x\le ۲$ و دیگری $-۲\le x<-۱$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & ; -۱\le x\le ۱\\ \sin(\pi x) & ; -۲\le x<-۱\ ,\ ۱<x\le ۲\end{cases}$$

در مورد ضابطه‌ی اول توجه کنید که در فاصله‌ی $-۱\le x\le ۱$ داریم $x+۱\ge ۰$ در نتیجه می‌توان آن را از قدرمطلق خارج کرد. با توجه به حدود x، دامنه‌ی $g(x)$ بازه‌ی $[-۲,۲]$ است. ابتدا $g'(x)$ را حساب می‌کنیم. در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ تابع $g(x)$ پیوسته نیست، در نتیجه مشتق‌پذیر هم نیست. برای مثال در $x=۱$ داریم $g(۱^+)=\sin(\pi)=۰$ و $g(۱^-)=۱+۱=۲$ نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ نیز ابتدا و انتهای دامنه هستند و تابع $g(x)$ در آن‌ها فقط از یک طرف تعریف شده است، بنابراین در این نقاط هم مشتق وجود ندارد.

برای محاسبه‌ی سایر نقاط بحرانی، ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم. در بازه‌ی $-۱<x<۱$ داریم $g'(x)=۱$، پس مشتق در این فاصله صفر نمی‌شود. پس ریشه‌های $\pi\cos\pi x$ را بررسی کنیم:

$$g'(x)=\pi\cos(\pi x)=۰\ \Rightarrow \pi x=(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۲}=\frac{\text{عدد فرد}}{۲}$$

در فاصله‌ی $۱<x<۲$ و $-۲<x<-۱$ جواب‌های $x=\pm\frac{۳}{۲}$ بدست می‌آیند. به این ترتیب در یک جمع‌بندی نقاط $x=\pm۲$، $x=\pm۱$ و $x=\pm\frac{۳}{۲}$ نقاط بحرانی هستند. در ضمن $x=\pm۲$ ابتدا و انتهای دامنه نیز محسوب می‌شوند. مقدار $g(x)$ را در این نقاط محاسبه می‌کنیم:

$$g(۱)=۱+۱=۲\ ,\ g(-۱)=-۱+۱=۰\ ,\ g(\pm۲)=\sin(\pm۲\pi)=۰\ ,\ g(\pm\frac{۳}{۲})=\sin(\pm\frac{۳\pi}{۲})=\pm۱$$

مقادیر بدست آمده برای $g(x)$ عبارتند از ±۱، ۰ و ۲. در نتیجه ماکزیمم مطلق برابر با ۲ و مینیمم مطلق برابر با ۱- است.

بررسی وجود Max و Min مطلق روی بازه‌ی باز (a,b)

پیدا کردن Max و Min مطلق روی بازه‌ی باز (a,b)، دو تفاوت مهم با $[a,b]$ دارد. یکی این‌که دیگر $x=a$ و $x=b$ در بازه قرار ندارند. ما در بازه‌ی (a,b) قرار داریم. پس به نقطه‌ی a فقط از راست می‌توانیم نزدیک شویم و به نقطه‌ی b فقط از چپ می‌توانیم نزدیک شویم. پس به جای $f(a)$ باید $f(a^+)$ را حساب کنید و به جای $f(b)$ باید $f(b^-)$ را در نظر بگیرید. تفاوت مهم دیگر آن است که چون $x=a$ و $x=b$ در بازه قرار ندارند، پس نمی‌توانیم آن‌ها را به عنوان Max و Min مطلق در نظر بگیریم. پس به طور خلاصه چنین عمل می‌کنیم: ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. اگر هیچ نقطه بحرانی در این بازه نداشته باشیم، Max و Min مطلق وجود ندارد. اگر نقطه‌ی بحرانی مانند c داخل بازه پیدا کردیم، مقدار $f(c)$ را با مقادیر $f(a^+)$ و $f(b^-)$ مقایسه می‌کنیم. اگر $f(c)$ از هر دوی آن‌ها بزرگتر (یا مساوی) بود، Max مطلق است و اگر از هر دوی آن‌ها کوچکتر (یا مساوی) بود، Min مطلق است. در غیر این‌صورت نه Max مطلق است و نه Min مطلق.

مثال ۱۴: کدام تابع در بازه $(۰,۱)$ ماکزیمم مطلق دارد؟

۱) ۲^{-x} ۲) $\sin\frac{۱}{x}$ ۳) $\sin x^۲$ ۴) $Ln(x+۱)$

پاسخ: گزینه «۲» نحوه طرح سؤال به گونه‌ای است که باید گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی کنیم:

بررسی گزینه (۱): فرض کنیم $f(x)=۲^{-x}$ است. پس $f'(x)=-۲^{-x}Ln۲$ و معادله‌ی $f'(x)=۰$ جواب ندارد، زیرا ۲^{-x} همواره مثبت است، بنابراین نقطه‌ی بحرانی نداریم. پس Max و Min مطلق در بازه‌ی $(۰,۱)$ وجود ندارد.

بررسی گزینه (۲): می‌دانیم که $-۱\le\sin\frac{۱}{x}\le ۱$ است. هر جا که $\sin\frac{۱}{x}=۱$ باشد، ماکزیمم مطلق رخ می‌دهد. از تساوی $\sin\frac{۱}{x}=۱$ نتیجه می‌شود که $\frac{۱}{x}=\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},\frac{۹\pi}{۲},\dots$ پس $x=\frac{۲}{\pi},\frac{۲}{۵\pi},\frac{۲}{۹\pi},\dots$ و همه‌ی این نقاط در بازه‌ی $(۰,۱)$ قرار دارند. پس این تابع در بازه‌ی $(۰,۱)$ دارای ماکزیمم مطلق است.

بررسی گزینه (۳): می‌دانیم که $-۱ \le \sin x^۲ \le ۱$ است. پس ماکزیمم مطلق در نقاطی رخ می‌دهد که $\sin x^۲ = ۱$ باشد. از این تساوی داریم $x^۲ = \frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \frac{۹\pi}{۲}, \dots$

در نتیجه $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{۲}}, \pm\sqrt{\frac{۵\pi}{۲}}, \pm\sqrt{\frac{۹\pi}{۲}}$ اما هیچ‌کدام از این نقاط در بازه‌ی $(۰,۱)$ نیستند. پس این تابع در $(۰,۱)$ ماکزیمم مطلق ندارد.

بررسی گزینه (۴): نقاط بحرانی $f(x)$ را در بازه‌ی $(۰,۱)$ پیدا می‌کنیم. $f(x) = \operatorname{Ln}(x+۱) \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{x+۱}$

معادله‌ی $f'(x) = ۰$ جواب ندارد. ریشه‌ی مخرج یعنی $x = -۱$ هم در بازه‌ی $(۰,۱)$ قرار ندارد. پس $f(x)$ در این بازه نقطه‌ی بحرانی ندارد.

توضیح: برای بررسی گزینه‌های (۲) و (۳) می‌توانستیم از معادله‌ی $f'(x) = ۰$ هم استفاده کنیم تا محل نقاط بحرانی مشخص شوند.

نکته ۲: هرگاه $f(x)$ تابعی زوج با ماکزیمم (مینیمم) نسبی در $x = c$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x = -c$ نیز ماکزیمم (مینیمم) نسبی دارد و هرگاه $f(x)$ تابعی فرد با ماکزیمم (مینیمم) نسبی در $x = c$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x = -c$، مینیمم (ماکزیمم) نسبی دارد. (دقت کنید در حالتی که تابع فرد است، اگر در $x = c$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، در $x = -c$ مینیمم نسبی و اگر در $x = c$ مینیمم نسبی داشته باشد، در $x = -c$ ماکزیمم نسبی دارد. اما در حالتی که تابع زوج است، هر نوع اکسترمم در $x = c$ داشته باشد در $x = -c$ نیز همان نوع اکسترمم را خواهد داشت.)

مثال ۱۵: **فرض کنید $f(x)$ از هر مرتبه مشتق‌پذیر بوده و نمودار $g(x) = xf(x^۲)$ در $x = -a$ دارای ماکزیمم نسبی باشد. کدام گزینه در $x = a$ دارای مینیمم نسبی است؟**

۱) $(x-a)^۴ + g(x)$
۲) $(x-a)^۴ - g(x)$
۳) $(x-a)g(x)$
۴) $(x-a) + g(x)$

پاسخ: گزینه «۱» طبق صورت سؤال $f(x)$ مشتق‌پذیر است، بنابراین $g(x) = xf(x^۲)$ نیز تابعی مشتق‌پذیر است؛ زیرا از ترکیب خطی و حاصل‌ضرب چند تابع مشتق‌پذیر به‌وجود آمده است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که $g(x)$ تابعی فرد است: $g(-x) = -xf(x^۲) = -g(x)$

طبق صورت سؤال، $x = -a$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی $g(x)$ است؛ پس $x = a$ نقطه‌ی مینیمم نسبی $g(x)$ می‌باشد (زیرا $g(x)$ فرد است). پس می‌توان نتیجه گرفت که $g'(a) = ۰$ و $g''(a) \ge ۰$ است. حالا در بین گزینه‌ها تابعی را می‌خواهیم که در $x = a$ دارای مینیمم نسبی باشد، یعنی $y'(a) = ۰$ و $y''(a) \ge ۰$ باشد.

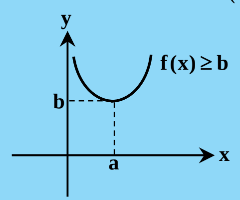
گزینه‌ی (۱) هر دو شرط را دارد. اگر $y = (x-a)^۴ + g(x)$ باشد، داریم: $y'(x) = ۴(x-a)^۳ + g'(x)$ و $y''(x) = ۱۲(x-a)^۲ + g''(x)$، پس $y'(a) = ۰ + g'(a) = ۰$ و $y''(a) = ۰ + g''(a) \ge ۰$.

در گزینه‌ی (۲) داریم: $y'(x) = ۴(x-a)^۳ - g'(x)$ و $y''(x) = ۱۲(x-a)^۲ - g''(x)$، پس $y'(a) = ۰$، اما $y''(a) = ۰ - g''(a) \le ۰$ منفی می‌شود.

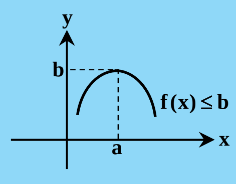
گزینه‌های (۳) و (۴) در $x = a$ لزوماً نقطه‌ی بحرانی ندارند. در مورد گزینه‌ی (۳) داریم: $y'(x) = ۱ \times g(x) + (x-a)g'(x) \Rightarrow y'(a) = g(a) + ۰$

و ما نمی‌دانیم که $g(a)$ چه مقداری دارد. در گزینه‌ی (۴) هم داریم: $y'(x) = ۱ + g'(x)$، پس $y'(a) = ۱ + g'(a) = ۱ \ne ۰$ یعنی $x = a$ نقطه‌ی بحرانی نیست.

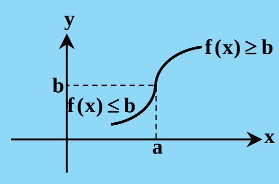
نکته ۳: گاهی اوقات بهترین روش برای تشخیص نوع نقطه‌ی اکسترمم آن است که از تعریف ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی استفاده کنیم. اگر بدانیم که $f(a) = b$، اما در چپ و راست این نقطه $f(x) \ge b$، معلوم می‌شود که $x = a$ نقطه‌ی مینیمم نسبی است (شکل ۱)، و اگر $f(a) = b$ باشد اما در چپ و راست این نقطه، $f(x) \le b$ باشد معلوم می‌شود که $x = a$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است (شکل ۲). اگر $f(a) = b$ باشد اما در چپ و راست این نقطه از یک طرف $f(x) < b$ و از طرف دیگر $f(x) > b$ باشد، معلوم می‌شود که $x = a$ نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی است (شکل ۳).



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

تذکر ۵: **اگر تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته نباشد یا ضابطه‌ی $f(x)$ در $x = a$ عوض شده باشد، برای محاسبه‌ی $f'(a)$ و $f''(a)$ مجبور به استفاده از تعریف مشتق هستیم.**

مثال ۱۶: **اگر $f(x) = \begin{cases} x^۴ \sin\frac{۱}{x} & ; x \ne ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$، $g(x) = \begin{cases} x^۴(۲+\sin\frac{۱}{x}) & ; x \ne ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$ و $h(x) = \begin{cases} x^۴(-۲+\sin\frac{۱}{x}) & ; x \ne ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$ آن‌گاه در مورد وضعیت این توابع در نقطه‌ی $x = ۰$ کدام گزینه صحیح است؟**

۱) f ماکزیمم نسبی، g ماکزیمم نسبی و h مینیمم نسبی دارد.
۲) f نه ماکزیمم و نه مینیمم نسبی، g مینیمم نسبی و h ماکزیمم نسبی دارد.
۳) f نه ماکزیمم و نه مینیمم نسبی، g ماکزیمم نسبی و h مینیمم نسبی دارد.
۴) f مینیمم نسبی، g مینیمم نسبی و h ماکزیمم نسبی دارد.

پاسخ: گزینه «۲» محاسبه‌ی مشتق‌های اول و دوم در $x = ۰$ نیاز به استفاده از تعریف مشتق دارد و ممکن است وقت‌گیر باشد، با این حال در این مثال راه ساده‌تری برای پاسخ دادن به سؤال داریم که مورد نظر طراح بوده است.

می‌دانید که $-۱ \le \sin\frac{۱}{x} \le ۱$ است. در نتیجه $۲+\sin\frac{۱}{x}$ همواره مثبت است. این نشان می‌دهد که تابع $g(x) = x^۴(۲+\sin\frac{۱}{x})$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است، در واقع در $x = ۰$ داریم $g(۰) = ۰$ و در سایر نقاط $g(x) > ۰$ است. پس واضح است که $x = ۰$ نقطه‌ی مینیمم تابع $g(x)$ است. اکنون به ضابطه‌ی

استفاده از آزمون مشتق دوم چه زمانی مناسب است؟

برای برخی از دانشجویان، تعیین نوع نقاط اکسترمم، با استفاده از آزمون مشتق اول خیلی خوشایند نیست! که این موضوع، بیشتر به دلیل وجود « جدول تعیین علامت» در آزمون مشتق اول می‌باشد! برای همین، استفاده از آزمون مشتق دوم برای آن‌ها راحت‌تر است. اما اگر ضابطه‌ی $f'(x)$ طوری بود که تعیین $f''(x)$ (مشتق‌گیری دوم) سخت بود، آن‌وقت کار کمی سخت می‌شود و تازه اگر مشتق دوم را هم گرفتیم و در نقطه بحرانی برابر با صفر شد، باز هم تلاشی بیهوده کرده‌ایم! برای رفع این مشکل مسائل را به سه دسته تقسیم‌بندی می‌کنیم:

الف) سؤالاتی که در آن‌ها مشتق‌گیری متوالی دوم، سوم و ... آسان است و البته مشتق دوم صفر می‌شود. در این حالت از فرم تعمیم یافته « آزمون مشتق دوم» استفاده می‌کنیم. صورت این قضیه به‌صورت زیر است:

قضیه (فرم تعمیم یافته آزمون مشتق دوم): فرض کنید $f(x)$ تابعی است که در یک همسایگی از c تعریف شده، و در این همسایگی مشتقات مراتب اول تا $n-1$ آن وجود دارند، همچنین $f'(c)=f''(c)=\cdots f^{(n-1)}(c)=0$ و مقدار $f^{(n)}(c)$ موجود و مخالف صفر باشد. در این صورت سه نتیجه زیر را داریم:

۱) اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(c)>0$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x=c$ مینیمم نسبی دارد.

۲) اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(c)<0$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

۳) اگر n فرد باشد، در این صورت $f(x)$ در $x=c$ نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی دارد.

اولاً از قضیه فوق زمانی استفاده می‌کنیم که **مشتق دوم صفر می‌شود** و ثانیاً مشتق‌گیری را تا مرتبه‌ای ادامه می‌دهیم که مقدار مشتق آن مرتبه در نقطه **صفر نشود.**

مثال ۱۸: تابع $f(x)=\cos x+\cosh x$ در $x=0$ دارای چه نوعی از اکسترمم می‌باشد؟

پاسخ: ابتدا مشتقات اول و دوم را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\sinh x-\sin x\ ,\ f''(x)=\cosh x-\cos x$$

همان‌طور که می‌بینید $f'(0)=f''(0)=0$، پس مشتق‌گیری را ادامه می‌دهیم:

$$f'''(x)=\sinh x+\sin x\Rightarrow f'''(0)=0\xrightarrow{\text{ادامه می‌دهیم}}f^{(4)}(x)=\cosh x+\cos x\Rightarrow f^{(4)}(0)=2>0$$

چون n زوج است و $f^{(4)}(0)>0$ لذا $x=0$ مینیمم نسبی است.

ب) ضابطه‌ی منحنی به‌صورت پارامتری است. در این حالت بهتر است از آزمون مشتق دوم استفاده کنیم، چون در این‌گونه سؤالات استفاده از آزمون مشتق اول ممکن است منجر به نتیجه اشتباه شود. مثال زیر موضوع را بهتر روشن می‌کند:

مثال ۱۹: مختصات نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع پارامتری $(y=2te^{-t}+2e^{-t}-t^2\ ,\ x=e^{-t}-t+1)$ و نوع آن نقطه کدام است؟

۱) نقطه‌ی $(0,2)$، ماکزیمم نسبی است.
۲) نقطه‌ی $(2,2)$، ماکزیمم نسبی است.
۳) نقطه‌ی $(0,2)$، مینیمم نسبی است.
۴) نقطه‌ی $(2,2)$، مینیمم نسبی است.

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از مشتق‌گیری پارامتری، $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}-2t}{-e^{-t}-1}=\frac{-2t(e^{-t}+1)}{-(e^{-t}+1)}=2t\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{-e^{-t}-1}$$

اکنون می‌توانیم نوع نقطه‌ی اکسترمم نسبی را معین کنیم، ابتدا نقطه بحرانی را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow 2t=0\Rightarrow t=0$$

پس نقطه‌ی اکسترمم این تابع به ازای $t=0$ بدست می‌آید، حالا با استفاده از آزمون مشتق دوم می‌توانیم نوع این نقطه را مشخص کنیم:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{-e^{-t}-1}\xrightarrow{t=0}\frac{d^2y}{dx^2}=-1$$

y'' در این نقطه منفی است، در نتیجه این نقطه، ماکزیمم نسبی خواهد بود. در پایان برای تعیین مختصات این نقطه، مقدار $t=0$ را در معادلات پارامتری x و y قرار می‌دهیم:

$$x=e^{-t}-t+1\Rightarrow x(0)=e^0+1=2\ ,\ y=2te^{-t}+2e^{-t}-t^2\Rightarrow y(0)=0+2-0=2$$

پس مختصات نقطه‌ی ماکزیمم نسبی به‌صورت $(2,2)$ است.

توضیح: اگر در معادلات پارامتری، بخواهیم از آزمون مشتق اول استفاده کنیم، باید به این موضوع توجه کنیم که y' برحسب x نوشته شود نه برحسب t. اگر بدون دقت به این مطلب از آزمون مشتق اول استفاده کنید به جواب نادرستی خواهید رسید. در این مثال $y'=\frac{dy}{dx}=2t$ است. اگر همین ضابطه را در نظر بگیرید و طبق جدول زیر تعیین علامت کنید، به نظر می‌رسد که $t=0$ و در واقع نقطه $(0,2)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	2	$\nearrow$

۳) فرض کنیم $f(x)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هر دو برابر با $+\infty$ شوند، این تابع حتماً دارای مینیمم مطلق است. (مانند $y=|x|$) به همین ترتیب اگر از هر دو طرف، مقدار حد $-\infty$ شود، این تابع دارای ماکزیمم مطلق است (مانند $y=1-x^2$). اگر یکی از آن‌ها $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود، معلوم است که $f(x)$ نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق (مانند $y=x^3$). برای استفاده از این نکته نیازی به مشتق‌پذیری نداریم، بلکه پیوسته بودن $f(x)$ بر $\mathbb{R}$ کافی است. این نکته، محل نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم را مشخص نمی‌کند؛ اما اطمینان می‌دهد که تحت شرایط مناسب، چنین نقطه‌ای وجود دارد. در ضمن مراقب باشید که برای نقاط اکسترمم نسبی از این نکته استفاده نکنید و فقط برای اکسترمم‌های مطلق آن را به کار گیرید.

مثال ۲۳: کدام گزینه دارای ماکزیمم مطلق بر $\mathbb{R}$ است؟

۱) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-e^{-2x^2}}{|x|+1}$ ۲) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+|x|+1}$ ۳) $f(x)=\dfrac{|x^2-1|-|2x^2-1|}{|x|+1}$ ۴) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2+|x|+1}$

پاسخ: گزینه «۳» در هیچ‌یک از گزینه‌ها مخرج کسر صفر نمی‌شود، زیرا $|x|$ و x^2 نامنفی هستند و با عدد یک جمع شده‌اند. در نتیجه همه‌ی گزینه‌ها روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند. در گزینه‌ی (۱) با توجه به زوج بودن $f(x)$، حد آن در $+\infty$ و $-\infty$ تفاوتی ندارد و با یادآوری این‌که $e^{-\infty}=0$ و $e^{\infty}=\infty$ است خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{x^2}-0}{|x|+1}=+\infty$$

(سرعت رشد تابع نمایی از چندجمله‌ای‌ها بیشتر است به همین خاطر مقدار حد $+\infty$ شده است.)

پس تابع $f(x)$ دارای مینیمم مطلق است اما ماکزیمم مطلق ندارد.

در گزینه‌ی (۲) هم تابع $f(x)$ زوج است و با استفاده از قانون بزرگترین درجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$$

پس این تابع نیز دارای مینیمم مطلق است اما ماکزیمم مطلق ندارد.

در گزینه‌ی (۳) هم با تابعی زوج سر و کار داریم. وقتی $x\to\pm\infty$، در صورت کسر عبارات داخل قدرمطلق‌ها مثبت می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2-1)-(2x^2-1)}{|x|+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{|x|+1}=-\infty$$

درجه‌ی صورت بیشتر است و می‌بینیم که وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، مقدار حد، $-\infty$ است، پس این تابع دارای ماکزیمم مطلق بر $\mathbb{R}$ است.

در گزینه‌ی (۴) با استفاده از قانون سرعت رشد (که می‌گوید رشد توابع نمایی سریع‌تر از چندجمله‌ای‌هاست)، و با یادآوری این‌که $e^{-\infty}=0$ می‌شود، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-0}{x^2}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{0-e^{-x}}{x^2}=-\infty$$

پس این تابع نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.

مثال ۲۴: مقدار مینیمم تابع $y=9|x|+|9x-3|-|x+1|$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{5}$ ۲) $-\dfrac{5}{3}$ ۳) $\dfrac{5}{3}$ ۴) $-\dfrac{3}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که هرگاه $x\to-\infty$ میل کند، همه‌ی عبارات داخل قدرمطلق‌ها منفی می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[-9x-9x+3+x+1]=\lim_{x\to-\infty}[-17x+4]=+\infty$$

هرگاه $x\to+\infty$ میل کند، همه‌ی عبارات داخل قدرمطلق‌ها مثبت می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[9x+9x-3-x-1]=\lim_{x\to+\infty}[17x-4]=+\infty$$

پس این تابع حتماً دارای مینیمم است.

طراح سؤال، محدوده‌ای برای x تعیین نکرده است پس منظور آن است که مینیمم مطلق را روی کل دامنه‌ی $f(x)$ پیدا کنیم. این تابع در همه‌ی نقاط تعریف شده است پس دامنه‌ی f، بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ است. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. سپس مقدار $f(x)$ را در همه‌ی نقاط بحرانی و در دو سر دامنه محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم. می‌دانیم که توابعی به شکل کلی $y=|f(x)|$ در ریشه‌های ساده معادله‌ی $f(x)=0$ مشتق‌پذیر نیستند، پس داریم:

$$(x+1=0\Rightarrow x=-1)\ ;\ (9x-3=0\Rightarrow x=\frac{1}{3})\ ;\ (x=0)$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x=-1,0,\frac{1}{3}$ حالا مقدار $f(x)$ را در این نقاط و در دو سرِ دامنه حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=9+12-0=21\quad,\quad f(0)=0+3-1=2\ ,\ f(\frac{1}{3})=\frac{9}{3}+0-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

با مقایسه‌ی مقادیر به دست آمده می‌بینیم که مینیمم مطلق $f(x)$ برابر با $\frac{5}{3}$ است.

پیدا کردن برد توابع با استفاده از مشتق

یکی از کاربردهای دیگر مشتق، تعیین برد تابع $f(x)$ است. فرض کنید می‌خواهیم برد تابع $f(x)$ را مشخص کنیم.

گام اول: ابتدا دامنه‌ی آن را تعیین می‌کنیم.

گام دوم: ضابطه‌ی $f'(x)$ را بدست می‌آوریم و نقاط بحرانی را تشخیص می‌دهیم. نیازی نیست نوع نقاط بحرانی را تعیین کنیم؛ در نظر داشته باشید که نقاط بحرانی بدست آمده باید در دامنه‌ی $f(x)$ قرار داشته باشند.

گام سوم: در پایان، مقدار $f(x)$ را در نقاط بحرانی و در دو سرِ دامنه حساب می‌کنیم. مثلاً اگر دامنه‌ی f به‌صورت $[1,\infty)$ باشد و $x=2$ هم نقطه بحرانی باشد، باید مقدار $f(1)$، $f(2)$ و $f(\infty)$ (یعنی همان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$) را محاسبه کنیم. با مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ در صورت وجود معلوم می‌شوند. اگر هر دو مقدار موجود باشند، برد تابع $f(x)$ برابر است با $R_f=[\min f,\max f]$. البته اگر این دو مقدار با استفاده از حدگیری بدست آمده‌اند، باید به‌صورت بازه باز نوشته شوند. البته ممکن است یکی از آن‌ها را با حدگیری بدست آورده باشیم، در این صورت فقط آن عدد را به‌صورت بازه باز می‌نویسیم.

مثال ۲۷: برد تابع $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-4,4)$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $[-4,4]$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم. در این مثال $f(x)$ همه‌جا تعریف شده است و داریم $D_f=(-\infty,+\infty)$. در مرحله‌ی بعدی نقاط بحرانی را تعیین می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0\ \Rightarrow x=\pm 1$$

اکنون مقدار $f(x)$ را در نقاط بحرانی و حد آن را در دو سر دامنه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{4}{1+1}=2\ ,\ f(-1)=\dfrac{-4}{1+1}=-2 \\ f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2+1}=0\quad ,\quad f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2+1}=0 \end{cases}$$

توجه کنید که درجه‌ی مخرج بیشتر از صورت است، پس حد $f(x)$ در $+\infty$ و $-\infty$ صفر می‌شود. با مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده داریم:

$$\min f(x)=-2\ ,\ \max f(x)=2\ \Rightarrow f_{\text{برد}}=R_f=[-2,2]$$

از آن‌جا که مقادیر $f(1)=2$ و $f(-1)=-2$ با جایگذاری ساده بدست آمده‌اند، نه با حدگیری، برد تابع باید بازه‌ی بسته باشد.

مثال ۲۸: برد تابع $f(x)=x-\sqrt{4x-x^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-1,2+\sqrt5]$ ۲) $[2-\sqrt5,1]$ ۳) $[2-\sqrt5,2+\sqrt5]$ ۴) $[-1,2-\sqrt5]$

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم. این‌کار را می‌توانیم با تعیین علامت معادله‌ی درجه‌ی دو یا با ایجاد مربع کامل در زیر رادیکال انجام دهیم. اگر مربع کامل ایجاد کنیم، در ادامه‌ی حل نیز محاسبات راحت‌تر انجام می‌شوند، به همین دلیل این مسیر را انتخاب می‌کنیم:

$$4x-x^2+1=-[x^2-4x-1]=-[(x-2)^2-5]=5-(x-2)^2$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=x-\sqrt{5-(x-2)^2}$$

حالا دامنه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$5-(x-2)^2\ge 0\Rightarrow 5\ge(x-2)^2\Rightarrow -\sqrt5\le(x-2)\le\sqrt5\Rightarrow 2-\sqrt5\le x\le 2+\sqrt5$$

دامنه‌ی $f(x)$ برابر است با:

$$D_f=[2-\sqrt5\ ,\ 2+\sqrt5]$$

در گام بعدی نقاط بحرانی $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=1-\frac{-2(x-2)}{2\sqrt{5-(x-2)^2}}=0\Rightarrow -(x-2)=\sqrt{5-(x-2)^2}$$

مقدار سمت راست، مثبت است پس سمت چپ هم باید مثبت باشد پس $x<2$ است، حالا محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$(x-2)^2=5-(x-2)^2\Rightarrow 2(x-2)^2=5\Rightarrow (x-2)^2=\frac52\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{\frac52}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{\frac52}\xrightarrow{x<2}x=2-\sqrt{\frac52}$$

البته باید مراقب باشیم که نقطه‌ی بحرانی بدست آمده در دامنه‌ی $f(x)$ قرار داشته باشد. در این‌جا $x=2-\sqrt{\frac52}$ در بازه‌ی $[2-\sqrt5,2+\sqrt5]$ قرار دارد.

گام بعدی آن است که مقدار $f(x)=x-\sqrt{5-(x-2)^2}$ را در نقطه‌ی بحرانی و در دو سر دامنه حساب کنیم:

$$\begin{cases} f(2\pm\sqrt5)=2\pm\sqrt5-\sqrt{5-(\pm\sqrt5)^2}=2\pm\sqrt5 \\ f(2-\sqrt{\frac52})=2-\sqrt{\frac52}-\sqrt{5-\frac52}=2-\sqrt{\frac52}-\sqrt{\frac52}=2-2\sqrt{\frac52}=2-\sqrt{10} \end{cases}\Rightarrow \min f(x)=2-\sqrt{10}\ ,\ \max f(x)=2+\sqrt5$$

بنابراین برد f به‌صورت $R_f=[2-\sqrt{10},2+\sqrt5]$ است.

مثال ۳۲: نمودار تابع $f(x)=x^3e^{6x}$ در چه بازه‌ای صعودی است؟

پاسخ: کافی است نامساوی $f'(x)\geq 0$ را حل کنیم. ابتدا با استفاده از قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب داریم: $f'(x)=3x^2e^{6x}+6x^3e^{6x}=3x^2e^{6x}(1+2x)$

اکنون نامساوی $f'(x)\geq 0$ را حل می‌کنیم. دقت کنید که چون $x^2\geq 0$ و $e^{6x}>0$ است، در نتیجه برای این‌که ببینیم $f'(x)$ کجاها مثبت است، کافی است نامساوی $1+2x\geq 0$ را حل کنیم. به راحتی داریم: $1+2x\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -1 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

پس این تابع در بازه‌ی $-\frac{1}{2}\leq x<\infty$ صعودی است.

مثال ۳۳: اگر مشتق تابع $y=f(x)$ به‌صورت $f'(x)=(x+1)^2(x-3)^5(x-6)^4$ تعریف شود. آن‌گاه f روی چه بازه‌ای صعودی است؟

۱) $[3,\infty)$ ۲) $(0,3]$ ۳) $[6,\infty)$ ۴) $(0,6]$

پاسخ: گزینه «۱» هر جا که $f'(x)\geq 0$ باشد، تابع $f(x)$ صعودی است. بنابراین به تعیین علامت $f'(x)$ نیاز داریم. در ضابطه‌ی $f'(x)$ عبارات $(x+1)^2$ و $(x-6)^4$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر هستند، زیرا توان زوج دارند. در نتیجه علامت $f'(x)$ به علامتِ $(x-3)^5$ بستگی دارد. اگر $x\geq 3$، آن‌گاه $(x-3)^5\geq 0$، یعنی $f'(x)\geq 0$ می‌شود و $f(x)$ در این بازه صعودی است. اگر $x\leq 3$، $f'(x)\leq 0$ می‌شود و $f(x)$ در این بازه نزولی است. پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[3,\infty)$ صعودی است.

مثال ۳۴: فرض کنید $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ مشتق‌پذیر و تابع با ضابطه $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$ نزولی باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) g در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۲) f در بازه $(-\infty,0)$ نزولی است.

۳) f صعودی است.

۴) f یک چندجمله‌ای با درجه‌ای بزرگتر از ۳ است.

پاسخ: گزینه «۲» چون تابع g نزولی اکید است، پس باید $g'(x)<0$ باشد. با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ داریم:

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)(x^2+1)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}<0 \Rightarrow (x^2+1)f'(x)-2xf(x)<0\Rightarrow f'(x)<\frac{f(x)}{x^2+1}(2x)$$

برد $f(x)$ در صورت سؤال $[0,\infty)$ عنوان شده و این یعنی $f(x)\geq 0$، از طرفی در سمت راست نامساوی مقدار x^2+1 هم همواره مثبت است، پس اگر $x<0$ آن‌گاه سمت راست نامساوی فوق منفی می‌شود پس $f'(x)$ هم منفی می‌شود، در واقع f بر بازه $(-\infty,0)$ نزولی است.

مثال ۳۵ (سخت): کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}$ صحیح است؟ $(x>0)$

۱) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ مینیمم نسبی دارد و برای $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2e-1}$ نزولی است.

۲) $f(x)$ بر دامنه‌اش که $(\frac{1}{2},\infty)$ می‌باشد، اکیداً نزولی است و نقطه‌ی اکسترمم ندارد.

۳) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ ماکزیمم نسبی دارد و برای $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2e-1}$ نزولی است.

۴) $f(x)$ در $x=\frac{e}{2e-1}$ مینیمم نسبی دارد و برای $x>\frac{e}{2e-1}$ صعودی است.

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا به دامنه‌ی $f(x)$ دقت می‌کنیم. برای آن‌که این تابع تعریف شده باشد، باید پایه‌ی آن مثبت باشد:

$2-\frac{1}{x}>0\Rightarrow 2>\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}<x\Rightarrow$ بنابراین دامنه‌ی این تابع $(\frac{1}{2},\infty)$ است.

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن $f(x)$ باید به علامت $f'(x)$ توجه کنیم. ابتدا $f'(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}\Rightarrow \mathrm{Ln}f(x)=(2-\frac{1}{x})\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})\xrightarrow{\text{مشتق گیری}}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}(2-\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)[\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}]$$

با جایگذاری $f(x)$ در رابطه‌ی بدست آمده داریم:

$$f'(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2}\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}]$$

با فاکتور گرفتن از $\frac{1}{x^2}$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$f'(x)=(2-\frac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}[\mathrm{Ln}(2-\frac{1}{x})+1]$$

تذکر۷: در کتاب‌های مرجع به توابعی که تقعر آن رو به پایین است « مقعر» و به توابعی که تقعر آن رو بـه بالاسـت، « محـدب» گفتـه مـی‌شـود. در واقـع وقتی $f''(x) \le 0$ آن‌گاه تابع مقعر و وقتی $f''(x) \ge 0$ آن‌گاه تابع محدب نامیده می‌شود. اما بعضاً در آزمون‌های مختلـف کارشناسـی ارشـد (خصوصـاً رشـته‌هـای مدیریت، حسابداری و اقتصاد) دیده شده هرگاه $f''(x) \ge 0$ باشد، تابع را مقعر و هرگاه $f''(x) \le 0$ تابع را محدب می‌گویند و این موضوع خلاف روند مرسوم است و ما در این کتاب همان نظر کتاب‌های مرجع را ملاک قرار می‌دهیم. در واقع اگر صحبت از تقعر رو به پایین و تقعر رو به بالا شود، دیگر این مشکلات پیش نخواهد آمد و اطلاق لفظ « مقعر» و « محدب» کار را دوگانه جلوه می‌دهد.

نکته۸: می‌دانیم معادله‌ی خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی x_0 به‌صورت $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ است. همان‌طور که در شکل‌هـا نشـان داده شده وقتی تقعر f رو به پایین است، برای هر x، عرض تابع f یعنی $f(x)$ از عرض خط مماس یعنی y بیشتر است و وقتی تقعر f رو به بالا است، بـرای هـر x، عرض تابع f یعنی $f(x)$ از عرض خط مماس، یعنی y کمتر است، این نتایج به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

الف) اگر تقعر f رو به پایین باشد، آن‌گاه داریم:

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ب) اگر تقعر f رو به بالا باشد، آن‌گاه داریم:

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

نکته۹: اگر f بر بازه I مشتق‌پذیر و تقعر آن رو به پایین باشد، برای هر دو نقطه دلخواه x_1 و x_2 متعلق به بازه I، و هر عدد حقیقی $\lambda \in [0,1]$ نامساوی زیر را داریم:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

و اگر با تمام شرایط فوق، تقعر f رو به بالا باشد، نامساوی زیر را داریم:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

این نامساوی‌ها خصوصاً وقتی $\lambda = \frac{1}{2}$ است، در اثبات نامساوی‌ها کاربرد دارند و در واقع نامساوی‌های زیر را داریم:

- وقتی تقعر رو به پایین است: $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

- وقتی تقعر رو به بالا است: $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

مثال۴۴: اگر $x_1 \ne x_2$ و $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ آن‌گاه نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x_1 + x_2)^n < 2^{n-1}(x_1^n + x_2^n)\ ,\ n > 1$ **ب)** $x_1 Ln x_1 + x_2 Ln x_2 > (x_1 + x_2) Ln \frac{x_1 + x_2}{2}$

پاسخ:

الف) $f(x) = x^n$، در نتیجه $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ است. طبق فرض $n > 1$، بنابراین در ناحیه‌ی $x > 0$ مقدار $f''(x)$ عددی مثبت است و این یعنی تقعـر رو به بالا است و لذا نامساوی دوم را داریم:

$$(\frac{x_1 + x_2}{2})^n < \frac{x_1^n + x_2^n}{2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^n < 2^{n-1}(x_1^n + x_2^n)$$

دقت کنید چون $f''(x) > 0$ و علامت مساوی را ندارد، ما هم علامت مساوی را در فرمول قرار ندادیم.

ب) فرض کنید $f(x) = x Ln x$ (توجه داشته باشید که دامنه‌ی $f(x)$ فقط $x > 0$ است). در این صورت $y'' = \frac{1}{x} > 0$ و این یعنی تقعر f رو به بالا است:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} Ln(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{1}{2}(x_1 Lnx + x_2 Ln x_2) \Rightarrow (x_1 + x_2) Ln(\frac{x_1 + x_2}{2}) < x_1 Ln x_1 + x_2 Ln x_2$$

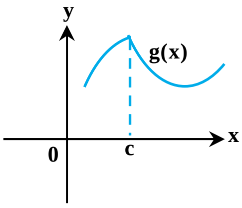
تعریف نقطه عطف و روش‌های به‌دست آوردن آن

نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه عطف برای منحنی پیوسته $y = f(x)$ است (یا به عبارت دیگر تابع $f(x)$ در $x = c$ دارای نقطه عطف است). اگر دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشد:

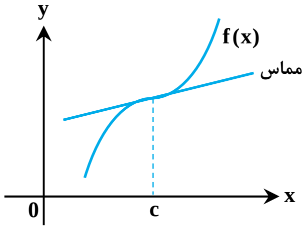
۱) نمودار $y = f(x)$ در $x = c$ خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر f در دو طرف c با هم مخالف باشد (جهت تقعر در c عوض شود).

ممکن است شرط دوم به گونه‌ای تفسیر شود که حتماً باید مشتق اول وجود داشته باشد، تا بگوییم مماس وجود دارد، ولی یادتان باشـد کـه ایـن تفسیر نادرسـت است! **در واقع در حالتی که مشتق وجود ندارد، ولی علامت مشتق چپ و راست یکسان است، دو نیم مماس قائم دارد که آن‌ها را یک مماس قائم محسوب می‌کنیم.** دقت کنید که در واقع شرط دوم ایجاب می‌کند تابع f در $x = c$ مشتق‌پذیر باشد و یا اگر در $x = c$ مشتق‌پذیر نیست، مماس قائم داشته باشد. یعنی مشتق اول به ازای $x = c$ یا برابر با $+\infty$ و یا برابر با $-\infty$ شود و به عبارت دیگر علامت مشتق چپ و راست یکسان باشد. به طور کلی اگر مشـتق اول وجود نداشته باشد، پس می‌توان گفت نقطه‌ی عطف داریم که علامت هر دو مشتق چپ و راست $+\infty$ و یا علامت هر دو مشتق چپ و راست $-\infty$ شود. اگر علامت یکی $+\infty$ و علامت دیگری $-\infty$ شد، نقطه عطف نیست، بلکه نقطه بازگشت است. (البته موارد دیگری که مشتق‌های چپ و راست متناهی ولی مختلف‌العلامه است و نظایر آن، در درسنامه (۱) همین فصل توضیح داده شده است که در هیچ‌کدام نقطه عطف نداریم).

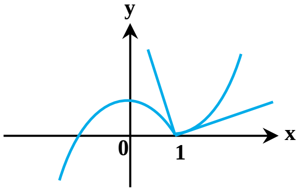


تقعر g در دو طرف c تغییر می‌کند، ولی چون نمودارش مماس ندارد (حتی خط قائم هم ندارد، لذا $x=c$ نقطه عطف نیست.)



تقعر تابع $f(x)$ در دو طرف c تغییر می‌کند، تابع عطف دارد، و مماس نیز وجود دارد که از درون منحنی عبور می‌کند.

مثال ۴۵: آیا تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & ; x\le 1\\ x^3-1 & ; x>1\end{cases}$ در $x=1$ نقطه‌ی عطف دارد؟

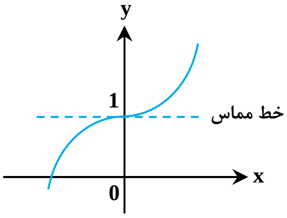


پاسخ: می‌خواهیم ببینیم آیا $x=1$ نقطه‌ی عطف است یا خیر؟ پیوسته بودن $f(x)$ در $x=1$ به وضوح دیده می‌شود. اکنون به مشتق‌های اول و دوم دقت می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & ; x<1\\ 3x^2 & ; x>1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-2 & ; x<1\\ 6x & ; x>1\end{cases}$$

انتظار ما از نقطه‌ی عطف آن است که در آن نقطه $f''(x)$ تغییر علامت دهد، اما علامت $f'(x)$ در چپ و راست آن نقطه تغییر نکند. در این مثال داریم $f''(1^+)=6>0$ و $f''(1^-)=-2<0$، پس $f''(x)$ تغییر علامت داده است. همان‌طور که در شکل هم می‌بینید جهت تقعر منحنی در $x=1$ عوض شده است. حالا به مشتق اول دقت می‌کنیم: $f'(1^-)=-2$، $f'(1^+)=3$؛ مشتق‌های چپ و راست برابر نیستند. بنابراین، این نقطه یک نقطه‌ی عطف محسوب نمی‌شود. همان‌طور که در شکل می‌بینید، نیم مماس‌های چپ و راست در یک راستا نیستند.

مثال ۴۶: نقطه‌ی عطف منحنی $f(x)=x^3+1$ را مشخص کنید.



پاسخ: مشتق‌های اول و دوم عبارتند از $f'(x)=3x^2$ و $f''(x)=6x$. مشتق دوم در $x=0$ تغییر علامت می‌دهد. وقتی $x<0$ است، $f''(x)$ منفی و تقعر به سمت پایین است، وقتی $x>0$ است، $f''(x)$ مثبت و تقعر به سمت بالاست. در ضمن $f'(0)$ وجود دارد. بنابراین منحنی $f(x)$ در این نقطه دارای خط مماس است و در نتیجه $x=0$ نقطه‌ی عطف محسوب می‌شود. در واقع $f'(0)=0$ می‌شود و یک مماس افقی خواهیم داشت.

روش به‌دست آوردن نقطه عطف

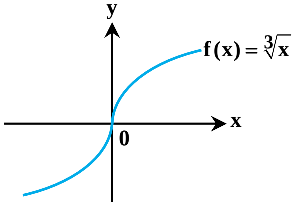
روش پیدا کردن نقطه عطف، بسیار شبیه تعیین نقاط اکسترمم نسبی است. برای تعیین نقطه‌ی عطف ابتدا باید نقاط بحرانی f' را پیدا کنیم؛ این نقاط بحرانی، نامزد انتخاب به عنوان نقطه عطف هستند (یادتان که هست در تعیین اکسترمم‌ها، ابتدا نقاط بحرانی f را تعیین می‌کردیم). نقاط بحرانی f'، نقاطی هستند که در آن‌ها یا $f''(x)$ وجود ندارد و یا اگر $f''(x)$ وجود دارد، برابر با صفر است (یادتان که هست در تعیین اکسترمم‌ها، نقاط بحرانی f نیز به همین طریق بدست می‌آمدند، یعنی دنبال نقاطی بودیم که در آن نقاط یا $f'(x)$ وجود نداشت و یا اگر $f'(x)$ وجود داشت، برابر با صفر بود) و بالاخره در مرحله آخر، تغییر علامت $f''(x)$ حول نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم؛ اگر حول این نقاط، $f''(x)$ تغییر علامت داشته باشد، این نقاط به عنوان نقاط عطف معرفی می‌شوند (یادتان هست که در تعیین اکسترمم‌ها، در آزمون مشتق اول، در واقع همان بررسی تغییر علامت $f'(x)$ را داشتیم. البته به جز تابع ثابت که همه نقاطش اکسترمم نسبی هستند و در همه آن‌ها $f'(x)=0$ است).

مثال ۴۷: اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^4}$، آن‌گاه در مورد جهت تقعر و طول نقطه عطف این توابع بحث کنید.

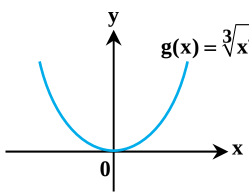
پاسخ: ابتدا تابع $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad,\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

واضح است $f'(0)$ و $f''(0)$ وجود ندارند، چون $f'(0)$ وجود ندارد، پس $x=0$ نقطه بحرانی تابع f است. حالا باید ببینیم آیا حول صفر تابع $f''(x)$ تغییر علامت دارد؟ واضح است اگر $x<0$، آن‌گاه $f''(x)>0$ و اگر $x>0$، آن‌گاه $f''(x)<0$، پس مشتق دوم حول صفر تغییر علامت می‌دهد و این یعنی $x=0$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. همان‌طور که می‌بینید وقتی مشتق‌های اول از چپ و راست نامتناهی و هم‌علامت هستند($f'(0^+)$ و $f'(0^-)$ هر دو برابر با $+\infty$ هستند)، آن‌گاه با شرط تغییر علامت $f''(x)$ نقطه عطف وجود دارد. نمودار f به شکل زیر است:



همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید در بازه $(-\infty,0)$ تقعر f رو به بالا و در بازه $(0,\infty)$ تقعر f رو به پایین است. توجه داشته باشید که در $x=0$ جهت تقعر مشخص نیست، پس نمی‌توان این بازه‌ها را به‌صورت $(-\infty,0]$ یا $[0,\infty)$ نشان داد. حالا سراغ تابع $g(x)=x^{\frac{4}{3}}$ می‌رویم؛ برای این تابع $g'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ و $g''(x)=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$ است. همان‌طور که می‌بینید $g''(0)$ وجود ندارد و این یعنی $x=0$ نامزد نقطه عطف است. برای تعیین عطف بودن یا نبودن، باید وضعیت علامت $g''(x)$ را حول $x=0$ تعیین کنیم؛ واضح است به دلیل وجود x^2 زیر رادیکال $g''(x)$ حول صفر همواره مثبت است و این یعنی تغییر علامتی نداریم و $x=0$ طول نقطه عطف نیست. نمودار g به‌صورت مقابل است:



در بازه $(-\infty,\infty)$ تقعر به سمت بالاست (در واقع همواره تقعر رو به بالاست). توجه داشته باشید که برخلاف تابع f، عدد صفر جزو این بازه است، چون در $x=0$ نیز جهت تقعر معلوم و رو به بالاست.

نکته ۱۲: در توابع درجه سوم به شکل: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ نکات زیر را داریم:

۱) $x = -\dfrac{b}{3a}$ طول نقطه عطف است.

۲) اگر $a > 0$ آن‌گاه طول نقطه Min بزرگ‌تر از طول نقطه Max است و اگر $a < 0$ طول نقطه Max بزرگ‌تر از طول Min است (البته به شرط وجود این دو نقطه).

۳) نقطه عطف تابع، مرکز تقارن آن است و همواره وجود دارد.

۴) اگر معادله مشتق $f'(x) = 0$ دارای دو ریشه متمایز باشد، آن‌گاه تابع یک Max و یک Min دارد و مختصات نقطه عطف به‌صورت
$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_{min} + x_{max}}{2} \\ y_I = \dfrac{y_{min} + y_{max}}{2} \end{cases}$$
عطف خواهد بود به عبارت دیگر میانگین عرض (یا طول) نقاط ماکزیمم و مینیمم برابر عرض (یا طول) نقطه عطف می‌باشد.

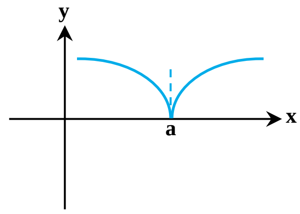
مثال ۵۶: به ازای کدام مقدار m مجموع طول‌های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = mx^3 - 3x^2 - x$ برابر یک می‌باشد؟

۱) $m = -2$ ۲) $m = -1$ ۳) $m = 1$ ۴) $m = 2$

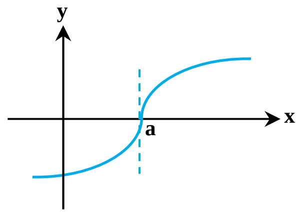
پاسخ : گزینه «۴» با استفاده از شماره‌های (۱) و (۴) در نکته‌ی گفته شده داریم:

$$x_I = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} = \frac{1}{2} \;,\; y = mx^3 - 3x^2 - x \Rightarrow x_I = -\frac{b}{3a} = \frac{3}{3m} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

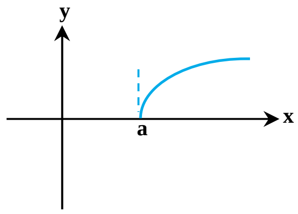
نکته ۱۳: تابع $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m}$ را که در آن $m < n$، در نظر بگیرید، در این صورت اگر m زوج باشد، $x = a$ نقطه بازگشت تابع و این نقطه، نقطه اکسترمم تابع خواهد بود و نمودار آن به فرم $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ خواهد بود. اگر m و n هر دو فرد باشند، $x = a$ نقطه عطف تابع و نمودار آن شبیه $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است و اگر m فرد و n زوج باشد، تابع فقط به ازای $x \geq a$ تعریف شده است و نمودار آن شبیه $f(x) = \sqrt{x}$ خواهد بود.



m زوج باشد.



m و n فرد باشند.



m فرد، n زوج باشد.

مثال ۵۷: در تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$، نقاط ۰ و ۱ به ترتیب چه نوع نقاطی هستند؟

۱) مینیمم، ماکزیمم ۲) ماکزیمم، عطف ۳) مینیمم، عطف ۴) بازگشت، ماکزیمم

پاسخ : گزینه «۲» در همسایگی نقطه $x = 0$ تابع داده شده را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim \sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{x^2} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته گفته شده}} \text{نقطه بازگشت و ماکزیمم}$$

و در همسایگی $x = 1$ تابع را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt[3]{x^2(x-1)} = \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x-1} \sim \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{\text{با توجه به نکته گفته شده}} \text{نقطه عطف}$$

نکته ۱۴: ریشه‌های **مضاعف** معادله $y' = 0$ طول نقاط عطف تابع y هستند. برای مثال به تابع $y = x^3$ توجه کنید، $y' = 3x^2$ ریشه مضاعف در $x = 0$ دارد و بنابراین $x = 0$ طول نقطه عطف است که قبلاً این تابع را بررسی کردیم.

نکته ۱۵: اگر $x = c$ **ریشه مضاعف** معادله‌ی $y'' = 0$ باشد، و همچنین ریشه معادله y' نیز باشد، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه اکسترمم تابع $y = f(x)$ است. برای مثال تابع $y = \frac{1}{4}(x-1)^4 + 1$ را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری داریم: $y' = (x-1)^3$ و $y'' = 3(x-1)^2$، بنابراین $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف y'' است و ریشه‌ی y' هم بوده است. پس $x = 1$ طول نقطه‌ی اکسترمم این تابع است.

مثال ۵۸: اگر $f'(a) = f''(a) = 0$ باشد، آن‌گاه :

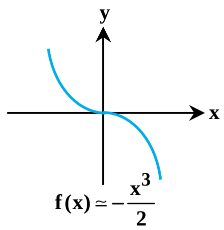
۱) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم دارد.
۲) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای مینیمم نسبی است.
۳) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای ماکزیمم نسبی است.
۴) نمی‌توان گفت که تابع f در نقطه $x = a$ چه وضعیتی دارد.

پاسخ : گزینه «۴» می‌دانیم اگر در نقطه‌ای مشتق اول صفر شود و آن نقطه ریشه مضاعف مشتق اول باشد و ریشه ساده مشتق دوم باشد. آن‌گاه این نقطه طول نقطه‌ی عطف است. مثلاً برای تابع $f(x) = x^3$ داریم $f'(x) = 3x^2$ و $f''(x) = 6x$، برای این تابع $x = 0$ نقطه عطف است و هردو مشتق اول و دوم صفر هستند. اما برای تابع $f(x) = x^4$ داریم $f'(x) = 4x^3$ و $f''(x) = 12x^2$ نقطه $x = 0$ مینیمم نسبی است و برای تابعی مانند $f(x) = -x^4$ داریم $f'(x) = -4x^3$ و $f''(x) = -12x^2$ و نقطه $x = 0$ برای این تابع ماکزیمم نسبی است. پس در حالتی که $f'(a) = f''(a) = 0$ نمی‌توان گفت تابع f در نقطه a چه وضعیتی دارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» بسط هر کدام از توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^{x^2} را حول $x_0 = 0$ را می‌نویسیم. سپس با انجام محاسبات، مشخص می‌کنیم که بسط تابع $f(x)$ با چه توانی از x آغاز می‌شود.

$$f(x) = -x^2(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) + (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots) - 1 + x - x^2$$

$$= -(x^3 - \frac{x^5}{3!} + \cdots) - (x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \cdots) + (1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots) - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}x^4 - \cdots$$



کوچکترین توان x که در بسط ظاهر شده است $n = 3$ است. این نشان می‌دهد که $f^{(3)}(0) \neq 0$ است و $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ خواهد بود. فرد بودن n نشان می‌دهد که $x_0 = 0$ نقطه‌ی عطف است. همچنین اولین جمله‌ی این بسط نشان می‌دهد که نمودار $f(x)$ در نزدیکی مبدأ مانند نمودار $y = -\frac{x^3}{2}$ است.

بنابراین $f(x)$ در $x_0 = 0$ نقطه‌ی عطف دارد و در همسایگی آن نزولی است.

روشی دیگر در تعیین نقاط عطف، ماکزیمم و مینیمم نسبی

همان‌طور که می‌دانید وقتی $f'''(a) = 0$ باشد، آزمون مشتق سوم کارایی خود را از دست می‌دهد. در این قسمت می‌خواهیم روش دیگری برای تعیین نقطه‌ی عطف را ارائه کنیم. البته این روش از نتایج بسط تیلور تابع می‌باشد، در این روش با محاسبه‌ی مشتق‌های اول، دوم، ... مرتبه‌ی اولین مشتقی را که در این نقطه صفر نمی‌شود، پیدا می‌کنیم. سپس از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم (اگر یادتان باشد این قضیه را در مورد تعیین نوع نقاط اکسترمم قبلاً بیان کرده بودیم و حالت سوم را بررسی نکرده بودیم و این جا بیشتر تأکیدمان روی تعیین نقطه عطف است):

قضیه: فرض کنید برای تابع $y = f(x)$، $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ و $f^{(n)}(a) \neq 0$ باشد. اکنون سه حالت زیر را داریم:

الف) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(a) > 0$ باشد، $x = a$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

ب) اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(a) < 0$ باشد، $x = a$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

ج) اگر n فرد باشد، $x = a$ نقطه‌ی عطف است (در مورد نقطه‌ی عطف، نیازی به صفر بودن $f'(a)$ نداریم، به عبارتی اگر $f''(a) = f^{(3)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ و $f^{(n)}(a) \neq 0$ و n فرد باشد، $x = a$ نقطه عطف است).

مثال ۶۰: نقطه‌ی $x = 0$ برای تابع $f(x) = 6\sin x + 2x + x^3$ چه نوع نقطه‌ای است؟

☑ **پاسخ:** ابتدا $f'(0)$ و $f''(0)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 6\cos x + 2 + 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 8 \quad , \quad f''(x) = -6\sin x + 6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

این‌که $f'(0) \neq 0$ است، نشان می‌دهد این نقطه اکسترمم نسبی نیست؛ اما ممکن است نقطه‌ی عطف باشد زیرا $f''(0) = 0$ شده است. با ادامه‌ی مشتق‌گیری‌ها داریم:

$$f^{(3)}(x) = -6\cos x + 6 \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0 \quad , \quad f^{(4)}(x) = 6\sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \quad , \quad f^{(5)}(x) = 6\cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 6 \neq 0$$

پس $n = 5$ عددی فرد است و $x = 0$ نقطه‌ی عطف خواهد بود.

مثال ۶۱: نقطه‌ی $x = 1$ برای تابع $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 10$ چه نقطه‌ای است؟

۱) نقطه عادی است.　　۲) ماکزیمم نسبی است.　　۳) مینیمم نسبی است.　　۴) نقطه‌ی عطف است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» فرض کنید می‌خواهیم از آزمون مشتق دوم استفاده کنیم. مشتق‌های مرتبه‌ی اول و دوم را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x - 7$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 12x + 16$$

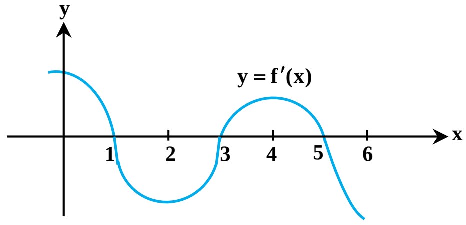
با قرار دادن $x = 1$ در آن‌ها خواهیم دید که $f'(1) = 0$ و $f''(1) = 0$ است. بنابراین آزمون مشتق دوم در این نقطه قابل استفاده نیست؛ زیرا مشتق دوم نیز صفر شده است. با توجه به مشکل بودن تعیین علامتِ $f'(x)$، استفاده از آزمون مشتق اول هم به این سادگی ممکن نیست. پس به فکر استفاده از قضیه گفته شده، می‌افتیم. مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر را حساب می‌کنیم تا به اولین مرتبه‌ی مشتق که در این نقطه صفر **نمی‌شود** برسیم.

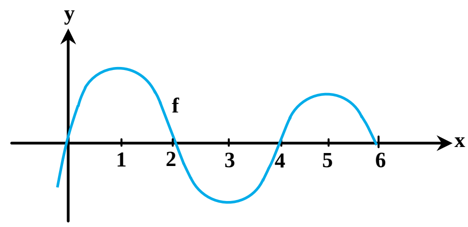
$$f'''(x) = 60x^2 - 48x - 12 \xrightarrow{x=1} f'''(1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 48 \xrightarrow{x=1} f^{(4)}(1) = 72 \neq 0$$

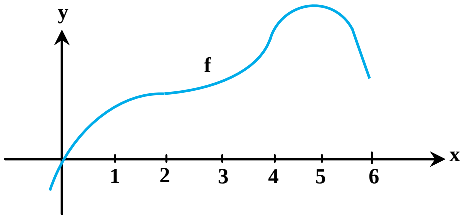
بنابراین اولین مرتبه‌ی مشتق که صفر نمی‌شود $n = 4$ است. با توجه به زوج بودن n، علامتِ $f^{(4)}(1)$ مهم می‌شود. می‌بینیم که $f^{(4)}(1) = 72$ مثبت است. در نتیجه تابع $f(x)$ در $x = 1$ دارای مینیمم نسبی است.

مثال ۶۵: نمودار $y=f'(x)$ داده شده است. کدام گزینه می‌تواند نمودار $y=f(x)$ باشد؟

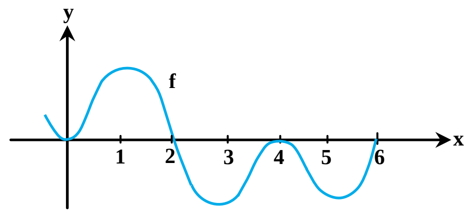




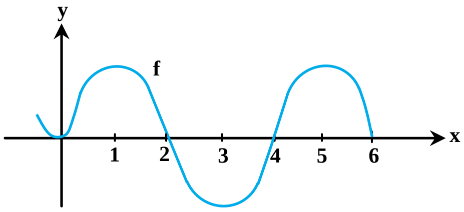
(۱)



(۲)

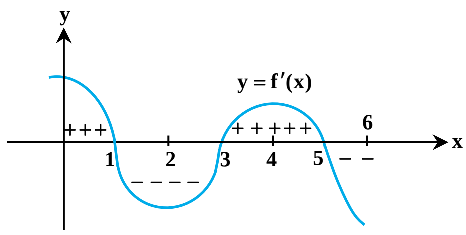


(۳)

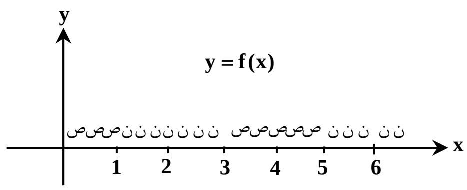


(۴)

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا با استفاده از علامت‌های $(+)$ و $(-)$ نشان می‌دهیم که در چه نقاطی نمودار f' بالای محور xها است و در چه نقاطی زیر محور xها است.



حالا یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و روی آن، اطلاعات به دست آمده از نمودار f را نشان می‌دهیم. به جای علامت‌های مثبت حرف (ص) و به جای علامت‌های منفی حرف (ن) را می‌نویسیم. البته مهم نیست که آن‌ها را بالای محور x می‌نویسید یا زیر آن.



پس نمودار $f(x)$ در بازه‌ی $(0,1)$ صعودی است. در بازه‌ی $(1,3)$ نزولی می‌شود، در بازه‌ی $(3,5)$ صعودی است و در بازه‌ی $(5,6)$ دوباره نزولی می‌شود. بنابراین گزینه (۲) رد می‌شود؛ زیرا در بازه‌ی $(1,3)$ نزولی نیست. گزینه (۳) نیز رد می‌شود، زیرا در بازه‌ی $(5,6)$ نزولی نیست. اما گزینه‌های (۱) و (۴) با اطلاعات به دست آمده تطابق دارند. برای انتخاب بین این دو گزینه باید به تفاوت آن‌ها با هم دقت کنیم. تنها تفاوت موجود در آن است که گزینه‌ی (۴) در مبدأ مختصات بر محور xها مماس شده است. اما گزینه‌ی (۱) چنین نیست. اگر به نمودار f' توجه کنیم متوجه می‌شویم که $f'(0)>0$ است. بنابراین گزینه‌ی (۴) نادرست است و گزینه‌ی (۱) نمودار f را به درستی نشان می‌دهد.

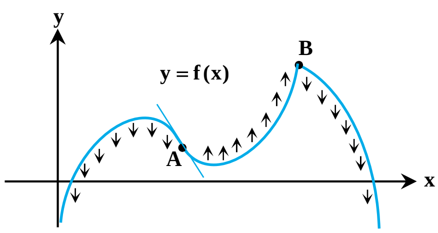
■ تشخیص نمودار f'' با داشتن نمودار f:

فرض کنید نمودار $y=f(x)$ را داریم و می‌خواهیم نمودار $f''(x)$ را پیدا کنیم. ابتدا به روابطی که بین f و f'' وجود دارند توجه می‌کنیم:

۱ـ اگر نمودار f محدب باشد (گودی به سمت بالا)، آن‌گاه $f''(x)>0$ است.

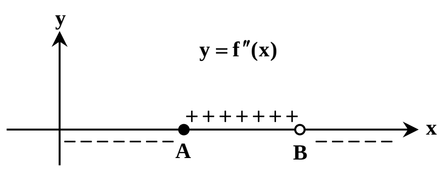
۲ـ اگر نمودار f مقعر باشد (گودی به سمت پایین)، آن‌گاه $f''(x)<0$ است.

۳ـ اگر در نقطه x_0 جهت تقعر f عوض شده باشد، علامت f'' در x_0 عوض شده است. در چنین نقطه‌ای اگر مشتق دوم وجود داشته باشد برابر با صفر است.



برای استفاده بهتر از روابط بالا، ترتیب زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

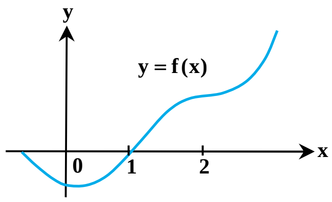
فرض کنید نمودار $f(x)$ مطابق شکل داده شده باشد. روی نمودار $f(x)$ از چپ به راست حرکت کرده و جهت گودی (جهت تقعّر) منحنی را با تعدادی پیکان نشان می‌دهیم.

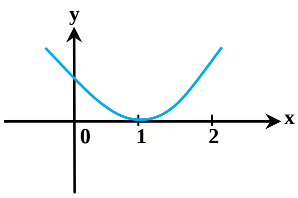


حالا یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا روی آن اطلاعات به دست آمده در مورد $f''(x)$ را ثبت کنیم. هر جا که پیکان‌ها رو به پایین هستند علامت $(-)$ زیر محور xها و هر جا پیکان‌ها رو به بالا هستند یک علامت $(+)$ بالای محور xها قرار می‌دهیم. به این ترتیب ما علامت $f''(x)$ را در همه‌ی نقاط می‌دانیم.

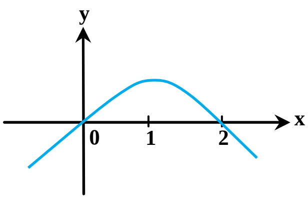
فقط می‌ماند نقاط A و B که در آن‌ها علامت $f''(x)$ عوض شده است. در نقطه‌ی B نمودار $f(x)$ دارای گوشه است و واضح است که $f'(x)$ و در نتیجه $f''(x)$ وجود ندارد. در واقع این نقطه روی نمودار $f''(x)$ خالی است. اما در نقطه‌ی A خط مماس بر نمودار f وجود دارد و از منحنی f عبور می‌کند در این نقطه $f''(x)=0$ خواهد بود. این نقطه، نقطه‌ی عطف f است.

مثال ۶۶: نمودار $f(x)$ داده شده است. نمودار $f''(x)$ کدام است؟

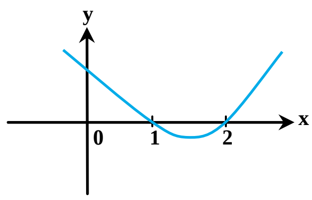




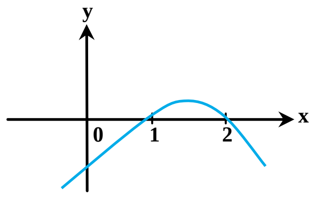
(۴)



(۳)

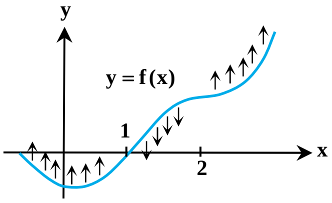


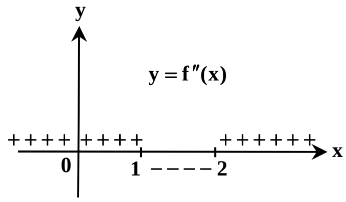
(۲)



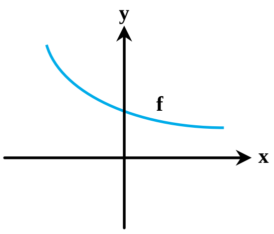
(۱)

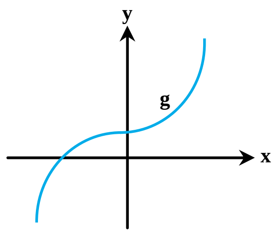
پاسخ: گزینه «۲» جهت تقعر منحنی $f(x)$ را در هر نقطه نشان می‌دهیم. حالا یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و علامت f'' را با توجه به جهت پیکان‌های رسم شده نشان می‌دهیم. می‌بینیم که $f''(x)$ همواره مثبت است فقط در فاصله‌ی $(1,2)$ منفی می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.



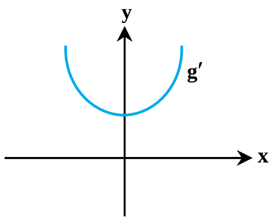


مثال ۶۷: در مورد توابع f و g که در نمودار نشان داده شده است، کدام گزینه صحیح است؟



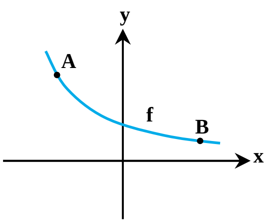


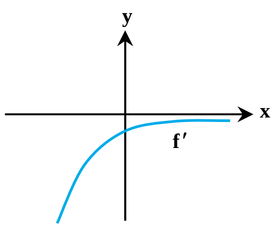
۱) مشتق سوم هر دو تابع f و g می‌تواند مثبت باشد.
۲) مشتق سوم هیچ کدام از دو تابع نمی‌تواند مثبت باشد.
۳) مشتق سوم f می‌تواند مثبت باشد و مشتق سوم g مثبت نیست.
۴) مشتق سوم g می‌تواند مثبت باشد، ولی مشتق سوم f مثبت نیست.



پاسخ: گزینه «۴» با کمی دقت به نمودار g متوجه می‌شویم که g یک تابع اکیداً صعودی است و این یعنی $g'>0$ است. تقعر نمودار g دقیقاً در $x=0$ عوض می‌شود در $x<0$ تقعر رو به پایین است و این یعنی $g''<0$ و بعد از $x=0$ تقعر رو به بالا است و این یعنی $g''>0$، به عبارت دیگر این نتیجه را نیز می‌توانیم بگیریم، که تابع g' به ازای $x<0$ نزولی و به ازای $x>0$ صعودی است وتقریباً نموداری شبیه نمودار مقابل را برای g' رسم کنیم و چون تقعر g' رو به بالاست، پس مشتق دوم g' یعنی مشتق سوم g مثبت است.

حالا نشان می‌دهیم که مشتق سوم f نمی‌تواند مثبت باشد. به شیب نمودار f توجه کنید، این نمودار همواره نزولی است بنابراین همواره $f'<0$ است. اما اگر مقدار شیب نمودار $f(x)$ دقیق‌تر نگاه کنیم. هر چه به سمت راست حرکت می‌کنیم، سرعت نزول f کمتر می‌شود. برای مثال به دو نقطه‌ی A و B توجه کنید. در نقطه‌ی A، نمودار f با شیب تندی به سمت پایین می‌آید اما در نقطه‌ی B، نمودار f تقریباً افقی است و با شیب ملایمی در حال نزول است. پس نمودار f' همواره منفی است اما به سمت صفر میل می‌کند. به این ترتیب می‌توانیم شکل تقریبی f' را رسم کنیم. با رسم این نمودار می‌بینیم که جهت تقعر f' به سمت پایین است پس مشتق دوم f' یعنی f''' باید منفی باشد.





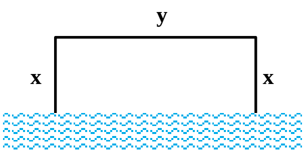
درسنامه۵: مسائل بهینه‌سازی (کاربرد عملی مشتق)

در این درسنامه می‌خواهیم یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق را بررسی کنیم. البته این کاربردها بر پایه مفاهیم ماکزیمم و مینیمم توابع که قبلاً یاد گرفتیم، بنا نهاده شده‌اند. بسیاری از جنبه‌های عملی زندگی، مانند؛ مینیمم کردن هزینه، ماکزیمم کردن سود، ساخت قطعات مختلف صنعتی با کمترین ماده اولیه، کوتاه‌ترین زمان برای طی کردن یک مسیر و بسیاری دیگر از کاربردهای عملی مشتق در این درسنامه بررسی می‌شود.

در پاسخ به این نوع سؤالات، بزرگترین مشکل، تبدیل صورت سؤال (که معمولاً بیشتر قسمت‌های آن با کلمات فارسی بیان می‌شود) به مفاهیم و فرمول‌های ریاضی و البته از آن مهم‌تر، تشکیل تابعی یک متغیره است که باید ماکزیمم یا مینیمم شود.

در این نوع مسائل، معمولاً ارتباط چند متغیر با هم داده می‌شود (و یا در ماهیت مسأله وجود دارد که باید کشف شود!) و ما باید اکسترمم تابعی را حساب کنیم که فقط برحسب یک متغیر است. برای همین لازم است سعی کنیم در ضابطه‌ی تابع، با نوشتن تمام متغیرها بر حسب یک متغیر مورد نظر، این تابع را **فقط** برحسب یک متغیر بنویسیم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری و آزمون‌های مشتق اول و مشتق دوم و دیگر روش‌ها، ماکزیمم و مینیمم تابع را تعیین کنیم.

مثال۱: کشاورزی ۲۴۰۰ متر توری دارد و می‌خواهد ناحیه‌ای مستطیلی شکل را که با رودخانه‌ای هم مرز است، حصارکشی کند. البته احتیاجی نیست مرز کنار رودخانه حصارکشی شود و فقط باید سه مرز دیگر حصارکشی شود. ابعاد زمینی که بیشترین مساحت را دارد، پیدا کنید.



☑ **پاسخ:** مسأله به دنبال ماکزیمم کردن مساحت مستطیلی است که یک ضلع ندارد! البته این ماجرا (یعنی نداشتن یک ضلع) در مقدار مساحت تأثیری ندارد، ولی در مقدار محیط مستطیل تأثیرگذار است. خُب اول ببینیم مسأله چه چیزی را به ما داده است؟ سؤال به ما محیط مستطیل را داده است. بنابراین داریم: $۲x+y=۲۴۰۰ \quad (*)$

توجه کنید که اگر قرار بود مرز سمت رودخانه هم بسته شود، آن‌وقت مسأله فرق می‌کرد و رابطه‌ی بالا به‌صورت $۲(x+y)=۲۴۰۰$ نوشته می‌شد. تساوی $(*)$ تنها چیزی است که مسأله آن را به عنوان مقدار معلوم داده است و از ما ماکزیمم مساحت مستطیل را می‌خواهد. اگر مساحت مستطیل را S بنامیم. واضح است دنبال ماکزیمم کردن $S=xy$ هستیم. اما تابع مساحت برحسب دو متغیر x و y داده شده است و باید یکی از آن‌ها در رابطه‌ی S وجود نداشته نباشد! برای این منظور از داده مسأله، یعنی تساوی $(*)$ کمک می‌گیریم و y را برحسب x بدست می‌آوریم (البته فرقی ندارد، می‌توان x را برحسب y بدست آورد) بنابراین $y=۲۴۰۰-۲x$ است که با جایگزینی y در رابطه‌ی S به یک تابع یک متغیره برحسب x می‌رسیم:

$$S(x)=x(۲۴۰۰-۲x)=۲۴۰۰x-۲x^۲$$

حالا کافی است از تابع مشتق گرفته و برابر با صفر قرار دهیم:

$$S'(x)=۲۴۰۰-۴x=۰ \Rightarrow x=۶۰۰$$

این نقطه طول نقطه ماکزیمم است، این موضوع به راحتی با استفاده از آزمون مشتق دوم مشخص می‌شود.

چون $S''(x)=-۴<۰$، پس $x=۶۰۰$ قطعاً S را ماکزیمم می‌کنند با قرار دادن این مقدار x در رابطه‌ی $(*)$ y برابر با ۱۲۰۰ متر بدست می‌آید. یعنی مستطیلی به عرض ۶۰۰ و به طول ۱۲۰۰ بزرگترین مساحت ممکن را داراست.

توضیح: البته در برخی مسائل بهینه‌سازی، بازه بسته‌ای به‌صورت پنهان در خودِ تابع وجود دارد که در این صورت باید مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز کنترل شود تا نقطه اکسترمم دقیق بدست آید. مثلاً در این مثال چون $S=x(۲۴۰۰-۲x)$، پس تلویحاً بازه‌ای برای x ایجاد می‌شود که به ازای آن، مساحت منفی و یا صفر نشود. x باید بزرگتر از صفر و کوچکتر از ۱۲۰۰ باشد تا S منفی نشود؛ پس $۰<x<۱۲۰۰$ و به ازای این مقادیر $S(۰)=S(۱۲۰۰)=۰$ و باز هم تأیید می‌شود که $S(۶۰۰)=۷۲۰۰۰۰$ ماکزیمم مطلق است.

مثال۲: مجموعه تمام مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۶ است را در نظر می‌گیریم. طول قطر مستطیلی که قطرش مینیمم است، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» مستطیلی را در نظر بگیرید که محیط آن ۱۶ است و طول قطرش تابعی است که می‌خواهیم آن را مینیمم کنیم. اگر طول مستطیل را با y و عرض آن را با x نشان دهیم، آن‌گاه طبق قضیه فیثاغورس طول قطر آن $d=\sqrt{x^۲+y^۲}$ بدست می‌آید. در واقع d تابعی است که دنبال مینیمم کردن آن هستیم. اما دقت کنید که d بر حسب دو متغیر x و y است و باید با یکی از این متغیرها خداحافظی کنیم و البته فرقی ندارد کدام‌یک حذف شوند، مثلاً می‌توانیم y را برحسب x تعیین کنیم. سؤال نسبتاً ساده‌ای است و به راحتی می‌توان از همان داده مسأله y را بر حسب x نوشت: $۲(x+y)=۱۶ \Rightarrow x+y=۸ \Rightarrow y=۸-x$

حالا با جایگذاری در ضابطه‌ی d، تابعی یک متغیره برحسب x به‌صورت مقابل داریم: $d(x)=\sqrt{x^۲+(۸-x)^۲}$

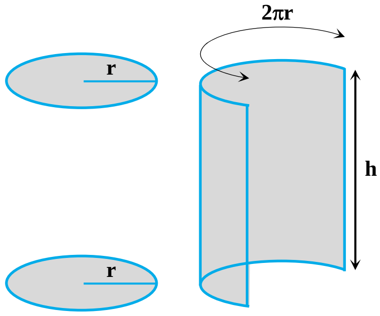
باید از $d(x)$ مشتق بگیریم تا مینیمم آن را تعیین کنیم. اما چون رادیکال داریم برای جلوگیری از محاسبات پیچیده‌تر می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم و اکسترمم $d^۲$ را حساب کنیم (توجه داشته باشید که این کار هیچ تغییری در صحت جواب ندارد و فقط برای راحتی کار است، چون وقتی $d^۲$ مینیمم شود، قطعاً d هم مینیمم است. با وجود این، برای تمرین هم شده می‌توانید نقطه‌ی مینیمم را از مشتق‌گیری از خودِ d تعیین کرده و به یکسان بودن جواب‌ها برسید).

$$d^۲(x)=x^۲+(۸-x)^۲ \Rightarrow (d^۲(x))'=۰ \Rightarrow ۲x+۲(۸-x)(-۱)=۰ \Rightarrow ۲x-۱۶+۲x=۰ \Rightarrow ۴x=۱۶ \Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول نقطه مینیمم است و به ازای آن $y=۴$ و بنابراین $d(x)=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۴^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۲}$، طول قطر مینیمم است. در واقع اگر $x=y=۴$ باشد و به عبارت دیگر شکل مربع باشد، طول قطر مینیمم خواهد شد.

توضیح بیشتر: توجه داشته باشید که اصول کار این است که کنترل شود نقطه بدست آمده طول نقطه مینیمم باشد و احیاناً طول نقطه ماکزیمم نباشد (که این کار برای این سؤال به راحتی با آزمون مشتق اول و یا آزمون مشتق دوم صورت می‌گیرد).

مثال ۳: می‌خواهیم یک قوطی فلزی به شکل استوانه بسازیم که ۱ لیتر روغن را در خود جای دهد. اگر بخواهیم هزینه فلز به کار رفته در ساخت این قوطی مینیمم باشد، ابعاد قوطی را باید چگونه انتخاب کنیم؟



پاسخ: ابتدا مسأله را خوب بخوانیم و ببینیم چه چیزهایی داده و دنبال چه چیزهایی است؟ حجم استوانه برابر با ۱ لیتر داده شده است. پس $V = ۱۰۰۰(cm^۳)$، دیگر چیز معلومی نداریم و دنبال این هستیم که هزینه فلز به کار رفته شده مینیمم شود، و این یعنی مقدار فلز به کار رفته شده، کمترین مقدار ممکن باشد. مقدار فلز به کار رفته شده، همان مساحت سطوح استوانه می‌باشد که شامل دو دایره بالایی و پایینی و مساحت کناره‌ها می‌باشد. که در شکل مقابل آن‌ها را به‌صورت مجزا نشان داده‌ایم. اگر فرض کنیم r شعاع قاعده و h ارتفاع قوطی استوانه‌ای باشد (مطابق شکل مقابل). آن‌گاه مساحت به‌صورت زیر است، دقت کنید مساحت کناره‌ها، مستطیلی به عرض $۲\pi r$ و طول h است و برای همین این مساحت برابر $۲\pi r\times h$ است، پس مساحت کل استوانه برابر است با: $S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$

خُب تابعی بر حسب دو متغیر نوشته شده که قرار است مینیمم شود. همان‌طور که گفتیم S باید فقط برحسب یکی از متغیرها نوشته شود و البته فرقی ندارد، برحسب r و یا برحسب h، اما در این‌جا بهتر است h را برحسب r بدست بیاوریم و S را فقط برحسب r بنویسیم (چون قرار است از رابطه‌ی $\pi r^۲h = ۱۰۰۰$ برای این منظور استفاده کنیم و برای بدست آوردن r برحسب h باید رادیکال وارد محاسبات کنیم که نباشد، بهتر است!)

بنابراین با توجه به داده مسأله $h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$ و با جایگزینی داریم:

$$S(r) = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}) = ۲\pi r^۲ + \frac{۲۰۰۰}{r} \ , \ (r > ۰)$$

خُب حالا تقریباً قسمت مشکل مسأله حل شده است و کافی است از S مشتق بگیریم:

$$S'(r) = ۴\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} = \frac{۴(\pi r^۳ - ۵۰۰)}{r^۲} \Rightarrow S'(r) = ۰ \Rightarrow \pi r^۳ = ۵۰۰ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$$

و چون $h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$، پس داریم:

$$h = \frac{۱۰۰۰}{\pi(\frac{۵۰۰}{\pi})^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲\times ۵۰۰}{\frac{\pi}{\pi^{\frac{۲}{۳}}}(۵۰۰)^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۲\times(۵۰۰)^{\frac{۱}{۳}}}{\pi^{\frac{۱}{۳}}} = ۲\ (\sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}) = ۲r$$

یعنی برای مینیمم کردن هزینه فلز به کار رفته در این قوطی باید $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$ و ارتفاع یعنی h، باید دو برابر شعاع و به عبارت دیگر ارتفاع برابر با قطر باشد.

توضیح: اما از کجا فهمیدیم $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$ تابع S را مینیمم می‌کند و احیاناً آن را ماکزیمم نمی‌کند؟

برای این‌کار به چند طریق می‌توان این موضوع را کنترل کرد که استفاده از آزمون مشتق دوم برای این مثال بسیار راحت است. برای این کار از $S'(r)$ دوباره مشتق می‌گیریم:

$$S'(r) = ۴\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} \Rightarrow S''(r) = ۴\pi + \frac{۴۰۰۰}{r^۳}$$

چون به ازای $r = \sqrt[۳]{\frac{۵۰۰}{\pi}}$، علامت $S''(r)$ مثبت است، پس r تابع S را مینیمم می‌کند.

یادآوری فرمول‌های لازم برای حل مسائل خاص این درسنامه

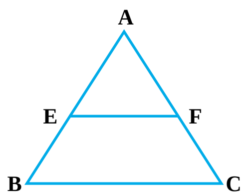
در این قسمت سعی کرده‌ایم در یک صفحه روابط و فرمول‌های موردنیاز را برای حل مسائل بهینه‌سازی یادآوری کنیم. هرچند این روابط از اطلاعات هندسی دوره دبیرستان است، اما ممکن است برخی از خوانندگان آن را فراموش کرده باشند.

۱ـ حجم کره‌ای به شعاع r برابر با $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و مساحت کره‌ای به شعاع r برابر با $S = ۴\pi r^۲$ است.

۲ـ مساحت کل استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h برابر با $S = ۲\pi rh + ۲(\pi r^۲)$ است که $۲\pi rh$ مساحت جانبی و $۲(\pi r^۲)$ مساحت دو دایره بالا و پایین استوانه است. در ضمن حجم این استوانه برابر است با $V = \pi r^۲h$.

۳ـ حجم یک مخروط به شعاع قاعده، r و ارتفاع h برابر با $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ است و مساحت یک مخروط به شعاع r، ارتفاع h و طول مولد L از رابطه $S = \pi rL + \pi r^۲$ حساب می‌شود که πrL سطح جانبی مخروط و $\pi r^۲$ مساحت قائم مخروط است.

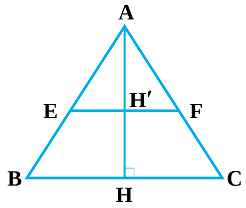
۴ـ حجم منشور به مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر با $V = S.h$ است.



۵ـ روابط در مثلث: یکی از پرکاربردترین قضایایی که در مثلث استفاده می‌کنیم، قضیه تالس است که بیان می‌دارد؛ اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد برابر با نسبت پاره‌خط‌هایی است که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند. یعنی اگر در مثلث ABC مقابل EF موازی BC باشد، آن‌گاه رابطه‌ی مقابل را داریم: $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

البته نتیجه دیگری بین اضلاع هم نتیجه می‌شود که مهم‌ترین آن به شکل زیر است:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$



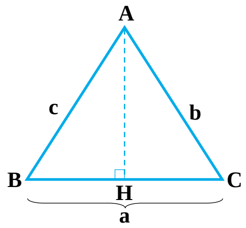
یک نتیجه‌ی فرعی دیگر که در سؤالات ممکن است به کار بیاید، بین ارتفاع وارد بر ضلع و اضلاع مثلث است؛ اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، داریم:

$$\frac{AH'}{AH}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

مساحت مثلث:

مساحت مثلث ABC بیشتر به کمک رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}(\text{قاعده}\times\text{ارتفاع})=\frac{۱}{۲}(AH\times BC)$$



و گاهی اوقات اگر زاویه بین دو ضلع معلوم باشد، مساحت به شکل زیر نیز بیان می‌شود:

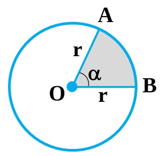
$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

۶ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a برابر با $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

۷ـ مساحت ذوزنقه از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود: $S=\frac{۱}{۲}(\text{ارتفاع})\times(\text{مجموع دو قاعده})$

قطاع دایره:

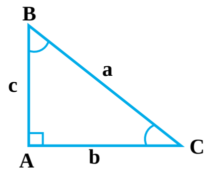
قسمتی از دایره محدود به دو شعاع از دایره و کمان مقابل به زاویه بین دو شعاع مذکور را قطاعی از دایره می‌نامند.



$$\text{طول کمان } \widehat{AB}=r\alpha \quad , \quad S_{OAB\ \text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r\ (\text{طول کمان } \widehat{AB}) \Rightarrow S_{OAB\ \text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r^۲\alpha$$

روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

در یک مثلث قائم‌الزاویه روابط زیر را داریم:



$$\sin\hat{C}=\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } \hat{C}}{\text{وتر}}=\frac{c}{a} \quad , \quad \cos\hat{C}=\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } \hat{C}}{\text{وتر}}=\frac{b}{a}$$

طبیعی است که $tg\hat{C}=\frac{c}{b}$ و $cotg\hat{C}=\frac{b}{c}$ می‌شود.

■ فاصله نقطه دلخواه $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ از رابطه $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید.

دستورالعمل حل مسائل بهینه‌سازی

در این قسمت، روش گام به گام حل این نوع مسائل را توضیح می‌دهیم:

گام اول: مسأله را دقیق بخوانید و تمام کمیت‌هایی که معلوم و مجهول هستند، مشخص کنید. در واقع از خود بپرسید مسأله چه چیزهایی داده است و چه چیزهایی از ما می‌خواهد؟ سعی کنید برای هر کمیت، یک حرف انگلیسی مناسب در نظر بگیرید. مثلاً S برای مساحت، t برای زمان، h برای ارتفاع، V برای حجم و نظایر آن.

گام دوم: کمیتی که دنبال ماکزیمم و یا مینیمم کردن آن هستیم را شناسایی کنید. این کمیت را به‌صورت تابعی برحسب متغیرهای دیگر بنویسید.

گام سوم: اگر در گام دوم، تابع را برحسب بیش از یک متغیر نوشته‌اید، سعی کنید ابتدا با استفاده از مقادیر معلوم که در گام اول آن‌ها را مشخص کرده‌اید یا با فرمول‌هایی که از قبل می‌دانید و یا ترسیم شکل و استفاده از فرمول‌های هندسی، ارتباطی بین متغیرها ایجاد کنید و سپس با نوشتن آن‌ها برحسب **فقط یک متغیر** کاری کنید که تنها یک متغیر در ضابطه‌ی تابعی که دنبال اکسترمم کردن آن هستید، باقی بماند.

گام چهارم: قسمت مشکل مسأله پشت سر گذاشته شده است و بقیه راه نسبتاً آسان است! چون شما تابعی دارید که فقط برحسب یک متغیر است و دنبال تعیین ماکزیمم یا مینیمم این تابع هستید که تعیین ماکزیمم و مینیمم توابع را قبلاً یاد گرفته‌ایم (معمولاً در بیشتر مسائل باید از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهید و ریشه‌های مشتق را بدست آورید. البته اگر دامنه تابع بازه‌ای بسته بود، می‌توانید از روش تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع کمک بگیرید). در نهایت باید مطمئن شوید که مقدار اکسترمم بدست آمده، همانی است که شما دنبال آن هستید. مثلاً اگر دنبال ماکزیمم هستید، شما نباید مینیمم را پیدا کرده باشید!

مثال ۴: **فاصله کدام نقطه روی سهمی $y^۲=۲x$ به نقطه $(۱,۴)$ نزدیک‌تر است؟**

۱) $(۲,۲)$ ۲) $(۳,\sqrt{۶})$ ۳) $(۴,۲\sqrt{۲})$ ۴) $(۸,۴)$

پاسخ: گزینه «۱» این سؤال نسبتاً ساده است؛ صورت سؤال اطلاعات خاصی به ما نداده است و البته توضیحات فارسی که باید به روابط ریاضی هم تبدیل شوند، خیلی کم است. مهم‌ترین قسمت که باید برای آن فرمول نوشته شود، فاصله دو نقطه از یکدیگر می‌باشد. می‌دانیم فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$d=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

نتیجه: از حل دو مثال اخیر نتایج زیر را داریم:

۱) اگر بر کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی با مینیمم حجم محیط کنیم، آن‌گاه شعاع قاعده مخروط $r=\sqrt{۲}R$، ارتفاع مخروط $h=۴R$ و مینیمم حجم مخروط $V=\frac{۸\pi}{۳}R^۳$ است.

۲) اگر در کره ای به شعاع ثابت R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنیم و شعاع قاعده r، ارتفاع آن h و حجم آن V باشد روابط زیر را داریم:

$$h=\frac{۴R}{۳}\quad , \quad r=\frac{۲\sqrt{۲}R}{۳}\quad , \quad V=\frac{۳۲}{۸۱}\pi R^۳$$

حفظ کردن این روابط می‌تواند مفید باشد؛ چون ممکن است سؤالاتی با در نظر گرفتن شعاع‌های مختلف برای کره طرح شود و شما با دانستن این روابط دیگر مجبور نیستید تمام مراحل حل مسأله را طی کنید. حفظ کردن این روابط (خصوصاً **شعاع** و **ارتفاع** مخروط بر حسب شعاع کره) چندان سخت نیست! وقتی مخروط **محیط** بر کره است، طبیعتاً باید شعاع آن از شعاع کره بیشتر باشد (یعنی $\sqrt{۲}$ برابر شعاع کره) و ارتفاع آن هم صددرصد از دو برابر شعاع بیشتر است (یعنی ۴ برابر شعاع کره). اما وقتی مخروط **محاط** درون کره است، شعاع آن باید از شعاع کره کوچک‌تر (یعنی $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$ برابر شعاع کره) و ارتفاع آن قطعاً از قطر کره (یا همان ۲ برابر شعاع کره) کمتر باشد (یعنی $\frac{۴}{۳}$ برابر شعاع کره). طبیعی است وقتی شعاع و ارتفاع مخروط را بدانید با استفاده از رابطه‌ی $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ می‌توانید حجم مخروط مینیمم و یا ماکزیمم را تعیین کنید. پس نیازی نیست مقدار حجم مینیمم و یا حجم ماکزیمم مخروط را حفظ کنید. در آخر توجه داشته باشید که وقتی مخروط بر کره محیط است حجم آن باید **مینیمم** و وقتی محاط درون کره است، حجم آن باید **ماکزیمم** باشد.

مثال ۱۲: اگر بر کره‌ای با شعاع ۳، مخروطی به ارتفاع h با مینیمم حجم محیط کنیم، آن‌گاه ارتفاع مخروط کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) $\frac{۹\pi}{۴}$

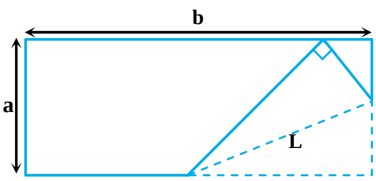
☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به نتیجه گفته شده $h=۴\times۳=۱۲$ خواهد بود.

مثال ۱۳: در داخل کره‌ای به شعاع ۳ مخروطی با حجم ماکزیمم محاط می‌کنیم، ارتفاع مخروط کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به نتیجه گفته شده خواهیم داشت: $h=\frac{۴\times۳}{۳}=۴$

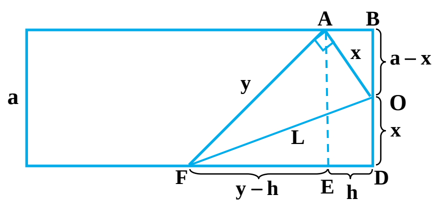
مثال ۱۴: یک برگه‌ی کاغذ مستطیل شکل به عرض a و طول b مفروض است. آن را طوری تا می‌زنیم تا طول L (مطابق شکل) می‌نیم شود. طول L چقدر است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}a$ ۳) $\frac{۳}{۲}a$ ۴) $\sqrt{۲}a$

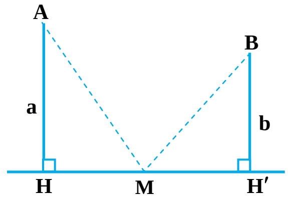
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» هدف ما آن است که کمترین مقدار ممکن برای L را پیدا کنیم. وقتی به شکل دقت می‌کنیم متوجه می‌شویم که L، وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است. پس یک راه مناسب برای یافتن فرمول ریاضیِ L استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس است. طول اضلاع قائم این مثلث را x و y می‌نامیم و L را برحسب آن‌ها می‌نویسیم: $L^۲=x^۲+y^۲\ \Rightarrow L=\sqrt{x^۲+y^۲}$

تا این‌جا توانستیم L را به‌صورت یک تابع دو متغیره بنویسیم. گام بعدی آن است که یک رابطه بین x و y پیدا کنیم تا با کمک آن بتوانیم L را به تابعی یک متغیره تبدیل کنیم. به شکل زیر دقت کنید. طول اضلاع OA و FA را خودمان با x و y نشان داده‌ایم. مثلث FAO همان مثلث FDO است که تا شده است. بنابراین ضلع OD با OA برابر است. به همین ترتیب FA با FD برابر است. تا این‌جا متوجه شدیم که $OD=x$ و $FD=y$ است. می‌دانیم که عرض مستطیل برابر با a است. در نتیجه اندازه‌ی BO برابر با $a-x$ است. حالا به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABO توجه می‌کنیم. می‌خواهیم از قضیه‌ی فیثاغورس در این مثلث استفاده کنیم. طول AB را نمی‌دانیم؛ پس آن را با h نشان می‌دهیم و به تساوی $x^۲=(a-x)^۲+h^۲$ می‌رسیم. حالا باید یک رابطه هم بین y و h پیدا کنیم. آن‌گاه می‌توانیم با حذف h از این دو معادله، رابطه‌ی x و y را تعیین کنیم. پاره‌خط AE را عمود بر طول مستطیل رسم می‌کنیم. حالا در مثلث قائم‌الزاویه‌ی FAE، وتری به طول y داریم. قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم $y^۲=(y-h)^۲+a^۲$. حالا با حذف h از این معادلات می‌خواهیم رابطه‌ی x و y را پیدا کنیم:



$$\begin{cases}h^۲+(a-x)^۲=x^۲\\ a^۲+(y-h)^۲=y^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^۲+h^۲=۲ax\\ a^۲+h^۲=۲hy\end{cases}$$

مثال ۲۱ (سخت): دو شهر A و B که در یک طرف رودخانه‌ای واقع هستند، توافق کرده‌اند کـه مشـترکاً یـک موتورخانـه و تصـفیه خانـه آب در منطقه‌ای در کنار رودخانه بنا کنند و آن را توسط دو لوله‌کشی جداگانه به دو شهر متصل نمایند (مطابق شکل) هرگاه فاصله دو شهر از رودخانـه a و b و فاصله آن‌ها از هم c باشد، حداقل لوله لازم برای اتصال این شهرها به تصفیه خانه:

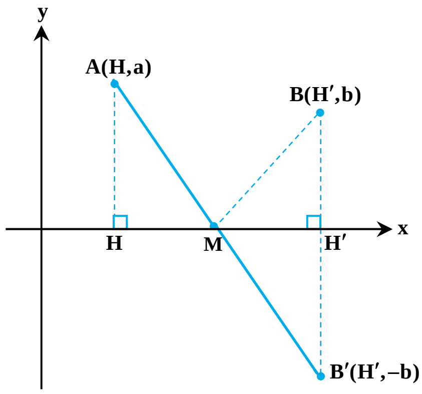


۱) برابر است با $\sqrt{c^{۲}+۴ab}$

۲) برابر است با $\sqrt{c^{۲}+۲ab}$

۳) به ازای $\alpha=\frac{۳}{۲}\beta$ حاصل می‌شود.

۴) به ازای $\alpha=\frac{۴}{۳}\beta$ حاصل می‌شود.



پاسخ: گزینه «۱» فرض کنیم HH' روی محور x هـا باشـد و نقـاط $A(H,a)$ و $B(H',b)$ را در نظر بگیرید. محل موتورخانه را با M نشان داده‌ایم. می‌خواهیم مجموع فواصل $AM+MB$ به کمترین مقدار ممکن برسد. نقاط A و B هر دو در یک سمت محور x ها هستند. پس ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی B نسبت بـه محـور x هـا یعنی $B'(H',-b)$ را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی M محل برخورد پاره‌خط AB' با محور x هاست. در این مثال، مختصات نقطه‌ی M خواسته نشده است؛ بلکه کمترین مقدار $AM+MB$ را مـی‌خـواهیم. اگـر مطـابق شـکل نقطه‌ی M محل برخورد AB' با محور x ها باشد داریم: $MB=MB'$

زیرا مثلث‌های $MH'B$ و $MH'B'$ قائم‌الزاویه‌اند و اضلاع قائم آن‌ها با هم برابر است. در نتیجه داریم:

$$AM+MB=AM+MB'=AB'=\sqrt{(H'-H)^{۲}+(-b-a)^{۲}}=\sqrt{(H'-H)^{۲}+(a+b)^{۲}}\ :(*)$$

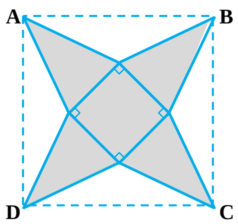
طبق صورت سؤال، فاصله‌ی دو شهر از یکدیگر برابر با c است یعنی:

$$AB=c\ \Rightarrow \sqrt{(H'-H)^{۲}+(b-a)^{۲}}=c\ \Rightarrow (H'-H)^{۲}+(b-a)^{۲}=c^{۲}$$

از این‌جا داریم $(H'-H)^{۲}=c^{۲}-(b-a)^{۲}$ و با جایگذاری در تساوی $(*)$ داریم: $AM+MB=\sqrt{c^{۲}-(b-a)^{۲}+(a+b)^{۲}}=\sqrt{c^{۲}+۴ab}$

توضیح: پیدا کردن نقطه‌ای مانند M روی یک خط که مجموع فاصله‌اش از نقاط A و B، مینیمم باشد، نوعی از مسائل بهینه‌سازی است که حل آن با استفاده از مشتق، به محاسبات پیچیده نیاز دارد و معمولاً آن را از طریق هندسی حل می‌کنیم.

مثال ۲۲ (سخت): هرمی با قاعده مربع شکل و دارای چهار وجه به شکل مثلث‌های متساوی‌الساقین را به این ترتیب می‌سازیم کـه از یـک قطعـه مقوای مربع شکل به ضلع ۲ متر مطابق شکل چهار مثلث را جدا کرده (و دور می‌ریزیم) و مثلث‌های باقی‌مانده را تا می‌کنیم تا وجوه جانبی هرم را تشکیل دهند. بیشترین حجمی که هرم می‌تواند داشته باشد چقدر است؟



۱) $\frac{۳۲\sqrt{۱۰}}{۱۵}$

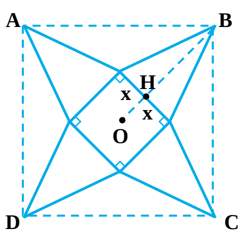
۲) $\frac{۳۲\sqrt{۲}}{۷۵\sqrt{۵}}$

۳) $\frac{۳۲\sqrt{۱۰}}{۷۵}$

۴) $\frac{۳۲\sqrt{۲}}{۱۵\sqrt{۵}}$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی این هرم سـاخته شـود، مربـع کـوچکی کـه در وسـط قـرار دارد، قاعده‌ی هـرم (کـف هـرم) را تشـکیل مـی‌دهـد و چهـار مثلث متساوی‌الساقین، دیواره‌های آن هستند. قسمت‌های اضافی هم دورریز هستند و در هرم استفاده نمی‌شوند. طول هر کدام از اضـلاع مربـعِ کوچـک را بـا ۲x نشـان می‌دهیم (علت انتخاب ۲x آن است که راحت‌تر بتوانیم آن را نصف کنیم، زیرا در ادامه می‌بینید که به نصف ضلع مربع نیاز داریم).

هدف ما آن است که حجم هرم را ماکزیمم کنیم. ابتدا باید بتوانیم حجم هرم را به‌صورت یک فرمول ریاضی بنویسیم. مـی‌دانـیم کـه حجـم هـرم برابـر اسـت بـا برابر با $V=\frac{۱}{۳}\times$ (ارتفاع) $\times$ (مساحت قاعده). قاعده‌ی هرم مربعی با ضلع ۲x است، بنابراین مساحت قاعده برابر است با $۲x\times ۲x=۴x^{۲}$. اگر ارتفاع را با h نشان دهیم، خواهیم داشت: $V=\frac{۱}{۳}\times h\times ۴x^{۲}$



حالا باید رابطه‌ی بین h و x را پیدا کنیم تا به کمک آن حجم این هرم را به‌صورت تابعی یک متغیره بنویسیم. در شـکل مقابـل نقطه‌ی O مرکز مربع است. به پاره‌خط‌های OH و HB دقت کنید. اندازه‌ی OH برابر است با نصف ضلع مربـع یعنـی $OH=x$ است.

مربع بزرگ ABCD مربعی با ضلع ۲ بود، بنابراین قطر آن برابر است با $\sqrt{۲^{۲}+۲^{۲}}=۲\sqrt{۲}$ و OB نصف قطر مربع بـزرگ اسـت پس $OB=\sqrt{۲}$ است. در نتیجه اندازه‌ی BH معلوم می‌شود: $BH=OB-OH=\sqrt{۲}-x$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا گزینه‌های (۲) و (۳) را با توجه به ضابطه‌ی $f'(x)$ و $f''(x)$ رد می‌کنیم: $f'(x)=۱۲ax^۲+۶bx+۲c$, $f''(x)=۲۴ax+۶b$
تابع $f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی یک است بنابراین معادله‌ی $f''(x)=۰$ دقیقاً یک ریشه دارد و در این نقطه تغییر علامت خواهد داد. به عبارتی نقطه‌ی $x=-\frac{۶b}{۲۴a}$ نقطه‌ی عطف $f(x)$ است. گزینه‌ی (۲) هم به سادگی رد می‌شود؛ زیرا $f'(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. برای مثال ممکن است $(a,b,c,d)=(-۱,-۱,-۱,۳)$ باشند و در این صورت $f'(x)=-۱۲x^۲-۶x-۲$ است و واضح است که همواره مثبت نیست.
اکنون به بررسی گزینه‌های (۱) و (۴) می‌پردازیم. شاید اولین راهی که به فکر ما می‌رسد، استفاده از پیوستگی $f(x)$ و قضیه‌ی مقدار میانی است. اگر بتوانیم نشان دهیم که $f(۰)$ و $f(۱)$ مختلف‌العلامه هستند، آن‌گاه $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $[۰,۱]$ خواهد داشت. اما با کمی دقت متوجه می‌شوید که استفاده از این روش در این مثال ممکن نیست. زیرا $f(۰)=d$ و $f(۱)=۴a+۳b+۲c+d$ و شما هیچ دلیلی ندارید که نشان دهد این دو مقدار، مختلف‌العلامه هستند. به همین ترتیب در بازه‌ی $[-۱,۰]$ استفاده از این روش بی‌فایده است. زیرا $-۴a+۳b-۲c+d$ و دلیلی نداریم که $f(۰)$ و $f(-۱)$ مختلف‌العلامه هستند. با این توضیحات متوجه می‌شویم که باید از قضیه‌ی رُل استفاده کنیم. اما قضیه‌ی رُل وجود ریشه برای مشتق را نشان می‌دهد نه وجود ریشه برای خود تابع را، به همین دلیل ابتدا تابعی را پیدا می‌کنیم که $f(x)$ مشتق آن باشد. به سادگی می‌توان این تابع را حدس زد. می‌دانیم که $۴x^۳$، مشتقِ $x^۴$ است و $۳x^۲$ مشتق $x^۳$ است و به همین ترتیب اگر فرض کنیم $F(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx$ آن‌گاه $F'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲+۲cx+d$ یعنی $F'(x)=f(x)$ است. حالا اگر نشان دهیم $F(x)$ شرایط قضیه‌ی رُل را دارد، کار تمام است. برای این کار $F(۰)$ و $F(۱)$ را حساب می‌کنیم. به وضوح $F(۰)=۰$ است و با جایگذاری $x=۱$ داریم:
$$F(۱)=a+b+c+d=۰$$
پس تابع $F(x)$ در $x=۰$ و $x=۱$ دارای ریشه است. طبق قضیه‌ی رُل نقطه‌ای مانند c در این بازه وجود دارد چنان که $F'(c)=۰$ است. به عبارتی $f(c)=۰$ است. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است. گزینه‌ی (۴) صحیح نیست زیرا دلیلی نداریم که $F(-۱)$ برابر با صفر باشد.

کاربردهای قضیه‌ی مقدار میانگین

قضیه‌ی مقدار میانگین این امکان را به ما می‌دهد که با داشتن اطلاعاتی در مورد $f'(x)$، به اطلاعاتی در مورد تابع $f(x)$ دست پیدا کنیم. بسیاری از ویژگی‌های مشتق که پیش از این مطالعه کرده‌اید، در واقع از نتایج قضیه‌ی مقدار میانگین هستند. در اینجا به چند مورد مهم از کارکردهای این قضیه اشاره می‌کنیم.
۱) این قضیه اثباتی برای این مطلب است که اگر $f'>۰$ باشد، f اکیداً صعودی است. فرض کنید در هر نقطه، $f'>۰$ باشد. دو نقطه‌ی دلخواه $x_۱<x_۲$ را در نظر بگیریم. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم: $f(x_۲)-f(x_۱)=f'(c)(x_۲-x_۱)$
طبق فرض $f'(c)>۰$ است، همچنین $x_۲>x_۱$، پس $x_۲-x_۱>۰$ است در نتیجه حاصل‌ضرب $f'(c)(x_۲-x_۱)$ مثبت است، پس سمت چپ تساوی هم باید مثبت باشد؛ یعنی $f(x_۱)<f(x_۲)$. به طور خلاصه دیدیم که اگر $x_۱<x_۲$ آن‌گاه $f(x_۱)<f(x_۲)$، یعنی $f(x)$ اکیداً صعودی است. به صورت مشابه، قضیه‌ی مقدار میانگین نشان می‌دهد که وقتی f' منفی باشد، f اکیداً نزولی است.
۲) با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین می‌توانیم کران بالای برخی از عبارات را پیدا کنیم. به این صورت که طبق این قضیه داریم: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$
پس: $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$. حالا اگر مطمئن باشیم که $f'(x)\le M$ است آن‌گاه داریم: $f(b)\le f(a)+M(b-a)$، به این صورت یک کران بالا برای $f(b)$ پیدا کرده‌ایم. همچنین اگر $m\le f'(x)$ باشد، داریم: $f(a)+m(b-a)\le f(b)$ و یک کران پایین برای $f(b)$ پیدا کرده‌ایم.

مثال ۱۰: **فرض کنید $f(۰)=-۵$ و برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f'(x)\le ۲$، در این صورت کدام گزینه درست است؟**

۱) $f(۲)\ge ۱$ ۲) $f(۲)\le -۱$ ۳) $f(۲)\le -۵$ ۴) $f(۲)\ge ۵$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر در قضیه‌ی مقدار میانگین فرض کنیم $b=۲$ و $a=۰$، لذا داریم: $f(۲)-f(۰)=f'(c)(۲-۰)\Rightarrow f(۲)=f(۰)+۲f'(c)$
در اینجا c نقطه‌ای از بازه‌ی $(۰,۲)$ است. حالا طبق فرض می‌دانیم که $f(۰)=-۵$ و در هر نقطه داریم $f'(x)\le ۲$ در نتیجه $f'(c)\le ۲$ و با این اطلاعات خواهیم داشت:
$$f(۲)\le -۵+۲\times ۲\Rightarrow f(۲)\le -۱$$

مثال ۱۱: **اگر $f'(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$، آن‌گاه برای هر دو عدد متمایز a و b در دامنه‌ی f داریم $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le L$، کمترین مقدار L کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین داریم: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
بنابراین $|f'(c)|=\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$. در نتیجه نامساوی $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le L$ معادل است با نامساوی $|f'(c)|\le L$. پس کافی است کران بالای $|f'(c)|$ را پیدا کنیم.
$$f'(c)=\frac{c}{۱+c^۲}\Rightarrow |f'(c)|=\frac{|c|}{۱+c^۲}$$
از طرفی دیگر می‌دانیم که: $(۱-|c|)^۲\ge ۰\Rightarrow ۱+c^۲-۲|c|\ge ۰\Rightarrow ۱+c^۲\ge ۲|c|\Rightarrow \frac{|c|}{۱+c^۲}\le\frac{۱}{۲}$
بنابراین $|f'(c)|\le\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\le\frac{۱}{۲}$. پس عدد L که در صورت سؤال آمده است، حداقل می‌تواند $\frac{۱}{۲}$ باشد.

۳) اثبات برخی نامساوی‌ها با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین: فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که در بازه‌ی $a \le x$ نامساویِ $g(x) \le f(x)$ برقرار است. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند، یک راه برای اثبات این نامساوی، استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین است. به این صورت که تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و دو مورد را ثابت می‌کنیم: اول آن‌که $h(a)=0$ است و دوم آن‌که در ناحیه‌ی مورد نظر $h'(x) \ge 0$ است. اگر این دو مورد برقرار باشند، از قضیه‌ی مقدار میانگین در بازه‌ی $[a,x]$ داریم:

$$h(x)-h(a)=h'(c)(x-a) \xrightarrow{h(a)=0} h(x)=h'(c)(x-a)$$

حالا چون $x \ge a$ است، پس $x-a \ge 0$. همچنین نشان داده‌ایم که در این ناحیه $h' \ge 0$ است، پس سمت راست تساوی فوق بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و در نتیجه در سمت چپ داریم $h(x) \ge 0$ به عبارتی $f(x)-g(x) \ge 0$ یعنی $f(x) \ge g(x)$.

جمع‌بندی: برای اثبات نامساوی $g(x) \le f(x)$ برای $x \ge a$. ابتدا تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را تشکیل می‌دهیم. حالا نشان می‌دهیم که $h(a)=0$ و $h'(x) \ge 0$. اگر بتوانیم این دو مطلب را نشان دهیم، ثابت کرده‌ایم که برای هر $x \ge a$ داریم $f(x) \ge g(x)$. البته $h(a)=0$ معادل است با این‌که بگوییم $f(a)=g(a)$ و $h'(x) \ge 0$ معادل است با این‌که نشان دهیم $f'(x) \ge g'(x)$ در ضمن برای اثبات نامساوی اکید $g(x) < f(x)$ کافی است نشان دهید که $f(a)=g(a)$ و $g'(x) < f'(x)$ است.

مثال۱۲: ثابت کنید برای هر x بزرگ‌تر از صفر نامساوی $x-\frac{x^2}{2} < Ln(1+x)$ برقرار است.

پاسخ: در اینجا $f(x)=Ln(1+x)$، $g(x)=x-\frac{x^2}{2}$ و $x>0$ است. برای اثبات نامساوی $g(x)<f(x)$ تابع $h(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x)=f(x)-g(x)=Ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

حالا اگر نشان دهیم $h(0)=0$ و $h'(x)>0$ (برای $x>0$) نامساوی مورد نظر ثابت خواهد شد:

$$\begin{cases} h(0)=f(0)-g(0)=Ln(1)-0+0=0 \\ h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1+(-1+x)(1+x)}{1+x}=\frac{1+(x^2-1)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x} \end{cases}$$

چون طبق فرض $x>0$ است پس $1+x>1$ و در نتیجه $h'(x)>0$ است. پس ثابت کرده‌ایم که نامساوی فوق برقرار است.

مثال۱۳: اگر $x>0$، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح <u>نیست</u>؟

۱) $\frac{x-2}{x} < Ln(\frac{x}{2}) < Ln(\frac{x-2}{2})$
۲) $\frac{x}{x+1} < Ln(x+1) < x$
۳) $\frac{2}{x+2} < Ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{2}{x}$
۴) $\frac{1}{x+1} < Ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

پاسخ: گزینه «۱» برای پاسخ به این سؤال شروع به بررسی گزینه‌ها می‌کنیم تا به پاسخ برسیم.

بررسی گزینه (۱): فرض می‌کنیم $\frac{x}{2}=u$ و نامساوی $Ln\frac{x}{2} < Ln(\frac{x-2}{2})$ را با استفاده از u دوباره می‌نویسیم: $Lnu < Ln(u-1)$

که این رابطه نشان‌دهنده نزولی بودن تابع Lnu است چون $u-1<u$ و $f(u)<f(u-1)$. حال باید بررسی کنیم آیا Lnu واقعاً نزولی است یا نه؟ با استفاده از مشتق‌گیری به این سؤال پاسخ می‌دهیم.

$f(u)=Lnu \Rightarrow f'(u)=\frac{1}{u} \xrightarrow{x>0 \to u>0} f'(u)>0 \Rightarrow$ بنابراین f نزولی نیست و این گزینه غلط است.

بررسی گزینه (۲): فرض کنید $f(x)=x$، $g(x)=Ln(x+1)$ و $h(x)=\frac{x}{x+1}$ در $x=0$ داریم $h(0)=g(0)=f(0)=0$ و با مشتق‌گیری از آن‌ها داریم:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \text{ ، } g'(x)=\frac{1}{x+1} \text{ ، } f'(x)=1$$

چون $x>0$ است، به‌وضوح $(x+1)^2 > x+1 > 1$ پس $\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x+1} < 1$، یعنی $h'(x)<g'(x)<f'(x)$. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که گزینه‌ی (۲) صحیح است.

بررسی گزینه (۳): به‌طور مشابه مانند گزینه (۲) ثابت می‌شود.

بررسی گزینه (۴): این گزینه نیاز به بررسی مستقیم ندارد اگر در گزینه‌ی (۲) به جای x ها $\frac{1}{x}$ قرار دهیم درست بودن گزینه‌ی (۴) مشخص می‌شود:

$$\frac{x}{x+1} < Ln(x+1) < x \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} < Ln(\frac{1}{x}+1) < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < Ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

آزمون (۳)

تعداد سؤالات : ۴۰ | **مدت زمان پاسخگویی:** ۱۳۰ دقیقه | **سطح آزمون :** A

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

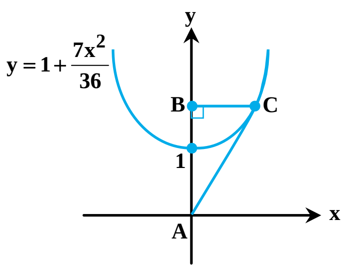
۱) اگر به ازای تمامی مقادیر x، $f'(x)$ وجود داشته و مخالف صفر باشد، آن‌گاه قطعاً $f(۰)$ مخالف با $f(۱)$ است.

۲) تابعی مانند f وجود دارد به طوری که به ازای تمام مقادیر x، $f(x) < ۰$، $f'(x) < ۰$ و $f''(x) > ۰$ است.

۳) تابعی مانند f وجود دارد به طوری که به ازای تمام مقادیر x، $f'(x) > ۱$، $f(۳) = ۰$ و $f(۱) = -۲$ است.

۴) اگر به ازای $۰ < x < ۱$، همواره $f'(x) = g'(x)$ باشد، آن‌گاه به ازای $۰ < x < ۱$، $f(x) = g(x)$ است.

۲ـ مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ که رأس A در مبدأ مختصات و رأس C بر روی منحنی $y = ۱ + \frac{۷x^۲}{۳۶}$ قرار گرفته، مفروض است. اگر نقطه‌ی B در لحظه‌ی $t = ۰$ از نقطه‌ی $(۰,۲)$ شروع به حرکت کرده و با سرعت ثابت ۲ سانتی‌متر بر ثانیه در امتداد محور yها بالا برود. سرعت افزایش مساحت مثلث در لحظه‌ای $t = \frac{۷}{۲}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱۰۸}{۷}$

۲) $\frac{۶۹}{۷}$

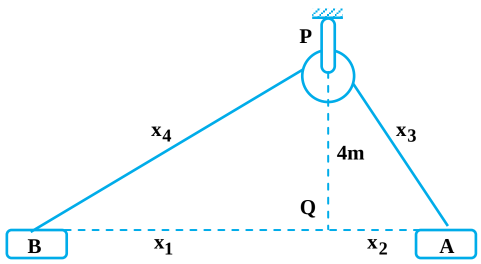
۳) $\frac{۴۹}{۲}$

۴) $\frac{۶۶}{۷}$

۳ـ اگر $x = e^{-t}$ و $y = t^۳$، آن‌گاه حاصل y'''_{xxx} کدام است؟

۱) $-۶e^{۳t}(t^۲ + ۳t + ۱)$ ۲) $۶e^{۳t}(t^۲ + ۳t + ۱)$ ۳) $۳te^{۲t}(t + ۲)$ ۴) $-۳te^{۲t}(t + ۲)$

۴ـ دو صندوق A و B بر روی کف افقی یک انبار واقعند. صندوق‌ها در دو سر یک طناب ۱۵ متری که از روی یک قرقره سقفی گذشته و محکم کشیده شده به هم وصل شده‌اند. قرقره P در ارتفاع ۴ متری بالای نقطه Q است، که Q بر روی قطعه خط AB بین A و B است. اگر صندوق A سه متر از Q و در حال کشیده شدن و دور شدن از Q با سرعت $\frac{۱}{۲}$ متر بر ثانیه باشد، آن‌گاه با چه سرعتی صندوق B در حال حرکت به سوی Q است؟



۱) $\frac{۲}{۳\sqrt{۱۵}}$

۲) $\frac{۱۵}{۲\sqrt{۱۰۵}}$

۳) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲۱}}$

۴) $\frac{۱۴}{۳\sqrt{۳۵}}$

۵ـ برای تابع $f(x) = \frac{۱ + x + x^۲}{۱ - x + x^۲}$، مقدار $f^{(۴)}(۰)$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸- ۴) ۲۴-

۶ـ کره‌ای به شعاع ۱ و هرمی با قاعده‌ی مربع و وجوه جانبی مثلث با این ویژگی که قاعده و وجوه هرم بر کره مماس هستند، داریم (کره محاط در هرم است). اگر بخواهیم حجم هرم مینیمم باشد، ارتفاع آن باید چقدر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۲۷ـ یک قطعه سیم به طول L را بریده و آن را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یکی را به شکل مربع و دیگری را به شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. برای این که مجموع مساحت‌ها مینیمم شود، نسبت «ضلع مربع» به «ضلع مثلث» باید کدام گزینه باشد؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۸ـ اگر $f(x)$ تابعی حقیقی باشد که روی بازه $[۰,\infty)$ تعریف شده است و از مبدأ عبور کند، در صورتی که $f''(x) > ۰$ و $h(x) = \frac{f(x)}{x}$، آن‌گاه در مورد تابع h کدام گزینه صحیح است؟

۱) در فاصله‌ی $(۰,\infty)$ صعودی است.
۲) h در فاصله‌ی $[۰,۱]$ نزولی است.
۳) در فاصله‌ی $(۰,۱)$ صعودی و در فاصله $[۱,+\infty)$ نزولی است.
۴) h در فاصله $[۰,۱)$ نزولی و در فاصله‌ی $[۱,\infty)$ صعودی است.

۲۹ـ کمترین فاصله‌ی نقاط منحنی $۲x^۴ + ۶x^۲y^۲ + y^۴ = ۱$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$ ۳) $\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $\sqrt[۴]{\frac{۳}{۷}}$

۳۰ـ مماس‌هایی از بیضی $\frac{۱}{۲۰}x^۲ + \frac{۱}{۲۴}y^۲ = ۱$ که با خط $۶x - ۳y + ۱۱ = ۰$ موازی هستند. چه فاصله‌ای از هم دارند؟

۱) $\frac{۲۴}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲\sqrt{۵}}$

۳۱ـ ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x) = \begin{cases} x^۲ - Lnx^۲ & ; \ x \neq ۰ \\ ۰ & ; \ x = ۰ \end{cases}$ تعریف شده است، در مورد این تابع کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) تابع f تنها دو نقطه مینیمم نسبی دارد.
۲) تابع f دارای نقطه‌ی عطف است.
۳) معادله‌ی $f(x) = \frac{\pi}{۳}$ دو ریشه حقیقی دارد.
۴) معادله‌ی $f(x) = x$ دارای سه ریشه حقیقی است.

۳۲ـ تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ فقط دارای سه نقطه‌ی اکسترمم نسبی در $x = ۰$ و $x = \pm ۱$ است. کدام گزینه در مورد وضعیت نمودار $g(x) = f(x^۳) - f(-x^۳)$ در $x = \pm ۱$ صحیح است؟

۱) $g(x)$ در این دو نقطه دارای ماکزیمم نسبی است.
۲) $g(x)$ در این دو نقطه دارای مینیمم نسبی است.
۳) $g(x)$ در این نقاط دارای یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی است.
۴) $g(x)$ در این نقاط دارای اکسترمم است اما نوع آن را نمی‌توان مشخص کرد.

۳۳ـ مقدار c چقدر باشد تا ماکزیمم تابع $f(x) = |x^۲ + c|$ بر بازه‌ی $[-۱,۱]$ به کمترین مقدار ممکن برسد؟ $(-۱ \leq c \leq ۱)$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) -۱

۳۴ـ اگر $A = \lim\limits_{x \to ۰^+} \sin\left(\sqrt{\frac{x+۱}{x}}\right) - \sin\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$ و $B = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin\sqrt{x^۷ + ۲} - \sin\sqrt{x^۷ + ۱}$، آن‌گاه مقدار $A - B$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۰

۳۵ـ کدام‌یک از جمله‌های زیر نادرست است؟ ($\lfloor \ \rfloor$ نماد جزء صحیح است)

۱) تابع $f(x) = x^{۱۰۱} + x^{۵۱} + x + ۱$، نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.
۲) مجموعه اعداد صحیح برای تابع $y = \sqrt{\lfloor \lfloor x \rfloor - x \rfloor + ۲}$، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.
۳) تابع $y = \max\{x^۳, x^۲\}$، دارای یک نقطه بحرانی است.
۴) تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۲}{۲} + \cos x - ۱$، در $x = ۰$ اکسترمم ندارد.

۳۶ـ اگر α و β طوری تعیین شوند که نقطه $A(۲,۲/۵)$ یک نقطه عطف منحنی $x^۲y + \alpha x + \beta y = ۰$ باشد، آن‌گاه این منحنی غیر از نقطه A، چند نقطه‌ی عطف دیگر خواهد داشت؟ $(\alpha \neq ۰)$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷ـ کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) منحنی $y = \frac{۱+x}{۱+x^۲}$ سه نقطه عطف دارد که روی یک خط راست قرار دارند.
۲) اگر به ازای هر x که در دامنه‌ی $f(x)$ قرار دارد، $f'(x) = ۰$، آن‌گاه تابع f تابعی ثابت است.
۳) تابع $g(x) = x|x|$ در مبدأ مختصات نقطه عطف دارد اما $g''(۰)$ وجود ندارد.
۴) اگر f' در همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان گفت $f'(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.